МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
УКРАЇНО-УГОРСЬКИЙ НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ

Кафедра фізико-математичних дисциплін

ВЕТРОВСЬКА МЕЛІНДА ВІНЦЕВНА

РОЗВИТОК ПІЗНАВАЛЬНИХ ЗДІБНОСТЕЙ УЧНІВ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ СТАТИСТИКИ В ПОГЛИБЛЕНОМУ КУРСІ АЛГЕБРИ

Спеціальність 014 Середня освіта

Предметна спеціальність 014.04 Математика

Освітня програма «Математика. Інформатика (мова навчання фахових дисциплін – угорська)»

Кваліфікаційна робота
на здобуття освітнього ступеня бакалавра

Науковий керівник:
Мікла Віктор Іванович
д-р фіз.-мат. наук, проф.

Ужгород – 2025

Реєстрація ___3___

(номер)

«03» ___06___ 2025 р. _______ Думнич Жужанна Дюлівна

(підпис)

провідний фахівець кафедри фізико-математичних дисциплін

Кваліфікаційна робота допущена до захисту

Завідувач кафедри фізико-математичних дисциплін

_______ Шафраньош Мирослав Іванович

(підпис)

Доктор фізико-математичних наук, професор

«05» ___06___ 2025 р.

Рецензент _______ Млавець Юрій Юрійович

(підпис)

кандидат фізико-математичних наук, доцент

АНОТАЦІЯ

Кваліфікаційна робота на тему: «Розвиток пізнавальних здібностей учнів під час вивчення елементів статистики в поглибленому курсі алгебри» студента Ветровської Мелінди Вінцевни містить 55 сторінок, 12 рисунків, 28 таблиць та 30 джерела за списком використаної літератури.

В кваліфікаційній роботі здійснено дослідження розвитку основних пізнавальних здібностей учнів під час вивчення елементів статистики в шкільному курсі алгебри, а також розглянути методику вивчення статистики в поглибленому курсі алгебри 9 класу на прикладі аналізу спортивних досягнень в олімпійських видах спорту. Розроблено конспект уроку на тему «Характеристики розсіювання: дисперсія та середнє квадратичне відхилення», який можна використовувати на факультативних заняття та при проведенні гуртків.

Ключові слова: вибірка, частота та відносна частота варіанти, полігон, гістограма, середнє значення, медіана та мода.

ABSTRACT

The qualification paper on the topic: "The development of students' cognitive abilities during the study of the elements of statistics in an advanced algebra course" of student Vetrovska Melinda contains 55 pages, 12 images, 28 tables and 30 sources in of literature.

In the thesis research of the development of students' basic cognitive abilities during the study of the elements of statistics in the school algebra course is studied, and also the methodology for studying statistics in the advanced algebra course of grade 9 is considered using the example of analyzing sports achievements in Olympic sports. A synopsis of the lesson on the topic "Characteristics of dispersion: dispersion and standard deviation", which can be used in optional classes and when conducting circles, has been developed.

Keywords: sample, frequency and relative frequency of variants, polygon, histogram, mean, median and mode.

ЗМІСТ

Вступ

В наш час безперервного розвитку різних технологій спостерігається накопичення великої кількості даних, які необхідно зібрати, систематизувати та обробити з метою подальшого використання. Цим займається така наука як математична статистика.

Першою вдалою спробою використання статистики вважають регулярні переписи населення в Давньому Китаї близько 23 століття до н.е. Для схожих цілей використовувалася статистика в Давньому Єгипті – перепис родючих земельних ділянок вздовж русла річки Ніл та Давньому Римі – облік майна вільних громадян Риму з метою поділу населення на розряди. Пізніше багато полководців здійснювали перепис населення захоплених земель з метою збору податків. Наприклад, після захоплення Київської Русі татари ввели данину на основі проведеного перепису населення.

Зародження статистики як науки відносять до XVII століття. Вперше термін «статистика» застосував німецький професор Г. Ахенваль (1719 – 1772) в 1746 році під час викладання нової навчальної дисципліни про політичний стан справ в державі. Даний напрям розвитку статистики вважають описовим, оскільки цифри практично не використовувалися. Представники англійської школи політичних арифметиків, засновником якої був В. Петті (1623 – 1687), вже шляхом узагальнення та аналізу фактів цифрами описували стан справ в державі. Саме цей напрям зіграв вирішальну роль у становленні статистики як науки. Представники третього статистико-математичного напрямку розвитку статистики, до яких відносять таких математиків як В. Госсет (1876 – 1937), А. Кетле (1796 – 1874), К. Пірсон (1857 – 1936) та Р. Фішер (1890 – 1962), вважали, що в основі статистики лежить теорія ймовірностей.

Статистика використовується у різних сферах нашого життя: біології, економіці, екології, медицині, соціології, управлінні, хімії тощо [1]. Вивчення статистики в шкільному курсі алгебри почалося досить недавно – в 1996 році Міністерством освіти і науки України було затверджено навчальну програму, яка вперше передбачала вивчення елементів математичної статистики. Практична спрямованість статистики дозволяє не лише засвоїти математичні знання, а й навчитися застосовувати їх для аналізу даних, ухвалення рішень, формування аргументованих висновків.

У сучасних умовах реформування української освіти особлива увага приділяється розвитку ключових компетентностей учнів, серед яких важливе місце посідають пізнавальні здібності. Саме ці здібності формують основу для самостійного мислення учнів, активного пізнання та здатності до творчого розв'язання життєвих і навчальних завдань. Одним з ефективних інструментів для розвитку пізнавальних здібностей учнів є навчання математики, зокрема – вивчення статистики як складової поглибленого курсу алгебри, що й зумовило вибір теми кваліфікаційної роботи: «Розвиток пізнавальних здібностей учнів під час вивчення елементів статистики в поглибленому курсі алгебри».

Мета і завдання дослідження. Метою цієї кваліфікаційної роботи є дослідити, розвитку яких пізнавальних здібностей учнів сприяє вивчення статистики в шкільному курсі алгебри, а також розглянути методику вивчення статистики в поглибленому курсі алгебри 9 класу. Для досягнення мети було поставлено такі ***завдання***:

– проаналізувати навчальну та навчально-методичну літературу по темі кваліфікаційної роботи;

– розглянути основні відомості з математичної статистики на вищому теоретичному рівні, ніж передбачено навчальними програмами;

– здійснити аналіз навчальних програм та шкільних підручників курсу алгебри 9 класу щодо вивчення елементів статистики;

– проаналізувати психолого-педагогічні основи пізнавальних здібностей та дослідити, які саме пізнавальні здібності учнів розвиваються під час вивчення статистики;

– розглянути методику вивчення елементів статистики в поглибленому курсі алгебри 9 класу;

– розробити конспект уроку на тему «Характеристики розсіювання: дисперсія та середнє квадратичне відхилення» для класів з поглибленим вивченням математики.

Об’єктом дослідження дипломної роботи є поглиблений курс алгебри, а **предметом дослідження** – елементи статистики як дієвий засіб розвитку пізнавальних здібностей учнів.

Методи дослідження. В даній кваліфікаційній роботі використовуються такі методи дослідження: аналіз навчальних програм та шкільних підручників курсу алгебри 9 класу; теоретичний аналіз психолого-педагогічної літератури; синтез та узагальнення видів завдань, які використовуються для розвитку пізнавальних здібностей учнів.

Структура роботи. Кваліфікаційна робота складається зі вступу, п’яти розділів, висновків та списку використаної літератури.

1. Основи математичної статистики

Для того, щоб краще проаналізувати особливості вивчення елементів статистики в поглибленому курсі алгебри середньої школи, в даному розділі кваліфікаційної роботи розглянуто основні поняття математичної статистики на вищому теоретичному рівні, ніж це передбачено навчальними програмами з математики для загальноосвітніх навчальних закладів [2, 3].

Математична статистика – це розділ математики, який займається розробкою науково обґрунтованих методів збору, систематизації та обробки статистичних даних з метою одержання наукових та практичних висновків [4].

Нехай потрібно здійснити дослідження множини однорідних об’єктів відносно деякої кількісної чи якісної ознаки. Таку множина об’єктів називають ***статистичною сукупністю***. Наприклад, множину студентів Ужгородського національного університету (статистична сукупність) на кінець навчального року можна дослідити відносно їх віку (кількісна ознака) та рівня отриманих знань (якісна ознака).

Для отримання достовірних результатів дослідження краще розглянути кожен об’єкт статистичної сукупності, проте в більшості випадків здійснити це неможливо (наприклад, через велику кількість або недоступність об’єктів дослідження тощо). Якщо провести повноцінне дослідження всіх об’єктів статистичної сукупності немає можливості, то досліджують тільки деяку частину об’єктів цієї сукупності.

Генеральною сукупністю називається статистична сукупність, з якої вибирають для дослідження тільки частину об’єктів, причому вибрана частина об’єктів називається ***вибіркою*** [4, 5]. Наприклад, для оцінки рівня отриманих знань студентів Ужгородського національного університету (генеральна сукупність) обирають студентів 2-го курсу (вибірка).

Кількість об’єктів заданої генеральної сукупності називається ***об’ємом генеральної сукупності***, а кількість об’єктів певної вибірки цієї генеральної сукупності – ***об’ємом вибірки*** [4, 5].

Вибірка називається ***репрезентативною*** (показовою), якщо властивості об'єктів вибірки правильно відображають властивості об'єктів генеральної сукупності [4]. Вибірка вважається репрезентативною, якщо ймовірність всіх об'єктів генеральної сукупності попасти у вибірку однакова, тобто вибір об'єктів вибірки здійснюється випадковим чином. Наприклад, для оцінки рівня отриманих знань студентів Ужгородського національного університету можна здійснити вибірку студентів 2-го курсу різних факультетів, причому студенти повинні обиратися випадковим чином. Якщо буде здійснена вибірка студентів тільки одного факультету, то ця вибірка не буде репрезентативною.

Для дослідження генеральної сукупності відносно кількісної ознаки X здійснюється вибірка з n об'єктів та будується так званий ***варіаційний ряд*** – отриманні значення ознаки X розміщуються в порядку зростання (спадання). Різні значення кількісної ознаки X називаються ***варіантами***, а їх зростаюча послідовність $x_1, x_2, \dots, x_k$ – ***дискретним варіаційним рядом*** [4, 5].

Нехай в результаті деякого дослідження варіанту x_1 отримали n_1 раз, варіанту x_2 – n_2 раз, …, варіанту x_k – n_k раз, причому $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Числа $n_1, n_2, \dots, n_k$ називаються ***частотами*** варіант $x_1, x_2, \dots, x_k$ відповідно, а їх відношення до об'єму вибірки, тобто числа $w_1 = \frac{n_1}{n}, w_2 = \frac{n_2}{n}, \dots, w_k = \frac{n_k}{n}$, – ***відносними частотами*** варіант $x_1, x_2, \dots, x_k$, причому

$$w_1 + w_2 + \dots + w_k = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \dots + \frac{n_k}{n} = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_k}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Статистичним розподілом вибірки називається таблиця, яка містить значення варіант та відповідні їм частоти (або відносні частоти) [4, 5] (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Варіанта, x_i	x_1	x_2	...	x_k
Частота, n_i	n_1	n_2	...	n_k

Накопиченими частотами варіант $x_1, x_2, \dots, x_k$ називаються числа $n_1^{\text{нак}}, n_2^{\text{нак}}, \dots, n_k^{\text{нак}}$ – кількість значень ознаки X, які не перевищують відповідно варіанту $x_1, x_2, \dots, x_k$ [4], тобто накопичені частоти отримуються в результаті послідовного сумування частот.

Приклад 1.1. Було організовано опитування 30 студентів 2-го курсу економічного факультету Ужгородського національного університету щодо їх віку (кількість повних років). В результаті отримали наступні відомості про вік студентів:

19, 21, 19, 17, 19, 20, 18, 19, 18, 19, 19, 20, 18, 18, 19,

18, 20, 19, 19, 22, 19, 19, 21, 19, 17, 19, 18, 19, 19, 18

Скласти статистичний розподіл опитування студентів 2-го курсу економічного факультету щодо їх віку.

Розв'язання. Побудуємо варіаційний ряд, розмістивши отримані при опитуванні студентів дані про їх вік в порядку зростання:

$$\underbrace{17,17}_{\text{2 рази}} \quad \underbrace{18, 18, 18, 18, 18, 18, 18}_{\text{7 разів}}$$

$$\underbrace{19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 19,19}_{\text{15 разів}}$$

$$\underbrace{20, 20, 20}_{\text{3 рази}} \quad \underbrace{21, 21}_{\text{2 рази}} \quad \underbrace{22}_{\text{1 раз}}$$

Можемо зробити висновок, що вік опитаних студентів 2-го курсу економічного факультету коливається від 17 до 22 років, а половина студентів мають 19 років. Причому 17 років мають 2 студентів, 18 років – 7 студентів, 19 років – 15 студентів, 20 років – 3 студентів, 21 рік – 2 студентів і 22 роки – 1 студент.

Таким чином, статистичний розподіл проведеного опитування студентів 2-го курсу економічного факультету відносно їх віку матиме вигляд:

Таблиця 1.2

Вік студента, x_i	17	18	19	20	21	22
Частота, n_i	2	7	15	3	2	1

Доповнимо Таблицю 1.2 ще накопиченими частотами для отриманого дискретного варіаційного ряду:

Таблиця 1.3

Вік студента, x_i	17	18	19	20	21	22
Частота, n_i	2	7	15	3	2	1
Накопичена частота, $n_i^{\text{нак}}$	0	2	9	24	27	29

При дослідженні певної генеральної сукупності відносно кількісної ознаки X її значення можуть відрізняються одне від одного на досить малу величину, тобто ознака буде приймати будь-яке значення з деякого інтервалу. В такому випадку кажуть, що ознака ***змінюється неперервно*** та будується ***інтервальний варіаційний ряд*** – послідовність інтервалів зміни значень даної ознаки X, а статистичний розподіл вибірки представляється у вигляді таблиці, яка містить послідовність інтервалів та відповідні їм ***інтервальні частоти*** (число значень ознаки X, які належать даному інтервалу) [4, 5].

Для побудови інтервального варіаційного ряду необхідно визначити оптимальний інтервал h, який би повною мірою характеризував досліджуване явище, та встановити послідовність інтервалів таким чином: початок першого інтервалу дорівнює $a_1 = x_{\min} - 0{,}5h$, де $x_{\min}$ – найменше значення варіанти; початок другого інтервалу співпадає з кінцем першого інтервалу та дорівнює $a_2 = a_1 + h$; початок третього інтервалу співпадає з кінцем другого інтервалу та дорівнює $a_3 = a_2 + h$ і так далі, поки кінець наступного інтервалу не буде більшим за $x_{\max}$, де $x_{\max}$ – найбільше значення варіанти.

Приклад 1.2. В результаті складання іспиту 20 студентами 3-го курсу інженерно-технічного факультету Ужгородського національного університету з дисципліни «Електроніка» були отримані наступні оцінки за 100 бальною шкалою оцінювання:

72, 79, 67, 60, 76, 71, 63, 86, 85, 92, 78, 82, 96, 73, 65, 81, 85, 95, 92, 64

Скласти статистичний розподіл рівня знань студентів 3-го курсу інженерно-технічного факультету з дисципліни «Електроніка».

Розв'язання. Оскільки отримано досить великий діапазон зміни оцінок студентів, то побудова дискретного варіаційного ряду не принесе результатів. Для отримання більш цілісної картини побудуємо інтервальний варіаційний ряд, розділивши оцінки студентів на чотири групи:

60 – 70: 67, 60, 63, 67 (4 оцінки)

70 – 80: 72, 79, 76, 71, 78, 73, 77 (7 оцінок)

80 – 90: 86, 85, 82, 81, 85 (5 оцінок)

90 – 100: 92, 96, 95, 92 (4 оцінок)

Таким чином, статистичний розподіл рівня знань студентів 3-го курсу інженерно-технічного факультету з дисципліни «Електроніка» матиме вигляд:

Таблиця 1.4

100 бальна шкала оцінювання	60 – 70 низький рівень знань	70 – 80 достатній рівень знань	80 – 90 середній рівень знань	90 – 100 високий рівень знань
Інтервальна частота	4	7	5	4

Отже, більшість студентів 3-го курсу інженерно-технічного факультету мають достатній рівень знань з навчальної дисципліни «Електроніка».

Доповнимо Таблицю 1.4 ще накопиченими частотами для отриманого інтервального варіаційного ряду:

Таблиця 1.5

100 бальна шкала оцінювання	60 – 70 низький рівень знань	70 – 80 достатній рівень знань	80 – 90 середній рівень знань	90 – 100 високий рівень знань
Інтервальна частота	4	7	5	4
Накопичена частота	4	11	16	20

Відмітимо, що інтервальний варіаційний ряд будується у випадку, якщо ознака X неперервно змінюється, або якщо ознака X змінюється дискретно, але отримується велика кількість варіант. Дискретний варіаційний ряд будується тільки у випадку, якщо ознака X змінюється дискретно.

Для графічного зображення статистичного розподілу вибірки, частіш за все використовують полігон та гістограму.

У випадку дискретного варіаційного ряду як правило будують полігон. В прямокутній системі координат відкладають точки з координатами (x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k), де $x_1, x_2, \dots, x_k$ – варіанти, а $n_1, n_2, \dots, n_k$ – частоти цих варіант відповідно та послідовно з'єднують ці точки відрізками. В результаті отримують ламану, яка називається ***полігоном*** [4, 5].

Приклад 1.3. Побудувати полігон статистичного розподілу опитування 30 студентів 2-го курсу економічного факультету щодо їх віку (табл. 1.2).

Розв'язання. Отримаємо

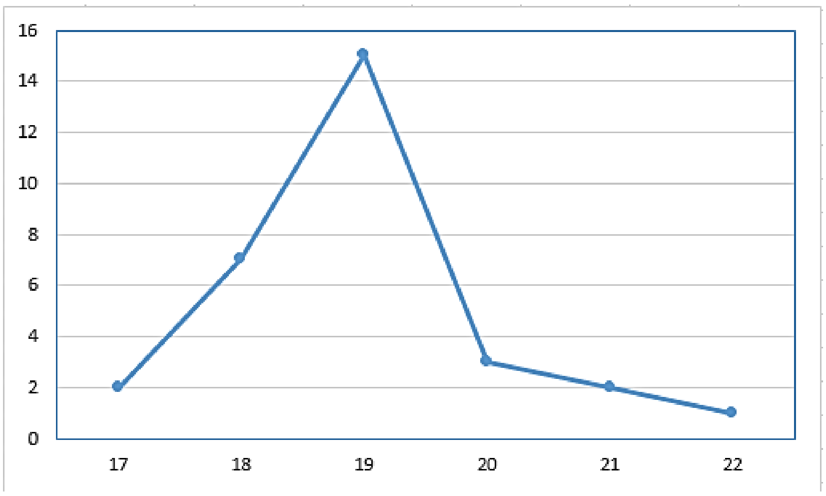

Рисунок 1.1

Гістограму будують тільки у випадку інтервального варіаційного ряду. В прямокутній системі координат на осі Ox відкладаються відрізки довжини h і на цих відрізках будують прямокутники, висоти яких дорівнюють $\frac{n_1}{h}$. Таким чином, отримують деяку східчасту фігуру, яка називається ***гістограмою*** [4, 5].

Приклад 1.4. Побудувати гістограму статистичного розподілу рівня знань студентів 3-го курсу інженерно-технічного факультету з дисципліни «Електроніка» (табл. 1.4).

Розв'язання. Отримаємо

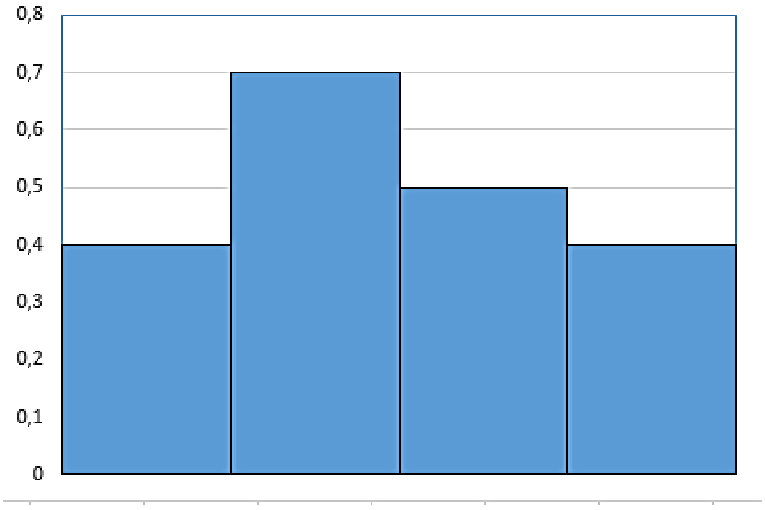

Рисунок 1.2

У випадку інтервального варіаційного ряду також будують полігон. Для цього замість інтервалів використовують значення середин цих інтервалів.

Приклад 1.5. Побудувати полігон статистичного розподілу рівня знань студентів 3-го курсу інженерно-технічного факультету з такої дисципліни як «Електроніка» (табл. 1.4).

Розв'язання. Отримаємо

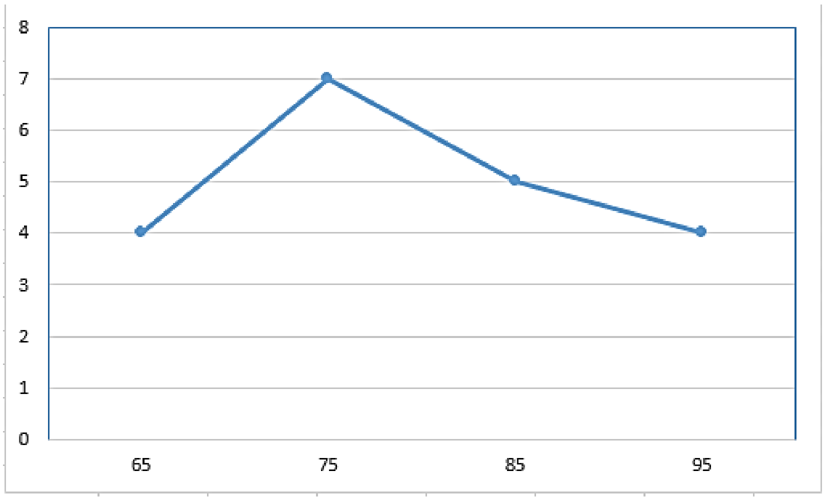

Рисунок 1.3

До числових характеристик вибірки відносять середнє значення, моду та медіану.

Середнім значенням вибірки називається середнє арифметичне значень кількісної ознаки X цієї вибірки [5] та позначається $\overline{x}$.

У випадку, якщо вибірка представлена варіаційним рядом $x_1, x_2, \dots, x_n$, середнє значення цієї вибірки обчислюється за формулою

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n). \tag{1.1}$$

Якщо ж вибірка представлена дискретним варіаційним рядом, то

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \cdots + x_n n_k), \tag{1.2}$$

де $x_1, x_2, \dots, x_k$ – варіанти, а $n_1, n_2, \dots, n_k$ – частоти цих варіант відповідно, а якщо інтервальним варіаційним рядом, то

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(\overline{x}_1 n_1 + \overline{x}_2 n_2 + \cdots + \overline{x}_l n_l), \tag{1.3}$$

де $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k$ – середини інтервалів, а $n_1, n_2, \dots, n_l$ – інтервальні частоти.

Приклад 1.6. На основі даних Прикладу 1.1, обчислити середній вік 30 опитаних студентів 2-го курсу економічного факультету.

Розв’язання. Використовуючи обчислення виконані в Прикладі 1.1, згідно формули (1.2) знаходимо:

$$\overline{x} = \frac{1}{30}(17 \cdot 2 + 18 \cdot 7 + 19 \cdot 15 + 20 \cdot 3 + 21 \cdot 2 + 22 \cdot 1) \approx 19,$$

тобто середній вік 30 опитаних студентів 2-го курсу економічного факультету становить 19 років.

Слід відмітити, що у випадку дискретного варіаційного ряду обчислення середнього значення вибірки за двома формулами (1.1) і (1.2) дає однаковий результат. У випадку інтервального варіаційного ряду обчислення середнього значення згідно двох формул (1.1) і (1.3) можуть відрізнятися за рахунок того, що в формулі (1.3) значення ознаки X всередині інтервалу прирівнюється до значення середини цього інтервалу.

Приклад 1.7. На основі даних Прикладу 1.2, обчислити середній бал 20 студентів 3-го курсу інженерно-технічного факультету з такої дисципліни як «Електроніка» (за 100-бальною шкалою оцінювання).

Розв'язання. Використовуючи обчислення виконані в Прикладі 1.2, згідно формули (1.1) знаходимо:

$$\overline{x} = \frac{1}{20}(72 + 79 + 67 + 60 + 76 + 71 + 63 + 86 + 85 + 92 + 78 +$$

$$+82 + 96 + 73 + 65 + 81 + 85 + 95 + 92 + 64) \approx 78,$$

тобто середній бал студентів 3-го курсу інженерно-технічного факультету з дисципліни «Електроніка» становить 78 балів.

Якщо використати формулу (1.3), то отримаємо, що

$$\overline{x} = \frac{1}{20}(65 \cdot 4 + 75 \cdot 7 + 85 \cdot 5 + 95 \cdot 4) \approx 80,$$

тобто в результаті заміни отриманих даних серединами інтервалів отримуємо похибку в 2 бали.

Медіаною називається значення ознаки X, яке ділить варіаційний ряд навпіл [5], і позначається M_e.

Якщо об'єм здійсненої вибірки є непарним числом, тобто $n = 2r - 1$, то варіаційний ряд можна записати у вигляді

$$x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_{r-1}, \ x_r, \ x_{r+1}, \ \ldots, \ x_n.$$

Оскільки посередині цього ряду знаходиться значення x_r, то згідно означення отримуємо, що $M_e = x_r$.

Якщо ж об'єм вибірки є парним числом, тобто $n = 2r$, тоді варіаційний ряд можна записати у наступному вигляді

$$x_1, \ \ldots, \ x_r, \ x_{r+1}, \ \ldots, \ x_n.$$

Оскільки посередині ряду знаходяться два значення x_r і x_{r+1}, то медіанна буде дорівнювати середньому арифметичному цих значень, тобто

$$M_e = \frac{x_r + x_{r+1}}{2}. \tag{1.4}$$

Приклад 1.8. Обчислити медіану статистичного розподілу опитування 30 студентів 2-го курсу економічного факультету відносно їх віку (табл. 1.2).

Розв'язання. Оскільки було опитано парне число студентів щодо їх віку, то згідно формули (1.4), отримуємо

$$M_e = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = \frac{19 + 19}{2} = 19.$$

У випадку інтервального варіаційного ряду медіана обчислюється згідно формули [5]

$$M_e = a_e + h\frac{0{,}5n - n_e^{\text{нак}}}{n_e}, \quad (1.5)$$

де a_e – початок ***медіанного інтервалу*** (інтервалу, якому відповідає перша з накопичених частот, яка більша або рівна половині об'єму вибірки), $n_e^{\text{нак}}$ – частота, яка накопичена до початку медіанного інтервалу; n_e – частота медіанного інтервалу.

Приклад 1.9. Обчислити медіану статистичного розподілу рівня знань студентів 3-го курсу інженерно-технічного факультету з такої дисципліни як «Електроніка» (табл. 1.5).

Розв'язання. Перша накопичена частота, яка рівна або більша половини об'єму вибірки дорівнює 11, тому медіанним буде інтервал від 70 до 80. Підставляючи дані $a_e = 70, h = 10, n_0 = 7, n_e^{\text{нак}} = 4, n_e = 11$ у формулу (1.5), отримаємо

$$M_e = 70 + 10\frac{0{,}5 \cdot 20 - 4}{11} \approx 75{,}45.$$

Модою називається варіанта, яка найчастіше зустрічається у вибірці [5] та позначається M_o.

У випадку дискретного варіаційного ряду мода дорівнює варіанті, якій відповідає найбільша частота.

Якщо ж вибірка представлена інтервальним варіаційним рядом, то мода обчислюється згідно формули [5]

$$M_0 = a_0 + h\frac{n_0 - n_0'}{2n_0 - n_0' - n_0''}, \tag{1.6}$$

де a_0 – початок ***модального інтервалу*** (інтервалу, якому відповідає найбільша частота), n_0 – частота модального інтервалу, n_0' – частота інтервалу перед модальним інтервалом, n_0''– частота інтервалу після модального інтервалу.

Приклад 1.10. Обчислити моду статистичного розподілу опитування 30 студентів 2-го курсу економічного факультету щодо їх віку (табл. 1.2).

Розв'язання. Оскільки найбільша частота 15 відповідає варіанті 19, то маємо, що $M_o = 19$.

Приклад 1.11. Обчислити моду статистичного розподілу рівня знань 20 студентів 3-го курсу інженерно-технічного факультету з такої дисципліни як «Електроніка» (табл. 1.5).

Розв'язання. Модальним буде інтервал від 70 до 80, оскільки йому відповідає найбільша частота 7. Підставляючи дані $a_0 = 70$, $h = 10$, $n_0 = 7$, $n_0' = 4$, $n_0'' = 5$ у формулу (1.6), отримаємо

$$M_0 = 70 + 10\frac{7 - 4}{2 \cdot 7 - 4 - 5} = 76.$$

2. Аналіз навчальних програм та шкільних підручників курсу алгебри 9 класу

Як показує аналіз чинної на даний момент для 8-9 класів навчальної програми з математики для загальноосвітніх навчальних закладів [2] елементи статистики розглядаються у курсі алгебри 9 класу під час вивчення останньої Теми 4. Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики. При цьому на рівні обов'язкових результатів навчання передбачається знайомство учнів зі способами подання даних (за допомогою таблиць, різних видів діаграм та графіків) та їх обробки (вводиться поняття вибірки та об'єму вибірки, частоти та відносної частоти значень вибірки).

Згідно навчальної програми для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів [3] елементи статистики розглядаються також у курсі алгебри 9 класу, але вже під час вивчення Теми 5. Елементи прикладної математики. На рівні обов'язкових результатів навчання передбачається не тільки знайомство учнів зі способами подання та обробки даних, а також вивчення таких числових характеристик вибірки як середнє значення, мода та медіана.

Щодо старшої школи, то аналіз навчальних програм з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів рівня стандарту [6] та профільних рівнів [7, 8] показує, що елементи статистики розглядаються тільки при вивченні курсу алгебри і початків аналізу на рівні стандарту. Так, в 11 класі при розгляді Теми 3. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики на рівні обов'язкових результатів передбачено вивчення таких характеристик вибірки як розмах вибірки, середнє значення, мода та медіана. Це цілком зрозуміло, оскільки рівень стандарту є плавним продовженням звичайного курсу математики середньої школи, а профільні рівні – продовженням поглибленого вивчення курсу математики в середній школі.

Проведемо аналіз шкільних підручників курсу алгебри 9 класу [9 – 14] відносно змісту навчального матеріалу при вивченні елементів статистики.

1. У підручнику таких авторів як Бевз Г. П., Бевз В. Г. [9] елементи статистики розглядаються в § 21. Відомості про статистику Розділу 4. Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики. На початку параграфу дано означення математичної статистики. Далі вводяться в розгляд такі поняття як вибірка, частота та відносна частота значень вибірки. Розглядаються способи подання статистичних даних у вигляді простої та частотної таблиць, а також стовпчастої діаграми (або гістограми). Крім того, в цьому підручнику подано означення таких числових характеристик (центральних тенденції) вибірки як мода, медіана та середнє значення. Під час подання матеріалу розв'язано два приклади, а в кінці параграфу наведено розв'язування ще двох прикладів та містяться вправи для усного виконання та двох рівнів складності – Рівень А і Рівень Б. Відмітимо, що в кінці розділу можна знайти рубрику «Історичні відомості», в якій наведена коротка інформація про видатного українського вченого Кравчука М. П. (1892 – 1942).

2. У підручнику такого автора як Істер О. С. [10] елементи статистики розглядаються в § 24. Початкові відомості про статистику. Статистичні дані. Способи подання даних та їх обробки Розділу 4. Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики. На самому початку параграфу подано означення математичної статистики. В підручнику спочатку розглядаються 4 способи подання статистичних даних: у вигляді таблиці, стовпчастої діаграми (або гістограми), кругової діаграми та за допомогою графіка та вводиться поняття середнього значення статистичних вимірювань. Далі вводяться в розгляд такі поняття як вибірка, частота та відносна частота значень вибірки та наведено ще один спосіб подання статистичних даних – частотна таблиця. Під час подання матеріалу розв'язано п'ять прикладів, а в кінці параграфу містяться вправи чотирьох рівнів складності: початковий, середній, достатній та високий.

3. У підручнику авторів Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. [11] елементи статистики розглянуто в пункті 24. Статистичні дані § 4. Основи комбінаторики, теорії ймовірностей і статистики. На початку пункту наведено означення математичної статистики та вибірки. Далі вводяться в розгляд такі поняття як варіанта та частота варіанти, розглянуто подання даних у вигляді частотної таблиці. На наступному кроці подано два графічні способи подання даних – полігон частот та стовпчикова діаграма. Слід відмітити, що в даному підручнику розглянуто побудову інтервальної таблиці даних. На завершення вводиться поняття середнього значення вибірки. Під час подання матеріалу розв'язано три ілюстративні приклади, а в кінці пункту містяться вправи для усного виконання та двох рівнів складності – Рівень А і Рівень Б. В кінці параграфу можна знайти рубрику «Цікаво знати», в якій наведено цікаві відомості про математичну статистику.

4. У підручнику авторів Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. [12] елементи статистики наведено в пункті 24. Початкові відомості про статистику рубрики «Для тих, хто хоче знати більше». На початку пункту дано означення статистики та розглянуто етапи здійснення статистичного дослідження. Далі вводиться в розгляд поняття вибірки та зазначається, що вибірка обов'язково має бути репрезентативною (показовою). Розглядаються такі способи подання даних як таблиці, стовпчасті діаграми – гістограми, графік, кругова діаграма. На наступному кроці вводиться поняття середнього значення, частоти та відносної частоти та наведено ще один спосіб подання статистичних даних – частотна таблиця. В цьому підручнику також введено поняття таких числових характеристик вибірки як мода та медіана, які, як зазначено, разом із середнім значенням називаються мірами центральної тенденції. При поданні матеріалу розв'язано чотири ілюстративні приклади, а в кінці пункту містяться завдання, що відповідають початковому та середньому і достатньому рівням навчальних досягнень учнів.

5. В підручнику авторів Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. [13] для поглибленого вивчення алгебри елементи статистики розглядаються в пункті 29. Початкові відомості про статистику § 6. Елементи комбінаторики та теорія ймовірностей. Слід відмітити, що зміст навчального матеріалу нічим не відрізняється від попереднього підручника цих же авторів.

6. У підручнику таких авторів як Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М, Коломієць О. М., Сердюк З. О. [14] елементи статистики дано в §17. Початкові відомості про статистику. Способи подання даних та їх обробки Розділу 4. Основи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики. На самому початку параграфу наведено означення статистики, статистичного спостереження, генеральної сукупності та вибірки, об'єму генеральної сукупності та вибірки. Далі вводиться в розгляд поняття статистичного ряду, варіаційного ряду та розглядається спосіб подання даних за допомогою статистичної таблиці. На наступному кроці дано означення таких чисельних характеристик вибірки як середнє значення, мода та медіана. На завершення розглядаються способи подання даних: таблиці, стовпчикові діаграми – гістограми, кругові діаграми. Подання матеріалу ілюструється розв'язуванням приклади, а в кінці параграфа містяться вправи трьох рівнів складності – початкового, середнього та високого. В кінці розділу можна знайти рубрику «Дізнайтеся більше», в якій розповідається про різні розділи статистики (наприклад, медична статистика, демографічна статистика тощо) та розглянуто ще два способи подання даних – лінійчаті та пелюсткові діаграми.

Проаналізувавши шкільні підручники курсу алгебри 9 класу [9 – 14] відносно вивчення елементів статистики, можна зробити висновок, що всі вони мають чітку структуру та повністю відповідають навчальним програмам з математики для загальноосвітніх навчальних закладів [2, 3].

В таблиці 2.1 наведено порівняльний аналіз розглянутих підручників курсу алгебри 9 класу щодо способів подання статистичних даних, введених основних понять та числових характеристик вибірки.

Таблиця 2.1

Підручник Алгебра 9 клас	**Способи подання даних**	**Основні поняття**	**Числові характеристики вибірки**
Бевз Г. П., Бевз В. Г.	таблиця, гістограма, кругова діаграма	вибірка, частота, відносна частота	середнє значення, мода та медіана
Істер О. С.	таблиця, гістограма, кругова діаграма, графік	вибірка, обсяг вибірки, частота, відносна частота	середнє значення
Кравчук В., Підручна М., Янченко Г.	таблиця, полігон частот, гістограма	вибірка, варіанта, частота варіанти	середнє значення
Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.	таблиця, гістограма, графік, кругова діаграма	вибірка, частота, відносна частота	середнє значення, мода та медіана
Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М, Коломієць О. М., Сердюк З. О.	таблиця, гістограма, кругова діаграма	генеральна сукупність, статистичний ряд, варіаційний ряд	середнє значення, мода та медіана

Як випливає з Таблиці 2.1, в більшості підручників розглядаються такі числові характеристики вибірки як середнє значення, мода та медіана, хоча це і не передбачено навчальною програмою з математики для загальноосвітніх навчальних закладів [2].

3. Розвиток пізнавальних здібностей учнів під час вивчення елементів статистики в шкільному курсі алгебри

Сучасний світ розвивається та змінюється досить швидкими темпами, що в свою чергу змушує представника будь-якої професії пристосовуватися до цих змін шляхом здобуття нових знань та набуття нових вмінь та навичок. При цьому особистість повинна вміти самостійно здобувати нові знання (серед величезного обсягу доступної інформації виділити необхідну та правильно скористатися нею) та набувати нових компетенцій, що неможливо здійснити без правильної організації пізнавальної діяльності.

3.1. Поняття пізнавальних здібностей в психології та педагогіці

Пізнавальна діяльність особистості є складним педагогічним об’єктом. Як зазначав видатний український вчений-педагог Фіцула М. М.: «***Пізнання*** – це процес цілеспрямованого відображення об’єктивної реальності у свідомості людей» [15]. Пізнання людиною здійснюється через ***пізнавальний процес*** – «психічний процес, за допомогою якого людина пізнає світ» [16], причому цей процес є активним. ***Пізнавальна активність*** – це бажання людини здобувати нові знання та використовувати їх при розв’язуванні різноманітних завдань. Слід відмітити, що при здійснені пізнавальної діяльності розвиваються такі якості як самостійність та організованість, а мислення переходить на новий рівень – замість безпосереднього відтворення відбувається активний пошук нових шляхів розв’язування завдань.

Аналіз навчальної літератури з психології показує, що є кілька підходів до визначення поняття «пізнавальні здібності» особистості, узагальнивши які, можна зробити наступний висновок, що ***пізнавальні здібності*** особистості – це індивідуальні психологічні особливості цієї особистості, за допомогою яких здійснюється засвоєння нових знань, вмінь та навичок, причому ці особливості сприяють ефективній навчальній діяльності та розвивають логічне мислення.

В шкільній педагогіці під ***пізнавальною діяльністю*** розуміють процес «відображення в свідомості учнів явищ реальної дійсності, розширення та поповнення знань та уявлень про явища та закони природи та суспільства» [17]. Тому ***пізнавальну активність*** розглядають як соціальну особливість учня, яка формується в результаті здійснення ним цілеспрямованої діяльності в навчанні, суспільному житті, при заняттях спортом чи різними видами творчості тощо. Можна виділити три рівні пізнавальної активності учнів [17]:

I. ***відтворення*** – учень намагається зрозуміти, запам'ятати та відтворити знання, засвоїти способи застосування цих знань при розв'язуванні завдань;

II. ***інтерпретація*** – учень намагається зрозуміти зв'язки між явищами та засвоїти способи застосування цих зав'язків при розв'язуванні завдань;

III. ***творчість*** – учень проявляє зацікавленість та намагається не тільки зрозуміти суть явища, а також знайти для нього новий спосіб застосування.

З погляду шкільної педагогіки пізнавальні здібності учнів проявляються у вмінні аналізувати та узагальнювати інформацію, формулювати припущення та будувати логічні міркування, розв'язувати нестандартні задачі. Відмітимо, що розвиток пізнавальних здібностей учнів в значній мірі залежить від змісту навчального матеріалу та способів навчання. Важливу роль також відіграють умови, за яких учень може бути активним учасником пізнавального процесу та здійснювати самостійні відкриття.

3.2. Основні типи пізнавальних здібностей учнів та їх розвиток під час вивчення елементів статистики

Аналіз навчальної та навчально-методичної літератури з психології та педагогіки [18 – 22] показує, що класифікація пізнавальних здібностей учнів здійснюється в залежності від пізнавальної діяльності, через яку проявляються ці здібності.

1. Аналітичні здібності (або ***аналіз***) – це здатність розкладати складну інформацію на частини та виявляти взаємозв'язки між цими частинами.

При вивченні елементів статистики в шкільному курсі алгебри розвиток аналітичних здібностей учнів здійснюється через аналіз таблиць даних (різних видів діаграм, графіків).

Приклад 3.1. В таблиці 3.1 дано результати опитування учнів 7-Б класу щодо їх улюбленого навчального предмету. Який предмет найпопулярніший серед учнів цього класу? Чому?

Таблиця 3.1. Улюблений предмет учнів 7-Б класу

Навчальний Предмет	**Біологія**	**Географія**	**Інформатика**	**Математика**
Кількість учнів	2	5	8	3

Розв’язання. Найпопулярнішим навчальним предметом учнів 7-Б класу є інформатика, оскільки найбільша кількість учнів вказали саме цей предмет.

2. Синтетичні здібності (або ***синтез***) – здатність об’єднувати окремі елементи або факти в цілісну систему. Наприклад, об’єднання кількох таблиць даних (різних видів діаграм, графіків) в спільну таблицю (діаграму, графік) та здійснення відповідного висновку.

Приклад 3.2. В таблицях 3.2, 3.3 та 3.4 подано результати опитування відповідно учнів 7-А, 7-Б та 7-В класів відносно їх улюбленого навчального предмету. Який предмет найпопулярніший серед учнів 7-их класів цієї школи? Чому?

Таблиця 3.2. Улюблений предмет учнів 7-А класу

Навчальний Предмет	**Біологія**	**Географія**	**Іноземна мова**	**Інформатика**
Кількість учнів	1	3	8	6

Таблиця 3.3. Улюблений предмет учнів 7-Б класу

Навчальний Предмет	**Біологія**	**Географія**	**Інформатика**	**Математика**
Кількість учнів	2	5	8	3

Таблиця 3.4. Улюблений предмет учнів 7-Б класу

Навчальний предмет	**Біологія**	**Географія**	**Іноземна мова**	**Інформатика**	**Математика**
Кількість учнів	1	3	6	6	2

Розв'язання. Об'єднаємо задані Таблиці 3.2, 3.3 та 3.4 в одну спільну таблицю:

Таблиця 3.5. Улюблений предмет учнів 7-их класів

Навчальний предмет	**Біологія**	**Географія**	**Іноземна мова**	**Інформатика**	**Математика**
Кількість учнів	4	11	14	20	5

Найпопулярнішим навчальним предметом учнів 7-их класів цієї школи є інформатика, оскільки найбільша кількість учнів вказали саме цей предмет.

3. Здібності узагальнювати (або ***узагальнення***) – це здатність виявляти загальні закономірності та робити відповідні висновки. Наприклад, зробити висновок про тенденцію до зростання (або спадання) деякого явища на основі графіка.

Приклад 3.3. На Рисунку 3.1 зображено графік залежності інтенсивності фотосинтезу від кількості освітлення. Які тенденція (зростання чи спадання) спостерігається?

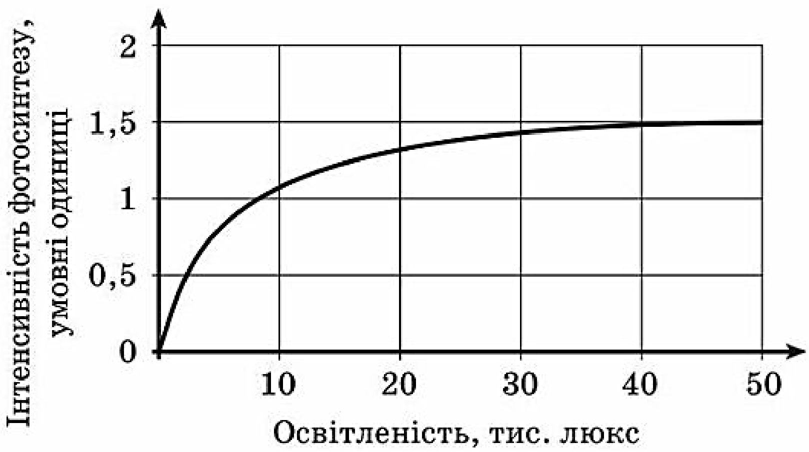

Рисунок 3.1

Розв'язання. Як випливає із Рисунка 3.1, при відсутності освітлення фотосинтез не відбувається, із збільшенням освітлення від 0 до 50 тис. люкс інтенсивність фотосинтезу поступово зростає, а при 50 тис. люкс інтенсивність фотосинтезу набуває свого максимального значення.

Отже, спостерігається тенденція збільшення інтенсивності фотосинтезу із збільшенням кількості освітленості.

4. Здібності порівнювати (або ***порівняння***) – здатність виявляти схоже та відмінне між елементами або явищами. Наприклад, порівняння середнього значення у двох вибірках.

Приклад 3.4. В таблиці 3.6 представлена максимальна та мінімальна температура в квітні 2025 року. Знайдіть середню максимальну температуру кожних 10 днів квітня та порівняйте отримані результати. Які висновки можна зробити?

Таблиця 3.6. Температура в квітні 2025 року [23]

	1 квітня	2 квітня	3 квітня	4 квітня	5 квітня	6 квітня
	+11° +3°	+9° +2°	+10° +2°	+11° +3°	+12° +3°	+13° +4°
7 квітня	8 квітня	9 квітня	10 квітня	11 квітня	12 квітня	13 квітня
+13° +6°	+13° +4°	+13° +4°	+12° +4°	+13° +5°	+13° +4°	+13° +5°
14 квітня	15 квітня	16 квітня	17 квітня	18 квітня	19 квітня	20 квітня
+13° +5°	+12° +5°	+14° +6°	+14° +6°	+15° +5°	+14° +7°	+13° +6°
21 квітня	22 квітня	23 квітня	24 квітня	25 квітня	26 квітня	27 квітня
+13° +6°	+14° +5°	+16° +5°	+18° +7°	+18° +7°	+18° +8°	+20° +8°
28 квітня	29 квітня	30 квітня				
+21° +10°	+21° +10°	+21° +11°				

Розв'язання. Знаходимо середнє значення максимальної температури для кожних 10 днів квітня 2025 року:

$$\overline{x}_1 = \frac{11 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 13 + 13 + 13 + 12}{10} = \frac{117}{10} \approx 12;$$

$$\overline{x}_2 = \frac{13 + 13 + 13 + 13 + 12 + 14 + 14 + 15 + 14 + 13}{10} = \frac{134}{10} \approx 13;$$

$$\overline{x}_3 = \frac{13 + 14 + 16 + 18 + 18 + 18 + 20 + 21 + 21 + 21}{10} = \frac{180}{10} = 18.$$

Отже, спочатку з 1 квітня по 10 квітня 2025 року середня максимальна температура становила 12°, далі з 11 квітня по 20 квітня 2025 року – 13°, нарешті з 21 квітня по 30 квітня 2025 року – 18°. Таким чином, кожні 10 днів середня максимальна температура в травні 2025 року зростала.

5. Здібності класифікувати (або ***класифікація***) – це вміння групувати елементи за спільними ознаками. Наприклад, класифікувати дані за віком, рівнем знань, розміром заробітної плати тощо.

Приклад 3.5. В результаті проведення контрольної роботи з математики учні 9 класу отримали наступні оцінки:

8, 5, 12, 5, 8, 4, 9, 7, 10, 9, 8, 10, 5, 11, 7, 6, 5, 11, 9, 8

Складіть таблицю навчальних досягнень учнів за трьома рівнями знань: низький (4-6 балів), середній (7-9 балів) та високий (10-12 балів). Побудуйте стовпчикову діаграму.

Розв'язання. Спочатку групуємо оцінки учні відповідно до трьох рівнів знань:

низький (4-6 балів): 5, 5, 4, 5, 6, 6;

середній (7-9 балів): 8, 8, 9, 7, 9, 8, 7, 9, 8;

високий (10-12 балів): 12, 10, 10, 11, 11.

Отримані результати записуємо в наступну таблицю:

Таблиця 3.7

Рівень знань учнів	**низький (4-6 балів)**	**середній (7-9 балів)**	**високий (10-12)**
Кількість учнів	6	9	5

на основі якої будуємо стовпчикову діаграму:

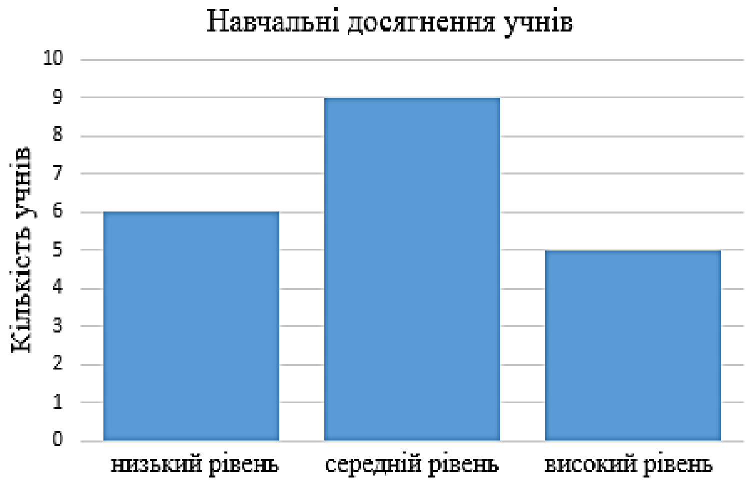

Рисунок 3.2

6. Здібності логічно мислити (або ***логічне мислення***) – це здатність мислити послідовно та робити аргументовані висновки. Наприклад, зробити висновок про залежність між вхідними даними спостереження та отриманим результатом.

Приклад 3.6. В результаті опитування дівчат 10-А класу встановили, що 9 дівчатам подобається серіал «Вензден», а одна дівчина його не дивилася, тому нічого сказати про нього не може. Зробили висновок: «90% дівчат у класі подобається серіал «Вензден». Чи вірний цей висновок?

Відповідь. Ні, висновок не вірний. Вибірка не є репрезентативною.

7. Здібності до абстрагування – це здатність здійснювати перехід від конкретного до загального. Наприклад, при знаходженні середнього значення набору даних учень не тільки здійснює безпосереднє обчислення, а також розуміє суть цієї числової характеристики.

Приклад 3.7. Протягом тижня учень обідав у шкільній столовій та витратив наступні суми грошей:

75 грн, 80 грн, 65 грн, 95 грн, 82 грн.

Яка середня вартість обіду учня протягом тижня?

Розв'язання. Знаходимо середнє значення для вказаного набору чисел:

$$\bar{x} = \frac{75 + 80 + 65 + 95 + 82}{5} = \frac{397}{5} \approx 79.$$

Отже, середня вартість обіду учня в шкільній столовій становить 79 грн.

8. ***Просторово-візуальні здібності*** – це здатність «читати» візуально представлену інформацію. Наприклад, здійснювати інтерпретацію графіків та різних видів діаграм.

Приклад 3.8. На Рисунку 3.3 зображено стовпчикову діаграму довжини п'яти найбільших рік України. Яка річка України є найдовшою? Довжина яких рік України знаходиться в межах від 600 до 800 км?

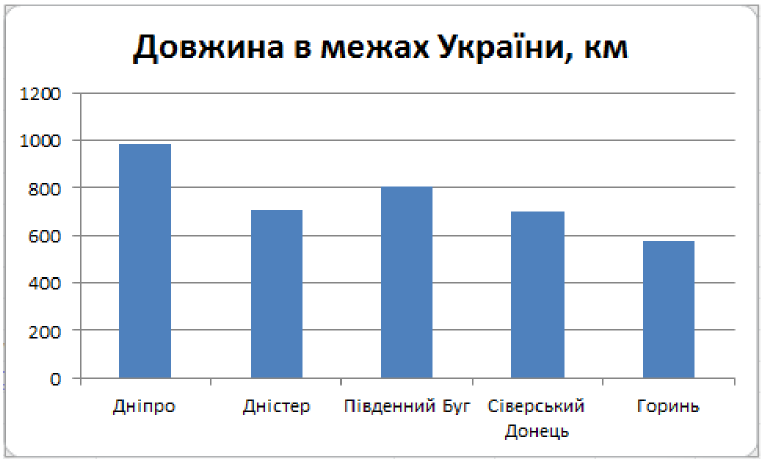

Рисунок 3.3

Розв'язання. Згідно Рисунка 3.3, найдовшою річкою України є Дніпро. Довжина таких рік як Дністер, Південний Буг та Сіверський Донець складає від 600 до 800 км.

Слід відмітити, що розвиток пізнавальних здібностей учнів залежить також від сформованості загальних навчальних вмінь: організовувати власне навчання та здійснювати самоконтроль.

4. Методика вивчення основ математичної статистики в поглибленому курсі алгебри

В даному розділі дипломної роботи розглянемо, як можна познайомити учнів з основами математичної статистики на прикладі аналізу спортивних досягнень в олімпійських видах спорту.

Вступне слово вчителя. В наш час проводиться велика кількість різних спортивних змагань, проте Олімпійські ігри залишаються найпопулярнішими. Останні XXIV зимові Олімпійські ігри були проведені в 2022 році в столиці Китаю – Пекіні [24]. На цих змаганнях українські спортсмени здобули тільки одну срібну медаль. А останні XXXIII літні Олімпійські ігри були проведені в 2024 році у столиці Франції – Парижі та інших 16 містах європейської частини Франції [25]. На цих змаганнях українські спортсмени вже здобули 12 медалей – 3 золоті медалі, 5 срібних медалей і 4 бронзові медалі. Мені відомо, що більшість учнів слідкували за літніми Олімпійськими іграми 2024 та вболівали за українських спортсменів.

Слід відмітити, що при проведенні різних спортивних змагань велику роль відіграють вимірювання. Наприклад, при змаганнях з бігу все може залежати від сотої долі секунди, а при стрибках у довжину – від сотої долі міліметра. При цьому зафіксовані результати спортивних змагань необхідно спочатку обробити та систематизувати, а потім проаналізувати ці результати з метою їх подальшого практичного застосування. Цим займається така наука як ***математична статистика***.

4.1. Основні поняття математичної статистики

Етап 1. Наводиться означення математичної статистики.

Математична статистика – це наука, яка займається обробкою, систематизацією та аналізом результатів, отриманих при проведені деякого спостереження або дослідження [10].

Етап 2. Вводиться в розгляд поняття генеральної сукупності, вибірки та об'єму вибірки.

Генеральною сукупністю називається будь-яка множина однорідних об'єктів (наприклад, множина спортсменів, які беруть участь в Олімпійських іграх). Будь-яка множина об'єктів, яка виділена з генеральної сукупності для проведення деякого дослідження, називається ***вибіркою,*** а кількість об'єктів у цій множині – ***об'ємом вибірки*** [10] (наприклад, кількість спортсменів, які беруть участь у змаганнях з біатлону, та їх кількість).

Слід відмітити, що вибірка має бути ***однорідною***, тобто вибір об'єктів з генеральної сукупності має здійснюватися на визначених умовах (наприклад, вік або стать учасників Олімпійських ігор, участь у певному виді змагань) та ***репрезентативною*** (показовою), тобто властивості об'єктів вибірки мають відображати властивості об'єктів всієї генеральної сукупності (наприклад, жеребкування або проведення відбіркових турів).

4.2. Табличний та графічний способи представлення статистичних даних

Перед безпосередньою статистичною обробкою, отримані результати досліджень представляються у табличній або графічній формі.

Етап 3. Розглядається табличний спосіб представлення даних.

Для того, щоб представити результати дослідження у табличній формі спочатку треба побудувати так званий ***варіаційний ряд*** – значення результатів дослідження $x_1, x_2, \dots, x_n$ розміщуються в порядку зростання (або спадання).

Приклад 4.1. В таблиці 4.1 наведені результати стрибків з трампліна дванадцяти найкращих спортсменів на зимових Олімпійських іграх 2022 року. Побудувати варіаційний ряд за стовпцем «Бали за відстань».

Розв'язання. Для побудови варіаційного ряду, розмістимо значення балів за відстань в порядку зростання:

62,7; 66,3; 66,3; 65,4; 65,4; 65,4; 65,4; 67,2; 70,8; 75,3; 78,0; 80,7

Таблиця 4.1 [26]

Місце	Номер	Ім'я	Країна	Відстань (м)	Бали за відстань	Суддівські бали	Загалом[2]
1	53	Маріус Ліндвік	Норвегія	135.0	78.0	55.5	136.4
2	54	Гальвор Егнер Гранеруд	Норвегія	133.5	75.3	55.5	131.6
3	40	Петер Превц	Словенія	131.0	70.8	54.0	128.3
4	50	Штефан Крафт	Австрія	128.5	66.3	55.0	127.6
5	31	Данило Садреєв	Олімпійський комітет Росії	136.5	80.7	51.5	127.3
6	52	Маркус Айзенбіхлер	Німеччина	129.0	67.2	52.5	123.3
7	22	Антті Аалто	Фінляндія	126.5	62.7	52.5	123.0
8	39	Каміль Стох	Польща	128.0	65.4	54.5	122.5
9	55	Рьою Кобаясі	Японія	128.0	65.4	54.0	121.3
10	48	Цене Превц	Словенія	128.5	66.3	52.0	121.1
11	41	Мануель Феттнер	Австрія	128.0	65.4	54.0	120.5
12	56	Карл Гайгер	Німеччина	128.0	65.4	54.0	120.0

Якщо розглянути результати значно більшої кількості спортсменів, то варіаційний ряд стане досить громіздким, а для його побудови знадобиться більше часу. В більшості випадків варіаційний ряд не є інформативним.

Проте, якщо розглянути стовпець «Суддівські бали» та перерахувати всі можливі значення балів (***варіанти*** $x_1, x_2, \dots, x_k$):

51,5; 52,0; 52,5; 54,0; 54,5; 55,0; 55,5;

а також підрахувати скільки разів кожна варіанта зустрічається (***частоти варіант*** $n_1, n_2, \dots, n_k$, причому $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$):

Таблиця 4.2

Суддівські бали, x_i	51,5	52,0	52,5	54,0	54,5	55,0	55,5
Частота, n_i	1	1	2	4	1	1	2

то інформативність збільшується – третина спортсменів отримали 54,0 балів.

Дискретним варіаційним рядом називається таблиця, в першому рядку якої містяться в порядку зростання варіанти x_i, а в другому рядку – частоти n_i цих варіант (або відносні частоти f_i – відношення варіанти до її частоти).

Таблиця 4.3

Варіанта, x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_k
Частота, n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_k

У випадку великої кількості варіант, які здебільшого зустрічаються тільки один раз, будується інтервальний варіаційний ряд.

Інтервальним варіаційним рядом називається таблиця, перший рядок якої містить послідовні інтервали варіант, а другий – ***інтервальні частоти*** n_i (кількість значень варіаційного ряду, які попадають у відповідний інтервал).

Для побудови інтервального варіаційного ряду необхідно встановити оптимальне число інтервалів r, яке визначається для кожного випадку окремо (в залежності від мети дослідження, об'єму вибірки та степені зміни значень результатів дослідження) та обчислити довжину інтервалу.

Приклад 4.2. В таблиці 4.4 наведені результати з плавання на літніх Олімпійських іграх 2024 року – 100 метрів на спині (чоловіки). Побудувати інтервальний варіаційний ряд за стовпцем «Час».

Розв'язання. Насамперед знаходимо ***розмах варіювання*** за формулою

$$R = x_{\max} - x_{\min},$$

де $x_{\min}$ і $x_{\max}$ – відповідно найменша та найбільша варіанти.

Отримаємо

$$R = 53{,}93 - 52{,}78 = 1{,}15.$$

Далі розбиваємо весь діапазон розмаху варіювання на 2 і 4 інтервали та обчислюємо довжини цих інтервалів:

$$\Delta x_2 = \frac{1{,}15}{2} \approx 0{,}58; \quad \Delta x_4 = \frac{1{,}15}{4} \approx 0{,}29.$$

Таблиця 4.4 [27]

Місце	Заплив	Доріжка	Плавець	Країна	Час
1	5	2	Хуберт Кош	Угорщина (HUN)	52.78
2	5	6	Пітер Кутзе	ПАР (RSA)	52.90
3	6	5	Апостолос Хрістоу	Греція (GRE)	52.95
4	6	4	Раян Мерфі	США (USA)	53.06
5	4	6	Ксавери Масюк	Польща (POL)	53.08
6	4	3	Йоанн Ндує-Бруар	Франція (FRA)	53.20
6	5	4	Сюй Цзяюй	Китай (CHN)	53.20
8	5	3	Евангелос Макригіанніс	Греція (GRE)	53.24
9	5	5	Гантер Армстронґ	США (USA)	53.34
10	4	2	Мірослав Кнедла	Чехія (CZE)	53.41
11	6	3	Олівер Морґан	Велика Британія (GBR)	53.44
12	4	4	Томас Чеккон	Італія (ITA)	53.45
13	6	6	Мевен Томак	Франція (FRA)	53.51
14	4	5	Уго Гонсалес	Іспанія (ESP)	53.68
15	6	8	Блейк Тірні	Канада (CAN)	53.89
16	6	2	Джонатон Маршалл	Велика Британія (GBR)	53.93

Нарешті можемо побудувати інтервальні варіаційні ряди відповідно для 2 та 4 інтервалів часу.

Таблиця 4.5

2 інтервали часу	$[52{,}78; 53{,}36)$	$[53{,}36; 53{,}94]$
Інтервальні частоти, n_i	9	7

Таблиця 4.6

4 інтервали часу	$[52{,}78; 53{,}07)$	$[53{,}07; 53{,}36)$	$[53{,}36; 53{,}65)$	$[53{,}65; 53{,}94]$
Інтервальні частоти, n_i	4	5	4	3

Як видно з Таблиць 4.5, 4.6, при розбитті на 2 інтервали досить складно встановити закономірності розподілу часу здійснення запливу спортсменами, а при розбитті на 4 інтервали розподіл часу стає більш закономірним.

Етап 4. Розглядається графічний спосіб представлення даних.

Для того, щоб представити результати дослідження у графічній формі використовуються такі фігури як полігон частот та гістограма.

Полігон частот – це ламана, яка послідовно з'єднує точки [5]

$$(x_1, n_1),\ (x_2, n_2),\ (x_3, n_3),\ \dots,\ (x_k, n_k),$$

де $x_1, x_2, \dots, x_k$ – варіанти, а $n_1, n_2, \dots, n_k$ – частоти цих варіант відповідно.

Приклад 4.3. Побудувати полігон частот для дискретного варіаційного ряду з прикладу 4.1.

Розв'язання. Матимемо

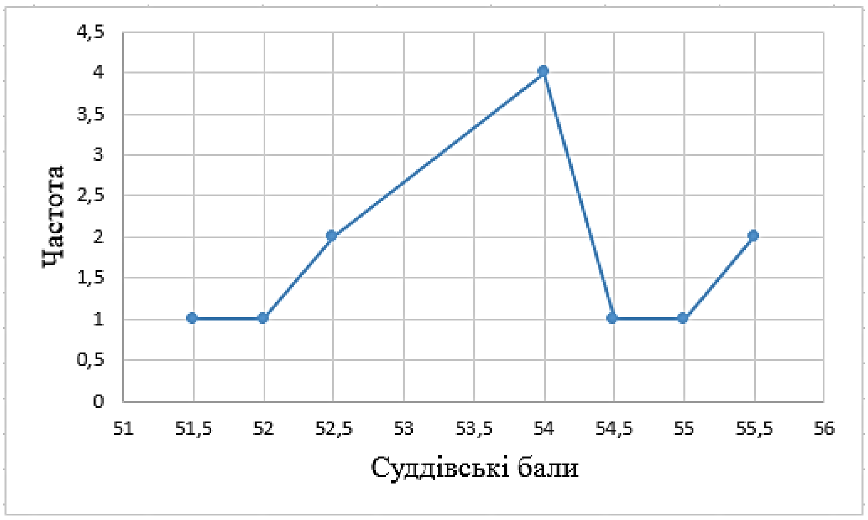

Рисунок 4.1

При побудові полігону частот для інтервального варіаційного ряду будується ламана, яка послідовно з'єднує наступні точки

$$(\overline{x}_1, n_1),\ (\overline{x}_2, n_2),\ (\overline{x}_3, n_3),\ \dots,\ (\overline{x}_r, n_r),$$

де $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_r$ – середини інтервалів, а $n_1, n_2, \dots, n_r$ – відповідні інтервальні частоти.

Приклад 4.4. Побудувати полігони частот для інтервальних варіаційних рядів з прикладу 4.2.

Розв'язання. Знаходимо середини кожного інтервалу – Таблиці 4.7 і 4.8 та будуємо відповідні полігони частот – Рисунки 4.3 і 4.4.

Таблиця 4.7

2 інтервали часу	[52,78; 53,36)	[53,36; 53,94]
Середини інтервалів	53,07	53,65
Інтервальні частоти, n_i	9	7

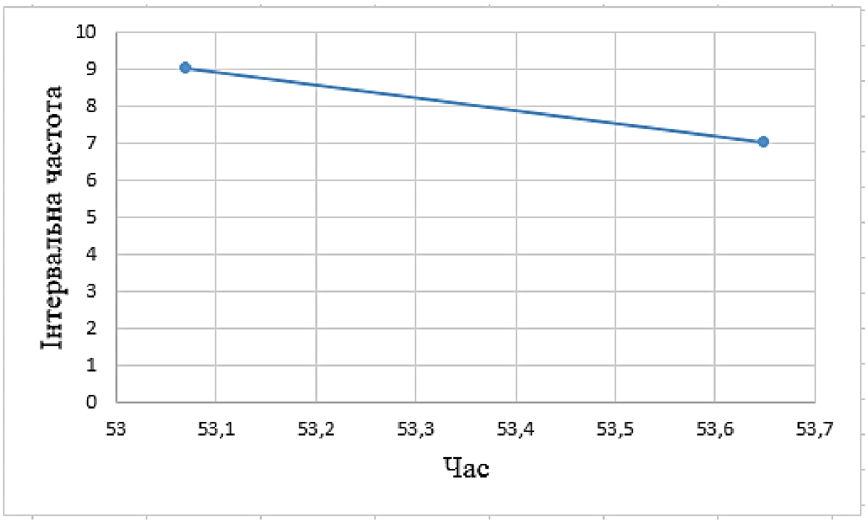

Рисунок 4.2

Таблиця 4.8

4 інтервали часу	[52,78; 53,07)	[53,07; 53,36)	[53,36; 53,65)	[53,65; 53,94]
Інтервальні частоти, n_i	4	5	4	3
Середини інтервалів	52,93	53,22	53,50	53,80

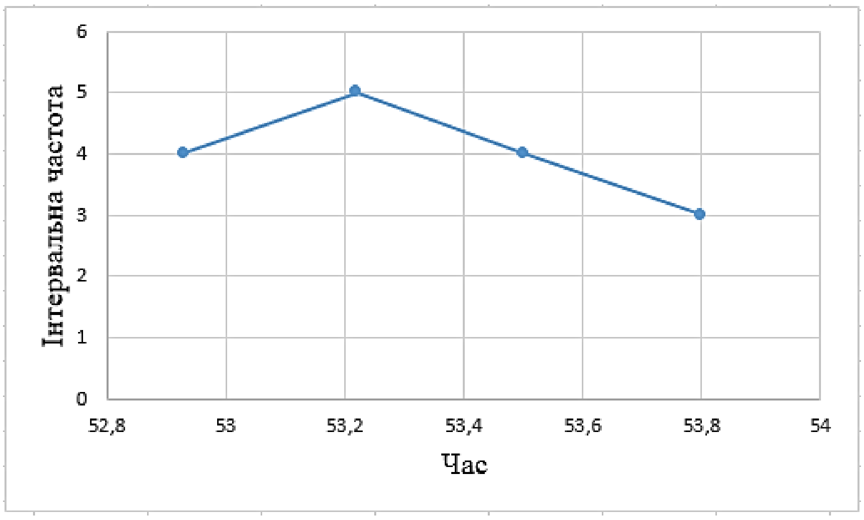

Рисунок 4.3

Гістограма – це східчаста фігура, яка складається з прямокутників, нижні основи яких рівні довжині інтервалу Δx, а висоти h_i – відношенню відповідної інтервальної частоти до довжини інтервалу, тобто $h_i = \frac{n_i}{\Delta x}$ [5].

Приклад 4.5. Побудувати гістограму для інтервального варіаційного ряду з прикладу 4.2 у випадку чотирьох інтервалів.

Розв'язання. Знаходимо висоти кожного прямокутника – Таблиця 4.9 та будуємо гістограму – Рисунок 4.5.

Таблиця 4.9

4 інтервали часу	$[52{,}78; 53{,}07)$	$[53{,}07; 53{,}36)$	$[53{,}36; 53{,}65)$	$[53{,}65; 53{,}94]$
Інтервальні частоти, n_i	4	5	4	3
Середини інтервалів	52,93	53,22	53,50	53,80
Висоти, h_i	1	1,25	1	0,75

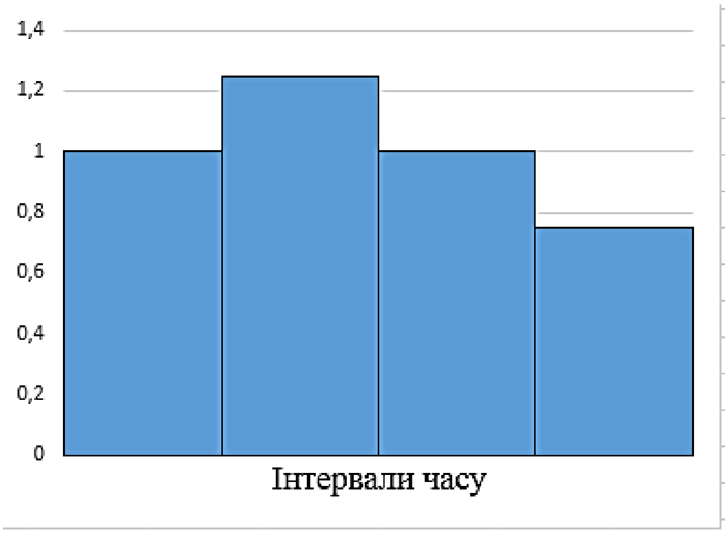

Рисунок 4.4

4.3. Числові характеристики вибірки: середнє значення, медіана та мода

Ми розглянули табличний та графічний способи представлення даних, проте основна інформація про отримані результати дослідження визначається з таких числових характеристик вибірки як середнє значення, медіана та мода.

Етап 5. Водиться поняття середнього значення вибірки та наводиться приклад обчислення середнього значення вибірки.

Середнім значенням $\overline{x}$ вибірки називається середнє арифметичне всіх значень варіаційного ряду [9, 13], тобто

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

У тому випадку, якщо результати досліджень представлені дискретним варіаційним рядом, середнє значення вибірки обчислюється за формулою

$$\overline{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \cdots + x_k n_k}{n},$$

де $x_1, x_2, \dots, x_k$ – варіанти, а $n_1, n_2, \dots, n_k$ – частоти цих варіант відповідно, причому $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

Приклад 4.6. Знайти середнє значення для дискретного варіаційного ряду з прикладу 4.1.

Розв'язання. Використовуючи дані Таблиці 4.2, знаходимо

$$\overline{x} = \frac{51{,}5 \cdot 1 + 52{,}0 \cdot 1 + 52{,}2 \cdot 2 + 54{,}0 \cdot 4 + 54{,}5 \cdot 1 + 55{,}0 \cdot 1 + 55{,}5 \cdot 2}{12} =$$

$$= \frac{645}{12} = 53{,}75.$$

Етап 6. Водиться поняття медіани вибірки та наводиться приклад.

Медіаною M_e вибірки називається таке значення варіаційного ряду, яке ділить цей ряд навпіл [9, 13].

Якщо об'єм вибірки є парним числом, то медіана визначається просто – це центральне значення варіаційного ряду. Якщо ж об'єм вибірки є непарним числом, то медіана дорівнює півсумі центральних значень варіаційного ряду.

У тому випадку, якщо результати досліджень представлені дискретним варіаційним рядом, медіаною є варіанта, яка приблизно ділить цей ряд навпіл – сума частот до та після цієї варіанти більша або дорівнює половині об'єму вибірки.

Приклад 4.7. Визначити медіану для дискретного варіаційного ряду з прикладу 4.1.

Розв'язання. Як випливає з Таблиці 4.2, сума частот до варіанти $54{,}0$ рівна $1 + 1 + 2 + 4 = 8$, а після варіанти $54{,}0$ рівна $4 + 1 + 1 + 2 = 8$, тобто більше половини об'єму вибірки. Отже, отримуємо $M_e = 54{,}0$.

Етап 7. Водиться поняття моди вибірки та наводиться приклад.

Модою M_o вибірки називається таке значення варіаційного ряду, яке найчастіше зустрічається в цьому ряді [9, 13].

У тому випадку, якщо результати досліджень представлені дискретним варіаційним рядом, модою є варіанта, яка має найбільшу частоту.

Приклад 4.8. Визначити моду для дискретного варіаційного ряду з прикладу 4.1.

Розв'язання. Як випливає з Таблиці 4.2, варіанта $54{,}0$ має найбільшу частоту. Отже, отримуємо $M_o = 54{,}0$.

Як випливає з Прикладів 4.7 та 4.8, для дискретного варіаційного ряду з Прикладу 4.1 такі числові характеристики як медіана та мода однакові.

Етап 8. Розглядається приклад на знаходження числових характеристик вибірки та їх відповідної інтерпретації.

Приклад 4.9. В таблиці 4.10 наведено результати фіналу з легкої атлетики на літніх Олімпійських іграх 2024 року – біг на 100 метрів (чоловіки). Визначити числові характеристики результатів змагання та дати їх спортивну інтерпретацію.

Розв'язання. В нашому випадку середнє значення – це середній час здійснення фінального забігу спортсменами, тобто

$$\overline{x} = \frac{9{,}79 + 9{,}79 + 9{,}81 + 9{,}82 + 9{,}85 + 9{,}86 + 9{,}88 + 9{,}91}{8} =$$

$$= \frac{76{,}71}{8} \approx 9{,}84.$$

Таблиця 4.10 [28]

Місце	Атлет	Час
1	Ноа Лайлс (USA)	9,79
2	Кішейн Томпсон (JAM)	9,79
3	Фред Керлі (USA) 2021	9,81
4	Акані Сімбіне (RSA)	9,82
5	Марселл Джейкобс (ITA) 2021	9,85
6	Леціле Тебого (BOT)	9,86
7	Кеннет Беднарек (USA)	9,88
8	Облік Севілл (JAM)	9,91

Медіана – це час, краще за який забіг здійснила половина спортсменів та гірше за який забіг здійснила також половина спортсменів. В даному випадку отримуємо, що

$$M_e = \frac{9{,}82 + 9{,}85}{2} = \frac{19{,}67}{2} \approx 9{,}84.$$

Мода – це час, за який забіг здійснила більшість спортсменів. Оскільки в даному випадку тільки два спортсмени показали однаковий результат 9,79, то $M_o = 9{,}79$.

Зауваження 4.1. При вивченні елементів статистики в поглибленому курсі алгебри доцільно використовувати прикладні задачі з географії, біології, екології, економіки, медицини, соціології, фізики, хімії тощо. Велику кількість таких задач можна знайти в навчальному посібнику [29].

Приклад 4.10. Дослідження проведені фінансовим відділом деякого підприємства України показали, що 50 працівників цього підприємства мають наступний тарифний розряд заробітної плати:

3, 2, 7, 6, 4, 6, 1, 8, 3, 6, 4, 3, 5, 7, 5, 2, 6, 7, 8, 4, 6, 1, 5, 2, 4,
7, 4, 7, 3, 1, 7, 6, 8, 2, 5, 6, 5, 3, 8, 7, 6, 3, 2, 6, 4, 6, 3, 8, 2, 7.

Побудувати дискретний варіаційний ряд тарифного розряду заробітної плати працівників цього підприємства та графічно зобразити його.

Визначити такі числові характеристики дискретного варіаційного ряду як середнє значення, мода та медіана, а також дати їх інтерпретацію.

Розв'язання. Спочатку побудуємо варіаційний ряд, для чого розмістимо тарифні розряди працівників підприємства в порядку зростання:

$$\underbrace{1, 1, 1}_{3\text{ рази}} \quad \underbrace{2, 2, 2, 2, 2, 2}_{6\text{ разів}} \quad \underbrace{3, 3, 3, 3, 3, 3, 3}_{7\text{ разів}} \quad \underbrace{4, 4, 4, 4, 4, 4}_{6\text{ разів}} \quad \underbrace{5, 5, 5, 5, 5}_{5\text{ разів}}$$

$$\underbrace{6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6}_{10\text{ разів}} \quad \underbrace{7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7}_{8\text{ разів}} \quad \underbrace{8, 8, 8, 8}_{4\text{ рази}}$$

та знайдемо частоту кожного тарифного розряду, тобто підрахуємо скільки разів він зустрічається у варіаційному ряді.

Тепер можемо побудувати дискретний варіаційний ряд:

Таблиця 4.11

Тарифний розряд, x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Частота, n_i	3	6	7	6	6	10	8	4

та графічно зобразити його за допомогою полігону:

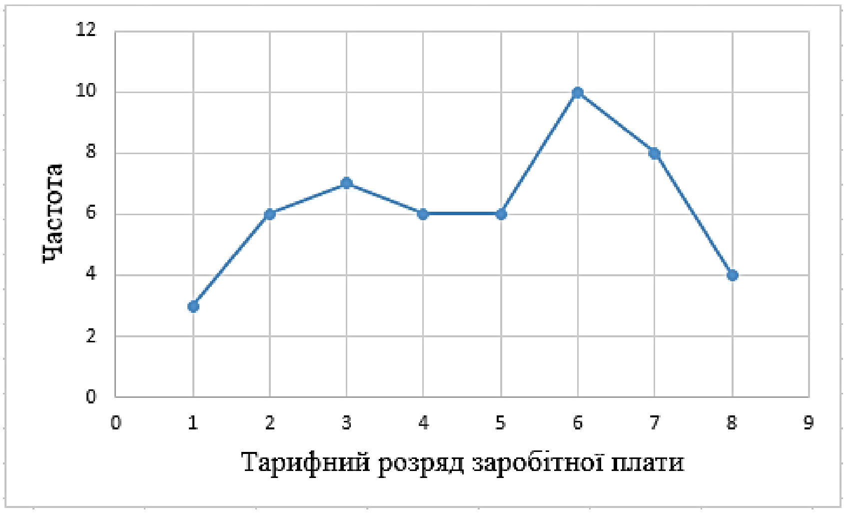

Рисунок 4.5

В даному випадку середнє значення – це середній тарифний розряд працівників підприємства, тобто

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 10 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 4}{50} = \frac{238}{50} \approx 5.$$

Медіана – це тарифний розряд, вище за який тарифний розряд має половина працівників підприємства та нижче за який тарифний розряд має також половина працівників підприємства.

Як випливає з Таблиці 4.11, сума частот до тарифного розряду 5 рівна $3 + 6 + 7 + 6 + 6 = 28$, а після цього розряду – $6 + 10 + 8 + 4 = 28$, тобто більше половини працівників підприємства. Отже, отримуємо $M_e = 5$.

Мода – це тарифний розряд, який має більшість працівників згаданого підприємства. Як випливає з Таблиці 4.11, тарифний розряд 6 має найбільшу частоту. Отже, отримуємо $M_o = 6$.

Приклад 4.11. Як свідчать фінансові документи одного з підприємства, в квітні 2025 року 20 працівників виробничого відділу цього підприємства мали наступну заробітну плату (в залежності від обсягу виробництва):

10912, 11199, 11900, 11677, 10568, 10192, 11268, 10180, 11536, 11342,
10451, 10320, 10933, 11681, 10759, 11382, 11236, 10100, 11876, 10576.

Побудувати інтервальний варіаційний ряд розміру заробітної плати працівників цього підприємства та графічно зобразити його.

Розв'язання. Спочатку знайдемо розмах варіювання

$$R = 11900 - 10100 = 1800$$

та розіб'ємо весь діапазон розмаху варіювання на п'ять рівних інтервалів:

$$\Delta x_5 = \frac{1800}{5} = 360.$$

Тепер можемо побудувати інтервальний варіаційний ряд:

Таблиця 4.12

Інтервали заробітної плата, x_i	Інтервальна частота, n_i
$[10100; 10460)$	5
$[10460; 10820)$	3
$[10820; 11180)$	2
$[11180; 11540)$	6
$[11540; 11900]$	4

Для того, щоб графічно зобразити отриманий інтервальний варіаційний ряд за допомогою гістограми потрібно знайти висоту кожного прямокутника:

Таблиця 4.13

Інтервали заробітної плата, x_i	Висоти, h_i	Інтервальна частота, n_i
$[10100; 10460)$	1	5
$[10460; 10820)$	0,6	3
$[10820; 11180)$	0,4	2
$[11180; 11540)$	1,2	6
$[11540; 11900]$	0,8	4

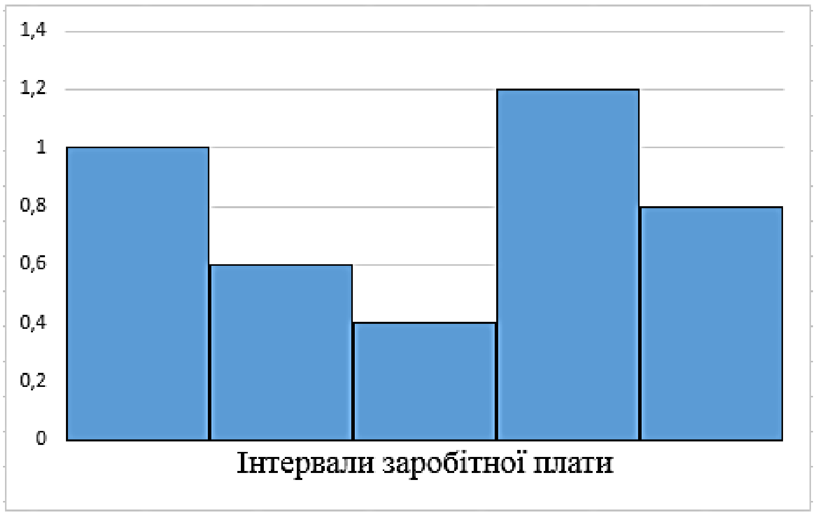

Рисунок 4.6

5. Розробка конспекту уроку на тему «Характеристики розсіювання: дисперсія та середнє квадратичне відхилення»

Як було зазначено в Розділі 2 дипломної роботи, навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів [10] передбачає при розгляді Теми 5. Елементи приладної математики вивчення таких числових характеристик вибірки як середнє значення, мода та медіана. Проте в деяких випадках використовуючи тільки ці характеристики можна зробити хибні висновки про генеральну сукупність. При цьому, якщо використовувати також такі числові характеристики як дисперсія та середнє квадратичне відхилення, які ще називають характеристиками розсіювання, то можна зробити більш точні висновки про генеральну сукупність.

На мою думку, в класах з поглибленим вивченням математики, хоча це і не передбачено навчальною програмою, все таки потрібно ознайомити учнів з характеристиками розсіювання. У випадку, якщо кількість уроків відведена на вивчення статистики обмежена, то це можна зробити під час проведення факультативних занять або математичних гуртків. Тому в якості практичної частини дипломної роботи розроблено конспект уроку для 9 класу на тему «Характеристики розсіювання: дисперсія та середнє квадратичне відхилення»,

Тема уроку. Характеристики розсіювання: дисперсія та середнє квадратичне відхилення.

Мета уроку:

навчальна: ознайомити учнів з такими характеристиками розсіювання як розмах варіювання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення;

розвиваюча: розвивати навички застосування теоретичного матеріалу при розв’язуванні прикладних задач;

виховна: виховувати в учнів бажання вивчати математику.

Тип заняття: засвоєння нових знань.

ХІД УРОКУ

І. ОГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

Вчитель перевіряє присутність учнів у класі та їх готовність до уроку.

ІІ. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Вчитель перевіряє домашнє завдання учнів та відповідає на запитання, якщо такі виникли в процесі виконання домашнього завдання.

ІІІ. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

1. Що називається середнім значення вибірки?

2. Як обчислюється середнє значення вибірки, яка задана дискретним варіаційним рядом?

2. Що називається медіаною та модою вибірки? Як вони знаходяться?

IV. ФОРМУВАННЯ МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ

На попередньому уроці було розглянуто такі числові характеристики вибірки як середнє арифметичне, мода та медіана. Але якщо використовуючи лише ці характеристики при дослідженні генеральної сукупності, то доволі часто можна зробити хибні висновки.

Наприклад, було отримано наступні результати кількості підтягувань на перекладині двох груп із 6 спортсменів кожна:

1 група: 5, 5, 5, 25, 25, 25;

2 група: 10, 10, 15, 15, 20, 20.

Обчисливши середнє значення кількості підтягувань в кожній групі:

$$\overline{x}_1 = \frac{5+5+5+25+25+25}{6} = \frac{90}{6} = 15,$$

$$\overline{x}_2 = \frac{10+10+15+15+20+20}{6} = \frac{90}{6} = 15,$$

отримуємо однакові значення: $\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = 15$, хоча очевидно, що вибірки були здійснені із різних генеральних сукупностей. Це є результатом розкиданості кількості підтягувань в двох групах спортсменів.

Для оцінки степені «розкиданості» статистичних даних використовують наступні числові характеристики вибірки (***характеристики розсіювання***): розмах варіювання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

1. ***Розмахом варіювання*** R називається різниця між найбільшою $x_{\max}$ та найменшою $x_{\min}$ варіантами, тобто

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Визначимо середню кількість підтягувань на перекладині для двох груп із 6 спортсменів кожна:

1 група: 5, 5, 5, 25, 25, 25;

2 група: 5, 10, 15, 15, 20, 25;

та знайдемо розмах варіювання. Отримаємо

$$\overline{x}_1 = \frac{5+5+5+25+25+25}{6} = \frac{90}{6} = 15, \quad R_1 = 25 - 5 = 20;$$

$$\overline{x}_2 = \frac{5+10+15+15+20+25}{6} = \frac{90}{6} = 15, \quad R_2 = 25 - 5 = 20.$$

Очевидно, ця характеристика розсіювання також не відображає характер генеральної сукупності.

2. ***Дисперсією*** D називається середнє арифметичне квадратів відхилень значень варіаційного ряду $x_1, x_2, \dots, x_n$ від їх середнього значення $\overline{x}$, тобто

$$D = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \dots + (x_n - \overline{x})^2}{n}.$$

У тому випадку, якщо результати досліджень представлені дискретним варіаційним рядом, дисперсія обчислюється за формулою

$$D = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 n_1 + (x_2 - \overline{x})^2 n_2 + \dots + (x_k - \overline{x})^2 n_k}{n},$$

де $x_1, x_2, \dots, x_k$ – варіанти, а $n_1, n_2, \dots, n_k$ – частоти цих варіант відповідно, причому $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

3. ***Середнім квадратичним відхиленням*** σ називається арифметичне значення кореня квадратного із дисперсії, тобто

$$\sigma = \sqrt{D}.$$

Знайдемо дисперсію та середнє квадратичне відхилення для першої та другої груп спортсменів. Отримаємо

$$D_1 = \frac{(5-15)^2 \cdot 3 + (25-15)^2 \cdot 3}{6} = 100, \quad \sigma_1 = 10;$$

$$D_2 = \frac{(5-15)^2 + (10-15)^2 + (15-15)^2 \cdot 2 + (20-15)^2 + (25-15)^2}{6} =$$

$$= \frac{125}{3} \approx 41{,}67, \quad \sigma_2 \approx 6{,}45.$$

VI. ПЕРВИННЕ ЗАКРІПЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Приклад 5.1. В таблиці наведено результати фіналу з легкої атлетики на літніх Олімпійських іграх 2020 року – стрибки у висоту (жінки). Визначити характеристики розсіювання результатів змагання.

Розв'язання. Для зручності виконання обчислень початку побудуємо дискретний варіаційний ряд

Таблиця 5.2

Результат, x_i	2,04	2,02	2,00	1,98	1,96	1,93
Частота, n_i	1	1	1	1	5	3

та обчислимо середнє значення результатів змагань:

$$\overline{x} = \frac{2{,}04 + 2{,}02 + 2{,}00 + 1{,}98 + 1{,}96 \cdot 5 + 1{,}93 \cdot 3}{12} = \frac{23{,}63}{12} \approx 1{,}97.$$

Тепер перейдемо до знаходження характеристик розсіювання: розмаху варіювання, дисперсії та середнього квадратичного відхилення:

$$R = 2{,}04 - 1{,}93 = 0{,}11;$$

Таблиця 5.1 [30]

Місце	Атлетка	1,84	1,89	1,93	1,96	1,98	2,00	2,02	2,04	2,06	Результат
1	Марія Ласіцкене (ROC)	o	o	o	xxo	xo	xo	o	xo	r	2,04
2	Нікола Мак-Дермотт (AUS)	-	o	o	xo	o	o	xo	xxx		2,02
3	Ярослава Магучіх (UKR)	-	o	o	xo	xxo	xo	x-	xx		2,00
4	Ірина Геращенко (UKR)	o	o	o	o	xo	xxx				1,98
5	Елеанор Паттерсон (AUS)	o	o	o	o	xxx					1,96
6	Ваші Каннінгем (USA)	o	o	o	xo	xx-	x				1,96
6	Сафіна Садуллаєва (UZB)	-	o	o	xo	xxx					1,96
8	Юлія Левченко (UKR)	o	o	xo	xo	xx-	x				1,96
9	Марія Вукович (MNE)	o	o	xo	xxo	xxx					1,96
10	Марі-Лоуренс Юнгфляйш (GER)	o	o	xo	xxx						1,93
11	Каміла Ліцвінко (POL)	o	o	xxo	xxx						1,93
12	Мірела Демірева (BUL)	xo	o	xxo	xxx						1,93

$$D = \frac{1}{12}((2{,}04 - 1{,}97)^2 + (2{,}02 - 1{,}97)^2 + (2{,}00 - 1{,}97)^2 + (1{,}98 - 1{,}97)^2 +$$

$$+(1{,}96 - 1{,}97)^2 \cdot 5 + (1{,}93 - 1{,}97)^2 \cdot 3) =$$

$$= \frac{1}{12}(0{,}07^2 + 0{,}05^2 + 0{,}03^2 + 0{,}01^2 + 0{,}01^2 \cdot 5 + 0{,}04^2 \cdot 3) =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot 0{,}0137 \approx 0{,}0012, \quad \sigma \approx 0{,}035.$$

VIII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

1. Які характеристики розсіювання ми сьогодні розглянули?
2. Що таке розмах варіювання та як його знайти?
3. Дайте означення дисперсії та середнього квадратичного відхилення.

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Знайти в мережі Internet результати фіналу з легкої атлетики на літніх Олімпійських іграх 2024 року – стрибки у висоту (жінки). Слід відмітити, що саме на цій олімпіаді українська спортсменка Ярослава Магучіх виборола золото. Визначити характеристики розсіювання результатів цього змагання.

Висновки

У даній кваліфікаційній роботі було досліджено можливості розвитку пізнавальних здібностей учнів під час вивчення статистики в поглибленому курсі алгебри. Як показує аналіз навчальної та навчально-методичної літератури з психології та педагогіки, пізнавальні здібності особистості – це система індивідуальних психологічних особливостей цієї особистості, які забезпечують ефективне засвоєння знань, умінь та навичок, а також формують здатність до здійснення самостійного мислення та аналізу.

Вивчення статистики в поглибленому курсі алгебри створює широкі можливості для розвитку пізнавальних здібностей учнів. Так, систематичне використання різноманітних задач практичного змісту та візуалізація даних сприяє розвитку вміння аналізувати та узагальнювати інформацію, виявляти закономірності та здійснювати абстрагування, формулювати повні висновки, логічно мислити та аргументувати власну точку зору, а також обґрунтовувати показники статистичних досліджень.

В першому розділі кваліфікаційної роботи наведено основні відомості з математичної статистики на вищому теоретичному рівні, ніж це передбачено навчальними програмами, що дозволило мені краще проаналізувати методику вивчення елементів статистики в поглибленому курсі.

Другий розділ містить аналіз навчальних програм для закладів загальної середньої освіти [2, 3] та шкільних підручників курсу алгебри 9 класу [9 – 14] відносно змісту навчального матеріалу зі статистики, а в третьому розділі проаналізовано психолого-педагогічні основи пізнавальних здібностей учнів та досліджено, які пізнавальні здібності учнів розвиваються під час вивчення статистики, та запропоновано відповідну систему завдань для їх розвитку.

В четвертому розділі розглянути методику вивчення статистики в поглибленому курсі алгебри 9 класу на прикладі аналізу спортивних досягнень в олімпійських видах спорту, що сприяє кращій концентрації уваги учнів на навчальному матеріалі та виховує бажання активно вивчати математику.

П’ятий розділі має практичне застосування, оскільки містить розроблений конспект уроку на тему «Характеристики розсіювання: дисперсія та середнє квадратичне відхилення», який може використовуватися вчителями не тільки при проведенні уроків в класах з поглибленим вивченням математики, а також під час факультативних занять та гуртків.

Список використаних джерел

1. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : Підручник. К. : Вища шк., 2006. 582 с.

2. Навчальна програма з математики для загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс]. URL: https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-6-9-klasiv

3. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс]. URL: https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-6-9-klasiv

4. Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. Теорія ймовірностей та математична статистика. Київ : Центр учбової літератури, 2010. 424 с.

5. Герич М. С., Синявська О. О. Математична статистика: навч. посіб. Ужгород : ДВНЗ "УжНУ", 2021. 146 с.

6. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту [Електронний ресурс]. URL: https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

7. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень [Електронний ресурс]. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

8. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень [Електронний ресурс]. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

9. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.

10. Істер О. С. Алгебра : підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл.. Київ : Генеза, 2017. 264 с.

11. Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль : Підручники і посібники, 2017. 264 с.

12. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Х. : Гімназія, 2017. 272 с.

13. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 416 с.

14. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Алгебра : підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. Київ : УОВЦ «Оріон», 2017. 272 с.

15. Фіцула М. М. Педагогіка : навч. пос. Київ : Академвидав, 2007. 559 с.

16. Повідайчик О. С. Проблемне навчання в процесі підготовки студентів до науково-дослідницької роботи. *Соціальна робота в Україні: теорія і практика*. 2016. № 1-2. С. 45-52.

17. Хабіб Р. А. Активізація пізнавальної діяльності учнів на уроках математики : Метод. посіб. К.: Рад. шк., 1985. 152 с.

18. Волкова Н. П. Педагогіка : навч. посіб. К. : Академвидав, 2012. 616 с.

19. Ігнатова Р. Розвиток пізнавальної активності учнів як педагогічна проблема. *Вісник Львівського університету : сер. : Педагогічна*. 2004. Вип.18. С.73-80.

20. Лозова В. І. Пізнавальна активність школярів (Спецкурс із дидактики) : навч. пос. Харків : Основа, 1990. 87 с.

21. Лозова В. І. Цілісний підхід до формування пізнавальної активності школярів. – Харків : вид-во ХДПУ ім. Г. С. Сковороди. 2000.164 с.

22. Шушара Т. І. Навчально-пізнавальна діяльність учнів : зміст і основні критерії. *Рідна школа.* 2002. № 11. С. 17-18.

23. Прогноз на квітень 2025: несподівані сюрпризи другого місяця весни. URL: https://news.nominal.com.ua/ua/pogoda-na-kviten-2025-prognoz-temperaturi-na-misiats

24. Зимові Олімпійські ігри 2022 // Вільна енциклопедія «Вікіпедія». URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Зимові_Олімпійські_ігри_2022

25. Літні Олімпійські ігри 2024 // Вільна енциклопедія «Вікіпедія». URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Літні_Олімпійські_ігри_2024

26. Стрибки з трампліна на зимових Олімпійських іграх 2022 – великий трамплін (чоловіки). // Вільна енциклопедія «Вікіпедія». URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Стрибки_з_трампліна_на_зимових_Олімпійських_іграх_2022_—_великий_трамплін_(чоловіки)

27. Плавання на літніх Олімпійських іграх 2024 – 100 метрів на спині (чоловіки). // Вільна енциклопедія «Вікіпедія». URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Плавання_на_літніх_Олімпійських_іграх_2024_—_100_метрів_на_спині_(чоловіки)

28. Легка атлетика на літніх Олімпійських іграх 2024 –біг на 100 метрів (чоловіки). // Вільна енциклопедія «Вікіпедія». URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Легка_атлетика_на_літніх_Олімпійських_іграх_2024_—_біг_на_100_метрів_(чоловіки)

29. Соколенко Л. О., Філон Л. Г., Швець В. О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. Київ : НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. 128 с.

30. Легка атлетика на літніх Олімпійських іграх 2020 – стрибки у висоту (жінки). // Вільна енциклопедія «Вікіпедія». URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Легка_атлетика_на_літніх_Олімпійських_іграх_2020_—_стрибки_у_висоту_(жінки)