

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»  
УКРАЇНСЬКО-УГОРСЬКИЙ НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ  
КАФЕДРА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

ГЕТЕ АДАМ ІВАНОВИЧ

**МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ МНОГОЧЛЕНІВ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ  
ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ У КУРСІ АЛГЕБРИ  
СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ**

Спеціальність А4 Середня освіта

Предметна спеціальність А4.04 Математика

Освітня програма «Математика. Інформатика (мова навчання  
фахових дисциплін – угорська)»

Кваліфікаційна робота  
на здобуття освітнього ступеня бакалавра

Науковий керівник:

**Мікла Віктор Іванович**

д-р фіз.-мат. наук, проф.

Ужгород – 2025

Реєстрація 41

(номер)

«03» 06 2025 р. [підпис] Думнич Жужанна Дюлівна  
(підпис)

провідний фахівець кафедри фізико-математичних дисциплін

**Кваліфікаційна робота допущена до захисту**

Завідувач кафедри фізико-математичних дисциплін

[підпис]  
(підпис)

Шафраньош Мирослав Іванович

Доктор фізико-математичних наук, професор

«05» 06 2025 р.

Рецензент [підпис]  
(підпис)

Герич Мирослава Сергіївна

кандидат фізико-математичних наук, доцент

## АНОТАЦІЯ

Кваліфікаційна робота на тему: «Методика вивчення многочленів та їх застосування при розв'язуванні задач у курсі алгебри середньої школи» студента Гете Адама Івановича містить 60 сторінок, 3 рисунки, 3 таблиці та 24 джерела за списком використаної літератури.

В кваліфікаційній роботі досліджено методичні особливості вивчення многочленів у курсі алгебри 7 класу шляхом аналізу помилок, які найчастіше допускають учні при вивченні многочленів та основних дій над ними, та розглянуто основні типи задач курсу алгебри середньої школи, при розв'язуванні яких використовуються многочлени. Розроблено конспект уроку на тему «Множення многочлена на многочлен» з елементами прикладного застосування многочленів, який буде корисним для вчителів математики.

Ключові слова: многочлен, основні дії над многочленами, розкладання многочленів на множники, застосування многочленів.

## ABSTRACT

The qualification paper on the topic: "The method of studying polynomials and their application in solving problems in the secondary school algebra course" of student Hete Adam contains 60 pages, 3 images, 3 tables and 24 sources in of literature.

In the thesis methodological features of studying polynomials in the 7th grade algebra course by analyzing the mistakes that students most often make when studying polynomials and basic operations on them, and the main types of problems of the secondary school algebra course, the solution of which uses polynomials, are considered. A synopsis of the lesson on the topic "Multiplication of a polynomial by a polynomial" with elements of the applied application of polynomials, which will be useful for mathematics teachers, has been developed.

Keywords: polynomial, basic operations on polynomials, factoring polynomials, application of polynomials.

## ЗМІСТ

Вступ.....	4
1. Загальні відомості з теорії многочленів від однієї змінної.....	7
1.1. Поняття многочлена від однієї змінної.....	7
1.2. Операції над многочленами .....	9
1.3. Подільність многочленів. Теорема Безу .....	11
2. Аналіз шкільних підручників курсу алгебри 7 класу.....	16
3. Методичні особливості вивчення многочленів у курсі алгебри 7 класу.....	20
3.1. Введення основних поняття під час вивчення многочленів.....	20
3.2. Вивчення основних дій над многочленами .....	23
3.3. Розкладання многочленів на множники .....	26
4. Конспект уроку на тему «Множення многочлена на многочлен».....	30
5. Застосування многочленів при розв'язуванні задач у курсі алгебри середньої школи .....	38
6. Вивчення многочленів в поглибленому курсі математики середньої школи.....	48
Висновки .....	57
Список використаних джерел .....	58

## Вступ

Многочлени є одним з основних понять таких розділів математики як алгебра та математичний аналіз. В алгебрі многочлени використовуються для знаходження коренів алгебраїчних рівнянь, тобто рівнянь вигляду  $P_n(x) = 0$ , де  $P_n(x)$  – многочлен  $n$ -го степеня від невідомої  $x$ . В математичному аналізі неперервні на деякому відрізку  $[a; b]$  функції наближаються многочленами, що дозволяє досліджувати поведінку цих функцій в околі фіксованої точки  $x_0 \in [a; b]$ . Елементи теорії многочленів можна зустріти в таких розділах математики як методи наближених обчислень, теорія ймовірностей тощо.

Крім математики, многочлени мають широке застосування й в інших науках, оскільки дозволяють досить легко описувати складні співвідношення між невідомими величинами. Наприклад, у фізиці траєкторія польоту деякого снаряду описується за допомогою алгебраїчного рівняння, розв'язання якого дає значення максимальної висоти та діапазон польоту снаряду. В економіці взаємозв'язок між ціною продукту та необхідною кількістю цього продукту також описується за допомогою алгебраїчного рівняння, розв'язання якого дозволяє знайти оптимальну ціну для отримання максимального прибутку. Многочлени застосовуються в таких розділах інформатики як криптографія (при шифруванні вхідні данні представляються у вигляді многочленів) та теорія кодування. В мистецтві многочлени використовуються для створення складних дизайнів та різного роду анімації, для чого створені спеціалізовані комп'ютерні програми.

Що стосується шкільної математики, то поняття многочлена вводиться в курсі алгебри 7 класу після вивчення цілих алгебраїчних виразів [1, 2]. При цьому розглядаються такі дії над многочленами як додавання (віднімання) многочленів, множення одночлена на многочлен, множення многочлена на многочлен, а також основні способи розкладання многочленів на множники. В курсі алгебри 7 та 8 класів многочлени в основному використовуються для тотожних перетворень виразів та розв'язування раціональних рівнянь.

Відмітимо, що при поглибленому вивченні математики в курсі алгебри 8 класу [3] вводиться дія ділення многочленів з однією змінною та поняття кореня многочлена, а також розглядається теорема Безу та три наслідки з неї. Крім того, вводиться поняття цілого раціонального рівняння та розглядається спосіб розв'язування цілих раціональних рівнянь з цілими коефіцієнтами.

На мою думку, вивчення многочленів в курсі алгебри середньої школи лежить в основі розв'язування раціональних рівнянь, тому має здійснюватися на високому навчальному та навчально-методичному рівні, що й зумовило вибір теми кваліфікаційної роботи: «Методика вивчення многочленів та їх застосування при розв'язуванні задач у курсі алгебри середньої школи».

**Мета і завдання дослідження.** Метою кваліфікаційної роботи є дослідити особливості вивчення многочленів та дій над многочленами у курсі алгебри 7 класу, а також многочленів з однією змінною у поглибленому курсі алгебри 8 класу, та розглянути основні типи задач курсу алгебри середньої школи, при розв'язуванні яких використовуються многочлени. Для досягнення мети було поставлено такі *завдання*:

- здійснити аналіз навчальної та навчально-методичної літератури по темі кваліфікаційної роботи;
- розглянути загальні відомості з теорії многочленів від однієї змінної на високому теоретичному рівні;
- здійснити аналіз шкільних підручників курсу алгебри 7 класу щодо вивчення многочленів;
- дослідити методичні особливості вивчення многочленів в курсі алгебри 7 класу шляхом аналізу помилок, які допускають учні при вивченні многочленів, та описати способи попередження цих помилок;
- розробити конспект уроку на тему «Множення многочлена на многочлен» з елементами прикладного застосування многочленів;
- розглянути застосування многочленів при розв'язуванні задач в курсі алгебри 7 та 8 класів;

– проаналізувати етапи вивчення многочленів в поглибленому курсі алгебри 8 класу.

**Об'єктом дослідження** кваліфікаційної роботи є шкільний курс алгебри, а **предметом дослідження** – многочлени та їх застосування при розв'язуванні задач в шкільному курсі алгебри середньої школи.

**Методи дослідження.** Для досягнення мети кваліфікаційної роботи було використано такі методи: аналіз навчальної та навчально-методичної літератури для дослідження методичних особливостей вивчення многочленів у курсі алгебри 7 класу та в поглибленому курсі алгебри 8 класу; синтез та узагальнення типів задач в курсі алгебри 7 та 8 класів, для розв'язування яких використовуються многочлени.

**Структура роботи.** Кваліфікаційна робота складається зі вступу, шести розділів, висновків та списку використаної літератури.

## 1. Загальні відомості з теорії многочленів від однієї змінної

В першому розділі кваліфікаційної роботи розглянемо основні відомості з алгебраїчної теорії многочленів від однієї змінної, що допоможе краще зрозуміти особливості вивчення многочленів в курсі алгебри середньої школи, в тому числі й у класах з поглибленим вивченням математики.

### 1.1. Поняття многочлена від однієї змінної

**Означення 1.1 [4, 5].** Нехай  $n$  – деяке натуральне число. *Многочленом від однієї змінної  $x$*  називають алгебраїчний вираз вигляду

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (1.1)$$

де  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  – деякі дійсні числа, причому  $a_n \neq 0$ , які називаються *коефіцієнтами многочлена  $f(x)$*  при відповідних степенях змінної  $x$ .

Наприклад, алгебраїчний вираз вигляду  $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 12$  є многочленом з коефіцієнтами 2, -5, 1, 0, -12.

Якщо всі коефіцієнти деякого многочлена дорівнюють нулю, то такий многочлен називають *нульовим многочленом*.

Число  $n$  називають *степенем многочлена  $f(x)$*  і позначають  $\deg f(x)$ , причому коефіцієнт  $a_n$  називають *старшим коефіцієнтом* многочлена  $f(x)$ . Многочлен зі старшим коефіцієнтом рівним одиниці називається *зведеним многочленом*.

Наприклад, степінь многочлен  $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 12$  дорівнює чотирьом, тобто  $\deg f(x) = 4$ , а його старший коефіцієнт дорівнює 2.

Многочлени нульового степеня – це відмінні від нуля дійсні числа.

Многочлени першого степеня вигляду  $f_1(x) = ax + b$ , де  $a, b$  – дійсні числа,  $a \neq 0$ , називаються *лінійними двочленами*, а многочлени другого степеня вигляду  $f_2(x) = ax^2 + bx + c$ , де  $a, b, c$  – деякі дійсні числа,  $a \neq 0$ , називаються *квадратними трічленами*.

Відмітимо, що вирази  $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x, a_0$  називають **членами** многочлена  $f(x)$ , причому  $a_0$  називають **вільним членом** многочлена  $f(x)$ .

**Означення 1.2 [4].** Многочлени  $f(x)$  і  $g(x)$  вважаються **рівними**, якщо  $\deg f(x) = \deg g(x)$  та рівні коефіцієнти при однакових степенях змінної  $x$ . Позначають так  $f(x) = g(x)$ .

Наприклад, два многочлени  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$  і  $g(x) = x^3 - 2x^2 + 1$  не рівні, оскільки не рівні коефіцієнти при  $x^2$ . Це записують так  $f(x) \neq g(x)$ . Многочлени  $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 3x + 5$  і  $g(x) = 2x^3 + 7x^2 + bx + 5$  рівні тоді й тільки тоді, коли  $a = 7$  і  $b = -3$ .

**Приклад 1.1.** При яких значеннях параметрів  $a, b$  і  $c$  рівні многочлени  $f(x) = ax^4 + bx^3 - 4x^2 + 7$  і  $g(x) = 2x^3 + (c - 3)x^2 + 7$ ?

**Розв'язання.** Згідно Означення 1.2 задані многочлени  $f(x)$  і  $g(x)$  рівні, якщо виконуються рівності:  $a = 0, b = 2, -4 = c - 3, 7 = 7$ , звідки маємо, що  $a = 0, b = 2, c = -1$ .

**Означення 1.3 [5].** Нехай дано многочлен  $f(x)$  вигляду (1.1) та дійсне число  $c$ . **Значенням** многочлена  $f(x)$  при  $x = c$  називається дійсне число

$$f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0.$$

Якщо при цьому  $f(c) = 0$ , то число  $c$  називається **коренем** многочлена  $f(x)$ .

Наприклад, для многочлена  $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + x + 8$  маємо, що

$$f(2) = 5 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 + 8 = 42,$$

$$f(-1) = 5 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + (-1) + 8 = 0,$$

тобто число  $-1$  є коренем заданого многочлена  $f(x)$ .

**Приклад 1.2.** Знайдіть многочлен  $f(x) = ax^3 + 4x^2 - bx - 3$ , якщо число  $3$  є коренем цього многочлена, а його значення при  $x = -1$  дорівнює  $4$ .

**Розв'язання.** Оскільки число  $3$  є коренем многочлена  $f(x)$ , то

$$f(3) = a \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 - b \cdot 3 - 3 = 27a - 3b + 33 = 0,$$

а значення многочлена  $f(x)$  при  $x = -1$  дорівнює  $-4$ , то

$$f(-1) = a \cdot (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 - b \cdot (-1) - 3 = -a + b + 1 = 4.$$

Отже, маємо систему двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 27a - 3b = -33, \\ -a + b = 3, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 9a - b = -11, \\ -a + b = 3. \end{cases}$$

Розв'язавши останню систему рівнянь отримуємо, що  $a = -1$ ,  $b = 2$ .

Таким чином, шуканий многочлен  $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 2x - 3$ .

Відмітимо, що однією з основних задач алгебри є задача знаходження коренів многочлена  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ . При цьому ця задача еквівалентна задачі розв'язання рівняння

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Вміння знаходити корені многочлена дозволяє легко розв'язувати відповідні рівняння.

## 1.2. Операції над многочленами

До основних операцій над многочленами від однієї змінної відносять операції додавання, віднімання та множення многочленів.

Нехай задано два многочлени

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \\ g(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

**Означення 1.4 [4].** Сумою двох многочленів  $f(x)$  і  $g(x)$  називають многочлен вигляду

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \\ &= (a_p + b_p)x^p + (a_{p-1} + b_{p-1})x^{p-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0), \end{aligned}$$

де  $p = \max(n, m)$ , причому  $a_k = 0$  при  $k > n$  і  $b_k = 0$  при  $k > m$ .

Наприклад, якщо задано два многочлени

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x + 4 \quad \text{і} \quad g(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 1,$$

то

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (3x^4 - 2x^3 + x + 4) + (x^3 - 5x^2 + 2x - 1) = \\ &= (3 + 0)x^4 + (-2 + 1)x^3 + (0 + 2)x^2 + (1 + 2)x + (4 - 1) = \\ &= 3x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x + 3. \end{aligned}$$

З Означення 1.4 випливає, що степінь суми многочленів  $f(x)$  і  $g(x)$  не більший за максимальний з степенів цих многочленів, тобто

$$\deg(f(x) + g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}.$$

**Означення 1.5 [4].** Добутком двох многочленів  $f(x)$  і  $g(x)$  називають многочлен вигляду

$$f(x)g(x) = c_q x^q + c_{q-1} x^{q-1} + \dots + c_1 x + c_0,$$

де  $q = n + m$ , а

$$c_k = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \dots + a_1 b_{k-1} + a_0 b_k;$$

при цьому враховуємо, що  $a_l = 0$  при  $l > n$  і  $b_l = 0$  при  $l > m$ .

Наприклад, якщо задано два многочлени

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x - 4 \quad \text{і} \quad g(x) = 3x^2 - 2x + 1,$$

то

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (2x^4 - x^3 + 2x - 4)(3x^2 - 2x + 1) = \\ &= 6x^6 - 7x^5 + 4x^4 + 5x^3 - 16x^2 + 10x - 4, \end{aligned}$$

причому коефіцієнт при  $x^4$  отримується в результаті наступного обчислення:

$$2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + (-4) \cdot 0 = 4.$$

З Означення 1.5 випливає, що степінь добутку многочленів  $f(x)$  і  $g(x)$  дорівнює сумі степенів цих многочленів, тобто

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x).$$

**Зауваження 1.1.** Обчислювати суму чи добуток заданих многочленів набагато зручніше виконуючи звичайні правила розкриття дужок та зведення подібних доданків.

**Приклад 1.3.** Нехай задано два многочлени  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 1$  і  $g(x) = 2x^2 + 3x - 7$ . Знайдіть  $f(x)g(x) + f(x)$  найбільш зручним способом.

**Розв'язання.** Виконуємо спочатку множення многочленів  $f(x)$  і  $g(x)$ :

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (x^3 - 2x^2 + 4x + 1)(2x^2 + 3x - 7) = \\ &= 2x^5 + 3x^4 - 7x^3 - 4x^4 - 6x^3 + 14x^2 + 8x^3 + 12x^2 - 28x + \\ &\quad + 2x^2 + 3x - 7 = 2x^5 - x^4 - 5x^3 + 28x^2 - 25x - 7, \end{aligned}$$

а потім додавання многочленів  $f(x)g(x)$  і  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} & f(x)g(x) + f(x) = \\ & = (2x^5 - x^4 - 5x^3 + 28x^2 - 25x - 7) + (x^3 - 2x^2 + 4x + 1) = \\ & = 2x^5 - x^4 - 4x^3 + 28x^2 - 21x - 6. \end{aligned}$$

Наведені операції додавання та множення многочленів задовольняють наступним властивостям:

– комутативна властивість операції додавання многочленів

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x);$$

– асоціативна властивість операції додавання многочленів

$$(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x));$$

– комутативна властивість операції множення многочленів

$$f(x)g(x) = g(x)f(x);$$

– асоціативна властивість операції множення многочленів

$$(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x));$$

– дистрибутивна властивість операції множення многочленів відносно операції додавання многочленів

$$(f(x) + g(x))h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x).$$

**Зауваження 1.2.** Різниця многочленів  $f(x)$  і  $g(x)$  обчислюється згідно формули

$$\begin{aligned} & f(x) - g(x) = \\ & = (a_p - b_p)x^p + (a_{p-1} - b_{p-1})x^{p-1} + \dots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0), \end{aligned}$$

де  $p = \max(n, m)$ , причому  $a_k = 0$  при  $k > n$  і  $b_k = 0$  при  $k > m$ .

### 1.3. Подільність многочленів. Теорема Безу

Кажуть, що *многочлен  $f(x)$  ділиться на многочлен  $g(x) \neq 0$*  [5], якщо існує многочлен  $q(x)$  такий, що виконується рівність  $f(x) = q(x)g(x)$ . Многочлен  $g(x)$  називають *дільником многочлена  $f(x)$* , а многочлен  $q(x)$  – *часткою* при діленні многочлена  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$ .

Наприклад, наступний многочлен  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 1$  ділиться на многочлен  $g(x) = 2x^2 - x + 1$ , оскільки існує многочлен  $q(x) = x + 2$  такий, що виконується рівність  $f(x) = (x + 2)g(x)$ .

Слід відмітити, що виконати операцію ділення многочленів не завжди можна. Наприклад, многочлен  $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$  не ділиться на многочлен  $g(x) = x^3 - 1$ . Справді, якщо многочлен  $f(x)$  ділиться на многочлен  $g(x)$ , то існує такий многочлен  $q(x)$ , що виконується рівність  $f(x) = q(x)g(x)$ . Тоді  $\deg f(x) = \deg q(x) + \deg g(x)$ , тобто  $2 = \deg q(x) + 3$ , звідки маємо, що  $\deg q(x) = -1$ . Остання рівність невірна, оскільки  $\deg q(x) \geq 0$ .

Дальше кажуть, що **многочлен  $f(x)$  ділиться на многочлен  $g(x) \neq 0$  з остачею** [5], якщо існують два многочлени  $q(x)$  і  $r(x)$  такі, що виконується рівність

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \quad (1.2)$$

при цьому або  $\deg r(x) < \deg g(x)$ , або  $r(x) = 0$ .

Многочлен  $q(x)$  називають **неповною часткою**, а многочлен  $r(x)$  – **остачею** при діленні многочлена  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$ .

Наприклад, для двох заданих многочленів  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 8x + 3$  і  $g(x) = 2x^2 - x + 1$  виконується рівність

$$f(x) = (x - 4)g(x) + 3x + 7.$$

Оскільки  $\deg(3x + 7) < \deg g(x)$ , то ця рівність означає, що многочлен  $f(x)$  ділиться на многочлен  $g(x)$  з остачею  $r(x) = 3x + 7$ , при цьому неповна частка  $q(x) = x - 4$ .

Слід відмітити, що виконати операцію ділення многочленів з остачею завжди можна. Тобто для будь-яких многочленів  $f(x)$  і  $g(x) \neq 0$  існують два многочлени  $q(x)$  і  $r(x)$  такі, що виконується рівність (1.2). Виникає питання: многочлени  $q(x)$  і  $r(x)$  визначаються однозначно чи ні? Відповідь на це питання дає наступна теорема.

**Теорема 1.1 [5].** *Ділення довільного многочлена  $f(x)$  на многочлен  $g(x) \neq 0$  з остачею завжди можливе і при цьому виконується однозначно.*

Для ділення многочленів з остачею використовують так звану схему ділення «кутиком», яку проілюструємо на конкретному прикладі.

**Приклад 1.4.** Поділити заданий многочлен  $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + x + 6$  на многочлен  $g(x) = x^2 + 2x + 1$  з остачею.

**Розв'язання.** Ділення заданого многочлена  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$  з остачею виконаємо «кутиком»:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 2x^2 + x + 6 & x^2 + 2x + 1 \\ \underline{2x^3 + 4x^2 + 2x} & 2x - 2 \\ -2x^2 - x + 6 & \\ \underline{-2x^2 - 4x - 2} & \\ 3x + 8 & \end{array}$$

Підбираємо старший член частки так, щоб добуток  $q(x)g(x)$  містив старший член  $2x^3$ , тобто старший член частки дорівнює  $2x$ . Від діленого  $f(x)$  віднімаємо добуток  $2x(x^2 + 2x + 1) = 2x^3 + 4x^2 + 2x$  та отримуємо многочлен  $-2x^2 - x + 6$ . Далі цей многочлен ділимо на  $x^2 + 2x + 1$  та знаходимо наступний член частки:  $-2$ . Наступна різниця дорівнює  $3x + 8$ . Оскільки  $\deg(3x + 8) < \deg g(x)$ , то процес ділення заданих многочленів завершуємо.

Отже, отримали неповну частку  $q(x) = 2x - 2$  та остачу  $r(x) = 3x + 8$  при діленні заданого многочлена  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$ , тобто можемо записати

$$f(x) = (2x - 2)g(x) + (3x + 8).$$

**Наслідок 1 [5].** Многочлен  $f(x)$  ділиться на многочлен  $g(x) \neq 0$  тоді й тільки тоді, коли остача при діленні цих многочленів дорівнює нулю.

Таким чином, щоб з'ясувати чи ділиться многочлен  $f(x)$  на многочлен  $g(x) \neq 0$ , потрібно виконати ділення цих многочленів з остачею «кутиком» та перевірити остачу.

**Приклад 1.5.** Чи ділиться заданий многочлен  $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$  на многочлен  $g(x) = x + 1$ ?

**Розв'язання.** Поділимо заданий многочлена  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$  «кутиком»:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - x - 2 & x + 1 \\ x^3 + x^2 & \hline \hline x^2 - x - 2 & \\ x^2 + x & \hline \hline -2x - 2 & \\ -2x - 2 & \hline \hline 0 & \end{array}$$

Підбираємо старший член частки так, щоб добуток  $q(x)g(x)$  містив старший член  $x^3$ , тобто старший член частки дорівнює  $x^2$ . Від діленого  $f(x)$  віднімаємо добуток  $x^2(x + 1) = x^3 + x^2$  та отримуємо многочлен  $x^2 - x - 2$ . Далі цей многочлен ділимо на  $x + 1$  і знаходимо наступний член частки:  $x$ . Наступна різниця дорівнює  $-2x - 2$ . Ділимо її на  $x + 1$  і отримуємо вільний член частки:  $-2$ . Оскільки  $r(x) = 0$ , то процес ділення заданих многочленів завершуємо. Отже, заданий многочлена  $f(x)$  ділиться на многочлен  $g(x)$ .

Розглянемо частинний випадок ділення многочленів, коли дільником є лінійний двочлен. Справедливою є наступна теорема.

**Теорема Безу [4, 5].** *Остача від ділення многочлена  $f(x)$  на лінійний двочлен  $x - c$  дорівнює  $f(c)$ .*

**Доведення.** Нехай  $f(x)$  – деякий многочлен. Поділимо цей многочлен на лінійний двочлен  $x - c$  з остачею, яка є многочленом нульового степеня. Отже, можемо записати, що

$$f(x) = q(x)(x - c) + r.$$

Підставивши в останню рівність  $x = c$  отримуємо, що

$$f(c) = q(c)(c - c) + r,$$

тобто  $r = f(c)$ , що й треба було довести. □

**Приклад 1.6.** Чому дорівнює остача від ділення заданого многочлена  $f(x) = x^{100} + x^{10} + 1$  на лінійний двочлен  $x - 1$ ?

**Розв'язання.** Ділення заданого многочлена  $f(x)$  на лінійний двочлен  $x - 1$  з остачею «кутиком» доволі громіздке. Скориставшись теоремою Безу, легко отримаємо шукану остачу, тобто

$$f(1) = 1^{100} + 1^{10} + 1 = 3.$$

**Наслідок 1 [5].** Число  $c$  є коренем многочлена  $f(x)$  тоді й тільки тоді, коли многочлен  $f(x)$  ділиться на лінійний двочлен  $x - c$ .

**Приклад 1.7.** Знайдіть значення параметра  $a$ , при якому многочлен  $f(x) = 2x^3 + ax - 24$  ділиться на лінійний двочлен  $x - 2$ ?

**Розв'язання.** Згідно Наслідку 1 з теореми Безу, якщо многочлен  $f(x)$  ділиться на лінійний двочлен  $x - 2$ , то число 2 є коренем многочлена, тобто

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 + a \cdot 2 - 24 = 2a - 8 = 0,$$

звідки  $a = 4$ .

**Наслідок 2 [5].** Якщо числа  $c_1, c_2, \dots, c_m$  – різні корені многочлена  $f(x)$ , то цей многочлен можна представити у вигляді

$$f(x) = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_m)s_m(x),$$

де  $s_m(x)$  – деякий многочлен.

**Приклад 1.8.** Доведіть, що многочлен  $f(x) = (x + 1)^6 - x^6 - 2x - 1$  ділиться на многочлен  $g(x) = x(x + 1)(2x + 1)$ .

**Доведення.** Оскільки  $f(0) = f(-1) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ , то згідно Наслідку 2 з теореми Безу многочлен  $f(x)$  ділиться на многочлен  $g(x)$ .

**Наслідок 3 [5].** Число різних коренів деякого ненульового многочлена  $f(x)$  не більше, ніж степінь цього многочлена.

## 2. Аналіз шкільних підручників курсу алгебри 7 класу

Згідно з Державним стандартом базової середньої освіти від 30 вересня 2020 року [6] та Модельними навчальними програмами «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти вивчення многочленів відбувається у 7 класі наступним чином [1, 2]:

- вводиться поняття многочлена та його стандартного вигляду;
- вводяться дії додавання та віднімання многочленів;
- вводиться дія множення одночлена на многочлен;
- вводиться дія множення многочлена на многочлен;
- розглядаються різні способи розкладання многочлена на множники: спосіб винесення спільного множника за дужки, спосіб групування, а також використання формул скороченого множення;
- многочлени застосовуються при розв'язуванні різних задач алгебри: спрощення виразів (в тому числі й обчислення значень алгебраїчних виразів), доведення тотожностей, розв'язування рівнянь тощо.

Проаналізувавши шкільні підручники курсу алгебри 7 класу [7 – 12], можна зробити висновок, що всі вони відповідають модельним навчальним програмам «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти та мають чітку структуру. Розглянемо більш детально деякі з цих підручників.

1. У підручнику таких авторів як Бевз Г. П., Бевз В. Г., Васильєва Д. В., Владімірова Н. Г. [7] многочлени розглядаються в перших двох розділах – Розділ 1. Цілі вирази та Розділ 2. Розкладання многочленів на множники. В першому розділі підручника після введення поняття одночлена вводиться поняття многочлена та вивчаються дії додавання і віднімання многочленів, множення многочлена на одночлен, множення многочленів, а в другому розділі підручника розглянуто три основні способи розкладання многочленів на множники та наведено зручне правило-орієнтир розкладання многочленів на множники за допомогою комбінації різних способів.

Підручник містить досить велику кількість рубрик «Хочеш знати ще більше?», де наведено додаткові відомості, що допоможуть учням в більш повній мірі вивчити многочлени. Наприклад, в одній з таких рубрик зазначено, що в алгебрі вирази слід класифікувати в залежності від їх запису, а не від того, який вигляд вони набудуть після деякого перетворення. Це означає, що вираз  $(x + 2y^2)z$  не є многочленом, хоча якщо перетворити цей вираз таким чином:  $(x + 2y^2)z = xz + 2y^2z$ , то отримуємо двочлен.

Кожен параграф двох згаданих розділів підручника містить вправи двох рівнів складності – Рівень А та Рівень Б. В кінці кожного розділу передбачено рубрику «Завдання для самостійної роботи», яка містить чотири варіанти завдань, та рубрику «Готуємось до тематичного оцінювання» з тестовими завданнями. Крім того, наприкінці кожного розділу можна також знайти рубрику «Типові завдання для контрольної роботи».

2. На відміну від першого підручника, у підручнику автора Істер О. С. [9] многочлени розглядаються в одному розділі – Розділі 2. Цілі вирази. Аналогічно попередньому підручнику після введення поняття одночлена вводиться поняття многочлена та вивчаються такі дії над многочленами як додавання і віднімання многочленів, множення одночлена на многочлен. Тоді розглядається один зі способів розкладання многочленів на множники – винесення спільного множника за дужки. Після цього вивчається ще одна дія – множення многочлена на многочлен, яка не тільки подана за допомогою правила, а додатково зображена схематично. Далі розглядаються інші два способи розкладання многочленів на множники. Відмітимо, що в цьому підручнику, як і в попередньому, наведено правило-орієнтир розкладання многочленів на множники за допомогою комбінації різних способів та розглянуто деякі штучні методи розкладання многочленів на множники.

Кожен параграф розділу містить вправи чотирьох рівнів складності: початкового, середнього, достатнього та високого рівнів, а також вправи підвищеної складності. В підручнику передбачено дві рубрики «Домашня

самостійна робота» з тестовими завданнями та дві рубрики «Завдання для перевірки знань», які стосуються многочленів. Крім того, в кінці Розділу 1 можна знайти рубрику «Вправи для повторення розділу». Відмітимо, що основний теоретичний матеріал розділу систематизовано в рубриці «Головне в розділі».

3. У підручнику авторів Мерзляк А. Г., Якір М. С. [11] многочлени розглядаються в першому параграфі – §1. Алгебраїчні вирази. Рівняння з однією змінною. Аналогічно першому підручнику після введення поняття одночлена вводиться поняття многочлена та вивчаються дії додавання і віднімання многочленів, множення многочлена на одночлен та дія множення многочлена на многочлен, яка спочатку зображена за допомогою схеми, а потім наведене правило виконання цієї дії. Далі розглядаються три основні способи розкладання многочленів на множники. Слід відмітити, що в цьому підручнику, як і в двох попередніх, наведено правило-орієнтир розкладання многочленів на множники за допомогою комбінації різних способів.

Кожен пункт параграфу містяться завдання трьох рівнів складності: початкового і середнього, достатнього та високого рівнів, а також завдання для математичних гуртків та факультативів. В підручнику передбачено чотири рубрики «Завдання «Перевірте себе» у тестовій формі», які стосуються саме многочленів. Основний теоретичний матеріал параграфу систематизовано в рубриці «Головне в параграфі».

В таблиці 2.1 наведено порівняння розглянутих вище підручників щодо вивчення многочленів за наступними критеріями:

- реалізація компетентнісного підходу – формування в учнів не тільки теоретичних знань, але й практичних навичок і вмінь застосовувати ці знання при розв’язуванні задач;
- наявність диференційованої системи задач – завдань різного рівня складності для учнів з різними навчальними можливостями;
- наявність та достатня кількість так званих прикладних задач.

Таблиця 2.1

<b>Критерій</b>	Підручник авторів Бевз Г. П., Бевз В. Г., Васильєва Д. В., Владімірова Н. Г.	Підручник автора Істер О. С.	Підручник авторів Мерзляк А. Г., Якір М. С.
<b>Компетентнісний підхід</b>	так	так	виражений частково
<b>Диференційовна система задач</b>	обмежена	так	так
<b>Прикладні задачі</b>	так	так	недостатня кількість

Як випливає з табл. 2.1, для ефективного вивчення учнями многочленів у курсі алгебри 7 класу вчителю потрібно вдало поєднувати використання конкретного підручника з такими практичними засобами як завдання різного рівня складності, прикладні задачі із суміжних навчальних дисциплін тощо.

### **3. Методичні особливості вивчення многочленів у курсі алгебри 7 класу**

Аналіз Модельних навчальних програм «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти [1, 2] показує, що многочлени займають центральне місце у курсі алгебри 7 класу. Введення поняття многочлена та розгляд основних дій над многочленами завершує вивчення числових виразів та передує вивченню функцій та рівнянь. Крім того, многочлени становлять основу для вивчення формул скороченого множення у курсі алгебри 7 класу, тотожних перетворень раціональних виразів та розв'язування раціональних рівнянь у курсі алгебри 8 класу.

#### **3.1. Введення основних поняття під час вивчення многочленів**

Як показує аналіз навчально-методичної літератури [13, 14], введення нових понять в шкільному курсі математики має відбуватися послідовно, що передбачає перехід від простішого до складнішого. В результаті такого підходу учні краще сприймають й запам'ятовують теоретичний матеріал, мають змогу здійснювати систематизацію математичних понять та виявляти логічні взаємозв'язки між цими поняттями. При цьому має здійснюватися поєднання теоретичного матеріалу з його практичним застосуванням.

Таким чином, використовуючи вже відоме учням поняття одночлена, вводиться поняття многочлена як «суми кількох одночленів» [9] та наводяться конкретні приклади.

Наприклад, вираз вигляду  $5x^3y + 3xy^2 - 7x^4 + 2y - 1$  є многочленом, оскільки він є сумою п'яти одночленів:  $5x^3y$ ,  $3xy^2$ ,  $-7x^4$ ,  $2y$ ,  $-1$ . А вираз вигляду  $(2x^2 - 5y)x^2$  не є многочленом, оскільки він не є сумою одночленів.

На цьому етапі вивчення многочленів доцільно запропонувати учням вправи на визначення многочленів серед кількох заданих виразів, складання многочлена із заданих одночленів та зведення подібних доданків многочлена.

**Вправа 3.1 (усно).** Серед наведених виразів вкажіть многочлени:

$$\text{А) } (x + 2y)^2; \quad \text{Б) } 3a^2 - 5ab^3 + 2b; \quad \text{В) } \frac{4x}{x^2 + 3x - 5};$$

$$\text{Г) } (c^2 - 3d)(2c + 5); \quad \text{Д) } x^3 - 2y; \quad \text{Е) } t^2 - 0,5t + 2,8.$$

**Відповідь.** Многочленами є вирази Б, Д і Е.

**Вправа 3.2.** Із наступних одночленів  $4p^2q$ ,  $-7pq^3$ ,  $12q$ ,  $-3$  складіть многочлен.

**Розв'язання.** Оскільки многочлен є сумою одночленів, то із заданих чотирьох одночленів отримаємо многочлен

$$4p^2q + (-7pq^3) + 12q + (-3) = 4p^2q - 7pq^3 + 12q - 3.$$

**Відповідь.**  $4p^2q - 7pq^3 + 12q - 3$ .

**Вправа 3.3.** Зведіть подібні члени многочлена

$$6a^2b + 3ab^3 + a^2 - 4a^2b - 8ab^3 - 2b.$$

**Розв'язання.** Маємо

$$\begin{aligned} & \underline{6a^2b} + \underline{3ab^3} + a^2 - \underline{4a^2b} - \underline{8ab^3} - 2b = \\ & = (6a^2b - 4a^2b) + (3ab^3 - 8ab^3) + a^2 - 2b = \\ & = 2a^2b - 5ab^3 + a^2 - 2b. \end{aligned}$$

**Відповідь.**  $2a^2b - 5ab^3 + a^2 - 2b$ .

Відмітимо, що при зведенні подібних членів многочлена учні часто допускають наступні помилки [15]:

1) невірно додають коефіцієнти подібних членів (наприклад, дістають  $-5 + 8 - 3 + 12 = 28$ ,  $12 - 9 + 4 - 5 = 12$ );

2) не усвідомлюють, що при додаванні коефіцієнтів подібних членів буквена частина не змінюється (наприклад, дістають  $5a^2 - 8a^2 + 12a^2 = 9$ ;  $7a^2b - 3a^2b = 4$ ).

Щоб учні не допускали таких помилок, потрібно: 1) сформувати в них навички виконання дій з додатними та від'ємними числами; 2) домогтися правильного усвідомлення поняття коефіцієнта біля змінної. При цьому, слід

наголосити, що при зведенні подібних членів многочлена дії виконуються тільки над коефіцієнтами цих членів, а буквена частина не змінюється.

Використовуючи поняття одночлена стандартного вигляду, вводиться поняття многочлена стандартного вигляду як «суми декількох одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних доданків» [9] та наводяться конкретні приклади.

Наприклад, многочлен  $xy^3 + 7xy^2 - 5x$  є многочленом стандартного вигляду, оскільки кожен його доданок є одночленом стандартного вигляду. А многочлен  $x^2y - 4xux^2 + 2x^2y$  не є многочленом стандартного вигляду, оскільки він містить одночлен  $-4xux^2$ , який не є одночленами стандартного вигляду, та подібні доданки  $x^2y$  і  $2x^2y$ .

**Вправа 3.4.** Запишіть у стандартному вигляді многочлен

$$a^3ba - 3a^2b + 8a + 3a^4b - 2aba - a.$$

**Розв'язання.** Спочатку зводимо до стандартного вигляду кожен член заданого многочлена:

$$\begin{aligned} a^3ba - 3a^2b + 8a + 3a^4b - 2aba - a &= \\ &= a^4b - 3a^2b + 8a + 3a^4b - 2a^2b - a, \end{aligned}$$

а потім зводимо подібні доданки:

$$\underline{a^4b} - \underline{3a^2b} + 8a + \underline{3a^4b} - \underline{2a^2b} - a = 4a^4b - 5a^2b + 7a.$$

**Відповідь.**  $4a^4b - 5a^2b + 7a$ .

Засвоєння учнями алгоритму зведення многочлена до стандартного вигляду в подальшому мінімізує виникнення помилок при виконанні дій над самими многочленами.

Далі використовуючи поняття степеня одночлена, вводиться поняття степеня многочлена стандартного вигляду як «найбільшого зі степенів одночленів цього многочлена» [9] та наводяться конкретні приклади.

Наприклад, многочлен  $2x^3y - xy^2$  є многочленом четвертого степеня, а многочлен  $xy - 5x$  – многочленом другого степеня.

**Вправа 3.5.** Визначте степінь многочлена

$$3xy^2 - 7xy + 2xy^2 + 3x + 5xy.$$

**Розв'язання.** Спочатку запишемо заданий многочлен у стандартному вигляді:

$$\underline{3xy^2} - \underline{7xy} + \underline{2xy^2} + 3x + \underline{5xy} = 5xy^2 - 2xy + 3x.$$

Оскільки отримали многочлен третього степеня, то заданий многочлен також є многочленом третього степеня.

**Відповідь.** третього степеня.

Слід відмітити, що при зведенні многочлена до стандартного вигляду прийнято записувати члени многочлена в порядку спадання степенів, зокрема у випадку многочленів від однієї змінної.

### 3.2. Вивчення основних дій над многочленами

Вміння виконувати дії над многочленами формує в учнів сталі навички здійснення тотожних перетворень алгебраїчних виразів, що в свою чергу використовується при тотожних перетворень раціональних виразів, а також при розв'язуванні раціональних рівнянь. Як було зазначено в Розділі 2 цієї кваліфікаційної роботи, в курсі алгебри 7 класу розглядаються наступні дії над многочленами: додавання та віднімання многочленів, множення одночлена на многочлен та множення многочлена на многочлен.

Для введення дій над многочленами використовується алгоритмічний підхід, за допомогою якого відповідну дію можна подати у вигляді чіткої послідовності кроків, що значно зменшує ймовірність виникнення помилок при здійсненні обчислень. Наприклад, алгоритм додавання (віднімання) двох многочленів можна подати учням у такому вигляді. *«Для того, щоб додати (відняти) два многочлена потрібно:*

- 1) *записати суму (різницю) цих многочленів та розкрити дужки;*
- 2) *звести подібні доданки»* [16].

Аналогічним чином можна подати алгоритм множення одночлена на многочлен та алгоритм множення многочлена на многочлен [7, 9].

**Вправа 3.6.** Знайдіть суму та різницю многочленів

$$3a^2b - 7ab + 12a \quad \text{і} \quad a^2b + 9ab - 5b.$$

**Розв'язання.** Використовуючи правила додавання та віднімання двох многочленів, матимемо:

$$\begin{aligned} 1) & (3a^2b - 7ab + 12a) + (a^2b + 9ab - 5b) = \\ & = 3a^2b - 7ab + 12a + a^2b + 9ab - 5b = 4a^2b + 2ab + 12a - 5b; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) & (3a^2b - 7ab + 12a) - (a^2b + 9ab - 5b) = \\ & = 3a^2b - 7ab + 12a - a^2b - 9ab + 5b = 2a^2b - 16ab + 12a + 5b. \end{aligned}$$

**Відповідь.**  $4a^2b + 2ab + 12a - 5b$ ;  $2a^2b - 16ab + 12a + 5b$ .

Відмітимо, що при додаванні (або відніманні) двох многочлена учні допускають помилки при відкритті дужок. Наприклад, отримують

$$(3x + 1) - (y + 2x) = 3x + 1 - y + 2x = 5x - y + 1.$$

Тому перед вивченням цих дій над многочленами треба пригадати правило розкриття дужок: «якщо перед дужками стоїть знак «+», то знаки доданків у дужках не змінюються, якщо ж перед дужками стоїть знак «-», то знаки всіх доданків у дужках змінюються на протилежні» [7]. При цьому потрібно наголосити учням, що після розкриття дужок та зведення подібних доданків потрібно також записати отриманий многочлен у стандартному вигляді.

**Вправа 3.7.** Виконайте множення одночлена на многочлен:

$$2ab^2(a^2 - 4ab + 7b^2 - 3).$$

**Розв'язання.** Використовуючи правило множення одночлена на многочлен, матимемо:

$$\begin{aligned} & 2ab^2(a^2 - 4ab + 7b^2 - 3) = \\ & = 2ab^2 \cdot a^2 + 2ab^2 \cdot (-4ab) + 2ab^2 \cdot 7b^2 + 2ab^2 \cdot (-3) = \\ & = 3a^3b^2 - 8a^2b^3 + 14ab^3 - 6ab^2. \end{aligned}$$

**Відповідь.**  $3a^3b^2 - 8a^2b^3 + 14ab^3 - 6ab^2$ .

Відмітимо, що при множенні одночлена на многочлен учні доволі часто допускають наступну помилку: при відкритті дужок здійснюють множення одночлена тільки на перший член многочлена [15]. Наприклад, отримують

$$x^2(y - 3xy^2 + 2) = x^2y - 3xy^2 + 2.$$

Потрібно пояснити учням, що при виконанні даної дії використовується розподільна властивість множення:

$$a(x + y + z + \dots) = ax + ay + az + \dots$$

Крім того, слід звернути увагу учнів на те, що при множенні одночлена на многочлен стандартного вигляду завжди отримуємо многочлен стандартного вигляду.

**Вправа 3.8.** Виконайте множення многочлена на многочлен:

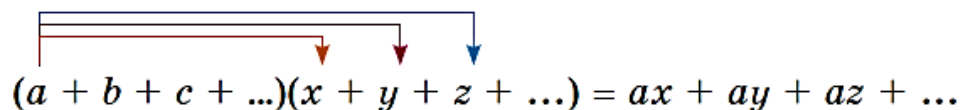
$$(3a - 4a^2b)(a^2 + 2ab - 1).$$

**Розв'язання.** Використовуючи правило множення многочлена на многочлен, матимемо:

$$\begin{aligned} & (3a - 4a^2b)(a^2 + 2ab - 1) = \\ & = 3a \cdot a^2 + 3a \cdot 2ab + 3a \cdot (-1) - 4a^2b \cdot a^2 - 4a^2b \cdot 2ab - 4a^2b \cdot (-1) = \\ & = 3a^3 + 6a^2b - 3a - 4a^4b - 8a^3b^2 + 4a^2b = \\ & = -4a^4b - 8a^3b^2 + 10a^2b + 3a^3 - 3a. \end{aligned}$$

**Відповідь.**  $-4a^4b - 8a^3b^2 + 10a^2b + 3a^3 - 3a$ .

Відмітимо, що при множенні многочлена на многочлен учні часто допускають аналогічну помилку, як і при множенні одночлена на многочлен: множать не всі члени першого многочлена на всі члени другого многочлена. Тому для більш ефективного сприйняття учнями дії множення многочлена на многочлен потрібно проілюструвати відповідний алгоритм за допомогою схеми (рис. 3.1).



$$(a + b + c + \dots)(x + y + z + \dots) = ax + ay + az + \dots$$

Рисунок 3.1

### 3.3. Розкладання многочленів на множники

Представлення многочлена у вигляді добутку одночлена та многочлена або добутку кількох многочленів, при умові, що цей добуток тотожно рівний даному многочлену, називають **розкладанням многочлена на множники** [9]. Як було зазначено в Розділі 2 кваліфікаційної роботи, в курсі алгебри 7 класу розглядаються три основні способи розкладання многочленів на множники:

- спосіб винесення спільного множника за дужки;
- спосіб групування;
- використання формул скороченого множення;

а також різні комбінації згаданих способів.

Способи розкладання многочленів на множники також можна подати учням у вигляді алгоритмів. Наприклад, *«для того, щоб розкласти многочлен на множники способом винесення спільного множника за дужки, потрібно виконати наступні кроки:*

- 1) *знайти спільний множник всіх членів заданого многочлена;*
- 2) *представити кожний член заданого многочлена у вигляді добутку спільного множника всіх членів многочлена та деякого одночлена;*
- 3) *використовуючи розподільну властивість множення справа на ліво, записати заданий многочлен у вигляді добутку одночлена на многочлен»* [16].

**Вправа 3.9.** Розкладіть на множники многочлен

$$2a^4 + 8a^3b - 10a^2.$$

**Розв'язання.** Спільним множником всіх членів заданого многочлена є одночлен  $2a^2$ . Тоді згідно розподільної властивості множення, матимемо

$$\begin{aligned} 2a^4 + 8a^3b - 10a^2 &= 2a^2 \cdot a^2 + 2a^2 \cdot 4ab - 2a^2 \cdot 5b = \\ &= 2a^2(a^2 + 4ab - 5b). \end{aligned}$$

**Відповідь.**  $2a^2(a^2 + 4ab - 5b)$ .

Слід зауважити учням, що спільним множником всіх членів заданого многочлена може бути не тільки одночлен, а також і многочлен.

**Вправа 3.10.** Розкладіть на множники многочлен

$$ab^2(a^2 + 2) - 5b(a^2 + 2) + 2(a^2 + 2).$$

**Розв'язання.** Спільним множником всіх членів заданого многочлена є двочлен  $a^2 + 2$ . Тоді згідно розподільної властивості множення, матимемо

$$ab^2(a^2 + 2) - 5b(a^2 + 2) + 2(a^2 + 2) = (a^2 + 2)(ab^2 - 5b + 2).$$

**Відповідь.**  $(a^2 + 2)(ab^2 - 5b + 2)$ .

Відмітимо, що у випадку, якщо спільний множник всіх членів заданого многочлена дорівнює одному з членів многочлена, то учні часто втрачають одиницю [15]. Наприклад, отримують

$$6x^2y - 15xy^2 + 3y = 3y(2x^2 - 5xy).$$

Слід наголосити учням на необхідності здійснювати перевірку отриманого розкладу многочлена на множники: добуток отриманих множників повинен співпадати із заданим многочленом.

Аналогічним чином можна подати алгоритми розкладання многочлена на множники способом групування [7, 9].

**Вправа 3.11.** Розкладіть на множники многочлен

$$3a^2b^2 - 7a^3 - 6b^3 + 14ab.$$

**Розв'язання.** Об'єднаємо члени заданого многочлена в групи таким чином, щоб доданки в кожній групі мали спільний множник, який виносимо за дужки. Матимемо

$$\begin{aligned} 3a^2b^2 - 7a^3 - 6b^3 + 14ab &= (3a^2b^2 - 6b^3) + (-7a^3 + 14ab) = \\ &= 3b^2(a^2 - 2b) - 7a(a^2 - 2b) = (a^2 - 2b)(3b^2 - 7a). \end{aligned}$$

**Відповідь.**  $(a^2 - 2b)(3b^2 - 7a)$ .

**Вправа 3.12.** Розкладіть на множники многочлен

$$4a^2 - (a + 3b)^2.$$

**Розв'язання.** Використовуючи таку формулу скороченого множення як формула різниці квадратів, матимемо

$$4a^2 - (a + 3b)^2 = (2a)^2 - (a + 3b)^2 = (2a - (a + 3b))(2a + (a + 3b)) = \\ = (a - 3b)(3a + 3b) = 3(a - 3b)(a + b).$$

**Відповідь.**  $3(a - 3b)(a + b)$ .

**Вправа 3.13.** Розкладіть на множники многочлен  $8a^3 + b^6$ .

**Розв'язання.** Використовуючи таку формулу скороченого множення як формула суми кубів, матимемо

$$8a^3 + b^6 = (2a)^3 + (b^2)^3 = (2a + b^2)((2a)^2 - 2ab^2 + (b^2)^2) = \\ = (2a + b^2)(4a^2 - 2ab^2 + b^4) = (2a + b^2)(b^4 - 2ab^2 + 4a^2).$$

**Відповідь.**  $(2a + b^2)(b^4 - 2ab^2 + 4a^2)$ .

При розкладанні многочлена на множники за допомогою використання формул скороченого множення учні часто допускають помилки пов'язані з неправильним застосуванням цих формул [15]. Наприклад, отримують

$$4x^2 + y^2 = (2x + y)^2, \quad x^2 - 9y^2 = (x - 3y)^2, \\ x^2 - 4xy + 16y^2 = (x - 4y)^2.$$

Для запобігання здійснення учнями наведених помилок, вчителю потрібно організувати вивчення формул скороченого множення на досить високому методичному рівні.

Необхідно також проілюструвати учням розкладання многочленів на множники за допомогою комбінації розглянутих способів.

**Вправа 3.14.** Розкладіть на множники многочлен

$$2a^3b^3 - 4a^2b^4 - 6a^2b^2 + 12ab^3.$$

**Розв'язання.** Виносимо спільний множник всіх членів многочлена за дужки:

$$2a^3b^3 - 4a^2b^4 - 6a^2b^2 + 12ab^3 = 2ab^2(a^2b - 2ab^2 - 3a + 6b).$$

Далі розкладаємо на множники отриманий многочлен  $a^2b - 2ab^2 - 3a + 6b$  способом групування:

$$a^2b - 2ab^2 - 3a + 6b = (a^2b - 2ab^2) + (-3a + 6b) = \\ = ab(a - 2b) - 3(a - 2b) = (a - 2b)(ab - 3).$$

Таким чином, матимемо

$$2a^3b^3 - 4a^2b^4 - 6a^2b^2 + 12ab^3 = 2ab^2(a - 2b)(ab - 3).$$

**Відповідь.**  $2ab^2(a - 2b)(ab - 3)$ .

Для того, щоб учні краще засвоїли, які саме способи розкладання многочлена на множники слід використовувати, а також в якій послідовності, доцільно буде навести відповідне правило-орієнтир розкладання многочлена на множники за допомогою комбінації різних способів [7, 9].

#### **4. Конспект уроку на тему «Множення многочлена на многочлен»**

В навчально-методичній літературі (наприклад, журнали «Математика» та «Математика в школах України») можна знайти досить велику кількість розробок конспектів уроків пов'язаних з вивченням многочленів [17 – 20]. Проте в більшості цих конспектів навчальний матеріал подано досить сухо. Тому в якості практичної частини моєї кваліфікаційної роботи було розроблено конспект уроку для 7 класу на тему «Множення многочлена на многочлен», який, крім теоретичного матеріалу та практичних завдань, містить відомості з історії математики стосовно многочленів та прикладні задачі, які ілюструють міжпредметні зв'язки математики з такими шкільними курсами як фізика та економіка. Крім того, проілюстровано використання таблиць для множення многочлена на многочлен. Даний конспект уроку буде корисним для вчителів математики при проведенні уроків з алгебри в середній школі.

**Тема уроку.** Множення многочлена на многочлен.

**Мета уроку:**

*навчальна:* сформувати в учнів на належному рівні вміння виконувати дію множення многочлена на многочлен згідно запропонованого алгоритму, а також вміння представляти добуток двох многочленів у вигляді многочлена стандартного вигляду;

*розвиваюча:* розвивати логічне мислення учнів та навички практичного застосування теоретичного матеріалу до розв'язування різноманітних задач, включаючи й прикладні задачі;

*інформаційна:* надати учням додаткові відомості з історії математики стосовно многочленів, що допоможе розширити їх кругозір.

**Тип уроку:** засвоєння нових знань.

**Підручник:** Істер О. С. Алгебра : підруч. для 7-го кл. закл. заг. серед. освіти [9].

## ХІД УРОКУ

### I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

Вчитель перевіряє присутність учнів у класі та їх готовність до уроку.

### II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Вчитель перевіряє домашнє завдання учнів та відповідає на запитання, якщо такі виникли в процесі виконання домашнього завдання.

### III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

1. Дайте означення многочлена. Наведіть приклади многочленів.
2. Який многочлен називається многочленом стандартного вигляду?
3. Сформулюйте правило додавання (віднімання) двох многочленів.
4. Сформулюйте правило множення одночлена на многочлен.

### IV. ФОРМУВАННЯ МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ

На попередніх уроках ми з Вами розглянули такі дії над многочленами як додавання та віднімання многочленів, множення одночлена на многочлен. Сьогодні на уроці розглянемо ще одну дію над многочленами – множення многочлена на многочлен. Слід відмітити, що зазначені дії над многочленами лежать в основі виконання тотожних перетворень алгебраїчних виразів.

### V. СПРИЙНЯТТЯ Й ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Нехай потрібно помножити многочлен  $a + b$  на многочлен  $x + y$ , тобто знайти добуток  $(a + b)(x + y)$ . Ввівши позначення  $x + y = z$  згідно правила множення многочлена на одночлен матимемо

$$(a + b)(x + y) = (a + b)z = az + bz.$$

Тепер в отриманий вираз підставляємо  $z = x + y$  та згідно правила множення одночлена на многочлен матимемо

$$az + bz = a(x + y) + b(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

Таким чином, отримуємо

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

Отже, сформулюємо **правило множення многочлена на многочлен**.

«Для того, щоб помножити многочлен на многочлен потрібно:

1) помножити кожний член першого многочлена на кожний член другого многочлена;

2) одержані добутки додати» [9].

Правило множення многочлена на многочлен можна зобразити за допомогою наступної схеми:

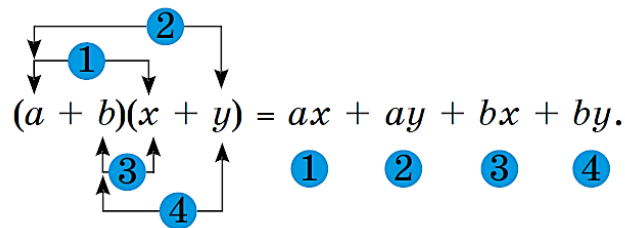


Рисунок 4.1

Наприклад,

$$1) (2a + 3b)(a^2 - 5b) = \\ = 2a \cdot a^2 + 2a \cdot (-5b) + 3b \cdot a^2 + 3b \cdot (-5b) = 2a^3 - 10ab + 3a^2b - 15b^2;$$

$$2) (3a^2 - 7ab^2 + 1)(a + 2b) = \\ = 3a^2 \cdot a + 3a^2 \cdot 2b + (-7ab^2) \cdot a + (-7ab^2) \cdot 2b + 1 \cdot a + 1 \cdot 2b = \\ = 3a^3 + 6a^2b - 7a^2b^2 - 14ab^3 + a + b.$$

В результаті дії множення многочлена на многочлен отримуємо також многочлен, який треба записати у вигляді многочлена стандартного вигляду.

**Історичні відомості.** Виконувати найпростіші дії над многочленами вміли ще математики Стародавнього Вавилону понад 4000 років тому, проте відповідні записи здійснювалися на табличках з клинописом не символами, а словами. Відмітимо, що в цей період алгебраїчні задачі розв'язувалися за допомогою геометрії. Так у працях давньогрецького математика Евкліда формула множення двох двочленів:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

має таку геометричну інтерпретацію – площа прямокутника зі сторонами  $a + b$  і  $c + d$  дорівнює сумі площ чотирьох менших чотирикутників (рис. 4.2).

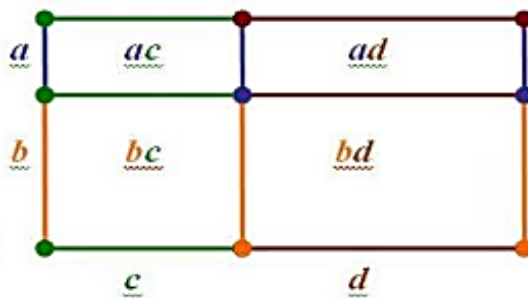


Рисунок 4.2

Причому така геометрична інтерпретація множення двох двочленів має місце тільки у випадку, коли  $a$ ,  $b$ ,  $c$  і  $d$  є додатними числами.

Відмітимо, що множення многочлена на многочлен можна здійснювати за допомогою таблиці. Наприклад, для обчислення добутку

$$(2x - 3)(x^2 + 4x - 5)$$

складаємо таблицю (табл. 4.1), в перший стовпець якої записуємо члени першого множника, а в другий стовпець – члени другого множника:

Таблиця 4.1

	$x^2$	$4x$	$-5$
$2x$			
$-3$			

Тепер в кожен клітку таблиці записуємо добуток відповідних одночленів першого стовпця та першого рядка (табл. 4.2):

Таблиця 4.2

	$x^2$	$4x$	$-5$
$2x$	$2x^3$	$8x^2$	$-10x$
$-3$	$-3x^2$	$-12x$	$15$

В результаті отримуємо, що

$$\begin{aligned} (2x - 3)(x^2 + 4x - 5) &= 2x^3 + \underline{8x^2} - \underline{3x^2} - \underline{10x} - \underline{12x} + 15 = \\ &= 2x^3 + 5x^2 - 22x + 15. \end{aligned}$$

## VI. ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

### *Виконання усних вправ*

**Приклад 4.1.** Знайдіть добуток многочленів:

$$\text{а) } (1 + a)(2 + b); \quad \text{б) } (c - 2)(d + 5); \quad \text{в) } (x + 1)(y - 3).$$

**Відповідь.** а)  $2 + b + 2a + ab$ ; б)  $cd + 5c - 2d - 10$ ;

$$\text{в) } xy - 3x + y - 3.$$

**Приклад 4.2.** Якому многочлену дорівнює такий добуток многочленів

$$(a - 1)(a + 5)?$$

$$\text{А) } a^2 + 5; \quad \text{Б) } a^2 + 4a + 5; \quad \text{В) } 4a + 5; \quad \text{Г) } a^2 + 4a + 4.$$

**Відповідь.** Б).

### *Виконання письмових вправ*

**Приклад 4.3.** Знайдіть добуток многочленів

$$(3a - 2b)(6a + 4b - 1).$$

**Розв'язання.** Згідно правила множення многочлена на многочлен, матимемо:

$$\begin{aligned} & (3a - 2b)(6a + 4b - 1) = \\ & = 3a \cdot 6a + 3a \cdot 4b + 3a \cdot 1 + (-2b) \cdot 6a + (-2b) \cdot 4b + (-2b) \cdot (-1) = \\ & = 18a^2 + \underline{12ab} + 3a - \underline{12ab} - 8b^2 + 2b = \\ & = 18a^2 - 8b^2 + 3a + 2b. \end{aligned}$$

**Відповідь.**  $18a^2 - 8b^2 + 3a + 2b$ .

**Приклад 4.4.** Спростіть вираз

$$(3a + 1)(2a - 5) - 2a(a + 2).$$

**Розв'язання.** Згідно правил виконання заданих дій над многочленами, матимемо

$$\begin{aligned} & (3a + 1)(2a - 5) - 2a(a + 2) = \\ & = \underline{6a^2} - \underline{15a} + \underline{2a} - 5 - \underline{2a^2} + \underline{8a} = 4a^2 - 5a - 5. \end{aligned}$$

**Відповідь.**  $4a^2 - 5a - 5$ .

**Приклад 4.5.** Спростіть вираз

$$(5a + 3)(2a - 1) - 10a^2$$

та знайдіть його значення при  $a = 7,5$ .

**Розв'язання.** Спочатку спростимо заданий вираз:

$$(5a + 3)(2a + 1) - 10a^2 = \underline{10a^2} + \underline{5a} + \underline{6a} + 6 - \underline{10a^2} = 11a + 6,$$

а потім знайдемо його значення при  $a = -1,5$ :

$$11a + 6 = 11 \cdot (-1,5) + 6 = -16,5 + 6 = -10,5.$$

**Відповідь.**  $11a + 6$ ;  $-10,5$ .

**Приклад 4.6.** Знайдіть добуток многочленів

$$(2x - 7)(x + 5)(3x + 1).$$

**Розв'язання.** Спочатку знаходимо добуток перших двох многочленів, а потім добуток отриманого многочлена та третього многочлена:

$$\begin{aligned} (2x - 7)(x + 5)(3x + 1) &= (2x^2 + \underline{10x} - \underline{7x} - 35)(3x + 1) = \\ &= (2x^2 + 3x - 35)(3x + 1) = 6x^3 + \underline{2x^2} + \underline{9x^2} + \underline{3x} - \underline{105x} - 35 = \\ &= 6x^3 + 11x^2 - 102x - 35. \end{aligned}$$

**Відповідь.**  $6x^3 + 11x^2 - 102x - 35$ .

Наступний приклад доцільно запропонувати учням, які демонструють зацікавленість математикою.

**Приклад 4.7.** Обчисліть  $(x - 1)(x^2 + x + 1)$  і  $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$ .

Чи можна узагальнити отриманий результат?

**Розв'язання.** Матимемо

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1;$$

$$(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 + x^3 + x^2 + x - x^3 - x^2 - x - 1 = x^4 - 1.$$

Таким чином, на основі проведених обчислень можемо стверджувати, що справедливою є формула

$$(x - 1)(x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1) = x^{n+1} - 1.$$

Множення многочлена на многочлен часто використовується під час розв'язування практичних задач.

**Задача 4.1.** На прямокутній ділянці землі довжиною  $x + 7$  м та шириною  $x + 3$  м фермер планує посадити сільськогосподарську культуру – кукурудзу. Чому дорівнює площа цієї ділянки землі?

**Розв'язання.** Оскільки ділянка має форму прямокутника, то матимемо

$$S = (x + 7)(x + 3) = x^2 + 3x + 7x + 21 = x^2 + 10x + 21 \text{ м}^2.$$

**Відповідь.**  $x^2 + 10x + 21 \text{ м}^2$ .

Відмітимо, що множення многочлена на многочлен використовується також при розв'язуванні задач в таких галузях науки як фізика, економіка, архітектура тощо.

**Задача 4.2.** Швидкість моторної яхти змінюється за наступним законом  $v(t) = 3t^2 - 2t + 1$  км / хвилину. Який шлях пропливе моторна яхта за час  $t + 4$  хвилини?

**Розв'язання.** Як відомо зі шкільного курсу фізики, пройдений шлях дорівнює добутку швидкості та часу, тому матимемо

$$\begin{aligned} S &= v(t) \cdot T = (3t^2 - 2t + 1)(t + 4) = \\ &= 3t^3 + 12t^2 - 2t^2 - 8t + t + 4 = 3t^3 + 10t^2 - 7t + 4 \text{ км.} \end{aligned}$$

**Відповідь.**  $3t^3 + 10t^2 - 7t + 4$  км.

**Задача 4.3.** З одного гектара поля фермер може отримати  $x + 2$  тонни пшениці або  $x + 4$  тонни ячменю. Скільки тонн зернових отримає фермер, якщо посадить  $x + 7$  гектарів пшениці та  $2x - 1$  гектарів ячменю?

**Розв'язання.** Очевидно, що загальний об'єм зернових, який отримає фермер, становитиме

$$\begin{aligned} V &= (x + 2)(x + 7) + (x + 4)(2x - 1) = \\ &= x^2 + 7x + 2x + 14 + 2x^2 - x + 8x - 4 = 3x^2 + 16x + 10 \text{ тонн.} \end{aligned}$$

**Відповідь.**  $3x^2 + 16x + 10$  тонн.

### VIII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

1. Яку дію над многочленами ми сьогодні розглянули?
2. Сформулюйте правило множення многочлена на многочлен.

### VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Знайдіть добуток многочленів  $(4a - 2b + 3)(a - 2b)$ .
2. Спростіть вираз  $5x(x - 2) + (3x + 4)(x - 1)$ .

## 5. Застосування многочлені при розв'язуванні задач у курсі алгебри середньої школи

Як зазначено в Модельних навчальних програмах «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти [1, 2] безпосередньо у курсі алгебри 7 класу многочлени використовуються для виконання тотожних перетворень виразів (спрощення та обчислення значень виразів, доведення тотожностей), а також при розв'язуванні рівнянь.

**Приклад 5.1.** Спростити вираз

$$(3a - 5)(2a + 7) + 4(a + 5) + 15a(a - 1).$$

**Розв'язання.** В заданому виразі відкриваємо дужки та зводимо подібні доданки:

$$\begin{aligned} (3a - 5)(2a + 7) + 4(a + 5) + 15a(a - 1) &= \\ &= 6a^2 + 21a - 10a - 35 + 4a + 20 + 15a^2 - 15a = 21a^2 - 15. \end{aligned}$$

**Відповідь.**  $21a^2 - 15$ .

**Приклад 5.2.** Спростити вираз

$$2a^2b(b + 3a) - b(2a^2b + 5a^3)$$

та знайти його значення при  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = -9$ .

**Розв'язання.** Насамперед спростимо заданий вираз:

$$2a^2b(b + 3a) - b(2a^2b + 5a^3) = 2a^2b^2 + 8a^3b - 2a^2b^2 - 5a^3b = 3a^3b,$$

а тоді знайдемо його значення при  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = -9$ , тобто

$$3a^3b = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot (-9) = (-27) \cdot \frac{1}{27} = -1.$$

**Відповідь.**  $3a^3b$ ;  $-1$ .

**Приклад 5.3.** Довести тотожність

$$(2x^2 - 4x + 7) + (4 - 2x^2 - 3x) - (10 - x^2 - 7x) = x^2 + 1.$$

**Доведення.** Спростимо ліву частину заданої тотожності, щоб показати що вона дорівнює правій частині:

$$\begin{aligned} & (2a^2 - 4a + 7) + (4 - 2a^2 - 3a) - (10 - a^2 - 7a) = \\ & = 2x^2 - 4x + 7 + 4 - 2x^2 - 3x - 10 + x^2 + 7x = x^2 + 1, \end{aligned}$$

що й доводить тотожність.

**Приклад 5.4.** Розв'язати рівняння

$$3x^2 + 5x - (4 + 2x + 3x^2) = 14.$$

**Розв'язання.** Спростивши ліву частину заданого рівняння:

$$3x^2 + 5x - (4 + 2x + 3x^2) = 3x^2 + 5x - 4 - 2x - 3x^2 = 3x - 4$$

отримуємо наступне рівняння

$$3x - 4 = 14,$$

звідки  $3x = 18$ , тобто  $x = 9$ .

**Відповідь.** 9.

В наступних прикладах для розв'язування рівнянь використовується розкладання многочленів на множники способом групування та з допомогою формул скороченого множення (формула квадрата різниці).

**Приклад 5.5.** Розв'язати рівняння

$$2x^2 + 6x - 30 = 10x.$$

**Розв'язання.** Спочатку перепишемо задане рівняння у вигляді:

$$2x^2 + 6x + 10x - 30 = 0.$$

Розклавши ліву частину отриманого рівняння на множники:

$$2x^2 + 6x - 10x - 30 = 2x(x + 3) - 10(x + 3) = (x + 3)(2x - 10),$$

матимемо рівняння

$$(x + 3)(2x - 10) = 0.$$

Добуток двох множників дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли один з множників дорівнює нулю, тому отримуємо два рівняння

$$x + 3 = 0 \quad \text{або} \quad 2x - 10 = 0,$$

звідки  $x_1 = -3$  або  $x_2 = 5$ .

**Відповідь.**  $-3; 5$ .

**Приклад 5.6.** Розв'язати рівняння

$$x(2x + 3) - (3x - 1)(3x + 1) = 7x(1 - x) - 11.$$

**Розв'язання.** Спочатку перепишемо задане рівняння у вигляді:

$$x(2x + 3) - (3x - 1)(3x + 1) - 7x(1 - x) + 11 = 0.$$

Розклавши ліву частину отриманого рівняння на множники:

$$\begin{aligned} x(2x + 3) - (3x - 1)(3x + 1) - 7x(1 - x) + 11 &= \\ &= 2x^2 + 3x - 9x^2 + 1 - 7x + 7x^2 + 11 = -4x + 12, \end{aligned}$$

матимемо рівняння

$$-4x + 12 = 0,$$

звідки  $4x = 12$ , тобто  $x = 3$ .

**Відповідь.** 3.

**Приклад 5.7.** Розв'язати рівняння

$$x(2x + 3) - (3x - 1)(3x + 1) = 7x(1 - x) - 11.$$

**Розв'язання.** Спочатку перепишемо задане рівняння у вигляді:

$$x(2x + 3) - (3x - 1)(3x + 1) - 7x(1 - x) + 11 = 0.$$

Розклавши ліву частину отриманого рівняння на множники:

$$\begin{aligned} x(2x + 3) - (3x - 1)(3x + 1) - 7x(1 - x) + 11 &= \\ &= 2x^2 + 3x - 9x^2 + 1 - 7x + 7x^2 + 11 = -4x + 12, \end{aligned}$$

матимемо рівняння

$$-4x + 12 = 0,$$

звідки  $4x = 12$ , тобто  $x = 3$ .

**Відповідь.** 3.

**Приклад 5.8.** Розв'язати рівняння

$$x^2(x + 2) - 6x(x + 2) + 9x + 18 = 0.$$

**Розв'язання.** Розклавши ліву частину заданого рівняння на множники:

$$\begin{aligned} x^2(x + 2) - 6x(x + 2) + 9x + 18 &= x^2(x + 2) - 6x(x + 2) + 9(x + 2) = \\ &= (x + 2)(x^2 - 6x + 9) = (x + 2)(x - 3)^2, \end{aligned}$$

отримаємо рівняння

$$(x + 2)(x - 3)^2 = 0,$$

яке розпадається на два рівняння:

$$x + 2 = 0 \quad \text{або} \quad (x - 3)^2 = 0,$$

звідки  $x_1 = -2$  або  $x_2 = 3$ .

**Відповідь.**  $-2; 3$ .

Крім того, в курсі алгебри 7 класу многочлени використовуються при розв'язуванні задач на подільність цілих чисел.

**Приклад 5.9.** Довести, що значення виразу

$$(2n^2 + 5n - 9) - (5 - 2n + 2n^2)$$

ділиться на 7 при будь-яких натуральних значеннях  $n$ .

**Доведення.** Спростимо заданий вираз наступним чином:

$$\begin{aligned} (2n^2 + 5n - 9) - (5 - 2n + 2n^2) &= 2n^2 + 5n - 9 - 5 + 2n - 2n^2 = \\ &= 7n - 14 = 7(n - 2). \end{aligned}$$

Оскільки вираз  $7(n - 2)$  ділиться на 7, то й заданий вираз буде ділитися на 7 при будь-яких натуральних значеннях  $n$ .

**Приклад 5.10.** Довести, що число  $5 \cdot 9^4 - 3^7$  ділиться на 14.

**Доведення.** Перетворимо задане число використовуючи властивості степеня з натуральним показником, тобто

$$5 \cdot 9^4 - 3^7 = 5 \cdot (3^2)^4 - 3^7 = 5 \cdot 3^8 - 3^7 = 3^7 \cdot (5 \cdot 3 - 1) = 3^7 \cdot 14.$$

Оскільки число  $3^7 \cdot 14$  ділиться на 14, то й задане число ділиться на 14.

**Приклад 5.11 [7].** Довести, що число

$$2^{11} \cdot 3^6 - 2^7 \cdot 3^6 - 2^7 \cdot 3^4 + 2^{11} \cdot 3^4$$

ділиться на 14.

**Доведення.** Перетворимо задане число наступним чином:

$$\begin{aligned} 2^{11} \cdot 3^6 - 2^7 \cdot 3^6 - 2^7 \cdot 3^4 + 2^{11} \cdot 3^4 &= 2^{11} \cdot 3^4 \cdot (3^2 + 1) - 2^7 \cdot 3^4 \cdot (3^2 + 1) = \\ &= (3^2 + 1)(2^{11} \cdot 3^4 - 2^7 \cdot 3^4) = (3^2 + 1) \cdot 2^7 \cdot 3^4 \cdot (2^4 - 1) = \\ &= 10 \cdot 2^7 \cdot 3^4 \cdot 15 = 150 \cdot 2^7 \cdot 3^4. \end{aligned}$$

Оскільки число  $150 \cdot 2^7 \cdot 3^4$  ділиться на 150, то й задане число буде ділитися на 150.

У курсі алгебри 8 класу многочлени здебільшого використовуються при здійсненні тотожних перетворень раціональних виразів та розв'язуванні раціональних рівнянь [21 – 23].

**Приклад 5.12.** Довести тотожність

$$\frac{2p - q}{pq} - \frac{1}{p + q} \cdot \left( \frac{p}{q} - \frac{q}{p} \right) = \frac{1}{q}.$$

*Доведення.* Спростимо ліву частину заданої тотожності, щоб показати що вона дорівнює правій частині:

$$\begin{aligned} \frac{2p - q}{pq} - \frac{1}{p + q} \cdot \left( \frac{p}{q} - \frac{q}{p} \right) &= \frac{2p - q}{pq} - \frac{1}{p + q} \cdot \frac{p^2 - q^2}{pq} = \\ &= \frac{2p - q}{pq} - \frac{1}{p + q} \cdot \frac{(p - q)(p + q)}{pq} = \frac{2p - q}{pq} - \frac{p - q}{pq} = \\ &= \frac{2p - q - p + q}{pq} = \frac{p}{pq} = \frac{1}{q}, \end{aligned}$$

що й доводить тотожність.

**Приклад 5.13.** Спростити вираз

$$\left( \frac{2a + 1}{2a - 1} - \frac{2a - 1}{2a + 1} \right) : \frac{4a}{10a - 5}.$$

*Розв'язання.* Поетапно виконуємо вказані дії з раціональними дробами, тобто:

$$1) \frac{2a + 1}{2a - 1} - \frac{2a - 1}{2a + 1} = \frac{(2a + 1)^2 - (2a - 1)^2}{(2a - 1)(2a + 1)} = \frac{8a}{(2a - 1)(2a + 1)};$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{8a}{(2a - 1)(2a + 1)} : \frac{4a}{10a - 5} &= \frac{8a}{(2a - 1)(2a + 1)} \cdot \frac{10a - 5}{4a} = \\ &= \frac{8a}{(2a - 1)(2a + 1)} \cdot \frac{5(2a - 1)}{4a} = \frac{10}{2a + 1}. \end{aligned}$$

*Відповідь.*  $\frac{10a}{2a + 1}$ .

**Приклад 5.14.** Спростити вираз

$$\left( \frac{a-2b}{a^2+2ab} - \frac{1}{a^2-4b^2} : \frac{a+2b}{(2b-a)^2} \right) \cdot \frac{(a+2b)^2}{4b^2}.$$

**Розв'язання.** Поетапно виконуємо вказані дії з раціональними дробами, тобто:

$$\begin{aligned} 1) \frac{1}{a^2-4b^2} : \frac{a+2b}{(2b-a)^2} &= \frac{1}{a^2-4b^2} \cdot \frac{(2b-a)^2}{a+2b} = \\ &= \frac{1}{(a-2b)(a+2b)} \cdot \frac{(2b-a)^2}{a+2b} = \frac{a-2b}{(a+2b)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{a-2b}{a^2+2ab} - \frac{a-2b}{(a+2b)^2} &= \frac{a-2b}{a(a+2b)} - \frac{a-2b}{(a+2b)^2} = \\ &= \frac{(a-2b)(a+2b) - (a-2b)a}{a(a+2b)^2} = \frac{(a-2b)(a+2b-a)}{a(a+2b)^2} = \frac{2b(a-2b)}{a(a+2b)^2}; \end{aligned}$$

$$3) \frac{2b(a-2b)}{a(a+2b)^2} \cdot \frac{(a+2b)^2}{4b^2} = \frac{a-2b}{2ab}.$$

**Відповідь.**  $\frac{a-2b}{2ab}.$

**Приклад 5.15.** Довести, що при всіх допустимих значеннях змінних  $x$  і  $y$  значення виразу

$$\left( \frac{2xy}{x^2-y^2} + \frac{x-y}{2x+2y} \right) \cdot \frac{2x}{x+y} + \frac{y}{y-x}$$

не залежить від значень цих змінних.

**Доведення.** Спростимо заданий вираз, тобто виконаємо відповідні дії з раціональними дробами:

$$\begin{aligned} 1) \frac{2xy}{x^2-y^2} + \frac{x-y}{2x+2y} &= \frac{2xy}{(x-y)(x+y)} + \frac{x-y}{2(x+y)} = \frac{4xy + (x-y)^2}{2(x-y)(x+y)} = \\ &= \frac{4xy + x^2 - 2xy + y^2}{2(x-y)(x+y)} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2(x-y)(x+y)} = \frac{(x+y)^2}{2(x-y)(x+y)} = \frac{(x+y)}{2(x-y)}; \end{aligned}$$

$$2) \frac{(x+y)}{2(x-y)} \cdot \frac{2x}{x+y} + \frac{y}{y-x} = \frac{x}{x-y} - \frac{y}{x-y} = 0.$$

Отже, значення заданого виразу дорівнює 0, тобто при всіх допустимих значеннях змінних  $x$  і  $y$  не залежить від значень цих змінних.

Слід відмітити, що в курсі алгебри 8 класу здебільшого розв'язуються саме дробово-раціональні рівнянь.

**Приклад 5.16.** Розв'язати рівняння

$$\frac{2x - 5}{x + 5} + 4 = 0.$$

**Розв'язання.** Виконавши тотожне перетворення лівої частини заданого рівняння:

$$\frac{2x - 5}{x + 5} + 4 = \frac{2x - 5 + 4(x + 5)}{x + 5} = \frac{6x + 15}{x + 5},$$

отримуємо рівносильне рівняння

$$\frac{6x + 15}{x + 5} = 0.$$

Дріб дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля, тому отримуємо:  $6x + 15 = 0$ , а  $x + 5 \neq 0$ , звідки  $x = -2,5$ .

**Відповідь.**  $-2,5$ .

**Приклад 5.17.** Розв'язати рівняння

$$\frac{x - 4}{x - 5} = 2 - \frac{x - 6}{x + 5}.$$

**Розв'язання.** Виконавши тотожне перетворення правої частини даного рівняння:

$$2 - \frac{x - 6}{x + 5} = 2 - \frac{2(x + 5) - (x - 6)}{x + 5} = \frac{x + 16}{x + 5},$$

отримуємо рівносильне рівняння

$$\frac{x - 4}{x - 5} = \frac{x + 16}{x + 5}.$$

Область допустимих значень змінної  $x$  отриманого рівняння знаходимо з умов  $x - 5 \neq 0$  і  $x + 5 \neq 0$ , звідки  $x \neq 5$  і  $x \neq -5$ .

Застосувавши до останнього рівняння основну властивість пропорції, матимемо рівняння

$$(x - 4)(x + 5) = (x - 5)(x + 16),$$

або

$$x^2 + 5x - 4x - 20 = x^2 + 16x - 5x - 80,$$

$$x - 20 = 11x - 80,$$

звідки  $x = 6$ .

**Відповідь.** 6.

**Приклад 5.18.** Розв'язати рівняння

$$\frac{3x - 2}{x} - \frac{1}{x - 2} = \frac{3x + 4}{x^2 - 2x}.$$

**Розв'язання.** Область допустимих значень (ОДЗ) змінної  $x$  заданого рівняння знаходимо з умов  $x \neq 0$ ,  $x - 2 \neq 0$  і  $x^2 - 2x = x(x - 2) \neq 0$ , звідки  $x \neq 0$  і  $x \neq 2$ .

Перепишемо задане рівняння у вигляді

$$\frac{3x - 2}{x} - \frac{1}{x - 2} = \frac{3x + 4}{x(x - 2)}$$

та множимо його на вираз  $x(x - 2)$ , який є спільним знаменником усіх дробів цього рівняння. В результаті отримаємо рівняння

$$(3x - 2)(x - 2) - x = 3x + 4,$$

або

$$3x^2 - 6x - 2x + 4 - x = 3x + 4,$$

$$3x^2 - 12x = 0,$$

$$3x(x - 4) = 0,$$

звідки  $x_1 = 0$  (не входить в ОДЗ змінної заданого рівняння) або  $x_2 = 4$ . Отже, задане рівняння має один корінь  $x = 4$ .

**Відповідь.** 4.

Крім того, у курсі алгебри 8 класу способи розкладання многочленів на множники використовуються при розв'язуванні цілих раціональних рівнянь вищих степенів.

**Приклад 5.19.** Розв'язати рівняння

$$x^3 - 5x^2 - 9x + 45 = 0.$$

**Розв'язання.** Розклавши ліву частину заданого рівняння на множники:

$$\begin{aligned} x^3 - 5x^2 - 9x + 45 &= x^2(x - 5) - 9(x - 5) = (x - 5)(x^2 - 9) = \\ &= (x - 5)(x - 3)(x + 3), \end{aligned}$$

отримуємо рівняння

$$(x - 5)(x - 3)(x + 3) = 0,$$

яке еквівалентне сукупності трьох лінійних рівнянь:

$$x - 5 = 0, \quad x - 3 = 0, \quad x + 3 = 0,$$

звідки  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = -3$ .

**Відповідь.**  $-3$ ;  $3$ ;  $5$ .

**Приклад 5.20.** Розв'язати рівняння

$$2x^3 - 3x^2 + 8x - 24 = 0.$$

**Розв'язання.** Розклавши ліву частину заданого рівняння на множники:

$$2x^3 - 3x^2 + 8x - 24 = 2x(x^2 + 4) - 3(x^2 + 4) = (x^2 + 4)(2x - 3),$$

отримуємо рівняння

$$(x^2 + 4)(2x - 3) = 0.$$

яке еквівалентне сукупності двох рівнянь:

$$x^2 + 4 = 0, \quad 2x - 3 = 0.$$

Оскільки перше квадратне рівняння коренів не має, а друге лінійне рівняння має один корінь  $x = \frac{3}{2}$ , то задане рівняння має один корінь.

**Відповідь.**  $\frac{3}{2}$ .

**Приклад 5.21.** Розв'язати рівняння

$$x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 8x - 8 = 0.$$

**Розв'язання.** Розклавши ліву частину заданого рівняння на множники:

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 8x - 8 &= x^4(x + 1) - 2x^2(x + 1) - 8(x + 1) \\ &= (x + 1)(x^4 - 2x^2 - 8), \end{aligned}$$

отримуємо рівняння

$$(x + 1)(x^4 - 2x^2 - 8) = 0,$$

яке еквівалентне сукупності двох рівнянь:

$$x + 1 = 0, \quad x^4 - 2x^2 - 8 = 0.$$

Перше лінійне рівняння має один корінь  $x_1 = -1$ . Друге рівняння є біквадратним рівнянням, для розв'язування якого виконуємо заміну змінної  $t = x^2$  та отримуємо квадратне рівняння  $t^2 - 2t - 8 = 0$ , звідки  $t_1 = -2$ ,  $t_2 = 4$ . Здійснивши обернену заміну, отримуємо два квадратні рівняння

$$x^2 = -2, \quad x^2 = 4,$$

перше з яких не має коренів, а друге має два корені  $x_2 = -2$ ,  $x_3 = 2$ .

Отже, задане рівняння має три корені  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -2$ ,  $x_3 = 2$ .

**Відповідь.**  $-2$ ;  $-1$ ;  $2$ .

## 6. Вивчення многочленів в поглибленому курсі математики середньої школи

Поглиблений курс математики 8-9 класів спрямований насамперед на розширення й поглиблення змісту навчального матеріалу [3], що передбачає розв'язування різних задач підвищеного рівня складності (наприклад, задач з параметрами) та орієнтацію на прикладне застосування математики. Слід відмітити, що поглиблене вивчення математики розвиває такі математичні компетентності учнів як логічне та абстрактне мислення, що допомагає підготувати їх до участі у різних математичних конкурсах та олімпіадах, а також до поглибленого вивчення курсу математики у старшій школі.

Згідно навчальної програми для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів [3] у курсі алгебри 8 класу передбачено вивчення Теми 8. Основи теорії многочленів з однією змінною, яке здійснюється наступним чином:

- вводиться дія ділення многочленів з однією змінною;
- вводиться поняття кореня многочлена з однією змінною;
- розглядається теорема Безу та три наслідки з неї;
- вводиться поняття цілого раціонального рівняння;
- розглядається теорема про цілий корінь цілого раціонального рівняння з цілими коефіцієнтами.

У єдиному підручнику для поглибленого вивчення алгебри у 8 класі авторського колективу Аркадій Мерзляк, Віталій Полонський, Михайло Якір [24] теорія многочленів з однією змінною розглядається в сьомому параграфі – §7. Квадратні рівняння, в якому многочленам відведено три останні пункти 44. Ділення многочленів, 45. Корені многочленів. Теорема Безу та 46. Ціле раціональне рівняння. Згадані пункт параграфу містяться завдання трьох рівнів складності: початкового і середнього, достатнього та високого рівнів. В пункті 45. Корені многочленів. Теорема Безу наведено короткі теоретичні відомості про французького математика Етьєна Безу (1730 – 1783).

Вивчення многочленів від однієї змінної в поглибленому курсі алгебри 8 класу відбувається в три етапи.

**Етап 1.** Спочатку водиться дія ділення многочлена  $f(x)$  на ненульовий многочлен  $g(x)$  та такі поняття як дільник многочлена  $f(x)$  та частка  $q(x)$  від ділення многочленів  $f(x)$  і  $g(x)$  (див. Розділ 1 кваліфікаційної роботи). При цьому дія ділення многочленів виконується за допомогою схеми ділення «кутиком», алгоритм якої доцільно проілюструвати учням на конкретному прикладі.

Наприклад, щоб поділити многочлен  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 12x + 7$  на многочлен  $g(x) = x - 1$  виконуємо наступні кроки:

1) ділимо старший член діленого  $f(x)$  на старший член дільника  $g(x)$  та отримуємо перший член частки, тобто отримуємо  $\frac{x^3}{x} = x^2$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 4x^2 - 12x + 7 & x - 1 \\ \hline & x^2 \end{array}$$

2) множимо отриманий на першому кроці результат на дільник  $g(x)$  та записуємо під діленням, тобто записуємо  $x^2(x - 1) = x^3 - x^2$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 4x^2 - 12x + 7 & x - 1 \\ x^3 - x^2 & \hline & x^2 \end{array}$$

3) віднімаємо від діленого  $f(x)$  отриманий на другому кроці результат та результат записуємо під рискою, тобто записуємо

$$x^3 + 4x^2 - 12x + 7 - (x^3 - x^2) = 5x^2 - 12x + 7$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 4x^2 - 12x + 7 & x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} & \hline 5x^2 - 12x + 7 & \end{array}$$

4) повторюємо кроки 1) – 3) до тих пір, поки не отримаємо нуль

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + 4x^2 - 12x + 7 & x - 1 \\
 \underline{x^3 - x^2} & \\
 5x^2 - 12x + 7 & \\
 \underline{5x^2 - 5x} & \\
 -7x + 7 & \\
 \underline{-7x + 7} & \\
 0 & 
 \end{array}$$

Таким чином,  $q(x) = x^2 + 5x - 7$  – частка від ділення многочлена  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$  і можна записати, що

$$x^3 + 4x^2 - 12x + 7 = (x^2 + 5x - 7)(x - 1).$$

Для уникнення помилок під час виконання дії ділення многочлена  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$  «кутиком» слід дотримуватися наступних рекомендацій:

1. записуємо всі члени (враховуючи члени з нульовими коефіцієнтами) діленого  $f(x)$ , тобто многочлен  $x^3 - 1$  записуємо так  $x^3 + 0x^2 + 0x - 1$ ;
2. многочлени в схемі ділення «кутиком» записуємо таким чином, щоб подібні члени цих многочленів знаходилися один під одним.

**Приклад 6.1.** Доведіть, що даний многочлен  $f(x) = x^4 - x^3 + 5x - 3$  ділиться на многочлен  $g(x) = x^2 + x - 1$ .

*Доведення.* Поділимо многочлен  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$  «кутиком». Матимемо

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - x^3 + 0x^2 + 5x - 3 & x^2 + x - 1 \\
 \underline{x^4 + x^3 - x^2} & \\
 -2x^3 + x^2 + 5x - 3 & \\
 \underline{-2x^3 - 2x^2 + 2x} & \\
 3x^2 + 3x - 3 & \\
 \underline{3x^2 + 3x - 3} & \\
 0 & 
 \end{array}$$

Таким чином,  $q(x) = x^2 - 2x + 3$  – частка від ділення многочлена  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$  і можна записати, що

$$x^4 - x^3 + 5x - 3 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + x - 1),$$

тобто многочлен  $f(x)$  ділиться на многочлен  $g(x)$ .

Далі вводиться дія ділення многочлена  $f(x)$  на ненульовий многочлен  $g(x)$  з остачею та такі поняття як неповна частка  $q(x)$  та остача  $r(x)$  від ділення многочленів  $f(x)$  і  $g(x)$  (див. Розділ 1 даної кваліфікаційної роботи). Відмітимо, що дія ділення многочленів з остачею виконується за допомогою наведеної вище схеми ділення «кутиком», проте четвертий крок алгоритму наступний:

4) *повторюємо попередні кроки до тих пір, поки степінь отриманого на третьому кроці результату не буде менший за степінь дільника  $g(x)$*

**Приклад 6.2.** Знайти неповну частку та остачу при діленні многочлена  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 7x + 2$  на многочлен  $g(x) = x^2 - 2x + 3$ .

**Розв’язання.** Поділимо многочлен  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$  «кутиком». Матимемо

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 7x + 2 & x^2 - 2x + 3 \\ \underline{x^4 - 2x^3 + 3x^2} & \hline -2x^3 + 3x^2 - 7x + 2 & \\ \underline{-2x^3 + 4x^2 - 6x} & \\ -x^2 - x + 2 & \\ \underline{-x^2 + 2x - 3} & \\ -3x + 5 & \end{array}$$

Отже,  $q(x) = x^2 - 2x - 1$  – неповна частка, а  $r(x) = -3x + 5$  – остача від ділення многочлена  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$ , тобто

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 7x + 2 = (x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2x + 3) + (-3x + 5).$$

**Відповідь.**  $x^2 - 2x - 1$  – неповна частка;  $-3x + 5$  – остача.

Ділення многочлена на многочлен з остачею використовується для виділення цілої частини раціонального дробу, тобто представлення деякого раціонального дробу як суми многочлена та правильного дробу [24].

**Приклад 6.3.** Виділіть цілу частину раціонального дробу

$$\frac{3x^4 - 5x^3 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 4}.$$

**Розв'язання.** Виконаємо ділення многочлен  $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x - 1$  на многочлен  $g(x) = x^2 - 2x + 4$  «кутиком». Матимемо

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 - 5x^3 + 0x^2 + 2x - 1 & x^2 - 2x + 4 \\ \underline{3x^4 - 6x^3 + 12x^2} & \underline{3x^2 + x - 10} \\ x^3 - 12x^2 + 2x - 1 & \\ \underline{x^3 - 2x^2 + 4x} & \\ -10x^2 - 2x - 1 & \\ \underline{-10x^2 + 20x - 40} & \\ -22x + 39 & \end{array}$$

Отже,  $q(x) = 3x^2 + x - 10$  – неповна частка, а  $r(x) = -22x + 39$  – остача від ділення многочлена  $f(x)$  на многочлен  $g(x)$ , тобто

$$3x^4 - 5x^3 + 2x - 1 = (3x^2 + x - 10)(x^2 - 2x + 4) + (-22x + 39).$$

Таким чином, заданий раціональний дріб можемо записати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{3x^4 - 5x^3 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 4} &= \frac{(3x^2 + x - 10)(x^2 - 2x + 4) + (-22x + 39)}{x^2 - 2x + 4} = \\ &= 3x^2 + x - 10 + \frac{-22x + 39}{x^2 - 2x + 4}. \end{aligned}$$

**Відповідь.**  $3x^2 + x - 10 + \frac{-22x + 39}{x^2 - 2x + 4}$ .

**Етап II.** Вводиться поняття кореня многочлена (див. Означення 1.3 Розділ 1 даної кваліфікаційної роботи) та розглядається теорема Безу, а також три наслідки з цієї теореми (також див. Розділ 1 даної кваліфікаційної роботи).

Слід відмітити, що використання теореми Безу дозволяє доволі легко знайти остачу від ділення многочлена  $f(x)$  на двочлен  $x - c$ .

**Приклад 6.4.** Чому дорівнює остача від ділення заданого многочлена  $f(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 10$  на двочлен  $x + 3$ ?

**Розв'язання.** Остачу від ділення заданого многочлена  $f(x)$  на двочлен  $x + 3$  знайдемо, скориставшись теоремою Безу, тобто

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^4 + 4 \cdot (-3)^3 + 2 \cdot (-3)^2 - 5 \cdot (-3) + 10 = \\ &= 81 - 108 + 18 + 15 - 10 = 16. \end{aligned}$$

**Відповідь.** 16.

**Приклад 6.5.** Знайдіть значення параметра  $a$ , при якому остача від ділення заданого многочлена  $f(x) = 3x^4 + ax^3 + 4x^2 - 2x - 5$  на двочлен  $x + 1$  дорівнює 7.

**Розв'язання.** Оскільки остача від ділення заданого многочлена  $f(x)$  на двочлен  $x + 1$  дорівнює 7, то скориставшись теоремою Безу, матимемо

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^4 + a \cdot (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 5 = 4 - a = 7,$$

звідки  $a = -3$ .

**Відповідь.**  $a = -3$ .

Наслідки з теореми Безу використовуються при розв'язуванні різних задач теорії многочленів.

**Приклад 6.6.** Знайдіть значення параметра  $a$ , при якому многочлен  $f(x) = x^3 + 5x^2 + ax - 8$  ділиться на двочлен  $x + 2$ .

**Розв'язання.** Згідно Наслідку 1 з теореми Безу, якщо многочлен  $f(x)$  ділиться на двочлен  $x + 2$ , то число  $-2$  є коренем цього многочлена, тобто

$$f(-2) = (-2)^3 + 5 \cdot (-2)^2 + a \cdot (-2) - 8 = 4 - 2a = 0,$$

звідки  $a = 2$ .

**Відповідь.**  $a = 2$ .

**Приклад 6.7 [24].** Знайдіть значення параметрів  $a$  і  $b$ , при яких заданий многочлен  $f(x) = 2x^3 - x^2 + ax + b$  ділиться на многочлен  $g(x) = x^2 - 1$ .

**Розв'язання.** Згідно Наслідку 2 з теореми Безу, якщо многочлен  $f(x)$  ділиться на многочлен  $g(x) = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ , то два числа  $-1$  і  $1$  є коренями цього многочлена, тобто

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + a \cdot (-1) + b = -3 - a + b = 0,$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 1^2 + a \cdot 1 + b = 1 + a + b = 0.$$

Отже, маємо систему двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a - b = -3, \\ a + b = -1, \end{cases}$$

розв'язавши яку отримуємо, що  $a = -2$ ,  $b = 1$ .

**Відповідь.**  $a = -2$ ,  $b = 1$ .

**Етап III.** Нарешті вводиться поняття цілого раціонального рівняння та розглядається теорема про цілий корінь такого рівняння у випадку цілих коефіцієнтів.

**Означення 6.1 [24].** Цілим раціональним рівнянням будемо називати рівняння вигляду

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (6.1)$$

де  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  – деякі дійсні числа, які називаються **коефіцієнтами** рівняння (6.1), причому коефіцієнт  $a_0$  називається **вільним членом** цього рівняння.

**Теорема 6.1 [24].** Якщо ціле раціональне рівняння (6.1) із цілими коефіцієнтами має цілий корінь, то він є дільником вільного члена.

Слід відмітити, що обернене твердження до теореми 6.1 не вірне.

**Приклад 6.8.** Розв'яжіть рівняння

$$2x^3 + x^2 - 7x + 6 = 0.$$

**Розв'язання.** Дільниками вільного члена заданого рівняння є числа:  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ ,  $\pm 3$ ,  $\pm 6$ . Перевірка показує, що  $x = 1$  є коренем цього рівняння. Отже,

многочлен  $f(x) = 2x^3 + x^2 - 7x + 6$  ділиться на двочлен  $x - 1$ . Виконавши ділення «кутиком» отримаємо частку  $q(x) = 2x^2 + x - 6$ , тобто

$$2x^3 + x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(2x^2 + x - 6).$$

Таким чином, задане рівняння набуває вигляду

$$(x - 1)(2x^2 + x - 6) = 0,$$

або

$$x - 1 = 0, \quad 2x^2 + x - 6 = 0.$$

Оскільки перше рівняння має корінь  $x_1 = 1$ , а квадратне рівняння має два різні корені  $x_2 = -2$ ,  $x_3 = \frac{3}{2}$ , то задане рівняння має три корені.

**Відповідь.**  $-2; \frac{3}{2}; 1$ .

**Приклад 6.9.** Розв'яжіть рівняння

$$2x^4 + x^3 - 12x^2 - 23x - 12 = 0.$$

**Розв'язання.** Дільниками вільного члена заданого рівняння є числа:  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ ,  $\pm 3$ ,  $\pm 4$ ,  $\pm 6$ ,  $\pm 12$ . Перевірка показує, що  $x = -1$  є коренем цього рівняння. Отже, многочлен  $f(x) = 2x^4 + x^3 - 12x^2 - 23x - 12$  ділиться на двочлен  $x + 1$ , тобто

$$2x^4 + x^3 - 12x^2 - 23x - 12 = (x + 1)(2x^3 - x^2 - 11x - 12).$$

Таким чином, задане рівняння набуває вигляду

$$(x + 1)(2x^3 - x^2 - 11x - 12) = 0,$$

або

$$x + 1 = 0, \quad 2x^3 - x^2 - 11x - 12 = 0.$$

Перше рівняння має корінь  $x_1 = -1$ . Тепер розглянемо друге рівняння, в якому дільниками вільного члена є такі числа:  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ ,  $\pm 3$ ,  $\pm 4$ ,  $\pm 6$ ,  $\pm 12$ . Перевірка показує, що  $x = 3$  є коренем цього рівняння. Отже, многочлен  $f(x) = 2x^3 - x^2 - 11x - 12$  ділиться на двочлен  $x - 3$ , тобто

$$2x^3 - x^2 - 11x - 12 = (x - 3)(2x^2 + 5x + 4).$$

Таким чином, друге рівняння набуває вигляду

$$(x - 3)(2x^2 + 5x + 4) = 0,$$

або

$$x - 3 = 0, \quad 2x^2 + 5x + 4 = 0.$$

Оскільки перше рівняння має корінь  $x_2 = 3$ , а квадратне рівняння коренів не має, то задане рівняння має два корені  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 3$ .

**Відповідь.**  $-1; 3$ .

## Висновки

Многочлени займають важливе місце в курсі алгебри середньої школи, оскільки застосовуються не тільки при тотожних перетвореннях раціональних виразів, а також при розв'язуванні раціональних рівнянь. Наприклад, у курсі алгебри 8 класу при вивченні теми «Раціональні вирази» необхідно вміти виконувати дії над многочленами, а при вивченні теми «Квадратні рівняння» – розкласти многочлени на множники.

В першому розділі кваліфікаційної роботи наведено загальні відомості з теорії многочленів від однієї змінної в більшому обсязі, ніж це передбачено Модельними навчальними програмами «Алгебра. 7-9 класи» [1, 2] для закладів загальної середньої освіти, що дозволить краще проаналізувати методiku вивчення многочленів у курсі алгебри середньої школи.

Другий розділ містить аналіз Модельних навчальних програм «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти та шкільних підручників курсу алгебри 7 класу відносно многочленів, а в третьому розділі розглянуто методичні особливості вивчення многочленів у курсі алгебри 7 класу шляхом аналізу помилок, які найчастіше допускають учні при вивченні многочленів, та наведено рекомендації, як вчителю можна попередити появу цих помилок. Четвертий розділ має практичне застосування, оскільки містить розроблений конспект уроку на тему «Множення многочлена на многочлен» з елементами прикладного застосування многочленів.

В п'ятому розділі в основному розглянуто застосування многочленів при здійсненні тотожних перетворень раціональних виразів та розв'язуванні раціональних рівнянь в курсі алгебри середньої школи. Крім того, наведено використання многочленів при розв'язуванні задач на подільність цілих чисел.

В шостому розділі проаналізовано етапи вивчення многочленів з однією змінною у поглибленому курсі алгебри 8 класу, що також можна використати для проведення факультативних занять у звичайному курсі алгебри.

## Список використаних джерел

1. Модельна навчальна програма «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автор Істер О. С.) [Електронний ресурс]. URL: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/modelni-navchalni-programi-dlya-5-9-klasiv-novoi-ukrainskoi-shkoli-zaprovadzhuyutsya-poetapno-z-2022-roku>
2. Модельна навчальна програма «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.) [Електронний ресурс]. URL: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/modelni-navchalni-programi-dlya-5-9-klasiv-novoi-ukrainskoi-shkoli-zaprovadzhuyutsya-poetapno-z-2022-roku>
3. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс]. URL: <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-6-9-klasiv>
4. Шапочка І.В. Курс лекцій з алгебри. Навчальний посібник. Ужгород : Видавництво УжНУ «Говерла», 2013. 221 с.
5. Безущак О. О., Ганюшкін О. Г., Кочубінська Є. А. Навчальний посібник з лінійної алгебри для студентів механіко-математичного факультету. К. : ВПЦ "Київський університет", 2019. 224 с.
6. Державний стандарт базової середньої освіти [Електронний ресурс]. URL: [https://osvita.ua/legislation/Ser\\_osv/76886/](https://osvita.ua/legislation/Ser_osv/76886/)
7. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Васильєва Д. В., Владімірова Н. Г. Алгебра : підруч. для 7 класу закладів загальної середньої освіти. К. : Видавничий дім «Освіта», 2024. 272 с.
8. Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. Алгебра : підруч. для 7 класу закл. загал. серед. освіти. Тернопіль : Підручники і посібники, 2024. 256 с.

9. Істер О. С. Алгебра : підруч. для 7-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2024. 288 с.
10. Мальований Ю. І., Литвиненко Г. М., Возняк Г. М. Алгебра : підручник для 7 кл. закладів загальн. середн. освіти. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2023. 256 с.
11. Мерзляк А. Г., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти. Х. : Гімназія, 2024. 352 с.
12. Тарасенкова Н. А., Акуленко І. А., Данько О. А., Коломієць О. М., Богатирьова І. М., Сердюк З. О. Алгебра : підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : УОВЦ «Оріон», 2024. 352 с.
13. Бевз Г. П. Методика викладання математики : Навч. посібник. К. : Вища шк., 1989. 367 с.
14. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : Підручник. К. : Вища шк., 2006. 582 с.
15. Благодир Л. А., Колмакова В. О. Попередження помилок учнів під час вивчення теми «Многочлени». *Наукові записки. Серія: Педагогічні науки*, Випуск 200. 2022. С. 53-58.
16. Лов'янова І. В. Методика навчання математики у запитаннях і відповідях. Навчальний посібник для підготовки студентів до атестації здобувачів вищої освіти. Базовий рівень підготовки. Кривий Ріг : Криворізький державний педагогічний університет, 2022. 128 с.
17. Тимків Ю. Додавання та віднімання многочленів. *Математика*. №37 (385) жовтень 2006. С. 14-17.
18. Гожа Г. В. Розкладання многочленів на множники різними способами. *Математика в школах України*. №1 (229) січень 2009. С. 15-17.
19. Дегтяренко Л. І. Застосування різних способів розкладання многочленів на множники. *Математика в школах України*. №6 (162) лютий 2007. С. 30-31.

20. Митрошенко І. Розкладання многочленів на множники.

*Математика*. №2 (494) січень 2009. С. 7-11.

21. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Васильєва Д. В., Владімірова Н. Г. Алгебра : підруч. для 8 класу закладів загальної середньої освіти. К. : Видавничий дім «Освіта», 2021. 255 с.

22. Істер О. С. Алгебра : підруч. для 8-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2021. 270 с.

23. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти. Х. : Гімназія, 2021. 240 с.

24. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 8 кл. з поглибленим вивченням математики закладів заг. серед. освіти. Харків : Гімназія, 2021. 283 с.