МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Приймальна комісія

ЗАТВЕРДЖУЮ

Голова приймальної комісії
ДВНЗ «УжНУ», ректор

_____ проф. Володимир СМОЛАНКА

_____ 2022 р.

ПРОГРАМА

вступного іспиту із спеціальності та презентації дослідницьких пропозицій чи досягнень

для вступників на навчання для здобуття ОС доктор філософії
за спеціальністю 111 - математика
(код, назва)
(на основі здобутого освітнього ступеня “магістр”, освітньо-кваліфікаційного рівня “спеціаліст”)

РОЗРОБЛЕНО
Предметною комісією
з спеціальності 111 - математика

Голова комісії _____ Василь МАРИНЕЦЬ

Ужгород – 2022

Розділ І. Алгебра

Групи, підгрупи. Їх елементарні властивості. Підгрупи, породжені підмножинами. Циклічні групи. Суміжні класи групи за підгрупою. Теорема Лагранжа. Нормальні підгрупи. Факторгрупи. Класи спряжених елементів. Централізатори і нормалізатори підгруп. Центр групи. Центр скінченної *p*-групи. Комутант. Факторгрупа по комутанту.

Гомоморфізми груп. Основна теорема про гомоморфізми груп. Теорема про відповідність між підгрупами при гомоморфізмі. Зовнішній прямий добуток груп. Внутрішній прямий добуток груп. Нормальні і субнормальні ряди. Теорема Жордана- Гельдера. Абелеві групи із скінченним числом твірних. Теорема Силова. Описання груп малих порядків. Розв'язні і нільпотентні групи, їх елементарні властивості.

Означення кільця, тіла і поля. Приклади. Ідеали кілець, їх елементарні властивості. Факторкільця. Гомоморфізми кілець. Основна теорема про гомоморфізми кілець. Кільця головних ідеалів. Евклідові кільця. Факторіальні кільця. Кільце класів лишків за модулем *m.*

Характеристика поля. Алгебраїчні та скінченні розширення полів. Прості розширення полів. Нормальні розширення полів. Група Галуа. Основна теорема теорії Галуа.

Модулі над кільцями та їх елементарні властивості. Цілі алгебраїчні числа. Нормовані поля. Повні нормовані поля. Цілі елементи в нормованих полях.

Нетерові і артинові кільця. Їх елементарні властивості. Радикали нетерових і артинових кілець.

Незвідні і цілком звідні модулі над кільцями. Лема Шура Напівпрості артинові кільця, їх будова.

Алгебра над полем. Будова скінчено вимірних напівпростих алгебр. Цілком звідні скінченовимірні алгебри.

Матричні зображення груп над полями. Основні означення. Теорема Машке. Зображення груп лінійними операторами. Характери зображень скінченних груп та їх елементарні властивості. Лінійні характери.

Література до розділу І

1. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. – М., 1969. – 668 с.
2. Фейт У. Теория представлений конечных групп. – М., 1990. – 464 с.
3. Дрозд Ю.А., Кириченко В. В. Конечномерные алгебры. – М., 1980. – 192 с.
4. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. – М., 1982. - 288 с.
5. Курош А.Г. Теория групп. – М., 1967. – 648 с.
6. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М., 1977. – 497 с.

Розділ ІІ. Диференціальні рівняння та математична фізика

Звичайні диференціальні рівняння та відокремлення змінних. Однорідні диференціальні рівняння і ті, що зводяться до однорідних. Лінійні звичайні диференціальні рівняння 1-го порядку. Рівняння Бернуллі. Рівняння, ліва частина якого є повний диференціал. Інтегрувальний множник. Звичайні диференціальні рівняння, які не розв'язані відносно похідної.

Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь і систем. Рівняння, що інтегруються в квадратурах і допускають пониження порядку.

Загальна теорія лінійних звичайних диференціальних рівнянь п-го порядку. Загальні властивості лінійних рівнянь. Необхідна умова залежності функцій. Необхідна і достатня умова лінійної незалежності частинних розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь. Формула Остроградського-Ліувілля.

Лінійні рівняння з постійними коефіцієнтами. Лінійні неоднорідні рівняння з постійними коефіцієнтами.

Лінійні рівняння зі змінними коефіцієнтами, що зводяться до лінійних рівняння з сталими коефіцієнтами. Рівняння Ейлера. Рівняння Чебишева. Деякі властивості лінійних рівнянь другого порядку.

Знаходження розв'язку рівняння за допомогою степеневих рядів.

Властивості системи диференціальних рівнянь нормальної форми. Формула Ліувілля-Остроградського-Якобі.

Метод Ейлера побудови фундаментальної системи розв'язку лінійної однорідної системи нормальної форми з сталими коефіцієнтами.

Поняття про стійкість в розумінні Ляпунова.

Інтеграл систем нормальної форми.

Системи диференціальних рівнянь в симетричній формі.

Малі коливання механічних систем. Автономні системи. Властивості розв'язків. Особливі точки лінійної автономної системи двох рівнянь. Поняття граничного циклу.

Диференційовність розв'язків за початковими даними і параметру.

Лінійні рівняння з частинними похідними 1-го порядку.

Основні означення теорії рівнянь математичної фізики. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними. Канонічний вигляд рівнянь Лінійні рівняння з постійними коефіцієнтами. Постановка крайових задач математичної фізики. Класифікація рівнянь 2-го порядку з багатьма незалежними змінними.

Задачі, що приводять до рівнянь гіперболічного типу. Метод характеристик (формула Д'Аламбера). Задача Коші для необмеженої струни. Мішана задача для рівняння коливання струни. Метод Фур'є для вільних коливань струни. Метод Фур'є для вимушених коливань струни. Загальна мішана задача. Задача з стаціонарними неоднорідностями. Загальна схема методу Фур'є. Загальні властивості власних функцій і власних значень. Функція Гріна та її властивості.

Задачі, що приводять до рівнянь еліптичного типу. Постановка крайових задач для рівнянь еліптичного типу. Властивості гармонічних функцій. Формули

Гріна. Теорема мінімакса. Основна інтегральна формула теорії гармонічних функцій. Задача Діріхле для круга. Інтеграл Пуассона. Постановка зовнішніх крайових задач. Потенціал простого шару, потенціал подвійного шару, поверхня Ляпунова (означення). Зведення задачі Діріхле до інтегральних рівнянь. Зведення задачі Неймана до інтегральних рівнянь.

Постановка основних крайових задач для рівнянь параболічного типу. Метод Фур'є для мішаної задачі у випадку рівняння теплопровідності. Задача Коші для нескінченого стержня.

Означення метричних і нормованих просторів. Повнота просторів. Принцип стислих відображень. Означення евклідового простору. Означення банахового і гільбертового просторів. Обмежені лінійні оператори. Лінійні функціонали.

Лінійні однорідні крайові задачі. Умова існування ненульових розв'язків. Лінійні неоднорідні крайові задачі. Умова розв'язності. Зведення крайових задач до задач Коші. Метод прогонки. Самоспряжені крайові задачі. Необхідна та достатня умови самоспряженості диференціального оператора. Обернений оператор та його властивості. Спектральна теорія крайових задач. Умова дійсності власних значень. Узагальнена ортогональність власних функцій. Функція Гріна диференціального оператора та її побудова. Обернення диференціального оператора за допомогою функції Гріна.

Література до розділу II

1. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння: Підручник. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.
2. Хартман.Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
3. Ляшко І.І., Боярчук О.К. та ін. Диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1981. – 504 с.
4. Маринець В.В., Рего В.Л., Маринець К.В. Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь: навч. посіб. – Ужгород: Вид-тво УжНУ «Говерла», 2013. – 196 с.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 724 с.
6. Колмогоров, Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа – М.: Наука, 1968. – 496 с.
7. Перестюк М.О. Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. Підручник. – К.: Либідь, 2006. – 424 с.
8. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
9. Collatz L. Funkzionalanalysis und numerische mathematik. – Berlin-Gottingen-Heidelberg. – 1964. – 447 p.
10. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений Т.II. – М.: Физматгиз, 1962. – 640 с.
11. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 504 с.
12. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. – М.:

Мир, 1982. – 296 с.
13. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутницкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
14. Найфэ А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 536 с.

Розділ ІІІ. Теорія ймовірностей та математичний аналіз

Множини та операції над ними. Відображення множин, їх властивості. Зліченні та незліченні множини. Потужність множини. Теорема про потужність системи підмножин деякої множини. Теорема Кантора-Бернштейна. Розбиття на класи. Відношення еквівалентності. Системи множин. Міра елементарних плоских множин, її властивості. Міра Лебега плоских множин. Зліченна адитивність та неперервність міри. Продовження міри за Жорданом. Вимірні функції (теорема про вимірність суперпозиції та критерій вимірності). Дії над вимірними функціями. Теорема про границю послідовності вимірних функцій. Еквівалентність вимірних функцій. Збіжність майже скрізь. Збіжність за мірою та її зв'язок з збіжністю майже скрізь. Інтеграл Лебега від простих функцій, властивості. Загальне визначення інтегралу Лебега на множині скінченної міри. σ-адитивність інтегралу Лебега. Абсолютна неперервність інтегралу Лебега. Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега (теорема Лебега). Порівняння інтегралу Лебега з інтегралом Рімана.

Стохастичний експеримент, випадкові події, простір елементарних подій, алгебра і σ-алгебра подій. Класичне означення ймовірності. Аксіоматичне означення ймовірності (аксіоми Колмогорова), наслідки із аксіом. Теорема про неперервність ймовірності.

Умовні ймовірності, теорема множення. Незалежність подій. Формула повної ймовірності. Формули Байєса. Схема Бернулі. Граничні теореми в схемі Бернуллі: теорема Пуассона, локальна гранична теорема, інтегральна гранична теорема Лапласа. Наслідки.

Функція розподілу випадкової величини, властивості. Дискретні і неперервні випадкові величини. Приклади розподілів випадкових величин: біномний розподіл, розподіл Пуассона, геометричний розподіл, показниковий, рівномірний, нормальний розподіли. Функція розподілу випадкового вектора, незалежні випадкові величини. Розподіл суми випадкових величин, згортка розподілів.

Математичне сподівання випадкової величини, властивості. Дисперсія випадкової величини. Моменти випадкових величин.

Збіжність послідовності випадкових величин за ймовірністю, з ймовірністю 1, в середньому квадратичному, за розподілом. Співвідношення між типами збіжностей. Закон великих чисел, теореми Чебишова, Бернуллі. Посилений закон великих чисел, теорема Бореля.

Характеристичні функції, їх властивості. Граничні теореми для характеристичних функцій. Слаба збіжність розподілів і її еквівалентність збіжності характеристичних функцій. Центральна гранична теорема, умова Ліндерберга її імовірнісний зміст. Теорема Ліндеберга.

Швидкість збіжності в ЦГТ, нерівність Ессеена, застосування псевдомоментів, оцінки Золотарьова.

Ланцюги Маркова, ергодична теорема. Випадкові процеси, скінченновимірні розподіли випадкового процесу, моментні функції. Процеси з незалежними приростами, стаціонарні процеси.

Вибірка, емпірична функція розподілу. Основні вибіркові характеристики. Статистичні оцінки. Незміщеність, конзистентність, ефективність оцінки. Інтервальне оцінювання, довірчі інтервали для ймовірності, для параметрів нормального розподілу. Перевірка статистичних гіпотез: критична область, рівень значущості, потужність критерію, найбільш потужні критерії. Теорема Неймана-Пірсона. Критерій Пірсона для перевірки гіпотез про вигляд розподілу. Вибірковий коефіцієнт кореляції, лінійна регресія.

Найпростіший потік подій, рівняння найпростішого потоку. Обслуговування з очікуванням. Інтенсивність потоку. Процес обслуговування як марківський випадковий процес. Використання процесу загибелі і розмноження в теорії масового обслуговування. Перехідні ймовірності. Рівняння Колмогорова. Характеристики ефективності систем масового обслуговування.

Моделювання випадкових процесів з дискретним спектром. Моделювання випадкових подій (однієї події, повної групи подій, залежних і незалежних подій). Моделювання дискретної випадкової величини. Моделювання неперервної випадкової величини методом Смірнова. Моделювання нормально розподіленої випадкової величини методом Д. Кнута. Теорема Карунена. Застосування до розкладу стаціонарних процесів.

Література до розділу ІІІ

1. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, – 416 с.
2. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986. – 432 с.
3. Боровков А.А. Математическая статистика. – М.: Наука, 1984. – 472 с.
4. Ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика. – М.: Иностр. лит., 1960. – 436 с.
5. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа, 1979. – 320 с.
6. Гнєденко Б.В. Курс теорії імовірностей. – Київ-Львів: Радянська школа, 1949. – 360 с.
7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 400 с.
8. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. – М.: ГИТТЛ, 1949. – 264 с.
9. Золотарев В.М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
10. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1984. – 248 с.
11. Карташов М.В. Конспект лекцій з курсу теорії ймовірностей. – К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2001. – 107 с.

12. Кендал М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. – М.: Наука, 1973. – 817 с.
13. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – К.: Наукова думка, 1978. – 584 с.
14. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
15. Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М.Й. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – К.: Інформтехніка, 1995.
16. Лоэв М. Теория вероятностей. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 720 с.
17. Пархоменко В.М. Методи вибіркових обстежень. – К.: Видав. центр “Київський унт”, 2001. – 148 с.
18. Скороход А.В. Елементи теорії ймовірностей та випадкових процесів. – К.: Вища школа, 1975. – 296 с.
19. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів. – К.: Либідь, 1990. – 168 с.
20. Слюсарчук П.В. Теорія ймовірностей і математична статистика. Текст лекцій. – Ужгород: Вид-во УжДУ, 1984. – 66 с.
21. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 576 с.
22. Шметтерер Л. Введение в математическую статистику. – М.: Наука, 1976. – 520 с.
23. Дороговцев А.Я., Сільвестров Д.С., Скороход А.В., Ядренко М.Й. Теорія ймовірностей. Збірник задач. – К.: Вища школа, 1976. – 384 с.
24. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Изд-во Москов. ун-та, 1963. – 155 с.
25. Бережанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З. Г. Функциональный анализ: Курс лекций. – К.: Вища школа, 1990. – 600 с.
26. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа: Учебник для вузов. 6-е изд. – М.: Наука, 1989. – 624 с.