

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ**

В.Д.Кишенько

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ АВТОМАТИЗАЦІЇ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів спеціальностей 6. 092500

“ Автоматизовані системи управління технологічними процесами”,

6.092500 “Комп’ютерно-інтегровані процеси та виробництва”

напряму 0925 “Автоматизація та

комп’ютерно-інтегровані технології”

денної та заочної форми навчання

СХВАЛЕНО

на засіданні кафедри автоматизації

комп’ютерно-інтегрованих технологій

Протокол № 11

від 20 березня 2007 р.

Київ НУХТ 2007

ІДЕНТИФІКАЦІЯ та моделювання об'єктів автоматизації: Конспект лекцій для студ. спец. 6.092500 «Автоматизовані системи управління технологічними процесами», 6.092500 «Комп'ютерно-інтегровані процеси та виробництва» напряму 0925 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / Уклад.: В.Д. Кишенько – К.: НУХТ, 2007.-102 с.

Укладач: **В.Д. Кишенько**, канд. техн. наук

Відповідальний за випуск **А.П. Ладанюк**, д-р техн. наук, проф.

Тема 1. Моделювання як один із методів пізнання.

В будь-якій діяльності людина використовує в тій чи іншій мірі моделі. Особливо це відноситься до систем управління, в яких модель дозволяє на основі отриманої інформації від об'єкта прийняти найкраще заздалегідь визначене згідно із цілями рішення по управлінню.

Модель є результатом пізнавальної розумової діяльності людини, є одним із видів наукового пізнання. Науково-технічний розвиток в будь-якій галузі науки, техніки іде по шляху:

- формування цілей досліджень;
- визначення проблеми;
- висунення гіпотези;

(Гіпотеза — це передбачення, яке ґрунтується на деякій кількості даних дослідів, спостережень, догадок).

- спостереження та експеримент;
- розробка (створення) теорії;

(Теорія — це сукупність понять, суджень, фактів, які дозволяють здійснити опис системи за допомогою невеликої кількості основних результатів).

- практичне вирішення проблеми.

На всіх цих етапах людина-суб'єкт користується знаннями.

(Знання — це певного роду сукупність понять, відношень, прийомів, методів, які певним чином відображають предмет дослідження (об'єкт) і дають можливість вирішити поставлені задачі, що виходять із поставленої мети).

Знання зберігаються в пам'яті людини в вигляді певних конструкцій — моделей. Зміст, розуміння знань є семантичною стороною, аспектом знань, а способи і методи, за допомогою яких знання вводяться в модель є синтаксичною стороною аспекту моделі.

При використанні знань, оформлених в певні схеми моделі, суб'єкт (дослідник) використовує аналогії. *(Аналогією називається судження про якусь часткову схожість двох об'єктів).*

Об'єктом називають (від латинського *objectum*- предмет), все те, на що направлена діяльність людини (суб'єкта).

Схожість може бути суттєвою або несуттєвою. Поняття суттєва та несуттєва схожість об'єкта умовні та відносні. Суттєва схожість залежить від рівня абстракції і визначається метою досліджень та її глибиною. Завдяки аналогії можна відобразити об'єктивно існуючий світ у вигляді зручних для дослідника (суб'єкта) логічних схем. Такі логічні схеми, що спрощують судження та логічну побудову чи дозволяють проводити експерименти для уточнення явищ, подій називають моделями.

Іншими словами модель — це замісник об'єкта (оригінала), який забезпечує вивчення деяких особливостей об'єкта.

Поняття модель (від латинського *modulus* — міра) надзвичайно широке, ми будемо використовувати поняття моделі, яке в певній мірі у відповідному середовищі відтворює суттєві для нашої задачі сторони, властивості тощо. Модель повинна весь час відтворювати властивості об'єкта та змінювання цих властивостей. Якщо результати моделювання співпадають з характеристиками та реакціями об'єкта, то кажуть, що модель є адекватною об'єкту. Тобто *адекватність* — це міра відповідності моделі оригіналу. Адекватність моделювання залежить від його мети та прийнятих критеріїв адекватності.

Критерій адекватності — це показники або сукупність показників, які дають можливість здійснити кількісну або якісну оцінку міри відповідності моделі оригіналу (наприклад точність, динаміку, надійність).

Узагальнено моделювання можна визначити як метод наукового пізнання, при якому об'єкт-оригінал, що вивчається, знаходиться у деякій відповідності з іншим об'єктом-моделлю. Причому, модель здатна в тій чи іншій мірі замінювати оригінал на деяких стадіях процесу пізнання.

Особливу увагу треба приділяти в процесі пізнання змінюванням об'єкта-оригінала. Ці змінювання можуть відбуватися двома шляхами: еволюційним та революційним шляхом. У першому випадку (еволюційна зміна) синтаксис моделі (схема моделі, структура моделі) є незмінним, а змінюються тільки параметри моделі. При революційних (альтернативних) змінюваннях об'єктів попередня структура моделі не задовольняє об'єкта – оригінала на даному етапі розвитку і повинна бути замінена на іншу структуру.

На різних стадіях пізнання можуть існувати такі дві форми відповідних моделі і оригіналу:

1. Модель як образ у свідомості суб'єкта. Така модель отримується в результаті пізнавального процесу, що являє собою обробку інформації, яка поступає від об'єкта моделювання, а також від оточуючого середовища. В результаті такої пізнавальної діяльності у свідомого суб'єкта створюється образ — певний відбиток, відображення об'єкта, який відтворює певні суттєві сторони оригінала.

2. Моделювання полягає в побудові деякої схеми деякого об'єкта (як об'єктивного, так і уявного), який ми називаємо моделлю. Ця модель зв'язана з оригіналом певними співвідношеннями подібності. В останньому випадку моделювання полягає у виявленні залежностей співвідношень між двома системами “оригінал – модель”, за якими визначаються характеристики об'єкта.

Як бачимо, в процесі моделювання необхідна наявність трьох обов'язкових компонентів: 1) суб'єкта (дослідника, спостерігача), який використовує певні процедури: знання, досвід, інтуїцію, відомий йому інструментарій, для вирішення поставленої перед ним задачі дослідження; 2) об'єкт дослідження – оригінал; 3) моделі.

Необхідною властивістю об'єкта моделювання є його спостережність; не менш важливою особливістю для об'єктів управління є здатність об'єктів змінювати свої стани при наявності управління.

Моделі використовують: як засоби аналізу властивостей оригіналу; для прогнозування поведінки об'єкта в різних ситуаціях; для синтезу (створення)

мови об'єктів, систем; для безпосереднього управління (використання в контурах управління); для навчання та тренування.

В процесі моделювання в загальному випадку можна виділити такі основні етапи:

1. вивчення процесів, явищ, які необхідно моделювати;
2. складання (визначення) моделі;
3. перевірка адекватності моделі оригіналу;
4. дослідження моделі з переносом результату дослідження на оригінал;
5. практичне використання результатів моделювання.

Переваги моделювання:

1. зменшення витрат на експеримент;
2. можливість створення критичних ситуацій, включаючи і аварійні, які можливі на об'єкті дослідження;
3. можливість дослідження складних об'єктів без безпосереднього вивчення їх (кібернетичні моделі).

Недоліки: разом з тим моделювання як метод пізнання є обмеженим, тому що модель відображає лише певні сторони об'єкта, а не відображає всього спектру властивостей станів об'єкту в цілому. Крім того при отриманні моделі приймається система припущень, яка спрощує чи ідеалізує загальну картину характеристик об'єкта.

Контрольні питання

1. Які етапи науково-технічного розвитку?
2. Що таке знання?
3. Що таке об'єкт?
4. Що таке модель?
5. Чим визначається адекватність моделі об'єкту?
6. Дві форми моделей.
7. Які основні компоненти характеризують процес моделювання?
8. Основні етапи процесів моделювання.
9. Які переваги моделювання?
10. Які недоліки моделювання?

[6,с.6-34; 7,с.5-9]

Тема 2. **Основні принципи моделювання.**

При аналізі, синтезі систем управління застосовують два принципи моделювання:

1. класичний (індуктивний);
2. системний.

Перший принцип в основному використовують при моделюванні простих об'єктів. При моделюванні складних об'єктів управління використовують системний принцип.

Класичний принцип передбачає моделювання системи при переході від частинного до загального і синтезує (створює) модель шляхом злиття, додавання окремих компонентів моделювання в загальному.

Системний принцип на відміну від класичного передбачає послідовний перехід від загального до частинного, в основі моделювання лежить мета, ціль дослідження. Виходячи із цілі (мети дослідження) здійснюється виділення мети об'єкта в цілому та окремих його елементів.

Системний принцип моделювання використовують при аналізі та розробці АСУ, що являє собою сукупність систем управління різних рівнів ієрархії, причому кожний рівень управління виконуючи свої функції повинен задовольняти загальній цілі цієї системи управління, що визначається так званим глобальним критерієм управління, в якості якого може бути один показник або сукупність показників, зв'язаних між собою за певною схемою.

При системному принципі моделювання суттєве значення мають поняття як система та зовнішнє середовище, які в процесі моделювання мають різні співвідношення.

Система — це цілеспрямована множина взаємозв'язаних елементів будь-якої природи. Зовнішнє середовище — це множина існуючих поза системою елементів будь-якої природи, що створює вплив на систему чи знаходиться під її дією.

При використанні системного принципу моделювання потрібно виконувати такі рекомендації загального характеру:

1. Потрібно правильно визначити ціль дослідження, тобто здійснити правильний вибір проблеми;

2. Аналіз системи повинен мати чітку направленість. Під цим ми розуміємо доцільну декомпозицію системи;

3. Необхідно знати, що в складних системах є наявність невизначеності і потрібно при досліді використовувати різні шляхи, методи для усунення цих невизначеностей;

4. При дослідженнях потрібно визначати не одне, а декілька однакових, виходячи із цілей дослідження, рішень (альтернатив). Це дасть можливість отримання декількох результатів, що дасть певну свободу вибору найбільш ефективного результату.

Ціль повинна бути виражена якимось чином у вигляді кількісних або якісних оцінок, критеріїв моделювання. Критерії, за якими здійснюється оцінка потрібно представити у вигляді ієрархії критеріїв, що відображають окремі сторони функціонування системи або її окремих підсистем чи елементів. При дослідженні системи використовують структурний та функціональний підходи. При структурному підході виявляють склад системи у вигляді елементів, а також зв'язків між цими елементами. При цьому значну увагу приділяють виявленню та виділенню системоутворюючих та системовизначаючих зв'язків, тобто таких зв'язків, що визначають ціль моделювання.

Функціональний підхід дозволяє оцінювати функції, які виконує система для досягнення цілей функціонування системи, тобто оцінюється поведінка системи. При дослідженні складних систем застосовують одночасно структурний та функціональний підходи, виділяючи на певних етапах дослідження той чи інший підхід.

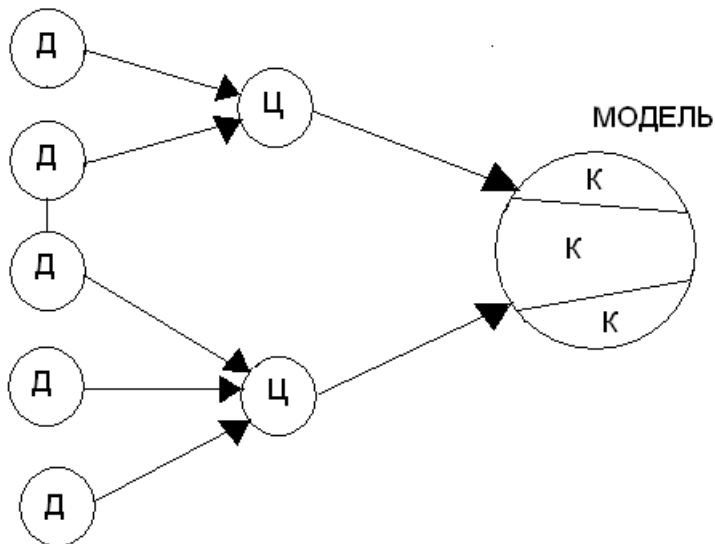


Рис 2.1.Схема класичного принципу.

Розглянемо принципові схеми створення (синтезу) моделі з використанням класичного та системного принципу.

За класичним принципом процес (об'єкт), який моделюється, розділяється на окремі підсистеми, тобто здійснюється вибір за певними даними (Д) та формуються задачі і цілі, окремі для кожної підсистеми. Цілі відображають окремі сторони функціонування об'єкта. Ці сторони відображаються окремими компонентами (К) моделі об'єкта. Модель являє собою суму окремих її компонентів, які ізольовані одна від одної. Така модель не дає змоги визначити системний ефект, який проявляється тільки при взаємодії окремих складових К.

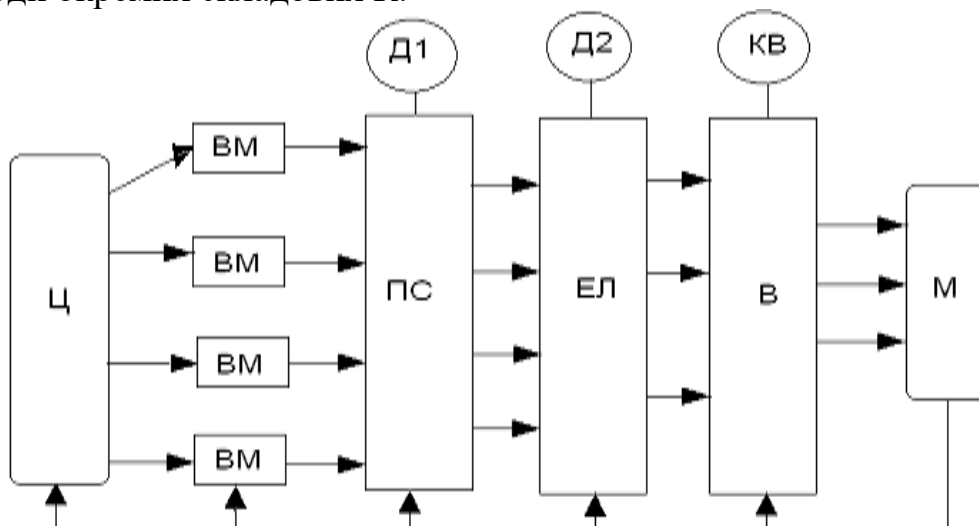


Рис 2.2.Схема моделювання з використанням системного підходу.

В основі системного підходу при моделюванні покладено принцип розкладання системи як єдиного інтегрованого цілого. Синтез моделі

починається з формування цілей моделювання, цілей функціонування об'єкта. Виходячи з поставлених цілей визначають вимоги (ВМ) до моделі об'єкта. На базі цих вимог здійснюється декомпозиція об'єкта як системи на підсистеми. В основі цієї декомпозиції на підсистему повинна бути покладена якась системна характеристика — властивість об'єкта. Після виділення підсистем, їх представляють як сукупність взаємозв'язаних елементів, які включають чи не включають в модель, використовуючи певні критерії вибору (КВ). Модель буде являти собою сукупність взаємозв'язаних моделей відібраних елементів. Моделювання є ітераційною процедурою з повертанням на попередні етапи, включаючи і етап формування цілей.

Контрольні питання

1. Які існують принципи моделювання?
 2. Що передбачає класичний принцип моделювання?
 3. Що передбачає системний принцип моделювання?
 4. Яких рекомендацій слід дотримуватись при моделюванні за системним принципом?
 5. Що таке структурний підхід?
 6. Що таке функціональний підхід?
 7. Схема моделювання за класичним принципом.
 8. Схема моделювання за системним принципом.
- [7,с.20-24]

Тема 3. Основні особливості моделей.

Розвиток теорії управління, комп'ютерної техніки дає можливість підняти ефективність управління у випадку розглядання об'єктів управління як складних систем. Складні системи мають такі основні ознаки: велика кількість елементів та підсистем, які мають різну природу явищ, мають різнопланові зв'язки, велику ступінь невизначеності, характеризуються ієрархічністю. Особливою ознакою складних систем управління є наявність людського фактору. Наявність людини в контурі управління має позитивне значення в плані формування системи цілей, вибору та оцінки ефективних рішень по управлінню, відповідальність. Але людина в силу своїх психофізіологічних здатностей не може обробити значну кількість інформації по оцінці ситуації в системі, не може прийняти оперативне рішення по управлінню, особливо в системах реального часу.

Для автоматизації рутинної роботи людина, для генерації варіантів по управлінню, для оцінки ефективності по управлінню застосовує комп'ютерно-інтегровані технології (КІТ). Успішне використання КІТ можливе лише при використанні системи моделей, що відтворюють різні сторони та етапи функціонування об'єктів в процесі управління.

При всій різноманітності моделей для управління складними системами, в них можна виділити ряд характерних особливостей:

1. Ціль функціонування управління: вона повинна визначати ступінь цілеспрямованості поведінки моделі та об'єкта. В цьому випадку моделі можуть розділятися на одноцільові та багатоцільові. В першому випадку модель, як правило, відображає певну сторону об'єкта чи певний етап його функціонування. У випадку багатоцільових моделей потрібна модель цілей, за якою проходить визначення пріоритетних цілей, їх узгодження, доцільність використання на даному етапі тощо. Багатоцільові моделі, як правило, є комплексними: відображають всі необхідні сторони та властивості об'єкта для ефективності управління. Для багатоцільових моделей характерна ієрархічність.

2. Складність моделей. Складність враховується кількістю елементів та підсистем, а також зв'язків між ними. Складність залежить від кількості типів та видів елементів (наприклад технологічні процеси характеризуються наявністю великої кількості явищ різної природи (теплові, механічні, дифузії, масообміну)). Крім елементів важливою характеристикою є кількість та характер зв'язків між цими елементами та підсистемами (наприклад у вигляді ієрархічних структур, нейроноподібних структур). Для відтворення цих особливостей складних об'єктів, модель повинна мати в своєму складі сукупність моделей різнопланових елементів, а також моделі, що відтворюють зв'язки між елементами. Тобто, складна модель повинна мати не меншу складність чим об'єкт, з точки зору поставленої мети дослідження.

3. Цілісність (єдність). Ця особливість вказує на те, що модель є однією системою, як і об'єкт – оригінал та включає в себе велику кількість складових частин моделей, що відображають різні властивості системи, різні аспекти функціонування системи і знаходяться в складній взаємодії для виконання поставлених задач, для виконання цілей дослідження, управління.

4. Невизначеність. Невизначеність проявляється в системі в невизначеності стану об'єкта, в невизначеності можливості досягнення поставленої цілі, в невизначеності методів прийняття рішень по управлінню, достовірності інформації тощо. Основною характеристикою невизначеності системи є ентропія, яка в деяких випадках дозволяє оцінити кількість інформації, необхідної для реалізації поставлених цілей. При моделюванні основна ціль - це забезпечення відповідності моделі оригіналу (адекватності). При моделюванні повинно забезпечуватись зниження невизначеності в оцінці адекватності моделі об'єкту.

5. Можливість оцінки за допомогою моделі поведінки об'єкта. Ця особливість дає можливість оцінити ефективність досягнення системою поставленої мети. В залежності від цього моделі можуть мати різний характер. З точки зору каузальності (причина — наслідок): детерміновані, стохастичні, нечіткі; за поведінкою: неперервні та дискретні; за розвитком, за поведінкою в часі: статичні, динамічні, прогнозуючі.

6. Адаптивність. Адаптивність є властивістю високої організації систем. Завдяки адаптивності модель може враховувати всі особливості змінювань, що відбуваються в об'єкті внаслідок впливу зовнішнього оточення в широкому спектрі діючих збурень. Адаптація системи і її моделей здійснюється різними

шляхами: еволюційним, коли змінюються тільки параметри системи при незмінній її структурі; та революційним чином, коли відбувається перебудова системи — реконфігурація системи. Всі ці змінювання відбуваються з метою забезпечення виконання поставлених цілей перед системою. В процесі адаптації необхідно звернути увагу на те, що в системі можуть виникнути такі режими, що можуть привести до зниження її ефективності, або до припинення її функціонування.

7. Моделі повинні мати відповідну організацію. Організаційна структура системи моделювання залежить від складності моделі та особливості її використання. Необхідна оптимальна організаційна структура цілого комплексу технічних засобів, інформаційного, математичного та програмного забезпечення системи моделювання. Основними факторами оптимальності є точність отриманих результатів та час моделювання. Останній фактор особливо важливий для систем реального часу.

8. Можливість управління моделлю. Ця особливість витікає із необхідності забезпечення управління моделлю зі сторони експериментатора, користувача для отримання можливості розглядання процесів, що протікають в об'єкті та системі в різних умовах, тобто модель повинна дати широкий спектр результатів.

9. Можливість розвитку моделі. Науково – технічний прогрес дає необхідні передумови для розвитку систем управління і відповідних систем моделювання. Системи моделювання повинні передбачати можливість розвитку як по горизонталі (розширення спектру функцій), так і по вертикалі (розширення числа підсистем).

Контрольні питання

1. Основні ознаки складних систем.
2. Переваги багатоцільових моделей.
3. Які моделі відображають поведінку систем?
4. В чому проявляється невизначеність при моделюванні?
5. Що досяється при використанні механізмів адаптації при моделюванні?
6. Чим характеризується організація систем моделювання?
7. Що забезпечується можливістю управління моделями?
8. Перспективність розвитку моделей.

[6,с.8-13]

Тема 4. Види моделювання.

Основою моделювання є теорія подібності, яка стверджує, що абсолютної подібності немає, є подібність і схожість за певними суттєвими сторонами характеристики. Тому при моделюванні необхідно щоб модель достатньо повно відображала ту сторону функціонування, ту властивість, яка досліджується. Суттєве значення також має і середовище, в якому будується модель. В залежності від цього маємо таку класифікацію моделювання.

В залежності від процесів, що вивчають, всі види моделювання можна розділити на детерміновані та стохастичні; статичні та динамічні; дискретні, неперервні та дискретно – неперервні.

Детерміновані моделі відображають детерміновані процеси, в яких чітко визначена каузальність (причина — наслідок), тобто одній причині відповідає один наслідок. В цьому випадку передбачається відсутність будь – яких випадкових впливів, або вони не враховуються.

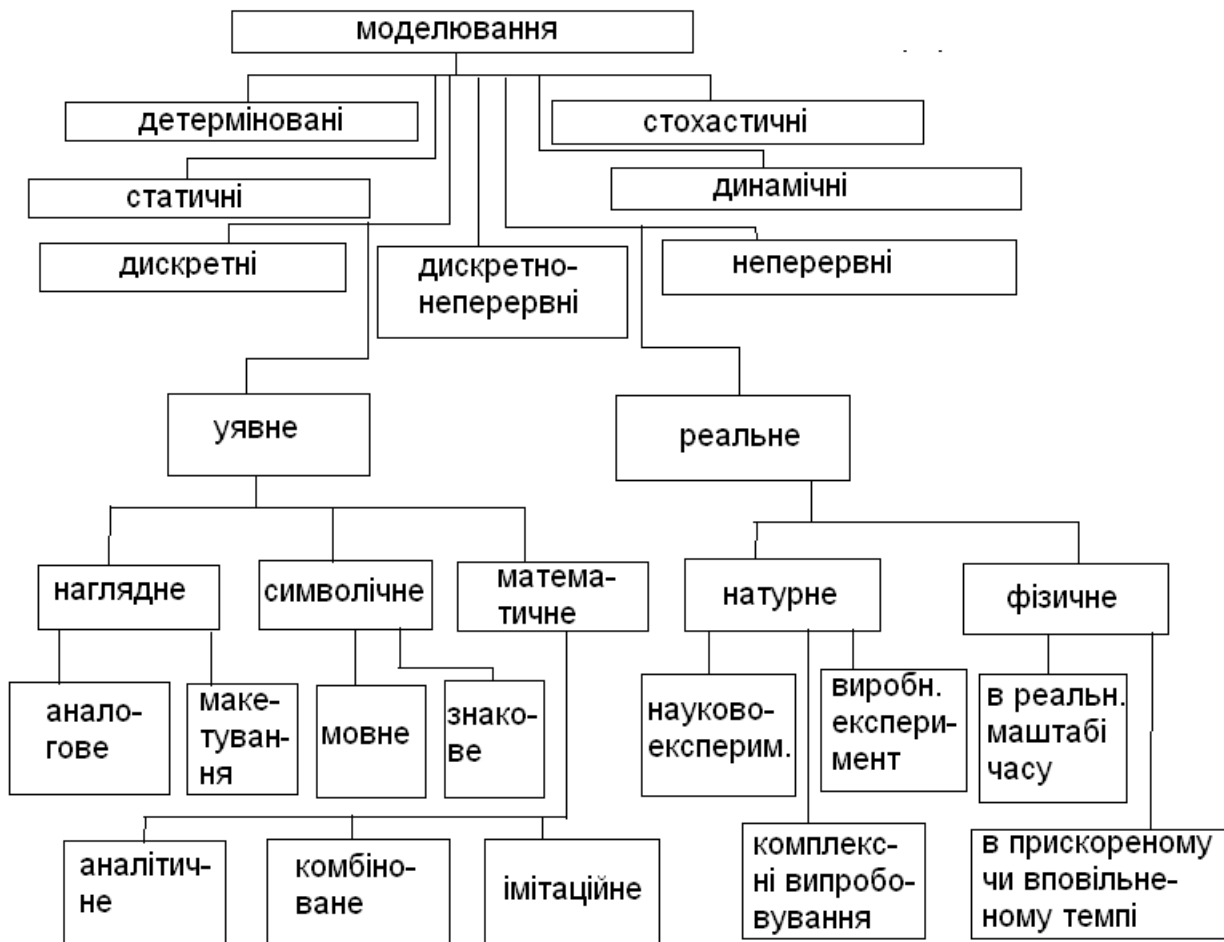


Рис. 4.1. Класифікація моделей

Стохастичні моделі відображають випадкові процеси та події. Ці моделі відображають на основі великої кількості дослідів оцінювання процесів за деякими статистичними показниками, наприклад, математичне сподівання, закон розподілу тощо. У цьому ж випадку можуть бути використані суб'єктивні оцінки у вигляді функцій належності, тощо (нечіткі моделі).

Статичні моделі служать для опису поведінки об'єкта в якийсь момент часу чи для опису зрівноважених усталених режимів роботи об'єкта.

Динамічні моделі характеризують поведінку об'єкта – оригінала в часі. Причому динамічні моделі можуть відображати не тільки реакції об'єкта на

певні входні дії (управління, збурення), а також параметричні та структурні змінювання всередині об'єкту (нестационарні об'єкти).

Дискретне моделювання служить для опису дискретних процесів як за величиною, так і за часом.

Неперервне моделювання використовують для відображення неперервних процесів чи процесів з дискретною природою, якщо цією дискретністю можна знехтувати в порівнянні з часовими параметрами об'єкта – оригіналу.

Неперервно – дискретне моделювання застосовують в тих випадках, коли в складі моделі є елементи чи зв'язки неперервної і дискретної природи.

В залежності від форми представлення об'єкта та моделі можна виділити уявне та реальне моделювання.

Уявне моделювання часто є єдиним способом моделювання об'єктів, яких чи практично неможливо реалізувати, чи вони існують поза умовами, де можливе їх фізичне втілення. Реальне моделювання дає можливість дослідження різних характеристик чи процесів на реальному об'єкті повністю або на його частині, причому природа моделі та об'єкта можуть відрізнитися. Наприклад, моделювання механічного процесу на електронних моделях.

Уявне моделювання можна розбити на такі типи: наглядне, символічне, математичне. При наглядному моделюванні використовують певні гіпотези про об'єкт – оригінал, який характеризується низьким рівнем вивчення, відсутністю теорій. В цьому випадку моделювання являє собою опис об'єкта з використанням відомих досліднику понять, принципів, які наближено пояснюють процеси, що відбуваються в об'єкті.

Символьне моделювання являє собою штучний процес створення логічного об'єкта, який заміщує реальний і виражає основні властивості його відношень за допомогою певної системи знаків чи символів.

Під математичним моделюванням розуміють процес встановлення відповідності даному реальному об'єкту деякого математичного об'єкта (оператора), який дозволяє отримати необхідні характеристики об'єкта – оригінала. Математична модель являє собою сукупність математичних формул, рівнянь, співвідношень, які дають можливість визначити характеристики об'єкта, а також його функціонування, наприклад, в часових та просторових координатах.

Розглянемо два класи реального моделювання: моделювання натурне та фізичне. Натурне моделювання проводиться на реальному об'єкті, при цьому визначаються деякі сторони його функціонування, наприклад, граничні режими або визначаються окремі характеристики реально діючого об'єкта, наприклад, моделювання оцінок показників надійності.

Фізичне моделювання проводиться, як правило, на реальних об'єктах – моделях, які мають однакову природу з об'єктом – оригіналом, але мають відмінності, наприклад, різні розміри, різну швидкість протікання процесів, тощо.

Аналогове моделювання засноване на застосуванні аналогій різних рівнів. Аналогія являє собою логічне судження про схожість об'єктів (моделі та оригінала). Ступінь і рівень аналогії може змінюватися у відповідності із

складом об'єкта, із цілями і задачами моделювання цього об'єкта. При ускладненні об'єкта збільшується невизначеність аналогій та їх кількість. Наприклад, для ТК з'являються по крайній мірі дві аналогії: технологічна та економічна. Суттєве значення в наглядному моделюванні займає макетування. Макет об'єкта — це певна уявна композиція, що відображає деякі суттєві співвідношення та властивості оригіналу. Наприклад, властивість як об'єкт управління з точки зору каузальності, структурне співвідношення: система, підсистема, елемент, клас, вид, рід. Опис макету можна здійснити різними формами: вербальна, тобто словесна, у вигляді певних семантичних знаків, схем тощо. Тобто макет є перехідною формою від узагальненого вигляду (концептуального) до більш конкретного, відтворюється іншими видами моделей.

В основі мовного моделювання лежить деякий тезаурус — словник слів — понять (дескрипторів), які мають однозначне тлумачення. Використання тезауруса, що є обмеженою природною мовою людини, дозволяє забезпечити необхідний інтерфейс між людиною та ЕОМ, наприклад, в ергатичних (людино-машинних) та інтелектуальних системах виробництва.

Знакове моделювання — це модель, побудована з використанням певних знаків (з теорії множин). В основі знакових моделей використовують сукупність певних символів — знаків, організованих в певну систему, наприклад, система графів, знаків, що використовуються в теорії множин, структурних схем, систем управління тощо. Такі моделі дозволяють здійснити певну формалізацію, яка дозволяє отримувати оптимальні за певними показниками моделі.

Математичне моделювання складається з таких видів: аналітичне, комбіноване, імітаційне.

Аналітичні моделі являють собою деякі функціональні співвідношення у вигляді алгебраїчних, інтегральних, диференціальних рівнянь чи логічних умов та переходів. Аналітичні моделі для відображення властивостей об'єкта чи його функціонування повинні бути розв'язані; для цього використовують методи якісного та кількісного розв'язання цих залежностей. Наприклад, метод Ейлера чи Рунге – Кута при розв'язанні диференціальних рівнянь.

Комбіноване моделювання полягає у аналітичному визначенні чи неформальному (евристичному) визначенні структури моделі, типу математичної моделі, наприклад, лінійна, нелінійна модель. А параметри математичної моделі в рамках визначення структури отримують у результаті обробки експериментальних даних, тобто у випадку комбінованого моделювання використовується апріорна інформація (до експерименту) та інформація, отримана в результаті експерименту (апостеріорна).

При імітаційному моделюванні моделлю є алгоритм, що відтворює процес функціонування системи в часі з необхідними початковими даними та послідовним протіканням процесів тощо. Імітаційне моделювання дозволяє достатньо просто враховувати такі фактори як наявність дискретності та неперервності елементів, нелінійні характеристики будь – якої форми, випадкові дії будь – якого закону розподілу. Імітаційне моделювання є єдиним

способом моделювання складних систем управління. Вимагає обов'язкове використання засобів обчислювальної техніки. Важливе значення мають засоби спілкування з особою, що проводить дослідження. Для імітаційного моделювання складних систем використовують спеціальні обчислювальні комплекси, спеціальні мови програмування.

Натурне моделювання розбивають на: науковий експеримент, комплексні випробування, виробничий експеримент.

Науковий експеримент проводиться на об'єкті з метою перевірки наукових гіпотез, розробки нових теорій, встановлення нових наукових закономірностей тощо. Науковий експеримент характеризується використанням додаткової апаратури (вимірювання та організація експериментальних дій), які не властиві для реального об'єкта, що функціонує в нормальному режимі. Науковий експеримент характеризується широким використанням засобів обчислювальної техніки не тільки для обробки експериментальних даних, а також для організації та проведення експериментів.

Комплексні випробування здійснюються на реальній системі, що функціонує в нормальному режимі. Метою комплексних випробувань є отримання моделей, які оцінюють певні аспекти функціонування системи чи її ефективність, наприклад, моделі оцінки надійності системи, моделі оцінки ефективності системи.

Метою виробничого експерименту є оцінка окремих властивостей системи чи ефективності відтворення заданих прикладних функцій.

Фізичне моделювання здійснюється на установках – моделях, що, як правило, мають однакову з об'єктом – оригіналом фізичну природу, але є відмінними від об'єкта, наприклад, в часовому чи в просторовому відношенні. При фізичному моделюванні в реальному часі процеси в моделі відбуваються з такою ж швидкістю як в оригіналі. Фізичне моделювання в прискореному чи повільному темпі використовують, наприклад, для прогнозування процесів, що відбуваються в об'єкті чи для визначення особливих чи критичних режимів роботи.

Контрольні питання

1. Основні класифікаційні ознаки моделей.
2. Детерміновані та стохастичні моделі.
3. Неперевні та дискретні моделі.
4. Які моделі відносять до уявних?
5. Які моделі відносять до реальних?
6. Характеристика наглядних моделей.
7. Характеристика символічних моделей.
8. Особливості імітаційного моделювання.
9. Відмінності наукового і виробничого експерименту.
10. В чому основні особливості виробничих комплексних випробувань?

[6,с.10-13; 7,с.10-22]

Тема 5. Фізичне моделювання.

Фізичне моделювання є одним із перших видів моделювання, має обмежене використання в теорії та практиці управління, найбільш розповсюджене в теплоенергетиці, механіці, гідравліці, в технологічних процесах.

Теоретичною основою фізичного моделювання є теорія подібності, яка дозволяє перенести результат досліджень на фізичній моделі, на об'єкт – оригінал.

Подібність — це умова, при якій можливе кількісне перенесення (традукція) результату експерименту з моделі на оригінал.

Теорія подібності є вченням про наукове узагальнення експерименту і базується на ряді теорем:

1-ша теорема подібності формулює властивість подібних систем. Вона твердить, що подібні явища мають однаковий критерій подібності. Критерії подібності — це кількісні показники, які дозволяють перенести результат експерименту із моделі на об'єкт – оригінал.

Критерії подібності можуть відображати подібність геометричних розмірів, фізичних величин, початкових та граничних умов тощо. Критерії подібності розділяють на критерії – симплекси та критерії – комплекси. Критерії – симплекси складаються з одноіменних величин. Наприклад, геометричний критерій: $r=l/d$; критерій швидкості: $v=v/v_{зв}$.

Критерії – комплекси складаються з різних величин. Наприклад, критерій Рейнольдса: $Re=v*l*\rho/\mu$.

Необхідною умовою подібності двох систем є рівність відповідних критеріїв подібності цих систем, складених із їх узагальнених координат і параметрів. Критерії подібності є безрозмірні величини, які можна розглядати як деяку середню міру відношення інтенсивності двох фізичних ефектів процесів, що досліджуються. Критерії подібності визначаються із аналізу особливостей фізики процесу, розмірності величин. Наприклад, критерій Re — відношення впливу сили тертя на рух рідини; критерій Ньютонів характеризує відношення діючої на частинку сили до сили інерції; критерій Нусельта характеризує подібність процесу теплопереносу між стінкою та рідиною.

2 – га теорема подібності доводить можливість приведення рівняння процесів до критеріального вигляду: критеріальне рівняння являє собою функціональну залежність, що характеризує процес (фізичні величини та складений з них критерій подібності). Критеріальні рівняння в основному мають вигляд степеневої функції типу:

$$K_1 = C * K_2^m * K_3^r * K_4^l$$

K_1 — критерій, значення якого визначається;

K_2, K_3, K_4 — критерії, які відображають вплив певних фізичних змінних на процеси.

c, m, r, l і т.д. — коефіцієнти, які визначають експеримент на моделі.

Другу теорію подібності ще називають π - теоремою: вона визначає кількість критеріїв, які потрібно аналізувати в критеріальних рівняннях при фізичному моделюванні. Згідно з π - теоремою всяке рівняння з N змінними,

розмірність яких виражена через n основних одиниць вимірювання може бути перетворене у критеріальне рівняння подібності число яких дорівнює π , $\pi=N-n$.

Наприклад, потрібно визначити критеріальні рівняння для аналізу яких потрібно забезпечити перепад тиску ΔP на початку та кінці трубопроводу в залежності від діаметра трубопроводу d , довжини трубопроводу l , динамічної в'язкості середовища μ , густини середовища ρ і середньої швидкості V .

Проведемо аналіз розмірності фізичних величин, які досліджуються:

$$\Delta P \rightarrow \text{Па} \rightarrow \text{Н/м}^2 \rightarrow \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 / \text{м}^2;$$

$$d \rightarrow \text{м};$$

$$l \rightarrow \text{м};$$

$$\mu \rightarrow \text{Па} \cdot \text{с} \rightarrow (\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 / \text{м}^2) \cdot \text{с};$$

$$\rho \rightarrow \text{кг/м}^3;$$

$$v \rightarrow \text{м/с};$$

$$N=6, n=3$$

$$\pi=6-3=3.$$

3 – та теорія подібності формулює достатні умови подібності системи: достатньою умовою подібності є рівність всяких двох відповідних критеріїв подібності цих систем, складених з основних параметрів та початкових крайових умов.

Дослідження методами фізичного моделювання проводиться по такому порядку:

1. Встановлюються основні параметри технологічного процесу, що характеризують його якість чи ефективність.

2. Виходячи з кількості визначених параметрів та вибраних масштабів створюють одну чи декілька фізичних моделей.

3. За допомогою цих моделей – установок отримують числові значення коефіцієнтів критеріальних рівнянь, по яких визначаються параметри об'єкта – оригінала.

Контрольні питання

1. На чому побудована концепція фізичного моделювання?
2. Які основні теореми теорії подібності?
3. Що таке критерії подібності і як вони складаються?
4. Як складаються критеріальні рівняння?
5. Що таке критерії-симплекси та критерії-комплекси? Наведіть приклади.
6. Як визначається кількість критеріїв в критеріальних рівняннях?
7. Послідовність проведення фізичного моделювання.

[6,с.13-17; 7,с.14-20]

Тема 6. Математичне моделювання, загальна його характеристика.

Науково – технічний прогрес в промисловості вимагає застосування складних алгоритмів управління, які можуть бути реалізовані на простих математичних моделях (оптимальне управління, адаптивне управління, координація). Вирішення такої складної проблеми як отримання та аналіз математичної моделі можливе шляхом застосування обчислювальної техніки (обробка великих масивів інформації, необхідної в оперативному прийнятті рішень по управлінню в реальному масштабі часу і т. д.).

На відміну від фізичних моделей, математичну модель створюють на однаковому математичному описі явищ, що проходять в моделі та оригіналі.

В основі математичного моделювання систем управління лежить кібернетичний підхід. Суть його полягає в тому, що математична модель являє собою математичний оператор, який перетворює вхідну інформацію у вихідну і цей оператор характеризує об'єкт або його характеристику чи властивості.

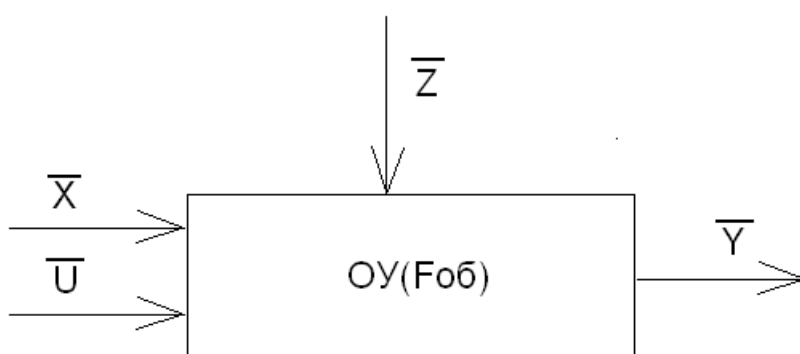


Рис. 6.1. Об'єкт як математичний оператор

Модель об'єкта можна представити у вигляді математичного оператора, який перетворює інформацію про вхідні змінні, в інформацію про вихідні змінні. Цих математичних операторів може бути велика кількість і кожен з цих операторів відображає певні властивості об'єкта чи певні етапи та режими функціонування об'єкта.

Ступінь складності математичного оператора залежить від цілей моделювання, від цілей використання моделі. Тобто ступінь складності моделі залежить від багатьох факторів і повинен бути достатнім для вирішення практичних задач. Модель об'єкта можна представити у вигляді множини величин, що описують функціонування об'єкта в реальних умовах і утворюють в загальному випадку підмножини вхідних дій та підмножини вихідних характеристик об'єкта.

До підмножини вхідних дій можна віднести сукупність збурень \bar{Z} , вхідні дії, фактори, що впливають на змінювання вихідних характеристик об'єкта, але в процесі функціонування об'єкта їх неможливо змінити. Тобто вектор збурень характеризується великою ступінню невизначеності. Вектор збурень \bar{Z} можна характеризувати у кількісному відношенні певними статистичними характеристиками (в цьому випадку збурення розглядаються як випадковий

процес з визначеним законом розподілу), так і в якісному відношенні у вигляді нечітких величин, якісних ознак тощо.

Сукупність управлінь \bar{U} — це сукупність вхідних дій, які цілеспрямовано змінюються за заздалегідь визначеними планами (програма, алгоритм) чи (також) на підставі отриманої інформації про вхідні та вихідні змінні.

Сукупність вхідних, проміжних дій \bar{X} — це сукупність факторів, які характеризують вплив інших підсистем системи, в якій знаходиться об'єкт. Наприклад, завдання з вищих рівнів ієрархії управління, вихідні змінні підсистем того ж рівня, що і об'єкт управління, які характеризують вплив цих підсистем на об'єкт.

Сукупність вихідних змінних, вектор виходу \bar{Y} — це сукупність параметрів, що характеризують властивості об'єкта та його функціонування, а також вплив цього об'єкта на наступні підсистеми чи на оточуюче середовище.

Важливим параметром математичної моделі, особливо в тому випадку, коли вони характеризують функціонування об'єкта, є фактор часу. В загальному випадку математична модель, що відтворює властивості та функціонування об'єкта являє собою математичний оператор вигляду: $\bar{Y} = \bar{F}_m(\bar{U}, \bar{X}, \bar{Z}, t)$.

\bar{F}_m — математичний оператор, математична модель об'єкта.

Оператор \bar{F}_m може бути заданий у вигляді: функцій, функціоналу, логічних умов та співвідношень, у вигляді алгоритму, в табличній формі або в вербальному вигляді (опис словами в довільній формі, як правило, за допомогою обмеженої природньої мови).

Оператор \bar{F}_m математичної моделі розглядають як складну систему. Оператор \bar{F}_m можна представити у вигляді таких компонентів: структури S та параметрів структури A_s .

$$\bar{F}_m \triangleq \langle S, A_s \rangle$$

До структури математичної моделі входить: сукупність елементів (множина вхідних та вихідних змінних) та зв'язки між цими елементами (наприклад, лінійні, нелінійні, у вигляді диференціальних рівнянь чи в операторній формі, стохастичний чи детермінований і т. д.).

Параметрами структури A_s є коефіцієнти рівнянь, початкові та крайові умови, умови логічних переходів тощо.

До математичного моделювання відносять також процес дослідження математичної моделі на ЕОМ (наприклад, імітаційне моделювання). Незважаючи на велику кількість типів математичних моделей можна виділити декілька основних їх властивостей, характеристик, з точки цілей дослідження та практичного використання. До таких характеристик слід віднести: точність, економічність та універсальність математичної моделі.

Точність математичної моделі — це її властивість, що відображує ступінь співпадання передбачених за допомогою моделі значень вихідних змінних об'єкта з його істинними значеннями.

Істинні значення вихідних змінних об'єкта частіше всього ототожнюють з експериментально отриманими значеннями.

Потрібно враховувати, що точність експериментальних даних не завжди задовольняє точності, яку повинна мати математична модель для її використання. В цих випадках потрібно переглянути вимоги до математичної моделі, або підвищити точність отримання експериментальних даних. Наприклад, застосування більш точних приладів, методик чи застосовувати більш ефективні алгоритми обробки експериментальної інформації.

Точність математичної моделі визначається за одним чи сукупністю показників – критеріїв точності.

Економічність математичної моделі полягає в інтегральній оцінці ефективності математичної моделі, виходячи із витрат на її створення і експлуатацію та ефекту, отриманого в результаті її практичного використання. Наприклад, швидкість отримання результату в схемах реального часу і т. д.

Універсальність математичної моделі полягає в тому, щоб вона могла бути застосована для груп однотипних об'єктів, для їх аналізу в різних режимах функціонування.

Основні етапи математичного моделювання:

1. визначення цілей моделювання та задач моделювання;
2. визначення показників, критеріїв, виходячи із поставлених задач моделювання та в залежності від режимів функціонування об'єкта;
3. визначення та вибір параметрів, які впливають на вибрані показники якості;
4. виявлення найбільш суттєвих зв'язків та параметрів (найбільш суттєві зв'язки відображають в структурі математичної моделі);
5. математичний опис елементів об'єкта;
6. математичний опис зв'язків між елементами об'єкта;
7. математичний опис об'єкта в цілому;
8. визначення області рішень математичної моделі;
9. складання алгоритму та програм для моделі на ЕОМ;
10. оцінка та узагальнення результатів моделювання;
11. застосування математичної моделі:
 - а) аналіз;
 - б) синтез;
 - в) використання математичної моделі в контурі управління.

Контрольні питання

1. Що є основою математичного моделювання?
 2. Охарактеризуйте множини змінних моделей.
 3. Як може бути заданим оператор математичних моделей?
 4. Що являє собою структура і параметри математичних моделей?
 5. Що таке точність математичної моделі?
 6. Що таке економічність математичної моделі?
 7. Що таке універсальність математичної моделі?
 8. Основні етапи математичного моделювання.
- [6,с.22-34; 7,с.99-112]

Тема 7. Основні види математичного моделювання технологічних об'єктів.

При моделюванні складного об'єкта управління використовується сукупність декількох моделей із числа їх різновидів.

Будь – яка система може бути представлена різними способами, які значно відрізняються один від одного по складності і деталізації. При цьому, в залежності від глибини і тривалості об'єкта, прості моделі повинні вдосконалюватись, ускладнюватись, стати більш ефективними.

Потрібно враховувати те, що математична модель завжди є певною абстракцією, певною ідеалізацією. Тобто при моделюванні приймаються деякі припущення, спрощення, тощо.

Математичні моделі можуть бути аналітичними та імітаційними.

В аналітичних моделях відображають певні функціональні співвідношення (алгебраїчні, диференціальні, інтегральні) чи логічні умови функціонування об'єкта. Аналітичні моделі можна отримати та дослідити трьома способами чи їх комбінаціями:

1. Аналітичний, отримані необхідні залежності між величинами у вигляді певних функцій, функціоналів чи логічних співвідношень.

2. Числовий, у даному випадку рішення отримуються у вигляді числового результату за допомогою числових методів на ЕОМ.

3. Якісний, коли немає можливості отримання рішення в кількісному вигляді або воно недоцільне, але можна знайти деякі властивості рішень. Наприклад, оцінити збіжність алгоритмів чи стійкість системи.

Імітаційні моделі, на відміну від аналітичних, відтворюють в ЕОМ поточне функціонування системи в часовому чи просторовому відношенні. При цьому вхідні дії і результати відтворюються у вигляді наборів чисел (реалізація процесів), а не числових характеристик (чисел), як при числовому моделюванні. Основна перевага імітаційного моделювання — це наглядність результатів моделювання.

Якщо при аналітичному моделюванні забезпечується подібність характеристик об'єкта та моделі, то при імітаційному моделюванні маємо подібність процесів, що протікають в моделі та реальних об'єктах.

Однією з переваг імітаційного регулювання є можливість моделювання у випадках неможливості отримання аналітичного опису об'єкта чи великих витрат на моделювання внаслідок складності об'єкта. Тобто імітаційне моделювання в багатьох випадках дає необхідні результати для практичного використання. Отже, імітаційне моделювання є більш універсальним методом, ніж аналітичне. Перевагою імітаційного моделювання також є динамічний характер відображення функціонування об'єкта, внаслідок можливості врахування випадкових процесів змінювання величини об'єкта, врахування інтенсивності потоків інформації тощо.

По способу отримання математичні моделі поділяють на:

— теоретичні

— формальні (експериментальні).

Теоретичні моделі отримують на основі вивчення фізико – хімічних закономірностей; структура та параметри моделі мають чітко визначене фізико – хімічне тлумачення.

Формальні експериментальні моделі отримують на основі виявлення властивостей об'єкта в зовнішньому середовищі, шляхом проведення експерименту з об'єктом.

Під експериментом розуміємо послідовність заздалегідь визначених дій на об'єкт, в результаті яких отримуємо одну чи множину величин — результатів експерименту. Експеримент можна проводити різними шляхами: пасивний чи активний експеримент. Пасивний експеримент полягає в спостереженні за роботою об'єкта, шляхом вимірювання змінних, що входять в математичну модель об'єкта без втручання в роботу об'єкта (без нанесення додаткових дій, без змінювання режимів функціонування об'єкта примусовим шляхом тощо). Активний експеримент передбачає вимірювання та реєстрацію змінних, що входять в модель, після нанесення на об'єкт запланованих дій з метою визначення моделі об'єкта.

Теоретичні моделі в багатьох випадках є більш універсальні і їх можна використовувати в широкому діапазоні змінювання характеристик об'єктів та режимів їх функціонування. Але для багатьох, особливо складних об'єктів, які характеризуються складною взаємодією процесів та явищ різної природи, відсутністю багатьох теоретичних закономірностей тощо, а також внаслідок прийнятих припущень, не дають необхідної для практичного використання точності. Крім того, теоретичні моделі складних об'єктів у багатьох випадках не мають точного розв'язку, а використання числових методів їх вирішення не дає необхідної точності.

Формальні моделі є більш точними, але в тій області функціонування об'єкта, в якій проводився експеримент. Суттєвим недоліком формальних моделей є те, що вони є адекватними тільки для тих об'єктів, в яких проводився експеримент. Тобто формальні моделі не є традуктивними, їх не можна використовувати для моделювання інших об'єктів, включаючи об'єкти одного класу.

В залежності від характеру змінювання вхідних та вихідних величин об'єкта, математичні моделі розділяють на статичні і динамічні. Статичні моделі відображають співвідношення між вхідними та вихідними параметрами об'єкта в усталеному режимі його роботи:

$$\bar{V} = F(\bar{U}, \bar{X}, \bar{Z}).$$

Математичні моделі статички являють системи алгебраїчних рівнянь, які можуть бути лінійними алгебраїчними рівняннями, нелінійними у вигляді степеневих поліномів чи трансцендентними рівняннями.

Динамічні моделі відображають змінювання вхідних та вихідних величин об'єкта в часі:

$$\bar{V} = F(\bar{Y}, \bar{X}, \bar{Z}, t).$$

Математичні моделі динамічних об'єктів являють собою системи диференціальних, лінійних чи нелінійних рівнянь, інтегральних рівнянь, функціоналів, частотних характеристик, передавальних функцій тощо.

За видом зв'язків між вхідними та вихідними змінними об'єкта моделі розділяють на лінійні та нелінійні.

Для лінійних моделей використовується принцип суперпозиції: реакція системи на сукупність вхідних дій дорівнює сумі реакцій на кожну дію окремо.

Якщо координати об'єкта розподілені по просторових координатах, і якщо об'єкт розвивається не тільки в часі, а й в просторі, то моделі, що відображають цей розвиток чи характер координат називаються математичними моделями із розподіленими параметрами. Такі моделі являють собою системи рівнянь з частковими похідними, з просторовими координатами:

$$F\left(\frac{dy}{dt}; \frac{dx}{dt}; \frac{du}{dt}\right) = 0$$

Якщо основні параметри об'єкта не змінюються в просторі, то математичні моделі, що відображають роботу таких об'єктів називаються математичними моделями із зосередженими параметрами.

По характеру змінювання вхідних та вихідних змінних об'єкта математичні моделі розділяють на неперервні та дискретні.

Математичні моделі можуть відображати дискретні змінювання як в часі, так і за рівнем.

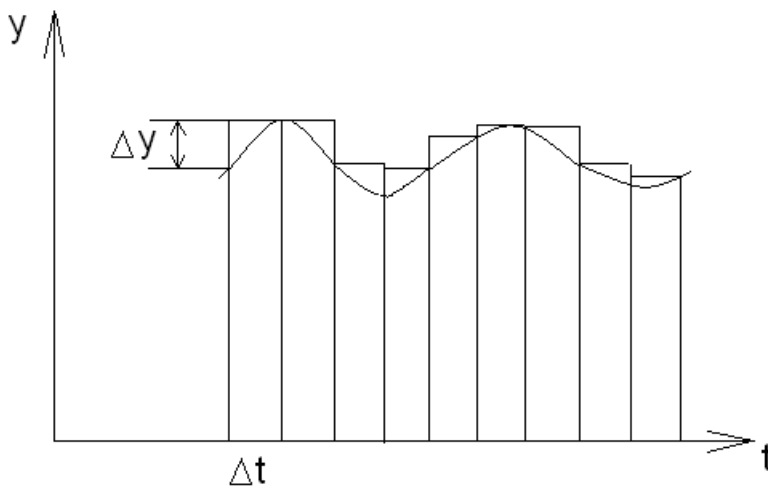


Рис. 7.1. Дискретність моделі в часі

Неперервною є така модель, в якій змінні можуть бути визначені для будь-якого моменту часу. Модель, яка дискретна в часі має значення змінних, які отримані у визначені моменти часу, як правило через однакові проміжки часу.

Математичні моделі дискретних об'єктів являють собою системи рівнянь з дискретними змінними.

За характером впливу вхідних змінних на вихідні змінні з точки зору каузальності (причина - наслідок) математичні моделі можуть бути детерміновані та стохастичні. В детермінованих математичних моделях певній

сукупності вхідних змінних відповідає конкретне одне значення вихідної величини.

В стохастичних об'єктах певній сукупності вхідних величин відповідає сукупність значень вихідних величин, які знаходяться в певному числовому діапазоні (довірчому інтервалі); цей діапазон визначається виходячи із вимог до математичних моделей, а також значень статистичних характеристик випадкових процесів змінювання вхідних та вихідних величин (дисперсність, закон розподілення, кореляційні функції тощо). У стохастичних об'єктах ми можемо передбачити, при умові відомого закону розподілення, ймовірність знаходження необхідної оцінки змінних об'єкта в довірчому інтервалі.

За ознакою стаціонарності математичні моделі є неадаптивними і адаптивними.

Нестаціонарний об'єкт — це такий об'єкт, в якому з часом змінюються його властивості. Ці зміни можуть відбуватись як еволюційним шляхом, коли швидкість змінювання характеристик незначна, так і революційним — альтернативним шляхом, коли за досить незначні проміжки часу в об'єкті відбуваються якісні змінювання характеристик, властивостей. З метою забезпечення адекватності математичних моделей нестаціонарних об'єктів в моделі повинен бути закладений механізм адаптації (приспосовування) до змінювання характеристик об'єкта чи зовнішнього середовища. Як правило, еволюційні змінювання в об'єктах відслідковуються в математичних моделях шляхом варіації змінювання її параметрів. У випадку якісних змінювань в об'єкті математична модель повинна змінювати свою структуру.

В системах управління використовуються як прямі, так і інверсні математичні моделі.

Пряма модель відображає вплив управлінь та вхідних величин на вихідні змінні.

Інверсна модель (аргументна математична модель) визначає, як потрібно організувати управління, щоб забезпечити задане змінювання вихідних координат об'єкта, тобто вирішити задачу синтезу управління.

$$\bar{U} = F'(\bar{Y}, \dot{Y}, \bar{Z}, t).$$

В системах управління харчовими виробництвами використовують також кінетичні математичні моделі, які відображають хід хімічних реакцій, що виникають в залежності від певних фізичних чи хімічних причин або явищ. Наприклад, концентрація речовини, режимних параметрів процесів, наявності каталізаторів певного типу тощо.

Контрольні питання

1. Що таке аналітичні математичні моделі і як вони отримуються?
2. Як отримують формальні моделі?
3. В чому особливості пасивних та активних експериментів?
4. Який вигляд мають математичні моделі статички та динаміки?
5. Особливості математичних моделей об'єктів із зосередженими та розподіленими параметрами.

6. Які бувають дискретні математичні моделі?
7. В чому полягає відмінність між детермінованими та стохастичними математичними моделями?
8. В яких випадках застосовують адаптивні математичні моделі?
9. В чому відмінність між прямими та інверсними математичними моделями?
10. Що являють собою кінетичні математичні моделі?
[6, с.35-80; 7, с.45-68]

Тема 8. Використання математичних моделей при вирішенні задач автоматизації.

Математичні моделі для вирішення задач автоматизації використовують в таких цілях:

- а) для аналізу та синтезу (розробки) систем управління;
- б) для використання безпосередньо в процесі управління.

Перша задача вирішується на етапах проектування чи дослідження системи. Розробка системи управління здійснюється шляхом послідовного вирішення задач аналізу та синтезу з можливими ітераціями. Аналіз використовують для вивчення властивостей елементів системи управління і системи в цілому, наприклад, з метою визначення ефективності каналів управління, можливостей системи, уточнення вимог до системи тощо.

Синтез застосовують для визначення структури та параметрів системи, що забезпечують необхідну якість управління, яка визначається за певними показниками, критеріями, наприклад, інтегральний показник якості, тривалість перехідного процесу тощо. Якщо результати синтезу системи не задовольняють поставленим перед нею вимогам, то здійснюється корегування системи управління шляхом змінювання параметрів системи чи структури управління. Наприклад, введення нових каналів управління, ускладнення алгоритму управління тощо.

На сучасному етапі розвитку СУ все більшого розповсюдження набуває другий напрямок використання математичних моделей — це застосування математичної моделі безпосередньо в контурі управління. Це застосування забезпечується широким використанням засобів обчислювальної техніки, використанням сучасних принципів управління (розподіленість, ієрархічність, дуальність). Дуальність полягає в тому, що перед організацією управління (формування та реалізація управляючих дій з метою переведення об'єкта управління в кращу ефективну область його функціонування з точки зору поставлених цілей управління) система навчається, тобто модифікує алгоритм управління, змінює цілі управління, пристосовується до нових умов, тощо. При вирішенні задач управління та навчання системи управління важливу роль відіграють математичні моделі, які є складовою частиною алгоритмів управління.

Управляючий пристрій на основі отриманої інформації (вектори $\bar{Y}, \bar{X}, \bar{Z}$), поставленої цілі управління формує управляючі дії \bar{U} на ОУ.

Формування, вибір та реалізація управляючих дій на ОУ здійснюється за допомогою алгоритму управління. В алгоритмах управління, особливо для управління складними об'єктами, завжди присутні декілька математичних моделей, які дозволяють проводити оцінку станів об'єкта з зовнішнім середовищем в різних режимах його функціонування, здійснювати прогнозування станів об'єкта, визначати ефективні рішення по управлінню.

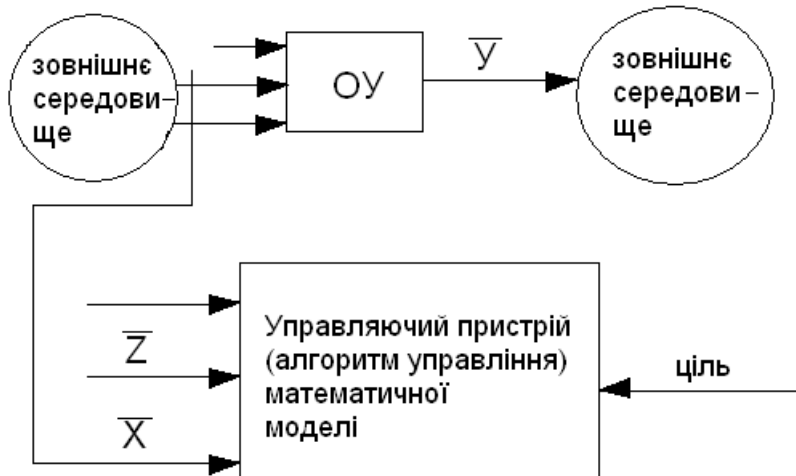


Рис.8.1. Загальна схема функціонування об'єктів управління.

Комплекс моделей — це сукупність моделей, зв'язаних між собою за певними ознаками, та взаємодіючих з метою реалізації алгоритму управління.

Ціль функціонування системи управління може задаватись особою, що приймає рішення (ОПР) чи системами управління вищого рівня.

В деяких випадках (системи, що самоорганізуються, адаптивні системи) система управління (СУ) може здійснювати цілеспрямування, виходячи із обставин, що склались, але це цілеспрямування відбувається на множині цілей наперед визначених ОПР чи системою вищого рівня, на основі стратегічних задумів, які ставляться перед системою.

Враховуючи те, що складні об'єкти управління в процесі функціонування змінюють свої характеристики, властивості, цілі (як еволюційним, так і революційним шляхом), СУ, алгоритми управління, а також математичні моделі повинні відслідковувати ці змінювання, тобто під час функціонування СУ повинна здійснюватись ідентифікація об'єктів управління.

Контрольні питання

1. В чому полягає використання математичних моделей в задачах аналізу і синтезу систем управління?
2. В чому полягає використання математичних моделей в задачах управління?
3. Загальна структура системи управління з використанням математичних моделей в контурі управління.
4. Яким чином задаються цілі управління?
5. В чому проявляється дуальність управління?

6. Яким чином використовуються математичні моделі в алгоритмах управління?

[6,с.6-44; 7,с.30-44]

Тема 9. Ідентифікація об'єктів управління (ОУ). Основні поняття.

Для цілеспрямованого управління необхідно знати характеристики ОУ (математичні моделі ОУ) для того, щоб організувати такі управляючі дії, щоб забезпечити оптимальний перехід об'єкта з одного стану в інший, який найбільш доцільний з точки зору вибраного критерію управління.

Ідентифікація — це процес побудови математичних моделей за експериментальними даними, а також на основі деякої апріорної інформації з точністю, яка задовольняє вибраному критерію ідентифікації.

Задача ідентифікації характеризується в загальному таким чином: за результатами спостережень за вхідними та вихідними змінними об'єкта побудувати оптимальну в деякому розумінні модель об'єкта.

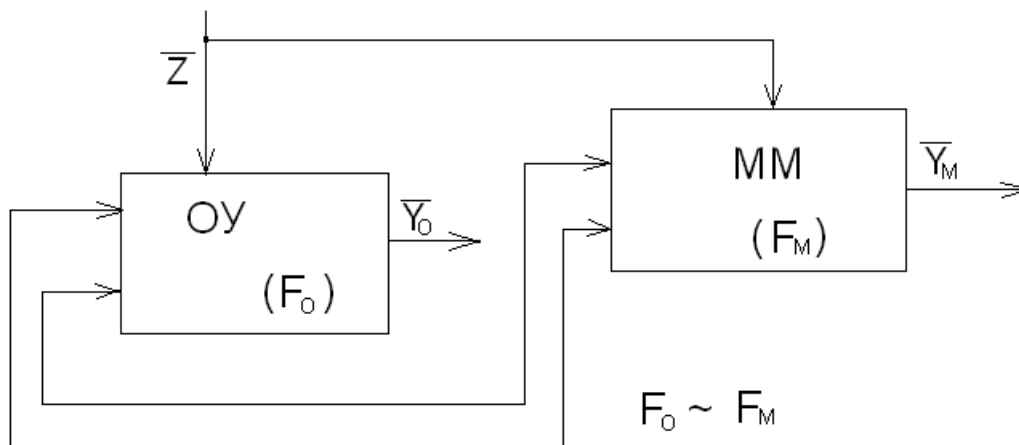


Рис. 9.1. Схема проведення ідентифікації

Задачею ідентифікації в математичному розумінні є визначення математичного оператора моделі F_M , який оптимальним чином перетворює вхідну інформацію на вихідну, задовольняючи вибраним критеріям ідентифікації.

Критерії ідентифікації — це показники чи їх комплекс, які непрямим шляхом за різними ознаками оцінюють еквівалентність операторів: $F_0 \sim F_M$.

Еквівалентність операторів F_0 і F_M може бути сформульована з різних позицій, може мати різну розмірність, тому практично неможливо (дуже важко) здійснити безпосередню оцінку їх еквівалентності. Тому в практичних застосуваннях оцінку еквівалентності F_0 і F_M проводять за їх реакціями на одні і ті ж вхідні дії, тобто за виходами об'єкта:

$$\bar{Y}_0 = F_0(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{U}, t);$$

та моделі:

$$\bar{Y}_m = F_m(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{U}, t).$$

В загальному випадку, це порівняння виражається певною функцією відхилення (нев'язки) ρ :

$$\rho = q(Y_o(t), Y_m(t)).$$

Для ідентифікації використовується інформація, яку можна розділити на два види:

- апріорна (до дослідів);
- апостеріорна (після дослідів).

Як правило, апріорна інформація використовується для оцінки структури математичної моделі або визначення типів та класів структур, які можуть бути уточнені при подальшій ідентифікації. Наприклад, апріорна інформація може характеризувати структуру математичної моделі за такими ознаками:

$$A = \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle,$$

де α — ознака динамічності.

Якщо $\alpha=1$, то об'єкт динамічний; якщо $\alpha=0$, то об'єкт статичний.

β — ознака стохастичності.

Якщо $\beta=1$, то об'єкт стохастичний; при $\beta=0$ — детермінований.

γ — ознака нелінійності.

При $\gamma=1$ — математична модель нелінійна; при $\gamma=0$ — лінійна.

δ — ознака дискретності.

Якщо $\delta=1$, то модель дискретна, якщо $\delta=0$ — неперервна.

Апріорна інформація в загальному випадку дозволяє визначити структуру або клас моделі. Цю процедуру називають ідентифікацією в широкому розумінні або структурною ідентифікацією.

Однак структура математичної моделі — це не модель, для її визначення в повному обсязі необхідно мати вимірювання вхідних та вихідних змінних в процесі експериментальних досліджень об'єкта чи управління цим об'єктом (принцип дуальності).

Результати вимірювань дають можливість визначити параметри математичної моделі при визначенні структури, тобто здійснити ідентифікацію в вузькому розумінні (параметричну ідентифікацію) чи уточнити, вибрати для конкретної структури, із вибраного класу структур, поточну структуру — ідентифікація з подальшим визначенням параметрів вибраного типу структури.

При структурній ідентифікації необхідно виконати такі задачі:

1. виділення об'єкта із середовища;
2. завдання класу моделі;
3. визначення характеру зв'язку між входами та виходами об'єкта;
4. оцінка ступеню та форми впливу вхідних змінних на вихідні і визначення раціонального числа інформаційних змінних (входів, виходів) об'єкта, які враховані в моделі.

Критерії ідентифікації.

Критерій ідентифікації — це показник (чи сукупність показників), по якому оцінюється якість ідентифікації, і який повинен прийняти екстремальне

значення в процесі ідентифікації, що полягає в змінюванні за певним алгоритмом структури математичної моделі та параметрів цієї структури.

$$Q(S, A_s) \rightarrow \text{extr} \\ X \in S \\ A_s \in \Omega$$

де $Q(S, A_s)$ — сукупність критеріїв ідентифікації; S — множина структур математичної моделі, яка входить в множину класів структур математичної моделі; A_s — множина параметрів структури S із області існування параметрів Ω структури S .

Критерій ідентифікації обчислюється в процесі ідентифікації на основі використання функції відхилення (нев'язки) або апостеріорної інформації, тобто експериментально визначених значень вхідних та вихідних змінних на протязі певного інтервалу часу ідентифікації

$$Q(S, A_s) = \int_0^T \rho y(t), f_s(A_s, \bar{X}(t)) dt;$$

T — часовий інтервал, на протязі якого проводиться ідентифікація об'єкта управління.

Конкретний вигляд критерію ідентифікації залежить від задачі моделювання, від використання конкретної моделі, від вимог до точності і т.п.

Частіше всього в практичному використанні застосовують інтегральний середньоквадратичний критерій:

$$Q(F) = \int_0^T (y^l(t) - y^m(t))^2 dt \rightarrow \min$$

$$Q(F) = \max |y^l(t) - y^m(t)| \rightarrow \min$$

Інколи використовують комплекс критеріїв ідентифікації, які оцінюють отриману математичну модель з різних сторін, наприклад: точність, швидкість отримання оцінки параметрів моделі тощо.

Частіше всього використовується інтегральний квадратичний критерій. Такий критерій мають ряд переваг:

1. Критерій мають достатньо чітке фізичне розуміння. Це дисперсія вихідного сигналу моделі відносно вихідного сигналу об'єкту.

2. Такий критерій дає найкращу оцінку моделі для об'єктів, де змінні змінюються за нормальним (Гаусовим) розподілу, який є переважним для більшості технічних об'єктів.

3. Критерій достатньо добре оцінює великі та тривалі похибки, а малі та короткотривалі похибки мало впливають на результат.

4. Оптимізація по цьому критерію може здійснюватись із застосуванням достатньої кількості методів оптимізації.

Критерій ідентифікації може доповнюватись введенням додаткових коефіцієнтів, які враховують, наприклад: цінність інформації, оцінку старіння інформації тощо.

Основні проблеми ідентифікації.

При ідентифікації виникають помилки, які викликають розузгодження між експериментально визначеними значеннями об'єкта та розраховані по моделі. Можна виділити три складові таких похибок:

1. ε_1 , яка виникає від параметричного розузгодження операторів реального об'єкта та моделі.
2. помилка ε_2 , яка виникає внаслідок початкового розузгодження координат моделі та об'єкта.
3. похибка ε_3 , що визначається невідповідністю зовнішніх дій, які поступають на модель та об'єкт.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Всі ці похибки приводять до того, що при ідентифікації виникає ряд труднощів, які об'єднуються в дві основні проблеми ідентифікації. Першою основною проблемою є визначення класу оператора S та Ω , в яких знаходиться вирішення задачі ідентифікації: проблема визначення класу структур конкретної моделі і області змінювань параметрів відомої структури моделі, тобто в останньому випадку обмежена оптимізація задачі ідентифікації. Для прийняття рішення про склад структури математичної моделі потрібно використати апріорну інформацію про об'єкт, а також врахувати його особливості, ціль управління, можливі алгоритми управління, структуру об'єкта як об'єкта управління, механізм впливу на цілі управління.

Друга проблема ідентифікації полягає у забезпеченні поставлених задач ідентифікації з найменшими втратами для користувача.

Вирішення задач ідентифікації пов'язане з певними втратами, витратами, наприклад, для забезпечення оперативності прийняття рішень по управлінню. Суттєве значення має час вирішення задач ідентифікації, при вирішенні задач управління складними об'єктами значну увагу слід приділяти економічним факторам і т.д. Складність програм також має, в деяких випадках, певні обмеження для вирішення задач ідентифікації.

Ці обставини дають обмеження на вигляд алгоритму ідентифікації, скорочують клас алгоритмів ідентифікації. Для оцінки ефективності алгоритмів ідентифікації застосовують критерії ефективності алгоритмів ідентифікації. Це можуть бути: час виконання алгоритмів ідентифікації, кількість кроків в ітераційному алгоритмі ідентифікації, витрати на отримання інформації при ідентифікації. Але частіше використовують сукупність критеріїв оцінки ефективності алгоритмів ідентифікації, які комплексно характеризують втрати та витрати на ідентифікацію.

Позначимо через L — алгоритм вирішення задачі ідентифікації; r — алгоритм ідентифікації для певного класу моделей S , а через I — втрати та витрати на ідентифікацію. Тоді задача визначення оптимального алгоритму ідентифікації буде мати такий вигляд:

$$I[Q(F) \rightarrow \min, L] \rightarrow \text{opt}$$

$$L \in r$$

Тобто задача вибору алгоритму ідентифікації полягає у пошуку оптимального алгоритму L^* , який забезпечує вирішення задачі ідентифікації $Q(F) \rightarrow \min$ і має найкращі показники, що характеризують використання в конкретних умовах втрати та витрати на ідентифікацію, складність алгоритмів тощо. Ця задача вирішується на стадії проектування системи для кожного класу S моделей.

Контрольні питання

1. Дайте визначення поняття ідентифікації.
2. Загальна схема процесу ідентифікації.
3. Що таке критерій ідентифікації?
4. В чому полягає структурна та параметрична ідентифікація?
5. Математична постановка задачі ідентифікації.
6. Що входить в апостеріорну та апріорну інформацію при вирішенні задачі ідентифікації?
7. Які вимоги до критеріїв ідентифікації?
8. Які основні похибки ідентифікації?
9. Яким чином здійснюється вибір структур математичних моделей?
10. Яким чином здійснюється вибір алгоритмів ідентифікації?

[6, с.61-79, 142-151; 7, с.68-116]

Тема 10. Побудова математичних моделей експериментальним шляхом.

Експериментальні методи дослідження об'єктів управління набули широкого вжитку, особливо для складних об'єктів управління.

Під експериментом розуміємо послідовність дій з об'єктом досліджень, після яких отримуємо, шляхом вимірювання значення змінних об'єкта - результат експерименту, обробка яких дає можливість виконати якусь практичну задачу, наприклад, отримати математичну модель.

Розділяють два види експериментальних досліджень: пасивний та активний експеримент.

Пасивний експеримент передбачає вимірювання змінних об'єкта без втручання в його роботу, тобто в режимі нормального функціонування об'єкта.

Активний експеримент полягає в тому, що поряд із вимірюванням змінних об'єкта на нього наносять сплановані дії.

Пасивний експеримент характеризується низькими витратами, є відносно тривалим процесом і характеризується складністю обробки результатів. Активний експеримент потребує значних витрат на його проведення (наприклад, необхідність організувати дії на об'єкт: це вимагає додаткових витрат на технічні засоби, тощо). Але активний експеримент дозволяє скоротити час на проведення досліджень, а також характеризується простими алгоритмами обробки результатів експерименту.

В процесі експерименту дослідження об'єкту управління можна виділити три основні етапи:

1. підготовка та планування експерименту;
2. проведення експерименту;

3. обробка результатів експерименту.

Переваги експериментальних досліджень:

- а) найменші витрати на вивчення фізико – хімічної природи процесів, що відбуваються в об'єкті;
- б) відносно незначні витрати часу на визначення параметрів математичної моделі.
- в) задовільна точність апроксимації.

Недоліки експериментальних досліджень:

- а) не можна проаналізувати фізико – хімічні явища, що відбуваються в об'єкті, тому що при експериментальних дослідженнях об'єкт представляється у вигляді чорного або сірого ящика;
- б) при експериментальному дослідженні математична модель об'єкта відтворює особливості тільки того об'єкта, на якому проводився експеримент;
- в) немає можливості встановити зв'язок параметрів математичної моделі з конструктивними параметрами об'єкта, а в деяких випадках з режимами його функціонування.

Особливості експериментальних досліджень активним методом.

Активний експеримент проводять за такими методами:

1. класичний (або послідовний активний експеримент);
2. метод планування експерименту;
3. нанесення певних дій — тестів на об'єкт управління в процесі управління об'єктом.

Останній метод застосовується в системах управління, в складі яких є ідентифікатори, тобто в складі систем з так званою пошуковою ідентифікацією.

Класичний метод полягає в тому, що вхідні змінні об'єкта (фактори) в процесі експерименту підтримуються на певних стабільних значеннях рівня. Кількість рівнів залежить від задачі досліджень, виду математичних моделей тощо. Основною особливістю класичного методу є те, що експеримент полягає у послідовному змінюванні від одного рівня до іншого, одного фактору до іншого при стабілізації інших факторів. Такий метод дозволяє отримати математичні моделі з достатньою точністю, але характеризуються значними витратами на експеримент.

Наприклад, кількість експериментів, у яких n змінних, k різних факторів та в m повторностях (кількість паралельних дослідів):

$$M = m \cdot k^n.$$

(для повного дослідження об'єкта з 4-а змінними на 10-ти рівнях в 2-ох повторностях потрібно провести 20 тис. експериментів . А при проведенні повного факторного експерименту для лінійної моделі потрібно провести 32 експерименти ($2 \cdot 2^2$)).

Контрольні питання

1. Що таке експеримент?
2. Які є різновиди експериментів?
3. В чому особливості пасивного експерименту?
4. Яким чином здійснюється активний експеримент?

5. В чому переваги та недоліки експериментальних досліджень?
6. Переваги та недоліки пасивного експерименту.
7. Переваги та недоліки активного експерименту.
8. Чим відрізняється класичний експеримент від методів планування експерименту?

[6,с.142-145,311-365;7,с.110-116]

Тема 11. Системи управління з ідентифікатором.

При управлінні складними об'єктами часто використовують засоби та алгоритми отримання математичних моделей – ідентифікатори. Основними структурами систем управління з ідентифікаторами є структури з ідентифікатором в колі зворотного зв'язку та із еталонною моделлю. Основна схема управління з ідентифікатором в колі зворотного зв'язку показана на рис.11.1. Відповідно до цієї схеми, яка складається з зворотного зв'язку ідентифікатор I в процесі роботи об'єкта по збуреннях f , що поступають, в об'єкт, управлінням U і виходу об'єкта y безперервно уточнює параметри об'єкта K . Використовуючи ці оцінки і фактично виміряні збурення f , регулятор P виробляє керуючі дії.

Ідея такої системи управління була представлена вперше, де в якості алгоритму ідентифікації пропонувалось використовувати метод поточних найменших квадратів. Згодом в багатьох роботах використовувалися різні модифікації цієї схеми. Досліджувалася робота в такій схемі різних алгоритмів ідентифікації при різних режимах.

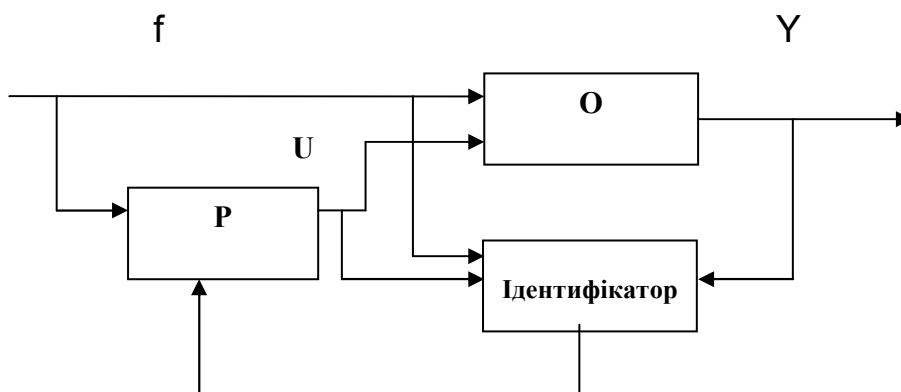


Рис.11.1. Схема управління з ідентифікатором в колі зворотного зв'язку

Схема залежно від алгоритму, який використовує ідентифікацію може бути застосована для управління статичними (лінійними і нелінійними) і динамічними об'єктами. Основне призначення ідентифікатора полягає в стеженні за параметрами об'єкта. Наявність системи стеження за параметрами нестационарного об'єкта робить всю систему загалом нечутливою до змін об'єкта. Подібні системи отримали назву систем з подвійною інваріантністю, оскільки вони нечутливі не тільки до збурень, але і до зміни передавальних функцій каналів, по яких діють ці збурення.

В системах управління, що використовують ідентифікатор, побудова моделі відбувається в реальному часі. Це дозволяє здійснити безпошукове самонастроювання, оскільки знаходження екстремуму по моделі не вимагає пошуку, якщо модель достатньо проста. Проте принципова можливість побудови безпошукових систем самонастроювання, які використовують ідентифікатор, не знімає труднощів, що виникають через нелінійність об'єкта. Тому схеми з ідентифікатором для управління екстремальними об'єктами, хоча й досліджувалися, але широкого розповсюдження ще не отримали.

Великий клас систем управління, що пристосовуються, складають системи з еталонною моделлю. Структурна схема такої системи показана на рис. 11.2. Бажані властивості системи управління (швидкодія, запас стійкості і т. д.) задаються еталонною моделлю M . Вхідні сигнали X поступають на вхід моделі M і на вхід системи управління об'єктом O . Реакції моделі M і системи управління об'єктом O на ці дії порівнюються, і помилка ε поступає в блок управління коректуючим фільтром. При зміні характеристик якої-небудь частини системи, наприклад об'єкта, збільшується помилка між реакціями моделі і об'єкта. Сигнал помилки використовується для зміни коректуючого фільтра так, щоб компенсувати ці зміни.

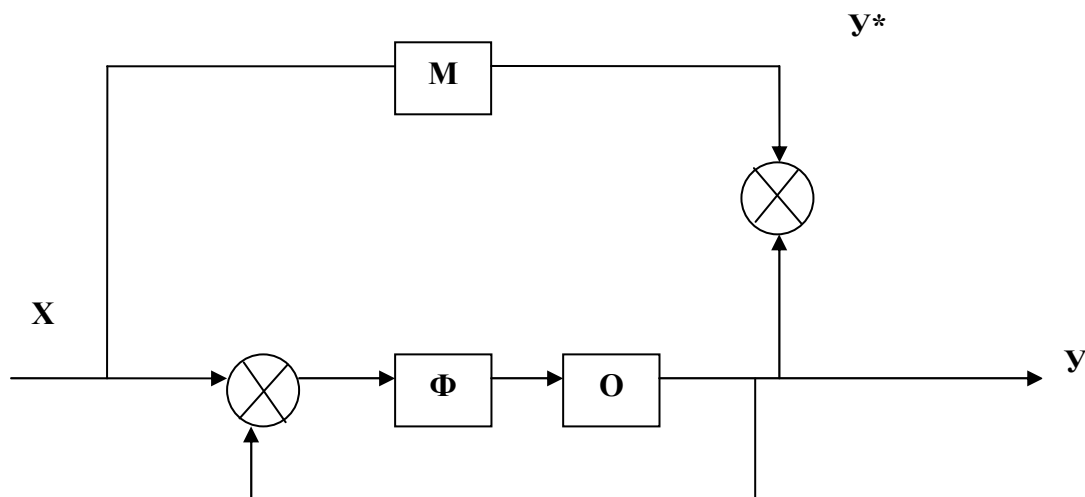


Рис.11.2. Структурна схема системи управління з еталонною моделлю.

Теорії систем з еталонною моделлю присвячено велике число робіт. Розглянуті різні варіанти основної схеми. Різні системи включають ті або інші схеми ідентифікації. Позитивною властивістю систем з еталонною моделлю потрібно вважати те, що ідентифікується не об'єкт в цілому, а тільки, та частина, яка «відповідальна» за відхилення реакції об'єкта від реакції моделі. Для уточнення параметрів об'єкта можуть бути використані автоколивання системи, спеціальні пробні сигнали і т. д. Системи з еталонною моделлю отримали розповсюдження для управління динамічними об'єктами, в яких необхідно отримати заданий перехідний процес, інваріантний до змін параметрів об'єкта і коректуючого фільтра.

Контрольні питання

1. Які існують системи управління із ідентифікаторами?
 2. Схема системи управління із ідентифікатором в ланці зворотнього зв'язку.
 3. Схема системи управління з еталонною моделлю.
 4. Переваги та недоліки системи управління із ідентифікатором в ланці зворотнього зв'язку.
 5. Переваги та недоліки системи управління з еталонною моделлю.
 6. Для яких об'єктів доцільно використовувати ідентифікатори?
- [6,с.146-148]

Тема 12. Організація статистичного моделювання систем на ЕОМ. Загальна характеристика методу статистичного моделювання систем.

На етапі дослідження і проектування систем при побудові і реалізації машинних моделей (аналітичних і імітаційних) широко використовується метод статистичних випробувань (Монте-Карло), який базується на використанні випадкових чисел, тобто можливих значень деякої випадкової величини із заданим розподілом вірогідності. Статистичне моделювання являє собою метод отримання за допомогою ЕОМ статистичних даних про процеси, що відбуваються в системі, що моделюється. Для отримання необхідних оцінок характеристик системи S з урахуванням дій зовнішнього середовища E статистичні дані оброблюються і класифікуються з використанням методів математичної статистики.

Таким чином, суть методу статистичного моделювання зводиться до побудови для процесу функціонування досліджуваної системи S деякого моделюючого алгоритму, що імітує поведінку і взаємодію елементів системи з урахуванням випадкових вхідних дій і дій зовнішнього середовища E , і реалізації цього алгоритму з використанням програмно-технічних засобів ЕОМ.

Розрізняють дві області застосування методу статистичного моделювання: 1) для вивчення стохастичних систем; 2) для вирішення детермінованих задач. Основною ідеєю, яка використовується для вирішення детермінованих задач методом статистичного моделювання, є заміна детермінованої задачі еквівалентною схемою деякої стохастичної системи, вихідні характеристики останньої співпадають з результатом рішення детермінованої задачі. Природньо, що при такій заміні замість точного рішення задачі виходить наближене розв'язання і похибка зменшується із збільшенням числа випробувань (реалізацій моделюючого алгоритму) N .

В результаті статистичного моделювання системи S виходить серія окремих значень шуканих величин або функцій, статистична обробка яких дозволяє отримати відомості про поведінку реального об'єкта або процесу в довільні моменти часу. Якщо кількість реалізацій N достатньо велика, то отримані результати моделювання системи набувають статистичну стійкість і з достатньою точністю можуть бути ухвалені як оцінки шуканих характеристик процесу функціонування системи S .

Теоретичною основою методу статистичного моделювання систем на ЕОМ являються граничні теореми теорії ймовірності. Більшість випадкових явищ (подій, величин) підкоряються визначеним закономірностям, дозволяючи не тільки прогнозувати їх поведінку, а також кількісно оцінювати деякі середні їхні характеристики, які проявляють певну стійкість. Характерні закономірності спостерігаються в розподілах випадкових величин, які утворюються при складанні дій. Виразом цих закономірностей і стійкості середніх показників є так звані граничні теореми теорії ймовірності: частина їх приводиться нижче в придатній для практичного використання при статистичному моделюванні формулюванні. Принципове значення граничних теорем полягає в тому, що вони гарантують високу якість статистичних оцінок при вельми великому числі випробувань (реалізацій) N . Практично прийнятні при статистичному моделюванні кількісні оцінки характеристик систем часто можуть бути отримані вже при порівняно невеликих (при використанні ЕОМ) N .

Нерівність Чебишева. Для ненегативної функції $g(\xi)$ випадкової величини ξ і будь-якого $K > 0$ виконується нерівність

$$P\{g(\xi) \geq K\} < M[g(\xi)]/K.$$

Зокрема, якщо $g(\xi) = (\xi - \bar{x})^2$ і $K = \kappa^2 \sigma^2$ (де \bar{x} — середнє арифметичне; σ — середнє квадратичне відхилення), то

$$P\{|\xi - \bar{x}| \geq \kappa \sigma\} \leq 1/\kappa^2$$

Теорема Бернулi. Якщо проводиться N незалежних випробувань, в кожному з яких деяка подія A здійснюється з вірогідністю p , то відносна частота появи події m/N при $N \rightarrow \infty$ сходиться по вірогідності до p , тобто при будь-якому $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{m/N - p \geq \varepsilon\} = 0$$

Теорема Пуасона. Якщо проводиться N незалежних випробувань і вірогідність здійснення події A в i -му випробуванні рівна p , то відносна частота появи події m/N при $N \rightarrow \infty$ сходиться по вірогідності до середнього з вірогідності p , тобто при будь-якому $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left\{m/N - (1/N) \sum_{i=1}^N p_i \geq \varepsilon\right\} = 0$$

Теорема Чебишева. Якщо в N незалежних випробуваннях спостерігаються значення $x_1 \dots x_N$ випадкової величини ξ , то при $N \rightarrow \infty$ середнє арифметичне значень випадкової величини сходиться по вірогідності до її математичного очікування a , тобто при будь-якому $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left\{\left|(1/N) \sum_{i=1}^N x_i - a\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

Узагальнена теорема Чебишева. Якщо ξ_1, \dots, ξ_N незалежні випадкові величини з математичними очікуваннями a_1, \dots, a_N і дисперсіями $\sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2$ обмеженими зверху одним і тим же числом, то при $N \rightarrow \infty$ середнє

арифметичне значень випадкової величини сходиться по вірогідності до середнього арифметичному їхніх математичних очікувань

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \left| (1/N) \sum_{i=1}^N x_i - (1/N) \sum_{i=1}^N a_i \right| \geq \varepsilon \right\} = 0$$

Теорема Маркова. Вираз справедливий і для залежних випадкових величин ξ_1, \dots, ξ_N якщо тільки

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (1/N^2) D \left[\sum_{i=1}^N x_i \right] = 0$$

Сукупність теорем, що встановлюють стійкість середніх показників прийнято називати законом великих чисел.

Центральна гранична теорема. Якщо ξ_1, \dots, ξ_N — незалежні однаково розподілені випадкові величини, що мають математичне сподівання a і дисперсію σ^2 , то при $N \rightarrow \infty$ закон розподілу суми $\sum_{i=1}^N x_i$ необмежена наближається до нормального.

Теорема Лапласа. Якщо в кожному з N незалежних випробувань подія A з'являється з вірогідністю p , то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \alpha < (m - Np) / \sqrt{Np(1-p)} < \beta \right\} = \Phi_0(\beta) + \Phi_0(\alpha)$$

де m — число появ події A в N випробуваннях. Теорема Лапласа є окремим випадком центральної граничної теореми.

Статистичне моделювання систем на ЕОМ вимагає формування значень випадкових величин, що реалізується з допомогою датчиків (генераторів) випадкових чисел.

Таким чином, підхід при використанні статистичного моделювання незалежно від природи об'єкта дослідження (буде чи він детермінованим або стохастичним) є загальним. Причому при статистичному моделюванні детермінованих систем необхідно заздалегідь побудувати стохастичну систему, вихідні характеристики, якої дозволяють оцінити шукані.

Відзначимо, що у всіх розглянутих прикладах не вимагається запам'ятовування всієї множини випадкових чисел, що генеруються та використовуються при статистичному моделюванні системи S . Запам'ятовується тільки накопичена сума виходів і загальне число реалізацій. Ця важлива обставина взагалі є характерною при реалізації імітаційних моделей методом статистичного моделювання на ЕОМ.

Контрольні питання

1. В чому полягає метод статистичного моделювання?
2. Що є теоретичною основою методу статистичного моделювання?
3. В чому особливість граничних теорем теорії ймовірності?
4. Сформулюйте теорему Чебишева.
5. Сформулюйте теорему Бернуллі.
6. Сформулюйте теорему Лапласа.
7. Сформулюйте теорему Пуасона.
8. Сформулюйте теорему Маркова.

9. Сформулюйте центральну граничну теорему.

10. Яким чином реалізуються імітаційні моделі?

[6, с.147-149; 7, с.117-140]

Тема 13. Псевдовипадкові числа і процедури їх машинної генерації

При статистичному моделюванні систем одним з основних питань є врахування стохастичних дій. Кількість випадкових чисел, що використовуються для отримання статистично стійкої оцінки характеристики процесу функціонування системи S при реалізації моделюючого алгоритму на ЕОМ, коливається в достатньо широких межах залежно від класу об'єкта моделювання, виду оцінюваних характеристик, необхідної точності і достовірності результатів моделювання. Для методу статистичного моделювання на ЕОМ характерним є те, що велике число операцій, а відповідно і велика частка машинного часу витрачаються на дії з випадковими числами. Крім того, результати статистичного моделювання суттєво залежать від якості початкових (базових) послідовностей випадкових чисел. Тому наявність простих і економічних способів формування послідовностей випадкових чисел необхідної якості багато в чому визначає можливість практичного використання машинного моделювання систем.

Розглянемо можливості і особливості отримання послідовностей випадкових чисел при статистичному моделюванні систем на ЕОМ. На практиці використовуються три основні способи генерації випадкових чисел: апаратний (фізичний), табличний (файловий) і алгоритмічний (програмний).

Апаратний спосіб. При цьому способі генерації випадкові числа виробляються спеціальним електронним префіксом — генератором (датчиком) випадкових чисел — як одного із зовнішніх пристроїв ЕОМ. Таким чином, реалізація цього способу генерації не вимагає додаткових обчислювальних операцій ЕОМ по виробленню випадкових чисел, а необхідна тільки операція звернення до зовнішнього пристрою (датчику). В якості фізичного ефекту, що лежить в основі таких генераторів чисел, частіше за всього використовуються шуми в електронних і напівпровідникових приладах, явища розпаду радіоактивних елементів і т. п. Проте апаратний спосіб отримання випадкових чисел не дозволяє гарантувати якість послідовності безпосередньо під час моделювання системи S на ЕОМ, а також повторно одержувати при моделюванні однакові послідовності чисел.

Табличний спосіб. Якщо випадкові числа, оформлені у вигляді таблиці, розміщувати в зовнішню або оперативну пам'ять ЕОМ, заздалегідь сформувавши з них відповідний файл (масив чисел), то такий спосіб буде називатися табличним. Проте цей спосіб отримання випадкових чисел при моделюванні систем на ЕОМ звичайно раціонально використовувати при порівняно невеликому об'ємі таблиці і відповідно файла чисел, коли для зберігання можна застосовувати оперативну пам'ять. Зберігання файла в зовнішній пам'яті при окремому звертанні в процесі статистичного моделювання нераціональне, оскільки викликає істотне збільшення витрат

машинного часу при моделюванні системи S через необхідність звернення до зовнішнього накопичувача (на магнітних дисках, стрічках і т. д.). Можливі проміжні способи організації файлу, коли він переписується в оперативну пам'ять періодично по частинах. Це зменшує час на звернення до зовнішньої пам'яті, але скорочує об'єм оперативної пам'яті, який можна використовувати для моделювання процесу функціонування системи S .

Алгоритмічний спосіб. Спосіб отримання послідовностей випадкових чисел заснований на формуванні випадкових чисел в ЕОМ за допомогою спеціальних алгоритмів і програм які їх реалізують. Кожне випадкове число обчислюється за допомогою відповідної програми у міру виникнення потреб при моделюванні системи на ЕОМ.

Таблиця 13.1. Характеристика способів отримання випадкових чисел

Спосіб	Переваги	Недоліки
Апаратний	Запас чисел необмежений Витрачаються мало операцій обчислювальної машини Не займає місце в пам'яті машини	Потрібна періодична перевірка Не можна відтворювати послідовності Використовується спеціальний пристрій Необхідні заходи по забезпеченню стабільності
Табличний	Потрібна однакратна перевірка Можна відтворювати послідовності	Запас чисел обмежений. Вимагає багато місця в оперативній пам'яті або час на звертання до зовнішньої пам'яті
Алгоритмічний	Потрібна однакратна перевірка Можна багато разів відтворювати послідовності чисел Вимагає мало місця в пам'яті машини Не використовуються зовнішні пристрої	Запас чисел послідовності обмежений її періодом Істотні витрати машинного часу

Переваги і недоліки трьох перерахованих способів отримання випадкових чисел для порівняння представлені в табл.13.1. З цієї таблиці видно, що

алгоритмічний спосіб отримання випадкових чисел найбільш раціональний на практиці при моделюванні систем на універсальних ЕОМ.

При моделюванні систем на ЕОМ програмна імітація випадкових дій будь-якої складності зводиться до генерації деяких стандартних (базових) процесів і до їхнього подальшого функціонального перетворення. Взагалі кажучи, як базовий може бути ухвалений будь-який зручний у разі моделювання конкретної системи S процес (наприклад, пуассонівський потік при моделюванні систем масового обслуговування). Проте при дискретному моделюванні базовим процесом є послідовність чисел $\{x_i\} = x_0, x_1, \dots, x_N$, що являють собою реалізації незалежних, рівномірно розподілених на інтервалі (0, 1) випадкових величин $\{\xi_i\} = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N$ або — в статистичних термінах — повторну вибірку з рівномірно розподіленої на (0, 1) генеральної сукупності значень величини ξ .

Неперервна випадкова величина ξ має рівномірний розподіл в інтервалі (a,b), якщо її функції щільності відповідно приймуть вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a < x \leq b \\ 0, & x < a, x > b \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x-a)/(b-a), & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Визначимо числові характеристики випадкової величини ξ , яка приймає значення x: математичне очікування, дисперсію і середнє квадратичне відхилення відповідно:

$$M(\xi) = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b x dx / (b-a) = (a+b)/2$$

$$D[\xi] = \int_a^b (x - M[\xi])^2 f(x) dx = (b-a)^2 / 12$$

$$\sigma_\xi = +\sqrt{D[\xi]} = (b-a) / 2\sqrt{3}$$

При моделюванні систем на ЕОМ доводиться мати справу з випадковими числами інтервалу (0, 1), коли межі інтервалу a=0 і b=1. Тому розглянемо окремий випадок рівномірного розподілу, коли функція щільності і функція розподілу відповідно мають вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Такий розподіл має математичне очікування $M[\xi] = 1/2$ і дисперсію $D[\xi] = 1/12$.

Цей розподіл необхідно отримати на ЕОМ. Але отримати його на цифровій ЕОМ неможливо, оскільки машина оперує з n-розрядними числами. Тому на ЕОМ замість безперервної сукупності рівномірних випадкових чисел інтервалу (0,1) використовують дискретну послідовність 2^n випадкових чисел того ж інтервалу. Закон розподілу такої дискретної послідовності називають квазірівномірним розподілом.

Випадкова величина ξ , що має квазірівномірний розподіл в інтервалі $(0,1)$, приймає значення $x_i = i/(2^n - 1)$ з ймовірностями $p_i = 1/2^n, i = 0, 2^n - 1$.

Математичне очікування і дисперсія квазірівномірної випадкової величини відповідно мають вигляд

$$M[\xi] = \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{i}{2^n-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{(2^n-1)2^n} \sum_{i=1}^{2^n-1} i = \frac{(2^n-1)2^n}{(2^n-1)2^n \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$D[\xi] = \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} \left[\frac{i}{2^n-1} - \frac{1}{2} \right]^2 = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(\frac{i^2}{(2^n-1)^2} - \frac{i}{2^n-1} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2^n} \left(\frac{(2^n-1)2^n(2^{n+1}-1)}{6(2^n-1)^2} - \frac{(2^n-1)2^n}{2(2^n-1)} + \frac{1}{4} \right)$$

Таким чином, математичне очікування квазірівномірної випадкової величини співпадає з математичним очікуванням рівномірної випадкової послідовності інтервалу $(0, 1)$, а дисперсія відрізняється тільки множником $(2^n+1)/(2^n-1)$, який при великих значеннях n близький до одиниці.

На ЕОМ неможливо отримати ідеальну послідовність випадкових чисел хоча б тому, що на ній можна оперувати тільки з кінцевою множиною чисел. Крім того, для отримання значень x випадкової величини використовуються формули (алгоритми). Тому такі послідовності, що є по своїй суті детермінованими, називаються псевдовипадковими.

Перш ніж перейти до опису конкретних алгоритмів отримання на ЕОМ послідовностей псевдовипадкових чисел, сформулюємо набір вимог, яким повинен задовольняти ідеальний генератор. Отримані за допомогою ідеального генератора псевдовипадкові послідовності чисел повинні: полягати з квазірівномірно розподілених чисел, містити статистично незалежні числа, бути відтвореними, не мати повторностей, генеруватись з мінімальними витратами машинного часу, займати мінімальний об'єм машинної пам'яті.

Щонайбільше застосування в практиці моделювання на ЕОМ для генерації послідовностей псевдовипадкових чисел знаходять алгоритми вигляду $x_{i+1} = \Phi(x_i)$, що представляють собою рекурентні співвідношення першого порядку, для яких початкове число x_0 і постійні параметри задано.

Розглянемо деякі процедури отримання послідовностей псевдовипадкових квазірівномірно розподілених чисел, які знайшли застосування в практиці статистичного моделювання систем на ЕОМ. Широке застосування при моделюванні систем на ЕОМ отримали конгруентні процедури генерації псевдовипадкових послідовностей, що представляють собою арифметичні операції, в основі яких лежить фундаментальне поняття конгруентності.

Конгруентні процедури є чисто детермінованими, оскільки описуються у вигляді рекурентного співвідношення, коли функція має вигляд

$$x_{i+1} = \lambda x_i + \mu \pmod{M},$$

x_i, μ, λ, M — ненегативні цілі числа.

Розкриємо рекурентне співвідношення :

$$x_1 = \lambda x_0 + \mu \pmod{M};$$

$$x_2 = \lambda x_1 + \mu = \lambda^2 x_0 + (\lambda + 1) \mu \pmod{M};$$

$$x_3 = \lambda x_2 + \mu = \lambda^3 x_0 + (\lambda^2 + \lambda + 1) \mu = \lambda^3 x_0 + (\lambda^3 - 1) \mu / (\lambda - 1) \pmod{M};$$

.....

$$x_i = \lambda^i x_0 + (\lambda^i - 1) \mu / (\lambda - 1) \pmod{M};$$

Якщо задано початкове значення x_0 , множник λ і адитивна константа μ , то однозначно визначається послідовність цілих чисел $\{x_i\}$, складену із залишків від розподілу на M членів послідовності $\{\lambda^i x_0 + \mu(\lambda^i - 1) / (\lambda - 1)\}$. Таким чином, для будь-якого $i \geq 1$ справедливо нерівність $x_i > M$. По цілих числах послідовності $\{x_i\}$ можна побудувати послідовність $\{x_i/M\}$ раціональних чисел з одиничного інтервалу $(0, 1)$.

Конгруентна процедура отримання послідовностей псевдовипадкових квазірівномірно розподілених чисел може бути реалізована мультиплікативним або змішаним методом.

Мультиплікативний метод. Задає послідовність ненегативних цілих чисел $\{x_i\}$, не перевищуючих M , по формулі

$$x_{i+1} = c x_i \pmod{M};$$

тобто це окремий випадок співвідношення при $\mu = 0$.

Через детерміновану складову методу виходять відтворювані послідовності. Необхідний об'єм машинної пам'яті при цьому мінімальний, а з обчислювальної точки зору необхідний послідовний підрахунок добутку двох цілих чисел, тобто виконання операції, яка швидко реалізується сучасними ЕОМ. Для машинної реалізації найбільш зручна версія $M = p^g$, де p — число цифр в системі числення, існуючій в ЕОМ ($p = 2$ для двійкової і $p = 10$ для десяткової машини); g — число біт в машинному слові. Тоді обчислення залишку від розподілу на M зводиться до виділення g молодших розрядів ділимого, а перетворення цілого числа x_i в раціональний дріб з інтервалу $x_i \in (0, 1)$ здійснюється підстановкою зліва від x_i - двійкової або десяткової коми.

Алгоритм побудови послідовності для двійкової машини $M = 2^g$ зводиться до виконання наступних операцій: 1) вибрати як x_0 довільне непарне число; 2) обчислити коефіцієнт $\lambda = 8t \pm 3$, де t — будь-яке ціле позитивне число; 3) знайти добуток λx_0 , що містить не більше $2g$ значущих розрядів; 4) узяти g молодших розрядів як першого члена послідовності x_1 , а інші відкинути; 5) визначити дріб $x_1 = x_1 / 2^g$.

Змішаний метод. Дозволяє обчислити послідовність ненегативних цілих чисел $\{x_i\}$, не перевершуючих M , за формулою

$$x_{i+1} = \lambda x_i + \mu \pmod{M}$$

З обчислювальної точки зору змішаний метод генерації складніше мультиплікативного на одну операцію складання, але при цьому можливість вибору додаткового параметра дозволяє зменшити можливу кореляцію одержуваних чисел.

Якість конкретної версії такого генератора можна оцінити тільки за допомогою відповідного машинного експерименту.

В даний час майже всі бібліотеки стандартних програм універсальних ЕОМ для обчислення послідовностей рівномірно розподілених випадкових чисел засновані на конгруентній процедурі.

Ефективність статистичного моделювання систем на ЕОМ і достовірність одержуваних результатів істотним чином залежать від якості початкових (базових) послідовностей псевдовипадкових чисел, які є основою для отримання стохастичних дій на елементи модельованої системи. Тому, перш ніж приступати до реалізації моделюючих алгоритмів на ЕОМ, необхідно переконатися в тому, що початкова послідовність псевдовипадкових чисел задовольняє вимогам, що пред'являються до неї, оскільки інакше навіть за наявності абсолютно правильного алгоритму моделювання процесу функціонування системи S за наслідками моделювання не можна достовірно судити про характеристики системи.

Результати аналізу системи S , отримані методом статистичного моделювання на ЕОМ, істотно залежать від якості використовуваних псевдовипадкових квазірівномірних послідовностей чисел. Тому всі вживані генератори випадкових чисел повинні перед моделюванням системи пройти ретельне попереднє тестування, яке представляє собою комплекс перевірок за різними статистичними критеріями перевірки (тести) на рівномірність, стохастичність і незалежність. Розглянемо можливі методи проведення таких перевірок, які найбільш часто використовуються в практиці статистичного моделювання систем.

Перевірка рівномірності послідовностей псевдовипадкових квазірівномірно розподілених чисел $\{x_i\}$ може бути виконана за гістограмою з використанням непрямих ознак. Перевірка за гістограмою зводиться до наступного. Висувається гіпотеза про рівномірність розподілу чисел в інтервалі $(0,1)$. Потім інтервал $(0,1)$ розбивається на m рівних частин; тоді при генерації послідовності $\{x_i\}$ кожне з чисел x_j з вірогідністю $p_j=1/m$, $j=1, \bar{m}$ попадає в один з підінтервалів. Всього в кожній j -й підінтервал попадає N_j чисел послідовності $\{x_i\}$, $i=1, N$, причому $N=\sum_{j=1}^m N_j$. Відносна частота попадання випадкових чисел послідовності $\{x_i\}$ в кожний із підінтервалів буде рівна N_j/N . Оцінка ступеня наближення, тобто рівномірності послідовності $\{x_i\}$ може бути проведена з використанням критеріїв згоди. На практиці звичайно приймається $m=20 \div 50$: $N=(10^2 \div 10^3)m$.

Суть перевірки рівномірності за непрямыми ознаками зводиться до наступного. Послідовність чисел, що генерується $\{x_i\}$ розбивається на дві послідовності

$$x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2i-1};$$

$$x_2, x_4, x_6, \dots, x_{2i}, \quad i=1, N.$$

Потім проводиться наступний експеримент. Якщо виконується умова $x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2 < 1$, $i=1, N$,

то фіксується настання деякої події і в лічильник подій добавляється одиниця. Після $N/2$ дослідів, коли генерується N чисел, в лічильнику буде деяке число $k \leq N/2$.

Якщо числа послідовності $\{x_i\}$ рівномірні, то через закон великих чисел теорії вірогідності при великих N відносна частота $2k/N \rightarrow \pi/4$.

Перевірка стохастичності послідовностей псевдовипадкових чисел $\{x_i\}$ найбільш часто проводиться методами комбінацій і серій. Суть методу комбінацій зводиться до визначення закону розподілу довжин ділянок між одиницями (нулями) або закону розподілу (появи) числа одиниць (нулів) в n -розрядному двійковому числі x_i . На практиці довжину послідовності N беруть достатньо великої і перевіряють всі n розрядів або тільки l старших розрядів числа x_i .

Теоретично закон появи j одиниць в l розрядах двійкового числа x_i описується виходячи з незалежності окремих розрядів біноміальним законом розподілу:

$$P(j,l) = C_l^j p^j (1-p)^{l-j} = C_l^j p^j (1-p)^{l-j},$$

де $P(j, l)$ — вірогідність появи j одиниць в l розрядах числа x_i , $p(1) = p(0) = 0,5$ — вірогідність появи одиниці (нуля) в будь-якому розряді числа x_i .

Тоді при фіксованій довжині вибірки N теоретично очікуване число появи випадкових чисел x_i з j одиницями в перевіряючих s розрядах буде рівне $n_j = N C_l^j p^j (1-p)^{l-j}$.

Після знаходження теоретичної і експериментальної вірогідності $P(j, l)$ або чисел n_j при різних значеннях $1 \leq n$ гіпотеза про стохастичності перевіряється з використанням критеріїв згоди.

При аналізі стохастичності послідовності чисел $\{x_i\}$ методом серій послідовність розбивається на елементи першого і другого роду (a і b), тобто

$$x_i = \begin{cases} a, & \text{якщо } x_i < p \\ b, & \text{інакше} \end{cases}$$

Серією називається будь-який відрізок послідовності $\{x_i\}$, що складається із наступних одним за одним елементів одного і того ж роду. Причому число елементів у відрізку (a або b) називається довжиною серії.

Після розбиття послідовності $\{x_i\}$ на серії першого і другого роду будемо мати, наприклад, послідовність вигляду ... aabbbbbaaabbbbab...

Оскільки випадкові числа a і b в даній послідовності незалежні і належать послідовності $\{x_i\}$, рівномірно розподіленої на інтервалі $(0,1)$, то теоретична вірогідність появи серії довжиною j в послідовності завдовжки l в N дослідах (під дослідом тут розуміється генерація числа x_i і перевірка умови $x_i < p$, що визначається формулою Бернуллі

$$P(j,l) = C_l^j p^j (1-p)^{l-j}, \quad j=0,1, \quad l=1,n.$$

У разі експериментальної перевірки оцінюються частоти появи серій довжиною j . В результаті виходять теоретична і експериментальна залежності $P(j, l)$, збіжність яких перевіряється за відомими критеріями згоди, причому перевірку доцільно проводити при різних значеннях $p(0 < p < 1)$ і l .

Перевірка незалежності елементів послідовності псевдовипадкових квазірівномірно розподілених чисел $\{x_i\}$ проводиться на основі обчислення кореляційного моменту.

Випадкові величини ξ і η називаються незалежними, якщо закон розподілу кожної з них не залежить від того, яке значення прийняла інша. Таким чином, незалежність елементів послідовності $\{x_i\}$ може бути перевірена шляхом

введення в розгляд послідовності $\{y_i\} = \{x_{i+\tau}\}$ де τ — величина зсуву послідовностей.

В загальному випадку кореляційний момент дискретних випадкових величин ξ і η з можливими значеннями x_i і y_i визначається за формулою

$$K_{\xi\eta} = \sum_i \sum_j (x_i - M[\xi])(y_i - M[\eta])p_{ij},$$

де p_{ij} — вірогідність того, що (ξ, η) прийме значення (x_i, y_i) .

Кореляційний момент характеризує розсіювання випадкових величин ξ і η і їх залежність. Якщо випадкові числа незалежні, то $K_{\xi\eta} = 0$. Коефіцієнт кореляції

$$\bar{\rho}_{\xi\eta} = K_{\xi\eta} / (\sigma_x \sigma_y),$$

де σ_x і σ_y — середньоквадратичні відхилення величин ξ і η .

При проведенні оцінок коефіцієнта кореляції на ЕОМ зручно для обчислення використовувати наступний вираз:

$$D[x_i] = \left(\frac{1}{N-\tau} \sum_{i=1}^{N-\tau} x_i x_{i+\tau} - \sum_{i=1}^{N-\tau} x_i \sum_{i=1}^{N-\tau} x_{i+\tau} \right) \sqrt{D[x_i] D[x_{i+\tau}]}$$

$$D[x_i] = [1/(N-\tau)] \sum_{i=1}^{N-\tau} x_i^2 - [1/(N-\tau)^2] \left(\sum_{i=1}^{N-\tau} x_i \right)^2$$

$$D[x_{i+\tau}] = [1/(N-\tau)] \sum_{i=1}^{N-\tau} x_{i+\tau}^2 - [1/(N-\tau)^2] \left(\sum_{i=1}^{N-\tau} x_{i+\tau} \right)^2$$

При обчисленнях спочатку раціонально визначити суми

$$\sum_i x_i, \sum_i x_{i+\tau}, \sum_i x_i x_{i+\tau}, \sum_i x_i^2, \sum_i x_{i+\tau}^2,$$

При будь-якому $\tau \neq 0$ для достатньо великих N з довірчою вірогідністю справедливе співвідношення $|\bar{\rho}_{\xi\eta}(\tau)| \leq \beta \sqrt{1/N}$.

Якщо знайдене емпіричне значення $\bar{\rho}_{\xi\eta}(\tau)$ знаходиться в указаних межах, то з вірогідністю β можна стверджувати, що отримана послідовність чисел $\{x_i\}$ задовольняє гіпотезі кореляційної незалежності.

При статистичному моделюванні системи S з використанням програмних генераторів псевдовипадкових квазірівномірних послідовностей важливими характеристиками якості генератора є довжина періоду P і довжина відрізка аперіодичності L . Довжина відрізка аперіодичності L псевдовипадкової послідовності $\{x_i\}$, заданою рівнянням $x_{i+1} = \lambda x_i + \mu \pmod{M}$ є щонайбільше ціле число, таке, що при $0 \leq j < i \leq L$ подія $P\{x_i = x_j\}$ не має місця. Це означає, що всі числа x_i в межах відрізка аперіодичності не повторюються.

Очевидно, що використання при моделюванні систем послідовності чисел $\{x_i\}$, довжина якої більше відрізка аперіодичності L , може навести до повторення випробувань в тих же умовах, що і раніше, тобто збільшення числа реалізацій не дає нових статистичних результатів.

Спосіб експериментального визначення довжини періоду P і довжини відрізка аперіодичності L зводиться до наступного. Запускається програма генерації послідовності $\{x_i\}$ з початковим значенням x_0 і генерується V чисел x_i . В більшості практичних випадків можна вважати $V = (1 \div 5) \cdot 10^6$. Генеруються числа послідовності x_i і фіксується число x_v .

Потім програма запускається повторно з початковим числом x_0 і при генерації чергового числа перевіряється істинність події $P' \{x_i = x_v\}$. Якщо ця подія істинна $i=i_1$ і $i=i_2$ ($i_1 < i_2 < V$). При цьому фіксується мінімальний номер $i=i_3$, при якому істинна подія $P'' \{x_i = x_{p+i}\}$, і обчислюється довжина відрізка аперіодичності $L = i_3 + P$. Якщо P' виявляється істинним лише для $i=V$, то $L > V$.

В деяких випадках достатньо громіздкий експеримент за визначенням довжин періоду і відрізка аперіодичності можна замінити аналітичним розрахунком, як це показано в наступному прикладі. Для алгоритмів отримання послідовностей чисел $\{x_i\}$ загального вигляду експериментальна перевірка є складною (через наявність великих P і L), а розрахункові співвідношення в явному вигляді не отримані. Тому в таких випадках доцільно провести теоретичну оцінку довжини відрізка аперіодичності послідовності L . Для цього скористаємося елементарною моделлю вірогідності, розглянутою в наступному прикладі. Розглянемо деякі особливості статистичної перевірки стохастичності псевдовипадкових послідовностей. Для такої перевірки можуть бути використані різні статистичні критерії оцінки, наприклад критерії Колмогорова, Пірсона і т. п. Але в практиці моделювання частіше за всього користуються більш простими наближеними способами перевірки.

Для перевірки рівномірності базової послідовності випадкових чисел x_i , $i=1, N$ можна скористатися наступними оцінками:

$$(1/N) \sum_{i=1}^N x_i = 1/2, (1/N) \sum_{i=1}^N x_i^2 = 1/3$$

Для перевірки таблиць випадкових цифр звичайно застосовують різні тести, в кожному з яких цифри класифікуються за деякою ознакою і емпіричні частоти порівнюються з їхніми математичними очікуваннями за допомогою критерію Пірсона.

Для перевірки апаратних генераторів випадкових чисел можна використовувати ті ж прийоми, що і для перевірки послідовностей псевдовипадкових чисел, отриманих програмним способом. Особливістю такої перевірки буде те, що перевіряються не ті числа, які потім будуть необхідні для моделювання системи S . Тому окрім перевірки якості виданих генератором випадкових чисел повинна ще гарантуватись стійка робота генератора на час проведення машинного експерименту з моделлю M_m . Через розглянуті переваги основне застосування в практиці імітаційного моделювання систем знаходять різні програмні способи отримання чисел. Тому розглянемо можливі методи поліпшення якості послідовностей псевдовипадкових чисел. Одним з самих розповсюджених методів такого поліпшення є вживання замість рекурентних формул першого порядку, рекурентних формул порядку r , тобто: $x_{i+1} = \Phi(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-r+1})$ де початкові значення x_0, x_1, \dots, x_{r-1} задані. В цьому випадку довжина відрізка аперіодичності L у такої послідовності при $r > 1$ набагато більше, ніж при $r=1$. Проте при цьому зростає складність методу, що приводить до збільшення витрат машинного часу на отримання чисел і обмежує можливість його застосування на практиці.

Для отримання послідовності псевдовипадкових чисел з великою довжиною відрізка аперіодичності L можна скористатися методом збурень. В основу цього методу отримання послідовності чисел покладена формула виду

$$x_{i+1} = \begin{cases} \Phi(x_i), \text{ якщо} & i \equiv 1 \pmod{M} \\ \psi(x_i), \text{ якщо} & i \equiv 0 \pmod{M} \end{cases}$$

де функції $\Phi(u)$ і $\psi(u)$ різні.

В цьому випадку в основному використовується формула $x_{i+1} = \Phi(x_i)$, і лише коли i кратно M , послідовність «збурюється», тобто реалізується перехід до формули $x_{i+1} = \psi(x_i)$. Ціле число M називається *періодом збурення*.

Всі розглянуті критерії перевірки послідовностей псевдовипадкових чисел є необхідними при постановці імітаційних експериментів на ЕОМ з моделлю M_m , але про їхню достатність можна говорити лише при розгляді задачі моделювання конкретної системи S .

Моделювання випадкових дій.

При моделюванні системи S методом імітаційного моделювання, зокрема методом статистичного моделювання на ЕОМ, істотна увага надається врахуванню випадкових чинників і дій на систему. Для їхньої формалізації використовуються випадкові події, дискретні і безперервні величини, вектори, процеси. Формування на ЕОМ реалізацій випадкових об'єктів будь-якої природи з перерахованих зводиться до генерації і перетворення послідовностей випадкових чисел. Питання генерації базових послідовностей псевдовипадкових чисел $\{x_i\}$, що мають рівномірний розподіл в інтервалі $(0, 1)$, були розглянуті, тому зупинимося на питаннях перетворення послідовностей випадкових чисел $\{x_i\}$, в послідовність $\{y_i\}$, для імітації дій на модельовану систему S . Ці задачі дуже важливі в практиці імітаційного моделювання систем на ЕОМ, оскільки істотна кількість операцій, а значить, і часових ресурсів ЕОМ витрачається на дії з випадковими числами. Таким чином, наявність ефективних методів, алгоритмів і програм формування, необхідних для моделювання конкретних систем послідовностей випадкових чисел $\{r_i\}$, багато в чому визначає можливості практичного використання машинної імітації для дослідження і проектування систем.

Найпростішими випадковими об'єктами при статистичному моделюванні систем є випадкові події. Розглянемо особливості їхнього моделювання.

Нехай є випадкові числа x_i , тобто можливі значення випадкової величини рівномірно розподіленою в інтервалі $(0,1)$. Необхідно реалізувати випадкову подію A , що відбувається із заданою вірогідністю p .

Тоді вірогідність події A буде $P(A) = \int_0^p dx = p$. Протилежна подія A полягає в

тому, що $x_i > p$. Тоді $P(A) = 1-p$.

Процедура моделювання в цьому випадку полягає у виборі значень x_i і порівнянні їх з p . При цьому, якщо умова виконується, то виходом випробування є подія A . Таким же чином можна розглянути групу подій. Нехай A_1, A_2, \dots, A_s — повна група подій, що наступають з вірогідністю p_1, p_2, \dots, p_s

відповідно. Визначимо A_m як подію, що полягає в тому, що вибране значення x_i випадкової величини задовольняє нерівності

$$l_{m-1} < x_i \leq l_m$$

де

$$l_r = \sum_{i=1}^r p_i$$

Тоді

$$P(A_m) = \int_{l_{m-1}}^l dx = p_m$$

Процедура моделювання випробувань в цьому випадку полягає в послідовному порівнянні випадкових чисел x_i із значеннями l_r . Виходом випробування виявляється подія A_m . Цю процедуру називають визначенням виходу випробування *по долі* відповідно до вірогідності p_1, p_2, \dots, p_s .

Ці процедури моделювання були розглянуті в припущенні, що для випробувань застосовуються випадкові числа x_i , що мають рівномірний розподіл в інтервалі $(0,1)$. При моделюванні на ЕОМ використовуються псевдовипадкові числа з квазірівномірним розподілом, що приводить до деякої помилки.

При моделюванні систем часто необхідно здійснити такі випробування, при яких шуканий результат є складним, залежним від двох і більш простих подій. Хай, наприклад, незалежні події A і B мають вірогідність настання p_a, p_b сумісних випробувань в цьому випадку будуть події AB, AB, AB, AB з вірогідністю $p_a p_b, (1-p_a) p_b, p_a (1-p_b), (1-p_a)(1-p_b)$. Для моделювання сумісних випробувань можна використовувати два варіанти процедури: 1) послідовну перевірку умови; 2) визначення одного з виходів AB, AB, AB, AB по долі з відповідною вірогідністю, тобто за аналогією. Перший варіант вимагає двох чисел X_i і порівнянь для перевірки умови. При другому варіанті можна обійтися одним числом X_i , але порівнянь може зажадати більше. З точки зору зручності побудови моделюючого алгоритму і економії кількості операцій і елементів пам'яті ЕОМ більш переважним є перший варіант.

Розглянемо тепер випадок, коли події A і B є залежними і наступають з вірогідністю $p_a p_b$. Позначимо через $P(B/A)$ умовну вірогідність настання події B за умови, що подія A відбулося. При цьому вважаємо, що умовна вірогідність $P(B/A)$ задана. Розглянемо один з варіантів побудови моделі. З послідовності випадкових чисел $\{x_i\}$ витягається чергове число x_r і перевіряється справедливість нерівності $x_r < p_a$. Якщо ця нерівність справедлива, то наступила подія A . Для випробування, пов'язаного з подією B , використовується вірогідність $P(B/A)$. З сукупності чисел $\{x_i\}$ береться чергове число x_{m+1} і перевіряється умова $x_{m+1} \leq P(B/A)$. Залежно від того, виконується або ні ця нерівність, виходом випробування є AB або AB .

Якщо нерівність $x_m < p_a$ не виконується, то наступила подія A . Тому для випробування, пов'язаного з подією B , необхідно визначити вірогідність $P(B/A) = [P(B) - P(A)P(B/A)] / [1 - P(A)]$.

Виберемо із сукупності $\{x_i\}$ число x_{t+1} і перевіримо справедливості нерівності $x_{m+1} \leq P(B/A)$. Залежно від того, виконується вона або ні, отримаємо виходи випробування АВ або АВ.

Логічна схема алгоритму для реалізації цього варіанту моделі показана на рис. 13.1.

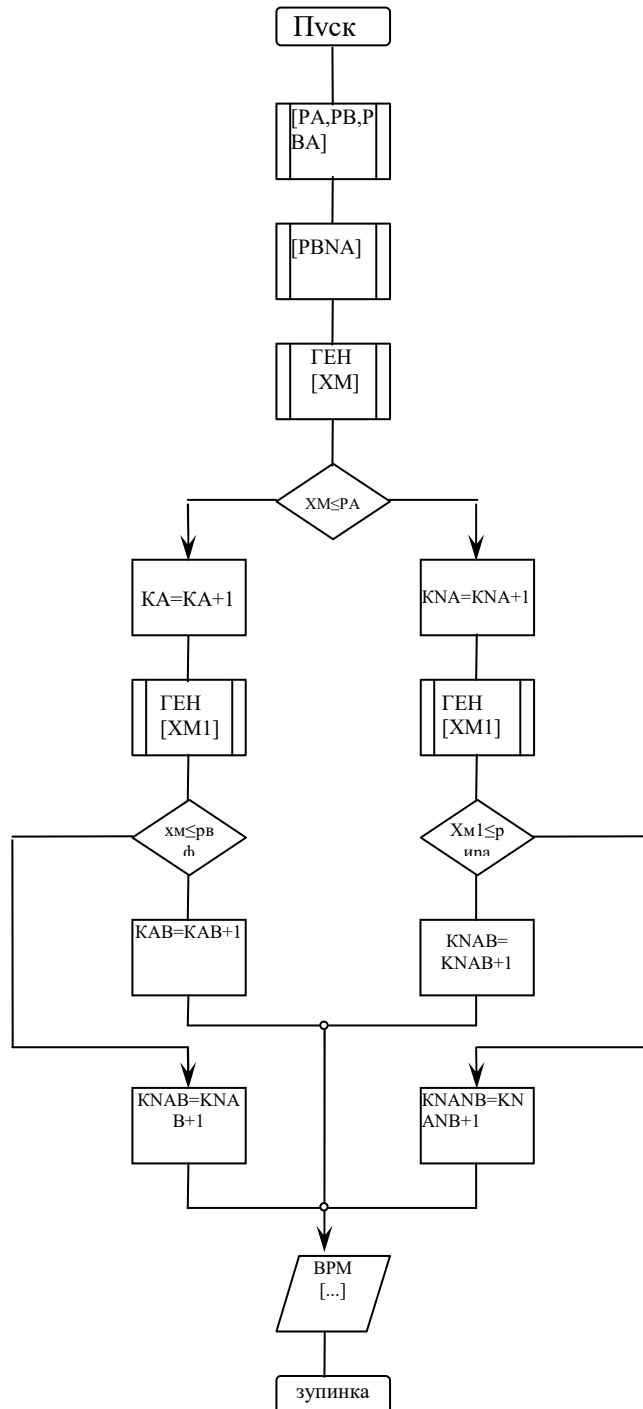


Рис.13.1. Схема моделюючого алгоритму при залежних подіях

Тут ВВД[...] — процедура введення початкових даних; ГЕН [...] — генератор рівномірно розподілених випадкових чисел; $XM=x_m$; $XM1=x_{+1}$

$PA=p_a; PB = p_b; PBA = P(B/A); PBNA = P(B/A); KA, KNA, KAB, KANB, KNABR, KNANB$ — число подій A, A, AB, AB, AB, AB відповідно; $BPM[...]$ — процедура видачі результатів моделювання.

Розглянемо особливості моделювання на ЕОМ марківських ланок, наприклад, для формалізації процесів в неперервно-дискретних системах (Р-схемах). Проста однорідна марківська ланка визначається матрицею переходів

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & p_{2k} \\ p_{k1} & p_{k2} & p_{kk} \end{pmatrix} \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1$$

де p_{ij} — вірогідність переходу із стану z_i в стан z_j .

Матриця переходів P повністю описує марківський процес. Така матриця є стохастичною, тобто сума елементів кожного рядка рівна одиниці

$$\sum_{j=1}^k p_{ij} = 1; \quad i=1, k$$

Позначимо через $p_{ii}(n)$, $i=1, k$ вірогідність того, що система буде знаходитися в стані z_i , після n переходів. За визначенням

$$\sum_{j=1}^k p_{ij}(n) = 1;$$

Використовуючи, подійний підхід, можна підійти до моделювання марківської ланки таким чином. Нехай можливими виходами випробувань є події A_1, A_2, \dots, A_k . Вірогідність p_{ij} — це умовна вірогідність настання події A_j в даному випробуванні за умови, що виходом попереднього випробування була подія A_i . Моделювання такої ланки Маркова полягає в послідовному виборі подій A_j по долі з вірогідністю p_{ij} .

Спочатку вибирається початковий стан z_0 , що задається початковою вірогідністю $p_1(0), p_2(0), \dots, p_k(0)$. Для цього з послідовності чисел $\{x_i\}$ вибирається число x_r і порівнюється з l_r , де як p_i , використовуються значення $p_1(0), p_2(0), \dots, p_k(0)$. Таким чином вибирається номер m_0 , для якого виявляється справедливим нерівність. Тоді початковою подією даної реалізації ланки буде подія A_{m_0} . Потім вибирається наступне випадкове число x_{m+1} яке порівнюється з l_r , де в якості p_l використовуються p_{m_0j} . Визначається номер m_1 і наступною подією даної реалізації ланки буде подія A_{m_1} і т. д. Очевидно, що кожний номер m_i визначає не тільки чергову подію A_{m_i} формованої реалізації, але і розподіл вірогідності $p_{m_i1}, p_{m_i2}, p_{m_ik}$, для вибору чергового номера m_{i+1} .

Причому для ергодичних марківських ланок вплив початкової вірогідності швидко зменшується із зростанням номера випробувань. Ергодичним називається всякий марківський процес, для якого граничний розподіл вірогідності $p_i(n)$, $i=1, k$ не залежить від початкових умов $p_i(0)$. Тому при моделюванні можна приймати, що

$$p_1(0) = p_2(0) = \dots p_k(0) = 1/k$$

Аналогічно можна побудувати і більш складні алгоритми, наприклад для моделювання неоднорідних марківських ланок.

Розглянуті способи моделювання реалізацій випадкових об'єктів дають загальне уявлення про найтипівіші процедури формування реалізацій в моделях процесів функціонування стохастичних систем, але не вичерпують всіх прийомів, використовуваних в практиці статистичного моделювання на універсальних ЕОМ.

Для формування можливих значень випадкових величин із заданим законом розподілу вихідним матеріалом служать базові послідовності випадкових чисел $\{x_i\}$, що мають рівномірний розподіл в інтервалі $(0, 1)$. Іншими словами, випадкові числа x_i , як можливі значення випадкової величини, мають рівномірний розподіл в інтервалі $(0, 1)$, можуть бути перетворені в можливі значення випадкової величини ξ , закон розподілу якої заданий.

Розглянемо особливості перетворення для випадку отримання дискретних випадкових величин. Дискретна випадкова величина η приймає значення $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_i \leq$ з вірогідністю p_1, p_2, \dots, p_j , складовими диференціальний розподіл вірогідності

$y_1 \quad y_2 \quad y_j$

$P(\eta = y) \quad p_1 p_2 \dots p_j$

$$F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = \sum_{j=1}^m p_j; \quad y_m \leq y \leq y_{m+1} \quad m=1, 2, \dots$$

$$F_\eta(y) = 0, \quad y < y_1$$

Для отримання дискретних випадкових величин можна використовувати метод зворотної функції. Якщо ξ — рівномірно розподілена на інтервалі $(0, 1)$ випадкова величина, то шукана випадкова величина η виходить за допомогою перетворення

$$\eta = F_\eta^{-1}(\xi)$$

де F_η^{-1} — функція, зворотна F_η .

Алгоритм обчислення зводиться до виконання наступних дій:

якщо $x_1 < p_1$, то $\eta = y_1$ інакше

якщо $x_2 < p_2$, то $\eta = y_2$

.....

якщо $x_j < \sum_{j=1}^m p_j$, то $\eta = y_m$

.....

При рахунку середнє число циклів порівняння $\mu = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j$

Можна навести і інші приклади алгоритмів і програм отримання дискретних випадкових величин із заданим законом розподілу, які знаходять застосування в практиці моделювання систем на ЕОМ.

Розглянемо особливості генерації на ЕОМ безперервних випадкових величин. Безперервна випадкова величина η задана інтегральною функцією розподілу

$$F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = \int_{-\infty}^y f_\eta(y) dy$$

де $f_\eta(y)$ — щільність вірогідності.

Для отримання безперервних випадкових величин із заданим законом розподілу, як і для дискретних величин, можна скористатися методом зворотної функції. Взаємнооднозначна монотонна функція $\eta = F_\eta^{-1}(\xi)$ отримана розв'язанням відносно η рівняння, перетворить рівномірно розподілену на інтервалі $(0, 1)$ величину ξ в η з необхідною щільністю $f_\eta(y)$.

Дійсно, якщо випадкова величина η має густину розподілу $f_\eta(y)$, то розподіл випадкової величини

$$\xi = \int_0^\eta f_\eta(y) dy$$

є рівномірним в інтервалі $(0, 1)$. На підставі цього можна зробити наступний висновок. Щоб отримати число, належне послідовності випадкових чисел, $\{y_i\}$, мають функцію щільності $f_\eta(y)$ необхідно обчислити відносно y , рівняння

$$\int_{-\infty}^y f_\eta(y) dy = x_i$$

Можна навести і інші приклади використання співвідношення. Але цей спосіб отримання випадкових чисел із заданим законом розподілу має обмежену сферу застосування в практиці моделювання систем на ЕОМ, що пояснюється наступними обставинами: 1) для багатьох законів розподілу, що зустрічаються в практичних задачах моделювання, інтеграл не береться, тобто доводиться вдаватися до чисельних методів вирішення, що збільшує витрати машинного часу на отримання кожного випадкового числа; 2) навіть для випадків, коли інтеграл береться в кінцевому вигляді, виходять формули, що містять дії логарифмування, витягання кореня, тобто, які виконуються за допомогою стандартних підпрограм ЕОМ, що містять багато початкових операцій (складання, множення і т. д.), що також різко збільшує витрати машинного часу на отримання кожного випадкового числа.

Тому в практиці моделювання систем часто користуються наближеними способами перетворення випадкових чисел, які можна класифікувати таким чином: а) універсальні способи, за допомогою яких можна одержувати випадкові числа із законом розподілу будь-якого вигляду; б) неуніверсальні способи, придатні для отримання випадкових чисел з конкретним законом розподілу..

Розглянемо наближений універсальний спосіб отримання випадкових чисел, заснований на кусковій апроксимації функції щільності. Нехай вимагається отримати послідовність випадкових чисел $\{y_i\}$ з функцією щільності $f_\eta(y)$, можливі значення якої лежать в інтервалі (a, b) . Представимо $f_\eta(y)$ у вигляді кусково-постійної функції, тобто розіб'ємо інтервал (a, b) на m інтервалів, і будемо вважати $f_\eta(y)$ на кожному інтервалі постійною. Тоді випадкову величину η можна представити у вигляді $\eta = a_k + \eta_k$ де a_k — абсциса лівої межі k -го інтервалу; η_k — випадкова величина, можливі значення якої

розташовуються рівномірно всередині k -го інтервалу, тобто на кожній ділянці величина вважається розподіленою рівномірно. Щоб апроксимувати $f_{\eta}(y)$, найзручнішим для практичних цілей способом, доцільно розбити (a, b) на інтервали так, щоб вірогідність попадання випадкової величини в будь-який інтервал a_k, a_{k+1} була постійною, тобто не залежала від номеру інтервалу k .

Алгоритм машинної реалізації цього способу отримання, випадкових чисел зводиться до послідовного виконання наступних дій: 1) генерується випадкове рівномірно розподілене число x_i з інтервалу $(0, 1)$; 2) за допомогою цього числа випадковим чином вибирається інтервал (a_k, a_{k+1}) ; 3) генерується число x_{i+1} і масштабується з метою приведення його до інтервалу (a_k, a_{k+1}) , тобто, домножується на коефіцієнт $(a_{k+1} - a_k)x_{i+1}$; 4) обчислюється випадкове число $y_j = a_k + (a_{k+1} - a_k)x_{i+1}$ з необхідним законом розподілу.

Розглянемо більш детально процес вибірки інтервалу $((a_k, a_{k+1}))$ за допомогою випадкового числа x_i . Доцільно для цієї цілі побудувати таблицю (сформувати масив), в яку заздалегідь помістити номери інтервалів k і значення коефіцієнта масштабування, визначені із співвідношення для приведення числа до інтервалу (a, b) . Отримавши з генератора випадкове число X_i , за допомогою цієї таблиці відразу визначаємо абсцису лівої межі a_k і коефіцієнт масштабування $(a_{k+1} - a_k)$. Переваги цього наближеного способу перетворення випадкових чисел: при реалізації на ЕОМ потрібна невелика кількість операцій для отримання кожного випадкового числа, оскільки операція масштабування виконується тільки один раз перед моделюванням, і кількість операцій не залежить від точності апроксимації, тобто від кількості інтервалів m . При розв'язанні задач дослідження характеристик процесів функціонування систем методом статистичного моделювання на ЕОМ виникає необхідність у формуванні реалізацій випадкових векторів, що мають задані характеристики вірогідності. Випадковий вектор можна задати проекціями на осі координат, причому ці проекції є випадковими величинами, що описуються сумісним законом розподілу. В найпростішому випадку, коли даний випадковий вектор розташований на площині xOy , він може бути заданий сумісним законом розподілу його проекцій ξ і η на осі Ox і Oy .

Розглянемо дискретний випадковий процес, коли двомірна випадкова величина (ξ, η) є дискретною і її складова ξ приймає можливі значення x_1, x_2, \dots, x_n , а складова η — значення y_1, y_2, \dots, y_n . Причому кожній парі (x_i, y_i) відповідає вірогідність p_{ij} . Тоді кожному можливому значенню x_i випадкової величини

буде відповідати $p_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}$. Тоді відповідно до цього розподілу вірогідності

можна визначити конкретне значення x_i випадкової величини (за правилами, розглянутими раніше) і зі всіх значень p_{ij} можна вибрати послідовність $p_{i11}, p_{i12}, \dots, p_{i1n}$, яка описує умовний розподіл величини η за умови що $\xi = x_i$. Потім за тими ж правилами визначаємо конкретне значення y_i випадкової величини η відповідно до розподілу вірогідності. Отримана пара (x_{i1}, y_{i1}) буде першою

реалізацією модельованого випадкового вектора. Далі аналогічним чином визначаємо можливі значення x_{i2} , вибираємо послідовність $p_{l_{21}}, p_{l_{22}}, \dots, p_{l_{2n}}$, і знаходимо y_{i2} відповідно до розподілу. Це дає реалізацію вектора (x_{i2}, y_{i2}) і т. п.

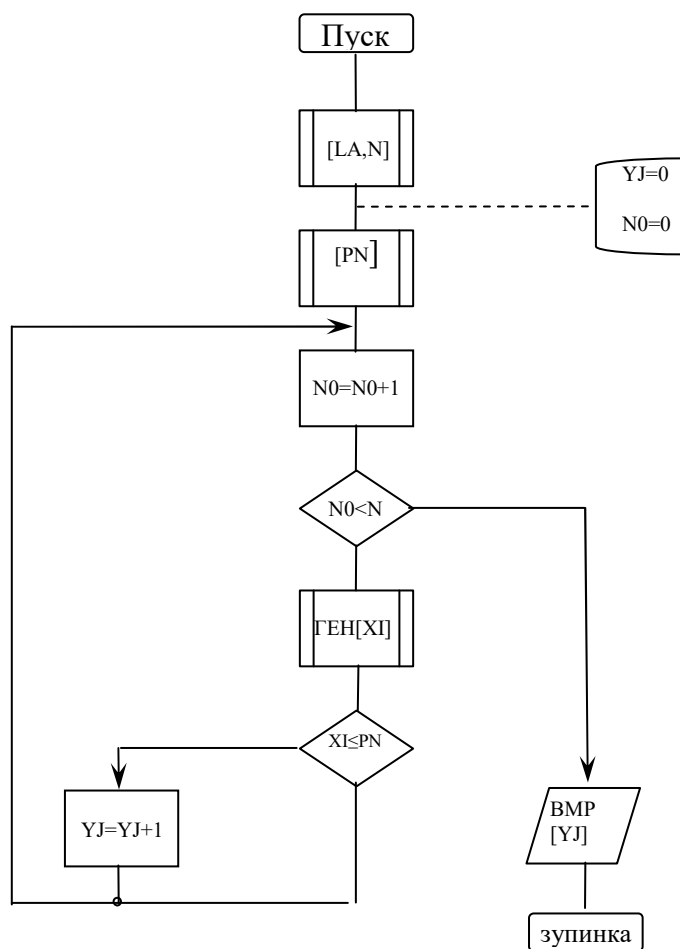


Рис.13.2. Схема алгоритму генерації двовірних випадкових векторів

Розглянемо моделювання безперервного випадкового вектора з складовими ξ і η . В цьому випадку двовірна випадкова величина (ξ, η) описується сумісною функцією щільності $f(x, y)$. Ця функція може бути використана для визначення функції щільності випадкової величини ξ як

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

Маючи функцію щільності $f_{\xi}(x)$, можна знайти випадкове число x_i , визначити умовне розподілення. Відповідно до цієї функції щільності можна визначити випадкове число y_i . Тоді пара чисел (x_i, y_i) буде бути шуканою реалізацією вектора (ξ, η) .

Розглянутий спосіб формування реалізацій двовірних векторів можна узагальнити і на випадок багатовимірних випадкових векторів. Проте при великих розмірностях цих векторів об'єм обчислень істотно збільшується, що

створює перешкоди до використання цього способу в практиці моделювання систем.

В просторі з числом вимірювань більше двох практично доступним виявляється формування випадкових векторів, заданих в рамках кореляційної теорії. Розглянемо випадковий вектор з математичними очікуваннями a_1, a_2, \dots, a_n і кореляційною матрицею

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{2n} \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{nn} \end{pmatrix}$$

При такому формуванні реалізацій випадкового вектора вимагається берегти в пам'яті ЕОМ $n(n+1)/2$ кореляційних моментів k_{ij} і математичних очікувань a_i . При великих n у зв'язку з цим можуть зустрічатися труднощі при використанні отриманих таким способом багатовимірних випадкових векторів для моделювання систем.

Контрольні питання

1. Які є способи генерації випадкових чисел?
2. В чому полягає апаратний спосіб генерації випадкових чисел?
3. В чому полягає табличний спосіб генерації випадкових чисел?
4. В чому полягає програмний спосіб генерації випадкових чисел?
5. Переваги та недоліки способів генерації випадкових чисел.
6. Яким чином моделюють випадкові дії?
7. Проведіть аналіз роботи алгоритму генерації двовірних випадкових векторів.

[7,с.131-157]

Тема 14. Використання моделювання при дослідженні і проектуванні АСУ

Одна з проблем сучасної науки і техніки — розробка і впровадження в практику проектування новітніх методів дослідження характеристик АСУ різних рівнів, включаючи галузеві АСУ, АСУ об'єднаннями і підприємствами, автоматизовані системи наукових досліджень і комплексних випробовувань, системи автоматизації проектування, АСУ технологічними процесами, а також інтегровані АСУ. При проектуванні таких АСУ виникають численні задачі, що вимагають оцінки кількісних і якісних закономірностей процесів функціонування систем, проведення структурного, алгоритмічного і параметричного їхнього синтезу.

АСУ відноситься до класу великих систем, етапи проектування, впровадження, експлуатації й еволюції яких у даний час неможливі без використання різних видів моделювання. На всіх перерахованих етапах для АСУ різних рівнів необхідно враховувати наступні особливості: складність структури і зв'язків між елементами, неоднозначність алгоритмів поведінки при різних умовах, велика кількість параметрів і змінних, неповноту і

недетермінованість вихідної інформації, розмаїтість і імовірнісний характер впливів зовнішнього середовища і т.д. Обмеженість можливостей експериментального дослідження великих систем робить актуальною розробку методики їхнього моделювання, що дозволила б у відповідній формі представити процеси функціонування систем, описати протікання цих процесів за допомогою математичних моделей, одержати результати експериментів з моделями по оцінці характеристик досліджуваних об'єктів. Причому на різних етапах створення та використання АСУ застосування методу моделювання переслідує конкретні цілі, а ефективність методу залежить від того, наскільки грамотно розроблювач використовує можливості моделювання.

Незалежно від розбивки конкретної АСУ на підсистеми при проектуванні кожної з них необхідно виконати зовнішнє проектування (макропроектування) і внутрішнє проектування (мікропроектування). Тому що на цих стадіях розроблювач переслідує різні цілі, то і використовувані при цьому методи і засоби моделювання можуть істотно відрізнитися.

Вибір методу моделювання і необхідна деталізація моделей істотно залежать від етапу розробки АСУ. На етапах обстеження об'єкта керування, наприклад промислового підприємства, і розробки технічного завдання на проектування АСУ моделі, в основному, носять описовий характер і мають на меті найбільше повно представити в компактній формі інформацію про об'єкт, необхідну розроблювачу системи.

На етапах розробки технічного і робочого проектів АСУ моделі окремих підсистем деталізуються, і моделювання служить для рішення конкретних задач проектування, тобто вибору оптимального за визначеним критерієм при заданих обмеженнях варіанта з множини припустимих. Тому, в основному, на цих етапах проектування АСУ використовуються моделі для цілей синтезу.

Цільове призначення моделювання на етапі впровадження й експлуатації АСУ — це програвання можливих ситуацій для прийняття обґрунтованих і перспективних рішень по керуванню об'єктом. Моделювання (імітацію) також широко застосовують при навчанні і тренуванні персоналу АСУ. У цьому випадку моделювання носить характер ділових ігор. Модель, реалізована звичайно на ЕОМ, відтворює поведінку керованого об'єкта і зовнішнього середовища, а люди у визначені моменти часу приймають рішення по керуванню об'єктом.

АСУ є системами, що розвиваються в міру еволюції об'єкта керування, появи нових засобів керування н т.д. При прогнозуванні розвитку АСУ роль моделювання дуже висока, тому що це єдина можливість відповісти на численні питання про шляхи подальшого ефективного розвитку системи і вибору з них найбільш оптимального.

В останні роки основні досягнення в різних областях науки і техніки нерозривно зв'язані з процесом удосконалювання ЕОМ. Сфера експлуатації ЕОМ — це галузь людської практики, що стимулює розвиток нових

теоретичних і прикладних напрямків. Ресурси сучасної інформаційно-обчислювальної техніки дають можливість ставити н вирішувати математичні задачі такої складності, що у недавньому минулому здавалися нереалізованими, наприклад, моделювання складних систем.

Історично першим склався аналітичний підхід до дослідження систем, коли ЕОМ використовувалася як обчислювач за аналітичними залежностями. Аналіз характеристик процесів функціонування складних систем за допомогою тільки аналітичних методів дослідження наштовхується звичайно на значні труднощі, що приводять до необхідності істотного спрощення моделей або на етапі їхньої побудови, або в процесі роботи з моделлю, що може привести до одержання недостовірних результатів.

Тому в даний час поряд з побудовою аналітичних моделей велика увага приділяється задачам оцінки характеристик великих систем на основі імітаційних моделей, реалізованих на сучасних універсальних ЕОМ з високою швидкістю і великим обсягом оперативної пам'яті. Причому перспективність імітаційного моделювання як методу дослідження характеристик процесу функціонування великих систем зростає з підвищенням швидкості й оперативної пам'яті ЕОМ, з розвитком математичного забезпечення, удосконалюванням банків даних і периферійних пристроїв для організації діалогових систем моделювання. Це у свою чергу, сприяє появі нових «чисто машинних» методів вирішення задач дослідження складних систем на основі організації імітаційних експериментів з їхніми моделями. Причому орієнтація на універсальні ЕОМ для реалізації експериментів з імітаційними моделями великих систем дозволяє проводити не тільки аналіз їхніх характеристик, але і вирішувати задачі структурного, алгоритмічного і параметричного синтезу таких систем при заданих критеріях оцінки ефективності й обмеженнях.

Досягнуті успіхи у використанні засобів обчислювальної техніки для цілей моделювання часто створюють ілюзію, що застосування сучасної ЕОМ гарантує можливість дослідження системи будь-якої складності. При цьому ігнорується той факт, що в основу будь-якої моделі покладене трудомістке за витратами часу і матеріальних ресурсів попереднє вивчення явищ, що мають місце в об'єкті-оригіналі. І від того, наскільки детально вивчені реальні явища, наскільки правильно проведене їхня формалізація й алгоритмізація, залежить в остаточному підсумку успіх моделювання конкретного об'єкта.

З розвитком системних досліджень, з розширенням експериментальних методів вивчення реальних явищ усе більшого значення набувають абстрактні методи, з'являються нові наукові дисципліни, автоматизуються елементи розумової праці. Важливе значення при створенні реальних систем мають математичні методи аналізу і синтезу, цілий ряд відкриттів базується на чисто теоретичних вишукуваннях. Однак було б неправильно забувати про те, що основним критерієм будь-якої теорії є практика, і навіть суцільно математичні науки базуються у своїй основі на фундаменті практичних знань.

Одночасно з розвитком теоретичних методів аналізу і синтезу удосконалюються і методи експериментального вивчення реальних об'єктів, з'являються нові засоби дослідження. Однак експеримент був і залишається одним з основних і істотних інструментів пізнання. Практика і моделювання дозволяють по-новому описати реальний процес і спростити експериментальне його вивчення. Удосконалюється і саме поняття моделювання. Якщо раніш моделювання означало реальний фізичний експеримент або побудову макета, що імітує реальний процес, то в даний час з'явилися нові види моделювання, в основі яких лежить постановка не тільки фізичних, але також і математичних експериментів.

Пізнання реальної дійсності є тривалим і складним процесом. Визначення якості функціонування складної системи, вибір оптимальної структури й алгоритмів поводження, побудова системи відповідно до поставленої перед нею метою — основна проблема при проектуванні сучасних систем (у тому числі й АСУ), тому моделювання можна розглядати як один з методів, використовуваних при проектуванні і дослідженні складних систем.

Моделювання базується на деякій аналогії реального й уявного експерименту. Аналогія — основа для пояснення досліджуваного явища, однак критерієм істини може служити тільки практика, тільки досвід. Хоча сучасні наукові гіпотези можуть створюватися чисто теоретичним шляхом, але по суті базуються на широких практичних знаннях. Для пояснення реальних процесів висувуються гіпотези, для підтвердження яких ставиться експеримент або проводяться такі теоретичні міркування, що логічно підтверджують їхню правильність.

У широкому змісті під експериментом можна розуміти деяку процедуру організації і спостереження якихось явищ, що здійснюються в умовах, близьких до природного або імітують їх.

Розрізняють пасивний експеримент, коли дослідник спостерігає процес, що протікає, і активний, коли спостерігач втручається й організує протікання процесу. Останнім часом розповсюдженій активний експеримент, оскільки саме на його основі удається виявити критичні ситуації, одержати найбільш цікаві закономірності, забезпечити можливість повторення експерименту в різних точках і т.д.

В основі будь-якого виду моделювання лежить деяка модель, що має відповідність, що базується на деякій загальній якості, яке характеризує реальний об'єкт. Об'єктивно реальний об'єкт володіє деякою формальною структурою, тому для будь-якої моделі характерна наявність деякої структури, що відповідає формальній структурі реального об'єкта, або, випадковій стороні цього об'єкта.

В основі моделювання лежать інформаційні процеси, оскільки саме створення моделі М базується на інформації про реальний об'єкт. У процесі реалізації моделі виходить інформація про даний об'єкт, одночасно в процесі експерименту з моделлю вводиться керуюча інформація, істотне місце займає обробка отриманих результатів, тобто інформація лежить в основі всього процесу моделювання.

Одним із найбільш важливих аспектів побудови систем моделювання є проблема мети. Будь-яку модель будують у залежності від мети, що ставить перед нею дослідник, тому одна з основних проблем при моделюванні — це проблема цільового призначення. Подібність процесу, що протікає в моделі M , реальному процесу є не метою, а умовою правильного функціонування моделі і тому в якості мети повинні бути поставлені задача вивчення якої-небудь сторони функціонування об'єкта.

Для спрощення моделі M цілі поділяють на підцілі і створюють більш ефективні види моделей у залежності від отриманих підцілей моделювання. Можна вказати цілий ряд прикладів цілей моделювання в області АСУ. Наприклад, для галузевих АСУ найбільш істотними цілями є задачі прогнозу споживання, збуту продукції, розміщення підприємств по галузі з урахуванням усіляких факторів (наявності сировини, людських ресурсів, енергії і т.д.). Для АСУ підприємством дуже істотне вивчення процесів оперативного керування виробництвом, оперативно-календарного планування, перспективного планування і тут також можуть бути успішно використані методи моделювання.

Якщо ціль моделювання ясна, то виникає наступна проблема, а саме проблема побудови моделі M . Побудова моделі виявляється можливою, якщо є інформація чи висунуті гіпотези щодо структури, алгоритмів і параметрів досліджуваного об'єкта. На підставі їхнього вивчення здійснюється ідентифікація об'єкта. В даний час широко застосовують різні способи оцінки параметрів: за методом найменших квадратів, за методом максимальної правдоподібності, байєсовські, Марковські оцінки.

Якщо модель M побудована, то наступною проблемою можна вважати проблему роботи з нею, тобто реалізацію моделі, основні задачі якої — мінімізація часу одержання кінцевих результатів і забезпечення їхньої вірогідності.

Для правильно побудованої моделі M характерним є те, що вона виявляє лише ті закономірності, що потрібні досліднику, і не розглядає властивості системи S , не істотні для даного дослідження. Слід зазначити, що оригінал і модель повинні бути одночасно подібні за одними ознаками і різні за іншими, що дозволяє виділити найбільш важливі досліджувані властивості. У цьому змісті модель виступає як деякий «заступник» оригіналу, що забезпечує фіксацію і вивчення лише деяких властивостей реального об'єкта.

Таким чином, характеризуючи проблему моделювання в цілому, необхідно враховувати, що від постановки задачі моделювання до інтерпретації отриманих результатів існує велика група складних науково-технічних проблем, до основного з яких можна віднести наступні: ідентифікацію реальних об'єктів, вибір виду моделей, побудова моделей і їхню машинну реалізацію, взаємодію дослідника з моделлю в ході машинного експерименту, перевірку правильності отриманих у ході моделювання результатів, виявлення основних закономірностей, досліджених у процесі моделювання. У залежності від об'єкта моделювання і виду використовуваної моделі ці проблеми можуть мати різну значущість.

Засоби обчислювальної техніки, що у даний час широке використовуються або для обчислень при аналітичному моделюванні, або для реалізації імітаційної моделі системи, можуть лише допомогти з погляду ефективності реалізації складної моделі, але не дозволяють підтвердити правильність тієї чи іншої моделі. Тільки на основі оброблених даних, досвіду дослідника можна з вірогідністю оцінити адекватність моделі стосовно реального процесу.

Забезпечення необхідних показників якості функціонування складних систем, зв'язана з необхідністю вивчення протікання стохастичних процесів у досліджуваних і проєктованих систем S , дозволяє проводити комплекс теоретичних і експериментальних досліджень, що взаємно доповнюють один одного. Ефективність експериментальних досліджень складних систем виявляється вкрай низкою, оскільки проведення натурних експериментів з реальною системою або вимагає великих матеріальних витрат і значного часу, або взагалі практично неможливо (наприклад, на етапі проєктування, коли реальна система відсутня). Ефективність теоретичних досліджень із практичної точки зору повною мірою виявляються лише тоді, коли їхні результати з необхідним ступенем точності і вірогідності можуть бути представлені у виді аналітичних співвідношень чи моделюючих алгоритмів, придатних для одержання відповідних характеристик процесу функціонування досліджуваних систем.

Поява сучасних ЕОМ була вирішальною умовою широкого впровадження аналітичних методів у дослідження складних систем. Стало здаватися, що моделі і методи, наприклад, математичного програмування, стануть практичним інструментом вирішення задач керування у складних системах. Дійсно, були досягнуті значні успіхи в створенні нових математичних методів вирішення цих задач, однак математичне програмування так і не стало практичним інструментом дослідження процесу функціонування складних систем, тому що моделі математичного програмування виявилися занадто грубими і недосконалими для їхнього ефективного використання. Необхідність врахування стохастичних властивостей системи, недетермінованості вихідної інформації, наявності кореляційних зв'язків між великим числом змінних і параметрів, що характеризують процеси в системах, приводять до побудови складних математичних моделей, що не можуть бути застосовані в інженерній практиці при дослідженні таких систем аналітичним методом. Придатні для практичних розрахунків аналітичні співвідношення вдається одержати лише при припущеннях, що спрощують, що звичайно істотно спотворюють фактичну картину досліджуваного процесу. Тому останнім часом усе відчутніше потреба в розробці методів, що дали би можливість уже на етапі проєктування систем досліджувати більш адекватні моделі.

Найбільш конструктивним засобом рішення інженерних задач на базі моделювання в даний час стали ЕОМ. Сучасні ЕОМ можна розділити на двох груп: універсальні, насамперед призначені для виконання розрахункових робіт, і керуючі, що дозволяють проводити не тільки розрахункові роботи,

але насамперед пристосовані для керування об'єктами в реальному масштабі часу. Керуючі ЕОМ можуть бути використані як для керування технологічним процесом, експериментом, так і для реалізації різних імітаційних моделей. У залежності від того, чи вдається побудувати досить точну математичну модель реального процесу, чи внаслідок складності об'єкта не вдається проникнути в глибокі функціональні зв'язки реального об'єкта й описати їх якимись аналітичними співвідношеннями, можна розглядати два основних шляхи використання ЕОМ: як засобу розрахунку за отриманими аналітичними моделями і як засобу імітаційного моделювання.

Звичайно модель будується за ієрархічним принципом, коли послідовно аналізуються окремі сторони функціонування об'єкта і при переміщенні центра уваги дослідника розглянуті раніше підсистеми переходять у зовнішнє середовище. Ієрархічна структура моделей може розкривати і ту послідовність, у якій вивчається реальний об'єкт, а саме послідовність переходу від структурного (топологічного) рівня до функціонального (алгоритмічного), і від функціонального до параметричного.

Результат моделювання в значній мірі залежить від адекватності вихідної концептуальної (описової) моделі, від отриманого ступеня подібності опису реального об'єкта, числа реалізацій моделі і багатьох інших факторів. У ряді випадків складність об'єкта не дозволяє не тільки побудувати математичну модель об'єкта, але і дати досить близький кібернетичний опис, і перспективним тут є виділення найбільш вагомої частини, що піддається математичному опису об'єкта і включення цієї реальної частини фізичного об'єкта в імітаційну модель. Тоді модель реалізується, з одного боку, на базі засобів обчислювальної техніки, а з іншого боку — має реальну частину об'єкта. Це значно розширює можливості і підвищує вірогідність результатів моделювання. Склад імітаційної системи реалізується на універсальній ЕОМ і дозволяє досліджувати імітаційну модель M , що задається у визначеній сукупності окремих блокових моделей і зв'язків між ними в їхній взаємодії в просторі і часу при реалізації якого-небудь процесу. Можна виділити три основні групи блоків: блоки, що характеризують модельований процес функціонування системи S ; блоки, що відбивають зовнішнє середовище E і її вплив на реалізований процес; і блоки, що грають службову допоміжну роль, забезпечуючи взаємодію перших двох, а також виконуючи додаткові функції по одержанню й обробці результатів моделювання. Крім того, імітаційна модель M характеризується набором змінних, за допомогою яких удається керувати досліджуваним процесом, і набором початкових умов, коли можна змінювати умови проведення машинного експерименту.

Таким чином, імітаційна система є засіб проведення машинного експерименту, причому експеримент може ставитися багаторазово, заздалегідь плануватися, можуть визначатися умови його проведення. Необхідно при цьому вибрати методику оцінювання адекватності одержуваних результатів і автоматизувати як процеси одержання, так і процеси обробки результатів у ході машинного експерименту. Експеримент з імітаційною моделлю вимагає серйозної підготовки, тому імітаційна система

характеризується наявністю математичного, програмного інформаційного, технічного й іншого видів забезпечення.

Математичне забезпечення імітаційної системи містить у собі сукупність математичних співвідношень, що описують поведження реального об'єкта; сукупності алгоритмів, що забезпечують як підготовку, так і роботу з моделлю. Сюди можуть бути віднесені алгоритми уведення вихідної даних, імітації, висновку, обробки.

Програмне забезпечення за своїм змістом містить у собі сукупність програм: планування експерименту, імітаційної моделі, проведення експерименту, обробки й інтерпретації результатів. Крім того, програмне забезпечення імітаційної системи повинне забезпечувати синхронізацію процесів у моделі, тобто необхідний блок, що організує псевдопаралельне виконання процесів у моделі. Цю функцію в системі моделювання виконує монітор. Машинні експерименти з імітаційними моделями не можуть проходити без добре розробленого і реалізованого інформаційного забезпечення.

Інформаційне забезпечення включає в собі засоби і технологію організації і реорганізації бази даних моделювання, методи логічної і фізичної організації масивів, форми документів, що описують процес моделювання і його результати. Інформаційне забезпечення імітаційної системи є найменш розробленою частиною, оскільки тільки в даний час спостерігається перехід до створення складних імітаційних моделей і розробляється методологія їхнього використання при аналізі й синтезі складних систем з використанням концепції бази даних.

Технічне забезпечення імітаційної системи містить у собі насамперед засоби обчислювальної техніки, зв'язку й обміну між оператором і ЕОМ (діалогову систему), введення і вивчення інформації, керування проведенням експерименту. До технічного забезпечення пред'являються дуже серйозні вимоги по надійності функціонування, тому що збої і відмовлення технічних засобів, помилки оператора ЕОМ можуть різко збільшити час роботи з імітаційною моделлю і навіть привести до невірних кінцевих результатів.

Таким чином, імітаційна система може розглядатися як машинний аналог складного реального процесу; дозволяє замінити експеримент із реальним процесом функціонування системи експериментом з математичною моделлю цього процесу в ЕОМ. В даний час імітаційні експерименти широко використовують у практиці проектування складних систем, коли реальний експеримент неможливий.

Незважаючи на те що імітаційне моделювання на ЕОМ є могутнім інструментом дослідження систем, його застосування раціональне не у всіх випадках. Відома множина задач, розв'язуваних більш ефективно іншими методами. Разом з тим для великого класу задач дослідження і проектування систем метод імітаційного моделювання найбільш прийнятний. Правильне його вживання можливе лише у випадку чіткого розуміння сутності методу імітаційного моделювання й умов його використання в практиці дослідження

реальних систем при врахуванні особливостей конкретних систем і можливостей їхнього дослідження різними методами.

Як основні критерії доцільності застосування методу імітаційного моделювання на ЕОМ можна вказати наступні: відсутність чи неприйнятність аналітичних, чисельних і якісних методів рішення поставленої задачі; наявність достатньої кількості вихідної інформації про систему S для забезпечення можливості побудови адекватної імітаційної моделі; необхідність проведення на базі інших можливих методів вирішення дуже великої кількості обчислень, важко реалізованих навіть з використанням ЕОМ; можливість пошуку оптимального варіанта системи при її моделюванні на ЕОМ.

Імітаційне моделювання на ЕОМ, як і будь-який метод досліджень, має переваги і недоліки, що виявляються в конкретних використаннях. До числа основних переваг методу імітаційного моделювання при дослідженні складних систем можна віднести наступні: машинний експеримент з імітаційною моделлю дасть можливість досліджувати особливості процесу функціонування системи S у будь-яких умовах; застосування ЕОМ в імітаційному експерименті істотно скорочує тривалість дослідів у порівнянні з натурним експериментом; імітаційна модель дозволяє включати результати натурних випробувань реальної системи чи її частин для проведення подальших досліджень; імітаційна модель має відому гнучкість варіювання структури, алгоритмів і параметрів системи, що важливо з погляду пошуку оптимального варіанта системи; імітаційне моделювання складних систем часто є єдиним практичним реалізованим методом дослідження процесу функціонування таких систем на етапі їхнього проектування.

Основним недоліком, що виявляється при машинній реалізації методу імітаційного моделювання, є те, що отриманий при аналізі імітаційної моделі M результат завжди носить окремий характер, тому що він відповідає фіксованим елементам структури, алгоритмам поводження і значень параметрів системи S , початкових умов і впливів зовнішнього середовища E . Тому для повного аналізу характеристик процесу функціонування систем, а не одержання тільки окремої точки приходиться багаторазово відтворювати імітаційний експеримент, варіюючи вихідні дані задачі. При цьому, як наслідок виникає збільшення витрат машинного часу на проведення експерименту з імітаційною моделлю процесу функціонування досліджуваної системи S .

При імітаційному моделюванні так само, як і при будь-якому іншому методі аналізу і синтезу системи S , дуже істотне питання його ефективності. Ефективність імітаційного моделювання може оцінюватися рядом критеріїв, у тому числі точністю і вірогідністю результатів моделювання, часом побудови і роботи з моделлю M , витратами машинних ресурсів (часу і пам'яті), вартістю розробки й експлуатації моделі. Очевидно найкращою оцінкою ефективності є порівняння одержуваних результатів з реальним дослідженням, тобто моделюванням на реальному об'єкті при проведенні виробничого експерименту. Оскільки це не завжди вдається зробити, то

статистичний підхід дозволяє з визначеним ступенем точності при повторюваності машинного експерименту одержати якісь усереднені характеристики поведінки системи. Істотний вплив на точність моделювання робить число реалізацій, і в залежності від необхідної вірогідності можна оцінити необхідне число реалізацій відтвореного випадкового процесу.

Істотним показником ефективності є витрати машинного часу. У зв'язку з використанням ЕОМ різного типу сумарні витрати складаються з часу по введенню і виведенню даних в кожному алгоритмі моделювання, часу на проведення обчислювальних операцій з урахуванням звертання до оперативної пам'яті і зовнішніх запам'ятовуючих пристроїв, а також складності кожного моделюючого алгоритму. Розрахунки витрат машинного часу є наближеними і можуть уточнюватися в міру налагодження програм і нагромадження досвіду дослідника при роботі з імітаційною моделлю. Великий вплив на витрати машинного часу при проведенні імітаційних експериментів робить раціональне планування таких експериментів. Визначений вплив на витрати машинного часу можуть зробити процедури обробки результатів моделювання, а також форма їхнього представлення.

Побудова імітаційних моделей великих систем і проведення машинних експериментів з цими моделями являють собою досить трудомісткий процес, у якому в даний час багато невивченого. Однак фахівці в області проектування, дослідження й експлуатації складних систем повинні в досконалості знати методологію машинного моделювання, що склалася до дійсного часу, щоб бути готовими до появи ЕОМ наступних поколінь, що дозволять зробити ще один істотний крок в автоматизації побудови моделей і використання імітаційного моделювання систем.

Математичні схеми моделювання систем

Вихідною інформацією при побудові математичних моделей процесів функціонування систем служать дані про призначення й умови роботи досліджуваної (проектованої) системи S . Ця інформація визначає основну мету моделювання системи S і дозволяє сформулювати вимоги до математичної моделі M . Причому рівень абстрагування залежить від кола тих питань, на які дослідник системи хоче одержати відповідь за допомогою моделі, і в якомусь ступені визначає вибір математичної схеми.

Уведення поняття математична схема дозволяє розглядати математику не як метод розрахунку, а як метод мислення, як засіб формулювання понять, що є найбільш важливим при переході від словесного опису системи до формального представлення процесу її функціонування у виді деякої математичної моделі (аналітичної чи імітаційної). При користуванні математичною схемою в першу чергу дослідника системи повинно цікавити питання про адекватність відображення у вигляді конкретних схем реальних процесів у досліджуваній системі, а не можливість одержання відповіді (результату рішення) на конкретне питання дослідження. Наприклад, представлення процесу функціонування інформаційно-обчислювальної системи колективного користування у виді мережі схем масового

обслуговування дає можливість добре описати процеси, що відбуваються в системі, але при складних законах вхідних потоків і потоків обслуговування не дає можливості одержання результатів у явному виді.

Математичну схему можна визначити як ланку при переході від змістовного до формального опису процесу функціонування системи з урахуванням впливу зовнішнього середовища, тобто має місце ланцюжок «описова модель — математична схема — математична (аналітична чи (і) імітаційна) модель».

Кожна конкретна система S характеризується набором властивостей, під якими розуміються величини, що відбивають поведінку об'єкта (реальної системи) і враховують умови її функціонування у взаємодії із зовнішнім середовищем (системою) E . При побудові математичної моделі системи необхідно вирішити питання про її повноту. Повнота моделі регулюється, в основному, вибором границі «система S — середовище E ». Так само повинна бути вирішена задача спрощення моделі, що допомагає виділити основні властивості системи, відкинувши другорядні. Причому віднесення властивостей системи до основних чи другорядної істотно залежить від мети моделювання системи (наприклад, аналіз ймовірно-часових характеристик процесу функціонування системи, синтез структури системи і т.д.). Модель об'єкта моделювання, тобто системи S , можна представити у вигляді множини величин, що описують процес функціонування реальної системи й утворюючих у загальному випадку наступні підмножини: сукупність вхідних впливів на систему

$$x_i \in X, i = \overline{1, n_x}$$

сукупність впливів зовнішнього середовища

$$v_l \in V, l = \overline{1, n_v}$$

сукупність внутрішніх (власних) параметрів системи

$$h_k \in H, k = \overline{1, n_H}$$

сукупність вихідних характеристик системи

$$y_j \in Y, j = \overline{1, n_y}$$

Причому в перерахованих підмножинах можна виділити керовані і некеровані змінні. У загальному випадку x_i , v_l , h_k , y_j є елементами непересічних підмножин і містять як детерміновані, так і стохастичні складові.

При моделюванні системи S вхідні впливи, впливи зовнішнього середовища E і внутрішні параметри системи є незалежними (екзогенними) змінними, котрі у векторній формі мають відповідно вид $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n_x}(t))$;

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_{n_v}(t)); \vec{h}(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_{n_H}(t));$$

а вихідні характеристики системи є залежними (ендогенними) змінними й у векторній формі мають вид $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_{n_y}(t))$;

Процес функціонування системи S описується в часі оператором Fs, який у загальному випадку перетворить екзогенні змінні в ендогенні відповідно до співвідношень виду

$$y(t) = Fs(x, v, h, t)$$

Сукупність залежностей вихідних характеристик системи від часу $y_i(t)$ для усіх видів $j = \overline{1, n_y}$, називається вихідною траєкторією в $\overline{y_i(t)}$. Залежність називається законом функціонування системи S і позначається Fs. У загальному випадку закон функціонування системи Fs може бути заданий у вигляді функції, функціонала, логічних умові, в алгоритмічній і табличній чи у вигляді словесного правила відповідності.

Дуже важливим для опису і дослідження системи S є поняття алгоритму функціонування As, під яким розуміється метод одержання вихідних характеристик з урахуванням вхідних впливів $\overline{x(t)}$, впливів зовнішнього середовища $\overline{v(t)}$ і власних параметрів системи $\overline{h(t)}$. Очевидно, що той самий закон функціонування Fs системи S може бути реалізований різними способами, тобто за допомогою множини різних алгоритмів функціонування As.

Співвідношення Fs є математичним описом поведінки об'єкта (системи) моделювання в часі t, тобто відбивають його динамічні властивості. Тому математичні моделі такого виду прийнято називати динамічними моделями (системами).

Для статичних моделей математична модель Fs являє собою відображення між двома підмножинами властивостей об'єкта Y і {X, V, H}, що у векторній формі може бути записане як:

$$\vec{y} = f(\vec{x}, \vec{v}, \vec{h})$$

Співвідношення Fs можуть бути задані різними способами: аналітично (за допомогою формул), графічно, таблично і т.д. Такі співвідношення в ряді випадків можуть бути отримані через властивості системи S у конкретні моменти часу, названі станами. Стан системи S характеризується векторами

$$\vec{z}' = (z'_1, z'_2, \dots, z'_k) \text{ і } \vec{z}'' = (z''_1, z''_2, \dots, z''_k)$$

де $z'_1 = z_1(t'), z'_2 = z_2(t'), \dots, z'_k = z_k(t')$ в момент $t' \in (t_0 T)$; $z''_1 = z_1(t''), z''_2 = z_2(t''), \dots, z''_k = z_k(t'')$ в момент $t'' \in (t_0 T)$ і т.п. $k = \overline{1, n_z}$.

Якщо розглядати процес функціонування системи S як послідовну зміну станів $z_1(t), z_2(t), \dots, z_k(t)$, то вони можуть бути інтерпретовані як координати точки в k-мірному фазовому просторі. Причому кожній реалізації процесу буде відповідати деяка фазова траєкторія. Сукупність усіх можливих значень станів $\{\vec{z}\}$ називається простором станів об'єкта моделювання Z, причому $z_k \in Z$.

Стани системи S у момент часу $t_0 < t^* \leq T$ цілком визначається початковими умовами $\vec{z}^0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_k^0)$, [де $z_1^0 = z_1(t_0), z_2^0 = z_2(t_0), z_k^0 = z_k(t_0)$], вхідними діями $\vec{x}(t)$, внутрішніми параметрами $\vec{h}(t)$ та діями зовнішнього середовища $\vec{v}(t)$.

Якщо математичний опис об'єкта моделювання не містить елементів випадковості або вони не враховуються, тобто якщо можна вважати, що в цьому випадку стохастичні впливу зовнішнього середовища $v(t)$ і стохастичні внутрішні параметри $h(t)$ відсутні, те модель називається детермінованою у тім змісті, що характеристики однозначно визначаються детермінованими вхідними впливами

$$y(t) = f(x, t).$$

Очевидно, що детермінована модель є окремим випадком стохастичної моделі.

Приведені математичні співвідношення являють собою математичні схеми загального виду і дозволяють описати широкий клас систем. Однак у практиці моделювання об'єктів в області системотехніки і системного аналізу на перших етапах дослідження системи раціонально використовувати типові математичні схеми: диференціальні рівняння, кінцеві і ймовірнісні автомати, системи масового обслуговування і т.д.

Не володіючи таким ступенем спільності, як розглянуті моделі, типові математичні схеми мають переваги простоти та наочності, але при істотному звуженні можливостей застосування.

Безперервно-детерміновані моделі (D - схеми)

Розглянемо особливості безперервно-детермінованого підходу на прикладі використання в якості математичних моделей диференціальних рівнянь. Диференціальними рівняннями називаються такі рівняння, у яких невідомими будуть функції однієї чи декількох змінних, причому в рівняння входять не тільки функції, але і їхні похідні різних порядків. Якщо невідомі — функції багатьох змінних, то рівняння називаються рівняннями в частинних похідних, у протилежному випадку при розгляді функцій тільки однієї незалежної перемінної рівняння називаються звичайними диференціальними рівняннями.

Звичайно в таких математичних моделях у якості незалежної змінної, від якого залежать невідомі шукані функції, служить час t . Тоді математичне співвідношення для детермінованих систем у загальному вигляді буде

$$\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y}, t); \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

де $y' = dy/dt, y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ і $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ — n мірні вектори; $f(y, t)$ вектор-функція, яка визначена на якомусь $(n+1)$ -мірному (y, t) просторі і є неперервною.

Дискретно-детерміновані моделі (F-схеми)

Особливості дискретно-детермінованого підходу на етапі формалізації процесу функціонування систем розглянемо на прикладі використання в

якості математичного апарату теорію автоматів. Теорія автоматів — це розділ теоретичної кібернетики, у якому вивчаються математичні моделі — автомати. На основі цієї теорії система представляється у виді автомата, що переробляє дискретну інформацію і змінює свої внутрішні стани лише в припустимі моменти часу. Поняття автомат варіюється в залежності від характеру конкретно досліджуваних систем, від прийнятого рівня абстракції і доцільного ступеня спільності.

Автомат можна представити як деякий пристрій (чорний ящик), на який подаються вхідні сигнали і знімаються вихідні і який може мати деякі внутрішні стани. Кінцевим автоматом називається автомат, у якого множина внутрішніх станів і вхідних сигналів (а отже, і множина вихідних сигналів) є кінцевими множинами.

Абстрактно кінцевий автомат (англ., finite automata) можна представити як математичну схему (F-схему), що характеризується шістьма елементами: кінцевою множиною X вхідних сигналів (вхідним алфавітом); кінцевою множиною Y вихідних сигналів (вихідним алфавітом); кінцевою множиною Z внутрішніх станів (внутрішнім чи алфавітом станів); початковим станом z_0 , $z_0 \in Z$ функцією переходів $\varphi(z, x)$; функцією виходів $\psi(z, x)$. Автомат, що задається F-схемою: $F = \langle Z, X, Y, \varphi, \psi, z_0 \rangle$, функціонує в дискретному автоматному часі, моментами якого є такти, тобто послідовні рівні інтервали часу, кожному з яких відповідають постійні значення вхідного і вихідного сигналів і внутрішні стани. Позначимо стан, а також вхідний і вихідний сигнали, що відповідають t -му такту при $t = 0, 1, 2, \dots$ через $z(t)$, $x(t)$, $y(t)$. При цьому, за умовою, $z(0) = z_0$, а $z(t) \in Z$, $x(t) \in X$, $y(t) \in Y$.

Абстрактний кінцевий автомат має один вхідний і один вихідний канали. У кожний момент $t = 0, 1, 2, \dots$ дискретного часу F-автомат знаходиться у визначеному стані $z(t)$ з множини Z станів автомата, причому в початковий момент часу $t = 0$ він завжди знаходиться в початковому стані $z(0) = z_0$. У момент t , знаходячись в стані $z(t)$, автомат здатний сприйняти на вхідному каналі сигнал $x(t) \in X$ і видати на вихідному каналі сигнал $y(t) = \psi[z(t), x(t)]$, переходячи в стан $z(t+1) = \varphi[z(t), x(t)]$, $z(t) \in Z$, $y(t) \in Y$. Абстрактний кінцевий автомат реалізує деяке відображення множини слів вхідного алфавіту X на множину слів вихідного алфавіту Y . Іншими словами, якщо на вхід кінцевого автомата, встановленого в початковий стан z_0 , подавати в деякій послідовності букви вхідного алфавіту $x(0), x(1), x(2)$, тобто вхідне слово, то на виході автомата будуть з'являтися букви вихідного алфавіту $y(0), y(1), y(2), \dots$ утворюючи вихідне слово.

Таким чином, робота кінцевого автомата відбувається за наступною схемою: у кожнім t -м такті на вхід автомата, що знаходиться в стані $z(t)$, подається деякий сигнал $x(t)$, на який він реагує переходом у $(t+1)$ -м такті в новий стан $z(t+1)$ з видачею деякого вихідного сигналу. Сказане вище можна описати наступними рівняннями: для F-автомата першого роду, названого також автоматом Мілі,

$$z(t+1) = \psi[z(t), x(t)], t = 0, 1, 2, \dots :$$

$$y(t) = \psi[z(t), x(t)], t = 0, 1, 2, \dots :$$

для F-автомата другого роду

$$z(t+1) = \psi[z(t), x(t)], t = 0, 1, 2, \dots :$$

$$y(t) = \psi[z(t), x(t-1)], t = 1, 2, 3, \dots :$$

Автомат другого роду, для якого

$$y(t) = \psi[z(t)], t = 0, 1, 2, \dots$$

тобто функція виходів не залежить від вхідної змінної $x(t)$, називається автоматом Мура.

За характером відліку дискретного часу кінцеві автомати поділяється на синхронні й асинхронні. У синхронних автоматах моменти часу, у які автомат «зчитує» вхідні сигнали, визначаються примусово синхронізуючими сигналами. Після чергового синхронізуючого сигналу з урахуванням «ліченого» і відповідно до рівнянь відбувається перехід у новий стан і видача сигналу на виході, після чого автомат може сприймати наступне значення вхідного сигналу. Таким чином, реакція автомата на кожне значення вхідного сигналу закінчується за один такт, тривалість якого визначається інтервалом між сусідніми синхронізуючими сигналами. Асинхронний F - автомат зчитує вхідний сигнал безупинно і тому, реагуючи на досить довгий вхідний сигнал постійної величини x , він може кілька разів змінювати стан, видаючи відповідне число вихідних сигналів, поки не перейде в стійке, котре вже не може бути змінено даним вхідної.

Щоб задати кінцевий F-автомат, необхідно описати всі елементи множини $F = \langle Z, X, Y, \varphi, \psi, z_0 \rangle$, тобто вхідний, внутрішній і вихідний алфавіти, а також функції переходів і виходів. Причому серед множини станів необхідно виділити стан, у якому автомат знаходився в момент часу $t = 0$. Існують кілька способів завдання роботи F-автоматів, але найбільше часто використовуються табличний, графічний і матричний.

Найпростіший табличний спосіб завдання кінцевого автомата оснований на використанні таблиць переходів і виходів, рядки яких відповідають вхідним сигналам автомата, а стовпці — його станам. При цьому звичайно перший ліворуч стовпець відповідає початковому стану z_0 . На перетинанні i -го рядка і k -го стовпця таблиці переходів міститься відповідне значення $\varphi(z, v)$ функції переходів, а в таблиці виходів — відповідно значення $\psi(z_k, x_i)$ функції виходів. Для F-автомата Мура обидві таблиці можна скласти, отримавши таблицю переходів.

Опис роботи F-автомата Мілі таблицями переходів φ і виходів ψ ілюструється в таблиці 14.1.

Таблиця 14.1. Переходи і виходи автомата Мілі

X_i	Z_k			
	Z_0	Z_1	...	Z_k
Переходи				
x_1	$\varphi(z_0, x_1)$	$\varphi(z_1, x_1)$...	$\varphi(z_k, x_1)$
x_2	$\varphi(z_0, x_2)$	$\varphi(z_1, x_2)$...	$\varphi(z_k, x_2)$
...
x_l	$\varphi(z_0, x_l)$	$\varphi(z_1, x_l)$...	$\varphi(z_k, x_l)$
Виходи				
x_1	$\psi(z_0, x_1)$	$\psi(z_1, x_1)$...	$\psi(z_k, x_1)$
x_2	$\psi(z_0, x_2)$	$\psi(z_1, x_2)$...	$\psi(z_k, x_2)$
...
x_l	$\psi(z_0, x_l)$	$\psi(z_1, x_l)$...	$\psi(z_k, x_l)$

Приклади табличного способу завдання F-автомата Мілі F1 із трьома станами, двома вхідними і двома вихідними сигналами приведені в табл. 14.2. При іншому способі завдання кінцевого автомата використовується поняття спрямованого графа. Граф автомата являє собою набір вершин, що відповідають різним станам автомата і з'єднуючих вершини дуг графа, що відповідають тим чи іншим переходам автомата. Якщо вхідний сигнал X_k викликає перехід зі стану z_i у стан z_j то на графі автомата дуга, що з'єднує вершину z_i з вершиною z_j , позначається x_k . Для того щоб задати функцію виходів, дуги графа необхідно відзначити (відповідними вихідними сигналами). Для автоматів Мілі ця розмітка робиться так: якщо вхідний сигнал x_k діє на стан z_i то, відповідно до сказаного, виходить дуга, що виходить з z_i і позначена x_k ; цю дугу додатково відзначають вихідним сигналом $y = \psi(z_i, x_k)$. Для автомата Мура аналогічна розмітка графа така: якщо вхідний сигнал x_k , діючи на деякий стан автомата, викликає перехід у стан z_j то дугу, спрямовану в z_j і помічену x_k дугу додатково відзначають вихідним сигналом $y = \psi(z_i, x_k)$.

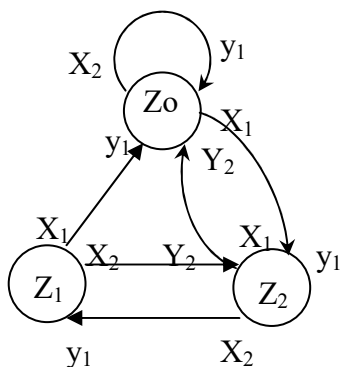
При вирішенні задач моделювання систем часто більш зручною формою є матричне завдання кінцевого автомата. При цьому матрицею з'єднань автомата є квадратна матриця $C = \|c_{i,j}\|$, рядки якої відповідають вихідним станам, а стовпці станам переходу. Елемент $c_{i,j} = x_k/y_s$, який стоїть на перетинанні i -го рядка і j -го стовпця, у випадку автомата Мілі відповідає

вхідному сигналу x_k , що викликає перехід зі стану z_i у стан Z_j , і вихідному сигналу y_s , видаваному при цьому переході. Для автомата Мілі F1, розглянутого вище, матриця з'єднань має вигляд

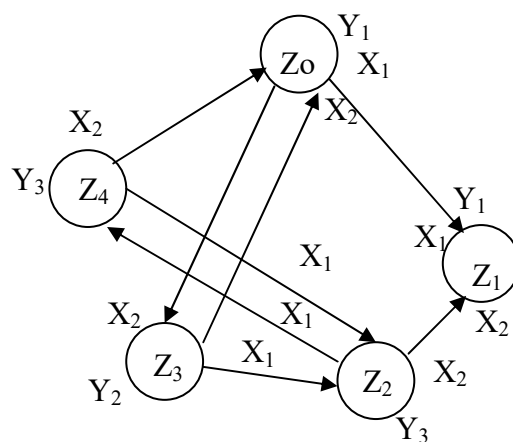
Таблиця 14.2. Приклад табличного способу завдання автомата Мілі

x_j	z_k		
	z_0	z_1	z_2
Переходи			
x_1	z_2	z_0	z_0
x_2	z_0	z_2	z_1
Виходи			
x_1	y_1	y_1	y_2
x_2	y_1	y_2	y_1

x_i	y				
	y_1	y_1	y_3	y_2	y_3
	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
z_1	z_4	z_4	z_2	z_2	
z_3	z_1	z_1	z_0	z_0	



Мілі



Мура

Рис.14.1. Графи автоматів

$$C_1 = \begin{vmatrix} x_2 y_1 & - & x_1 / y_1 \\ x_1 y_1 & - & x_2 / y_2 \\ x_1 / y_2 & x_2 / y_1 & - \end{vmatrix}$$

Якщо перехід із стану z_i в стан z_j відбувається під дією декількох сигналів, елемент матриці c_{ij} являє собою множину пар «вхід-вихід» для цього переходу, з'єднаних знаком диз'юнкції.

Для F-автомата Мура елемент c_{ij} дорівнює множині вхідних сигналів на переході (z_i, z_j) , а вихід описується вектором виходів

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \varphi(z_0) \\ \varphi(z_1) \\ \dots \\ \varphi(z_k) \\ \dots \\ \varphi(z_K) \end{pmatrix}$$

i -я компонента якого – вихідний сигнал, що відображує стан z_i .

Приклад. Для розглянутого вище F-автомата Мура запишемо матрицю з'єднань і вектор виходів:

$$c_2 = \begin{pmatrix} - & x_1 & - & x_2 & - \\ - & x_2 & - & - & x_1 \\ - & x_2 & - & - & x_1 \\ x_2 & - & x_1 & - & - \\ x_2 & - & x_1 & - & - \end{pmatrix}; \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

Послідовність розробки і машинної реалізації моделей систем

З розвитком обчислювальної техніки найбільш ефективним методом дослідження великих систем стало машинне моделювання, без якого неможливе рішення багатьох великих народногосподарських проблем. Тому однієї з актуальних задач підготовки інженерів-системотехніків є освоєння теорії і методів математичного моделювання з урахуванням вимоги системності, що дозволяють не тільки будувати моделі досліджуваних об'єктів, аналізувати їхню динаміку і можливість керування машинним експериментом з моделлю, але і судити у відомій мірі про адекватність створюваних моделей досліджуваним системам, про границі застосовності і правильно організувати моделювання систем на сучасних засобах обчислювальної техніки.

Перш ніж розглядати математичні, алгоритмічні, програмні і прикладні аспекти машинного моделювання, необхідно вивчити загальні методологічні аспекти для широкого класу математичних моделей об'єктів, реалізованих на засобах обчислювальної техніки. Моделювання з використанням засобів обчислювальної техніки (ЕОМ, АВМ, ГВК) дозволяє досліджувати механізм явищ, що протікають у реальному об'єкті з великими чи малими швидкостями, коли в натурних експериментах з об'єктом важко (чи неможливо) простежити за змінами, що відбуваються протягом короткого часу, чи коли одержання достовірних результатів сполучено з тривалим експериментом. При необхідності машинна модель дасть можливість як би «розтягувати» чи «стискати» реальний час, тому що машинне моделювання зв'язане з поняттям системного часу, відмінного від реального. Крім того, за

допомогою машинного моделювання в діалоговій системі можна навчати персонал АСУ прийняттю рішень у керуванні об'єктом, наприклад при організації ділової гри, що дозволяє виробити необхідні практичні навички реалізації процесу керування.

Сутність машинного моделювання системи складається в проведенні на обчислювальній машині експерименту з моделлю, що являє собою деякий програмний комплекс, що описує формально алгоритмічне поводження елементів системи S у процесі її функціонування, тобто в їхній взаємодії один з одним і зовнішнім середовищем E . Машинне моделювання з успіхом застосовують у тих випадках, коли важко чітко сформулювати критерій оцінки якості функціонування системи і ціль її не піддається повній формалізації, оскільки дозволяє сполучити програмно-технічні можливості ЕОМ із здібностями людини мислити неформальними категоріями. Надалі основну увагу буде приділено моделюванню систем на універсальних ЕОМ як найбільш ефективному інструменту дослідження і розробки АСУ різних рівнів, а випадки використання АВМ і ГВК будуть спеціально обмовлятися.

Сформулюємо основні вимоги, пропоновані до моделі M процесу функціонування системи S .

1. Повнота моделі повинна надавати користувачу можливість одержання необхідного набору оцінок характеристик системи з необхідною точністю і вірогідністю.
2. Гнучкість моделі повинна давати можливість відтворення різних ситуацій при варіюванні структури, алгоритмів і параметрів системи.
3. Тривалість розробки і реалізації моделі великої системи повинна бути по можливості мінімальною при врахуванні обмежень на наявні ресурси.
4. Структура моделі повинна бути блоковою, тобто допускати можливість заміни, додавання і виключення деяких частин без переробки всієї моделі.
5. Інформаційне забезпечення повинне надавати можливість ефективної роботи моделі з базою даних систем визначеного класу.
6. Програмні і технічні засоби повинні забезпечувати ефективну (по швидкодії і пам'яті) машинну реалізацію моделі і зручне спілкування з нею користувача.
7. Повинне бути реалізоване проведення цілеспрямованих (планованих) машинних експериментів з моделлю системи з використанням аналітико-імітаційного підходу при наявності обмежених обчислювальних ресурсів.

З урахуванням цих вимог розглянемо основні положення, що справедливі при моделюванні на ЕОМ систем S , а так само їхніх підсистем і елементів. При машинному моделюванні системи S характеристики процесу її функціонування визначаються на основі моделі M , побудованої виходячи з інформації про об'єкт моделювання. При одержанні нової інформації про об'єкт його модель переглядається й уточнюється з урахуванням нової

інформації, тобто процес моделювання, включаючи; розробку і машинну реалізацію моделі, є ітераційним. Цей ітераційний процес продовжується доти, поки не буде отримана модель M , яку можна вважати адекватної, у рамках рішення поставленої задачі дослідження і проектування системи S .

Моделювання систем за допомогою ЕОМ можна використовувати в наступних випадках: а) для дослідження системи S до того, як вона спроектована, з метою визначення чутливості характеристик до змін структури, алгоритмів і параметрів об'єкта моделювання і зовнішнього середовища; б) на етапі проектування системи S для аналізу і синтезу різних варіантів системи і вибору серед конкуруючих такого варіанта, що задовольняв би заданому критерію оцінки ефективності системи при прийнятих обмеженнях; в) після завершення проектування і впровадження системи, тобто при її експлуатації, для одержання інформації, що доповнює результати натурних іспитів (експлуатації) реальної системи, і для одержання прогнозів еволюції (розвитку) системи в часі.

Існують загальні положення, застосовувані до всіх перерахованих випадків машинного моделювання. Навіть у тих випадках, коли конкретні способи моделювання відрізняються один від одного і мають різні модифікації моделей, наприклад в області машинної реалізації моделюючих алгоритмів з використанням конкретних програмно-технічних засобів, у практиці моделювання систем можна сформулювати загальні принципи, що можуть бути покладені в основу методології машинного моделювання.

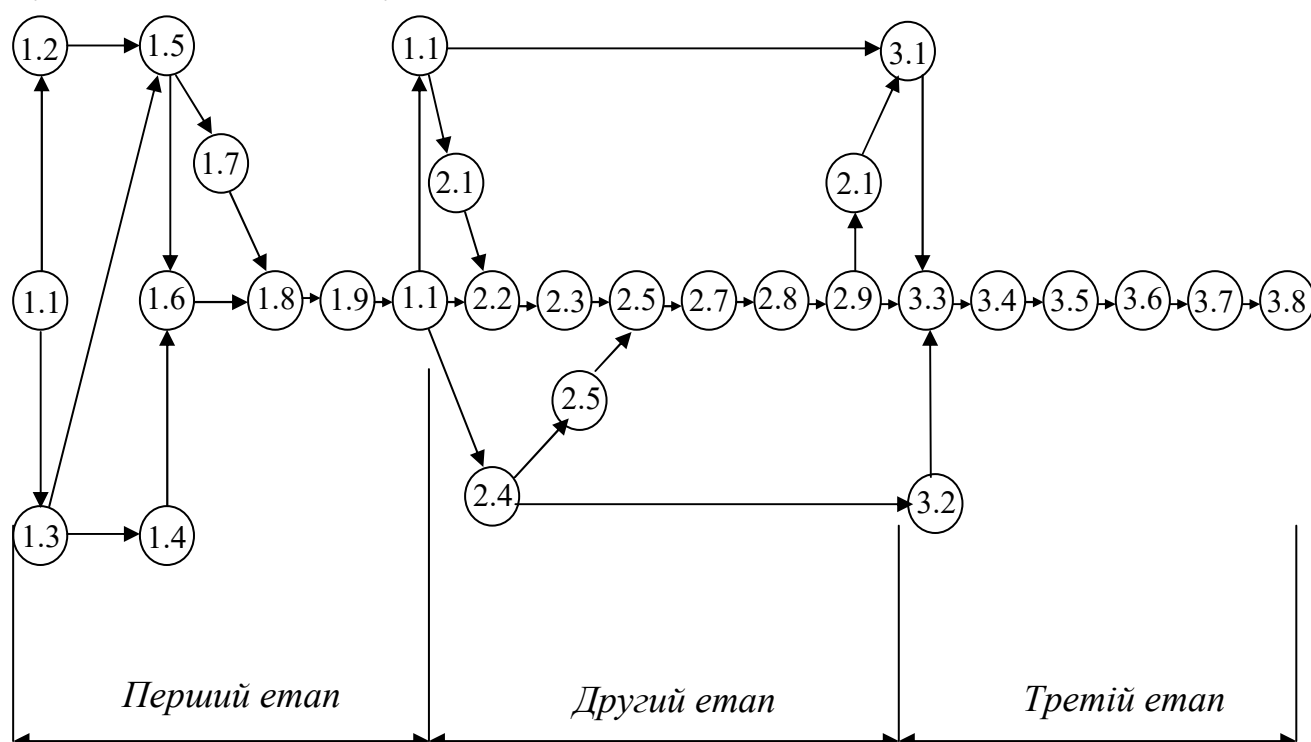


Рис.14.2. Взаємозв'язок моделювання систем

Розглянемо основні етапи моделювання системи S , до числа яких відносяться побудова концептуальної моделі системи і її формалізація;

алгоритмізація моделі системи і її машинна реалізація; одержання й інтерпретація результатів моделювання системи.

Взаємозв'язок перерахованих етапів моделювання систем і їх складових (підетапів) може бути представлена у виді сіткового графіка, показаного на рис. 14.2. Перелічимо ці підетапи : 1.1 — постановка задачі машинного моделювання системи; 1.2— аналіз задачі моделювання системи; 1.3— визначення вимог до вихідної інформації про об'єкт моделювання і організація її збору; 1.4—висування гіпотез і прийняття припущень; 1.5— визначення параметрів і змінних моделі; 1.6--встановлення основного змісту моделі; 1.7—обґрунтування критеріїв оцінки ефективності системи; 1.8— визначення процедур апроксимації; 1.9— опис концептуальної моделі системи; 1.10— перевірка вірогідності концептуальної моделі; 1.11— складання технічної документації по першому етапі; 2.1—побудова логічної схеми моделі; 2.2— одержання математичних співвідношень 2.3— перевірка вірогідності моделі системи; 2.4— вибір обчислювальних засобів для моделювання; 2.5— складання плану виконання робіт із програмування; 2.6— побудова схеми програми; 2.7— перевірка вірогідності схеми програми; 2.8— проведення програмування моделі; 2.9— перевірка вірогідності програми; 2.10—складання технічної документації про другий етап; 3.1— планування машинного експерименту з моделлю системи; 3.2— визначення вимог до обчислювальних засобів; 3.3— проведення робочих розрахунків; 3.4— аналіз результатів моделювання системи; 3.5— представлення результатів моделювання; 3.6— інтерпретація результатів моделювання; 3.7— підведення підсумків моделювання і видача рекомендацій; 3.8— складання технічної документації по третьому етапі.

Таким чином, процес моделювання системи S зводиться до виконання перерахованих підетапів, згрупованих у виді трьох етапів. На етапі побудови концептуальної моделі M_k і її формалізації проводиться дослідження об'єкта моделювання з точки зору виділення основних складових процесу його функціонування, визначаються необхідні апроксимації і знаходиться узагальнена схема моделі системи S , що перетвориться в машинну модель M_m на другому етапі моделювання шляхом послідовної алгоритмізації і програмування моделі. Останній третій етап моделювання системи зводиться до проведення відповідно до отриманого плану робочих розрахунків на ЕОМ з використанням обраних програмно-технічних засобів, одержанню й інтерпретації результатів моделювання системи S з урахуванням впливу зовнішнього середовища E . Очевидно, що при побудові моделі і її машинної реалізації при одержанні нової інформації можливий перегляд раніше прийнятих рішень, тобто процес моделювання є ітераційним. Розглянемо зміст кожного з етапів більш детально.

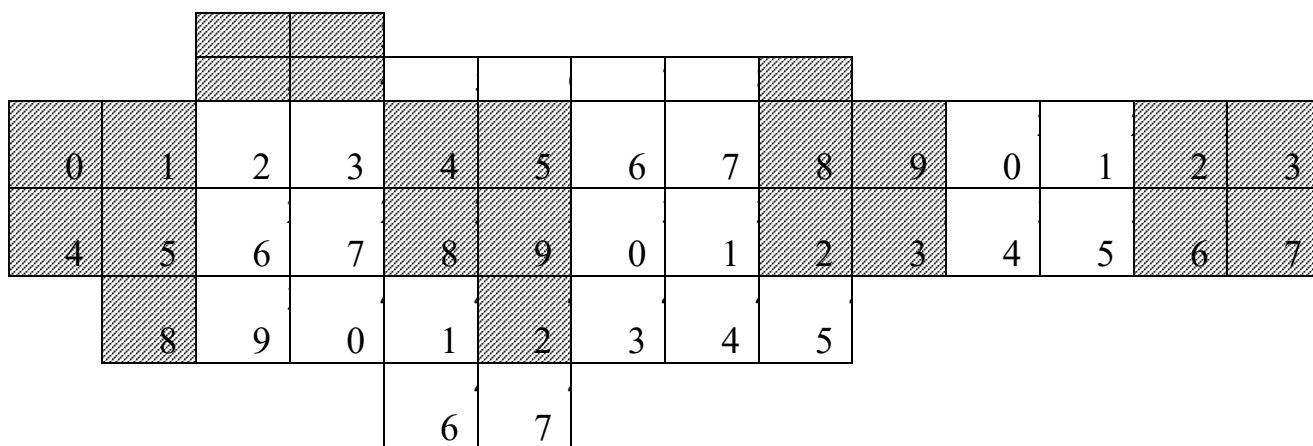
Побудова концептуальної моделі системи і її формалізація

На першому етапі машинного моделювання — побудови концептуальної моделі M_k системи S і її формалізації — формується модель і будується її формальна схема, тобто основним призначенням цього етапу є перехід від

змістовного опису об'єкта до його математичної моделі, іншими словами, процесу формалізації.

Моделювання систем на ЕОМ у даний час — найбільш універсальний і ефективний метод оцінки характеристик складних систем. Найбільш відповідальними і найменш формалізованими моментами в цій роботі є проведення границі між системою S із зовнішнім середовищем E , спрощення опису системи і побудова спочатку концептуальної, а потім формальної моделі системи. Модель повинна бути адекватною, інакше неможливо одержати позитивні результати моделювання, тобто дослідження процесу функціонування системи на неадекватній моделі узагалі втрачає зміст. Під адекватною моделлю будемо розуміти модель, що з визначеним ступенем наближення на рівні розуміння модельованої системи S розробником моделі відбиває процес її функціонування із зовнішнім середовищем E . Найбільше раціонально будувати модель функціонування системи за блоковим принципом. При цьому можуть бути виділені три автономні групи блоків такої моделі. Блоки першої групи являють собою імітатор впливів зовнішнього середовища E на систему S ; блоки другої групи є власне моделлю процесу функціонування досліджуваної системи S ; блоки третьої групи — допоміжними і служать для машинної реалізації блоків двох перших груп, а також для фіксації й обробки результатів моделювання.

а)



б)

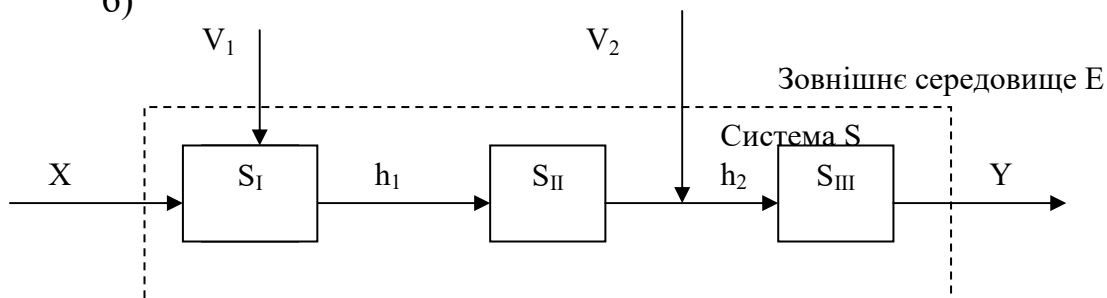


Рис.14.3. Структура моделі функціонування систем

Для ілюстрації можливостей формалізації розглянемо процес функціонування деякої гіпотетичної системи S , яку можна розбити на m підсистем з характеристиками $y_1(t), y_2(t), \dots, y_{nY}(t)$ з параметрами h_1, h_2, \dots, h_n при наявності вхідних впливів x_1, x_2, x_n і впливів зовнішнього середовища v_1, v_2, \dots, v_{nV} . Тоді математичною моделлю процесу може служити система співвідношень виду

$$\begin{aligned} y_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_{nX}; v_1, v_2, \dots, v_{nV}; h_1, h_2, \dots, h_{nH}; t); \\ y_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_{nX}; v_1, v_2, \dots, v_{nV}; h_1, h_2, \dots, h_{nH}; t); \\ y_{nY}(t) &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_{nX}; v_1, v_2, \dots, v_{nV}; h_1, h_2, \dots, h_{nH}; t); \end{aligned}$$

Якби функції f_1, f_2, \dots, f_m були відомі, то співвідношення виявилися б ідеальною математичною моделлю процесу функціонування системи S . Однак на практиці одержання моделі досить простого виду для складних систем найчастіше неможливо, тому звичайно процес функціонування системи S розбивають на ряд елементарних підпроцесів. При цьому необхідно так проводити розбивку на підпроцеси, щоб побудова моделей окремих під процесів було елементарною і не викликало труднощів при формалізації. Таким чином, на цій стадії сутність формалізації під процесів буде складатися в підборі типових математичних схем. Наприклад, для стохастичних процесів це можуть бути схеми ймовірнісних автоматів (Р-схеми), схеми масового обслуговування (Q-схеми) і т.д., що досить точно описують основні особливості реальних явищ, що складають підпроцеси, з погляду розв'язуваних прикладних задач.

Таким чином, формалізації процесу функціонування будь-якої системи S повинне передувати вивчення складових його явищ. У результаті з'являється змістовний опис процесу, що являє собою першу спробу чітко викласти закономірності, характерні для досліджуваного процесу, і постановку прикладної задачі. Змістовний опис є вихідним матеріалом для наступних етапів формалізації: побудови формалізованої схеми процесу функціонування системи і математичної моделі цього процесу. Для моделювання процесу функціонування системи на ЕОМ необхідно перетворити математичну модель процесу у відповідний моделюючий алгоритм і машинну програму.

Розглянемо більш детально основні підетапи побудови концептуальної моделі M_k до системи і її формалізації

1.1. Постановка задачі машинного моделювання системи. Дається чітке формулювання задачі дослідження конкретної системи S і основна увага приділяється таким питанням, як: а) визнання існування задачі і необхідності машинного моделювання; б) вибір методики вирішення задачі з урахуванням наявних ресурсів; в) визначення масштабу задачі і можливості розбивки її на підзадачі.

Необхідно також відповісти на питання про пріоритетність рішення різних підзадач, оцінити ефективність можливих математичних методів і програмно-технічних засобів їхнього рішення. Ретельне пророблення цих

питань дозволяє сформулювати задачу дослідження і приступити до її реалізації. При цьому можливий перегляд початкової постановки задачі в процесі моделювання.

1.2. Аналіз задачі моделювання системи. Проведення аналізу задачі сприяє подоланню виникаючих надалі труднощів при її рішенні методом моделювання. На розглянутому другому етапі основна робота зводиться саме до проведення аналізу, включаючи: а) вибір критеріїв оцінки ефективності процесу функціонування системи S ; б) визначення ендогенних і екзогенних змінних моделі M ; в) вибір можливих методів ідентифікації; г) виконання попереднього аналізу змісту другого етапу алгоритмізації моделі системи і її машинної реалізації; д) виконання попереднього аналізу змісту третього етапу одержання й інтерпретації результатів моделювання системи.

1.3. Визначення вимог до вихідної інформації про об'єкт моделювання і організація її збору. Після постановки задачі моделювання системи S визначаються вимоги до інформації, з якої одержують якісні і кількісні вихідні дані, необхідні для рішення цієї задачі. Ці дані допомагають глибоко розібратися в сутності задачі, методах її рішення. Таким чином, на цьому підетапі проводиться: а) вибір необхідної інформації про систему S і зовнішнє середовище E ; б) підготовка апріорних даних; в) аналіз наявних експериментальних даних; г) вибір методів і засобів попередньої обробки інформації про систему.

При цьому необхідно пам'ятати, що саме від якості вихідної інформації про об'єкт моделювання істотно залежать як адекватність моделі, так і вірогідність результатів моделювання.

1.4. Висування гіпотез і прийняття припущень. Гіпотези при побудові моделі системи S служать для заповнення «пробілів» у розумінні задачі дослідником. Висуваються також гіпотези щодо можливих результатів моделювання системи M , справедливості яких перевіряється при проведенні машинного експерименту. Припущення передбачають, що деякі дані невідомі чи їх неможна одержати. Припущення можуть висуватися щодо відомих даних, що не відповідають вимогам рішення поставленої задачі. Припущення дають можливість провести спрощення моделі відповідно до обраного рівня моделювання. При висуванні гіпотез і прийнятті припущень враховуються наступні фактори: а) обсяг наявної інформації для рішення задач; б) підзадачі, для яких інформація недостатня; в) обмеження на ресурси часу для рішення задачі; г) очікувані результати моделювання.

Таким чином, у процесі роботи з моделлю системи S можливо багаторазове повернення до цього підетапу в залежності від отриманих результатів моделювання і нової інформації про об'єкт.

1.5. Визначення параметрів і змінних моделі. Перш ніж перейти до опису математичної моделі, необхідно визначити параметри системи $h_k, k = \overline{1, n_H}$, вхідні і вихідні змінні $x_i, i = \overline{1, n_X}, y_j, j = \overline{1, n_Y}$ впливу зовнішнього середовища $v_l, l = \overline{1, n_V}$. Кінцевою метою цього підетапу є підготовка до побудови математичної моделі системи S , що функціонує із зовнішнім середовищем E ,

для чого необхідне розгляд усіх параметрів і змінних моделей і оцінка ступеню їхнього впливу на процес функціонування системи в цілому. Опис кожного параметра і змінної повинне даватися в наступній формі: а) визначення і коротка характеристика; б) символ позначення і одиниця виміру; в) діапазон зміни; г) місце застосування в моделі.

1.6. Встановлення основного змісту моделі. На цьому підетапі визначається основний зміст моделі і вибирається метод побудови моделі системи, що розробляються на основі прийнятих гіпотез і припущень. При цьому враховуються наступні особливості: а) формулювання задачі моделювання системи; б) структура системи S і алгоритми її поводження, від дії зовнішнього середовища E ; в) можливі методи і засоби рішення задачі моделювання.

1.7. Обґрунтування критеріїв оцінки ефективності системи. Для оцінки якості процесу функціонування модельованої системи S необхідно вибрати деяку сукупність критеріїв оцінки ефективності, тобто в математичній постановці задача зводиться до одержання співвідношення для оцінки ефективності як функції параметрів і змінних систем. Ця функція являє собою поверхню відгуку в досліджуваній області зміни параметрів та змінних і дозволяє визначити реакцію системи. Ефективність системи S можна оцінити за допомогою інтегральних чи окремих критеріїв, вибір яких залежить від розглянутої задачі.

1.8. Визначення процедур апроксимації. Для апроксимації реальних процесів, що протікають у системі S , звичайно використовуються три види процедур: а) детерміновану; б) ймовірнісну, в) визначення середніх значень.

При детермінованій процедурі результати моделювання однозначно визначаються по даній сукупності вхідних впливів, параметрів і змінних систем S . У цьому випадку відсутні випадкові елементи, що впливають на результати моделювання. Ймовірнісна (рандомізована) процедура застосовується в тому випадку, коли випадкові елементи, включаючи вплив зовнішнього середовища E , впливають на характеристики процесу функціонування системи S і коли необхідно одержати інформацію про закони розподілу вихідних змінних. Процедура визначення середніх значень використовується тоді, коли при моделюванні системи інтерес представляють середні значення вихідних змінних при наявності випадкових елементів.

1.9. Опис концептуальної моделі системи. На цьому підетапі побудови моделі системи: а) описується концептуальна модель M_k в абстрактних термінах і поняттях; б) дається опис моделі з використанням типових математичних схем; в) приймаються остаточно гіпотези і припущення; г) влаштовується вибір процедури апроксимації реальних процесів при побудові моделі. Таким чином, на цьому підетапі проводиться детальний аналіз задачі, розглядаються можливі методи її рішення і дається детальний опис концептуальної моделі M_k , яка потім використовується на другому етапі моделювання.

1.10. Перевірка вірогідності концептуальної моделі. Після того як концептуальна модель M_k описана, необхідно перевірити вірогідність деяких концепцій моделі перед тим, як перейти до наступного етапу моделювання системи S . Перевіряти вірогідність концептуальної моделі досить складно, тому що процес її побудови є евристичним і таку модель описують в абстрактних термінах і поняттях. Один з методів перевірки моделі M_k — застосування операцій зворотного переходу, що дозволяє проаналізувати модель, повернутися до прийнятих апроксимацій і, нарешті, розглянути знову реальні процеси, що протікають в системі S . Перевірка вірогідності концептуальної моделі M_k повинна включати: а) перевірку задуму моделі; б) оцінку вірогідності вихідної інформації; в) розгляд постановки задачі моделювання; г) аналіз прийнятих апроксимацій; д) дослідження гіпотез і припущень.

Тільки після ретельної перевірки концептуальної моделі M_k варто переходити до етапу машинної реалізації моделі, тому що помилки в моделі M_k не дозволяють одержати достовірні результати моделювання.

1.11. Складання технічної документації по першому етапі. Наприкінці етапу побудови концептуальної моделі M_k і її формалізації складається технічний звіт по етапу, що містить у собі: а) докладну постановку задачі моделювання системи S ; б) аналіз задачі моделювання системи; в) критерії оцінки ефективності системи; г) параметри і змінні моделі системи; д) гіпотези і припущення, прийняті при побудові моделі; е) опис моделі в абстрактних термінах і поняттях; ж) опис очікуваних результатів моделювання системи S .

Складання технічної документації — обов'язкова умова успішного проведення моделювання системи S , тому що в процесі розробки моделі великої системи і її машинної реалізації беруть участь на різних етапах колективи фахівців різних профілів (починаючи від постановників задач і кінчаючи програмістами) і документація є засобом забезпечення їхньої ефективної взаємодії при рішенні поставленої задачі методом моделювання.

Алгоритмізація моделі і її машинна реалізація

На другому етапі моделювання — етапі алгоритмізації моделі і її машинної реалізації математична модель, сформована на першому етапі, втілюється в конкретну машинну модель. Цей етап являє собою етап практичної діяльності, спрямованої на реалізацію ідей і математичних схем у виді машинної моделі процесу функціонування системи S .

Перш ніж розглядати підетапи алгоритмізації і машинної реалізації моделі, зупинимося на основних принципах при побудові моделюючих алгоритмів і формах їхнього представлення

Процес функціонування системи S можна розглядати як послідовну зміну її станів $\vec{z} = z(z_1(t_0), z_2(t_0), \dots, z_k(t_0))$ у k -мірному просторі. Очевидно, що задачею моделювання процесу функціонування досліджуваної системи S є побудова функції z , на основі яких можна провести обчислення характеристик процесу функціонування системи. Для цього повинні бути

співвідношення, що зв'язують, функції z із змінними, параметрами і часом, а також початкові умови $\vec{z}^0 = z(z_1(t_0), z_2(t_0) \dots z_k(t_0))$ у момент часу $t = t_0$.

Розглянемо процес функціонування деякої детермінованої системи S_D , у якій відсутні випадкові фактори, тобто вектор станів такої системи можна визначити з як $\vec{z} = \Phi(\vec{z}^0, x, t)$. Тоді стан процесу в момент часу $t_0 + j\Delta t$ може бути однозначно визначене зі співвідношень математичної моделі по відомих початкових умовах. Це дозволяє будувати моделюючий алгоритм процесу функціонування системи. Для цього перетворимо співвідношення моделі Z до такого виду, щоб зробити зручним обчислення $z_1(t + \Delta t), z_2(t + \Delta t), \dots, z_k(t + \Delta t)$ за значеннями $z_i(\tau)$, $I = \overline{1, k}$ де $\tau \leq t$. Організуємо лічильник системного часу, що у початковий момент показує час t_0 . Для цього моменту $z_i(t_0) = z_i^0$. Додамо інтервал часу Δt , тоді лічильник буде показувати $t_1 = t_0 + \Delta t$. Обчислимо значення $z_i(t_0 + \Delta t)$. Потім перейдемо до моменту часу $t_2 = t_1 + \Delta t$ і т.д. Якщо крок Δt досить малий, то таким шляхом можна одержати наближені значення z .

Розглянемо процес функціонування стохастичної системи S_R , тобто системи, на яку діють випадкові фактори. Для такої системи функція стані процесу z у момент часу $\tau \leq t$ і співвідношення моделі визначають лише розподіл імовірностей для $z_i(t + \Delta t)$ у момент часу $t + \Delta t$. У загальному випадку і початкові умови z^0 можуть бути випадковими, що задаються відповідним розподілом ймовірностей. При цьому структура моделюючого алгоритму для стохастичних систем в основному залишається колишньою. Тільки замість стану $z_i(t + \Delta t)$ тепер необхідно обчислити розподіл імовірностей для можливих станів. Нехай лічильник системного часу показує час t_0 . У відповідності з заданим розподілом ймовірностей вибирається z_i^0 . Далі, виходячи з розподілу, виходить стан $z_i(t_0 + \Delta t)$ і т.д., доки не буде побудована одна з можливих реалізацій випадкового багатомірного процесу $z_i(t)$ у заданому інтервалі часу.

Розглянутий принцип побудови моделюючих алгоритмів називається «принципом Δt ». Це найбільш універсальний принцип, що дозволяє визначити послідовні стани процесу функціонування системи S через задані інтервали часу Δt . Але з погляду витрат машинного часу він іноді виявляється неекономічним.

При розгляді процесів функціонування деяких систем можна знайти, що для них характерні два типи станів: 1) особливому, властивому процесу функціонування системи тільки в деякі моменти часу (моменти надходження вхідних чи керуючих впливів, збурювань зовнішнього середовища і т.п.); 2) неособливі, у яких процес знаходиться весь інший час. Особливі стани характерні ще і тією обставиною, що функції станів $z_i(t)$ у ці моменти часу змінюються стрибком, а між особливими станами зміна координат $z_i(t)$ відбувається плавно безупинно чи не відбувається зовсім. Таким чином, стежачи при моделюванні системи S тільки за її особливими станами в ті моменти часу, коли ці стани мають місце, можна одержати інформацію, необхідну для побудови функцій $z_i(t)$. Очевидно, для описаного типу систем

можуть бути побудовані моделюючі алгоритми за «принципом особливих станів». Позначимо стрибкоподібне (релейне) зміна стану z як δz , а «принцип особливих станів»- як «принцип δz ».

Наприклад, для системи масового обслуговування (Q-схеми) як особливі стани можуть бути обрані стани в моменти надходження заявок на обслуговування в прилад і в моменти закінчення обслуговування заявок каналами K , коли стан системи, що оцінюється числом заявок, що знаходяться в ній, змінюється стрибком.

Відзначимо, що характеристики процесу функціонування таких систем із особливими станами оцінюються за інформацією про особливі стани, а неособливі стани при моделюванні не розглядаються. «Принцип δz » дає можливість для ряду систем істотно зменшити витрати машинного часу на реалізацію моделюючих алгоритмів у порівнянні з «принципом Δt ». "Логіка побудови моделюючого алгоритму, що реалізує «принцип δz », відрізняється від розглянутої для «принципу Δt » тільки тим, що містить у собі процедуру визначення моменту часу $t\delta$, що відповідає наступному особливому стану системи S . Для дослідження процесу функціонування складних систем раціональне використання комбінованого принципу побудови моделюючих алгоритмів, що сполучить у собі переваги кожного з розглянутих принципів.

Зручною формою представлення логічної структури моделей процесів функціонування систем і машинних програм є схема. На різних етапах моделювання складають узагальнені і детальні логічні схеми моделюючих алгоритмів, а також схеми програм .

Узагальнена (укрупнена) схема моделюючого алгоритму задає загальний порядок дії при моделюванні системи без яких-небудь уточнюючих деталей. Узагальнена схема показує, що необхідно виконати на черговому кроці моделюванні, наприклад звернутися до датчика випадкових чисел.

Детальна схема моделюючого алгоритму містить уточнення, відсутні в узагальненій схемі. Детальна схема показує не тільки, що варто виконати на черговому кроці моделювання системи, але і як це виконати.

Логічна схема моделюючого алгоритму являє собою логічну структуру моделі процесу функціонування системи S . Логічна схема вказує упорядковану в часі послідовність логічних операцій, зв'язаних з рішенням задачі моделювання.

Схема програми відображає порядок програмної реалізації моделюючого алгоритму з використанням конкретного математичного забезпечення. Схема програми являє собою інтерпретацію логічної схеми моделюючого алгоритму розроблювачем програми на базі конкретної алгоритмічної мови. Розходження між цими схемами полягає в тім, що логічна схема відбиває логічну структуру моделі процесу функціонування системи, а схема програми — логіку машинної реалізації моделі з використанням конкретних програмно-технічних засобів моделювання.

2.1. Побудова логічної схеми моделі. Рекомендується будувати модель за блоковим принципом, тобто у виді деякої сукупності стандартних блоків. Побудова моделі системи S з таких блоків забезпечує необхідну гнучкість у

процесі її експлуатації, особливо на стадії машинного налагодження. При побудові блокової моделі проводиться розбивка процесу функціонування системи на окремі досить автономні підпроцеси. Таким чином, модель функціонально розділяється на підмоделі, кожна з яких у свою чергу може бути розбита на ще більш дрібні елементи. Блоки такої моделі бувають двох типів: основні і допоміжні. Кожен основний блок відповідає деякому реальному підпроцесу, що має місце в системі S , а допоміжні блоки являють собою лише складову частину машинної моделі, вони не відбивають функції системи і необхідні лише для машинної реалізації, фіксації й обробки результатів моделювання.

2.2. Одержання математичних співвідношень. Одночасно з виконанням підетапу побудови логічної схеми моделі необхідно одержати, якщо це можливо, математичні співвідношення у виді явних функцій. Цей підетап відповідає неявному завданню можливих математичних співвідношень на етапі побудови концептуальної моделі. При виконанні першого етапу ще не може бути інформації про конкретний вид таких математичних співвідношень, а на другому етапі вже необхідно одержати ці співвідношення. Схема машинної моделі M_m повинна являти собою повне відображення закладеної в моделі концепції і мати: а) опис усіх блоків моделі з їх найменуваннями; б) єдину систему позначень і нумерацію блоків; в) відображення логіки моделі процесу функціонування системи; г) завдання математичних співвідношень у явному виді.

Таким чином, у загальному випадку побудована машинна модель M_m системи буде мати комбінований характер, тобто відбивати аналітико-імітаційний підхід, коли частина процесу в системі описана аналітично, а інша частина імітується відповідними алгоритмами.

2.3. Перевірка вірогідності моделі системи. Ця перевірка є першою з перевірок, виконуваних на етапі реалізації моделі. Тому що модель являє собою наближений опис процесу функціонування реальної системи S , то поки не доведена вірогідність моделі M_m , не можна стверджувати, що з її допомогою будуть отримані результати, що збігаються з тими, які могли б бути отримані при проведенні натурного експерименту з реальною системою S . Тому визначення вірогідності моделі можна вважати найбільше важливою проблемою при моделюванні систем. Від рішення цієї проблеми залежить ступінь довіри до результатів, отриманим методом моделювання. Перевірка моделі на розглянутому підетапі повинна дати відповідь на питання, наскільки логічна схема моделі системи і використовуваних математичних співвідношень відбивають задум моделі, сформований на першому етапі. При цьому перевіряються: а) можливість рішення поставленої задачі; б) точність відображення задуму в логічній схемі; в) повнота логічної схеми моделі; г) правильність використовуваних математичних співвідношень.

Тільки після того, як розроблювач переконується шляхом відповідної перевірки в правильності всіх цих положень, можна вважати, що мається логічна схема моделі системи S , придатна для подальшої роботи з реалізації моделі на ЕОМ.

2.4. Вибір обчислювальних засобів для моделювання. На цьому підетапі необхідно остаточно вирішити питання про те, яку обчислювальну машину (ЕОМ, АВМ, ГВК) доцільно використовувати для реалізації моделі системи S. Узагалі, вибір обчислювальних засобів може бути проведений і на попередніх підетапах; розглянутий підетап є останнім, коли цей вибір повинний бути зроблений остаточно, тому що в протилежному випадку виникнуть труднощі в проведенні подальших робіт з реалізації моделі. Питання про вибір універсальної ЕОМ зводиться до забезпечення наступних вимог: а) наявність необхідних програмних і технічних засобів; б) доступність обраної ЕОМ для розроблювача моделі; в) забезпечення всіх етапів реалізації моделі; г) можливість своєчасного одержання результатів.

2.5. Складання плану виконання робіт із програмування. Такий план повинний допомогти при програмуванні моделі, з огляду на оцінки обсягу програми і трудовитрат на її складання. План при використанні універсальної ЕОМ повинний включати в себе: а) вибір мови (системи) програмування моделі; б) вказівка типу ЕОМ і необхідних для моделювання пристроїв; в) оцінку приблизного обсягу необхідної оперативної і зовнішньої пам'яті; г) орієнтовані витрати машинного часу на моделювання; д) передбачувані витрати часу на програмування, перфорацію і налагодження програми на ЕОМ.

2.6. Побудова схеми програми. Наявність логічної схеми моделі дозволяє побудувати схему програми, що повинна відбивати: а) розбивку моделі на блоки, підблоки і т.д.; б) особливості програмування моделі; в) проведення необхідних змін; г) можливості тестування програми; д) оцінку витрат машинного часу; е) форму представлення вхідних і вихідних даних.

Побудова схеми програми являє собою одну з основних задач на етапі машинної реалізації моделі. При цьому особлива увага повинна бути приділена особливостям обраного для реалізації моделі мови: алгоритмічної мови загального призначення (наприклад, ALGOL, FORTRAN, PL/1, C++) чи мови моделювання (наприклад, SIMULA, SIMSCRIPT, GPSS).

2.7. Перевірка вірогідності схеми програми. Ця перевірка є другою на етапі машинної реалізації моделі системи. Очевидно, що нема рації продовжувати роботу з реалізації моделі, якщо немає впевненості в тім, що в схемі програми, по якій буде вестися подальше програмування, допущені помилки, що роблять її неадекватною логічній схемі моделі, а отже, і неадекватною самому об'єкту моделювання. При цьому проводиться перевірка відповідності кожної операції, представленої в схемі програми, аналогічній їй операції в логічній схемі моделі.

2.8. Проведення програмування моделі. При досить детальній схемі програми, що відбиває всі операції логічної схеми моделі, можна приступити до програмування моделі. Якщо є адекватна схема програми, то програмування являє собою роботу тільки для програміста без участі і допомоги з боку розроблювача моделі. При використанні пакетів прикладних програм моделювання проводиться безпосередня генерація робочих програм для моделювання конкретного об'єкта.

2.9. Перевірка вірогідності програми. Ця остання перевірка на етапі машинної реалізації моделі, яку необхідно проводити: а) зворотним перекладом програми у вихідну схему; б) перевіркою окремих частин програми при рішенні різних тестових задач; в) об'єднанням усіх частин програми і перевіркою її в цілому на контрольному прикладі моделювання варіанта системи S .

На цьому підетапі необхідно також перевірити оцінки витрат машинного часу на моделювання. Корисно також одержати досить просту аналітичну апроксимацію залежності витрат машинного часу від кількості реалізацій, що дозволить розроблювачу моделі (замовнику) правильно сформулювати вимоги до точності і вірогідності результатів моделювання.

2.10. Складання технічної документації по другому етапі. Для завершення етапу машинної реалізації моделі M необхідно скласти технічну документацію, що містить: а) логічну схему моделі і її опис; б) адекватну схему програми і прийняті позначення; в) повний текст програми; г) перелік вхідних і вихідних величин з поясненнями; д) інструкцію з роботи з програмою; е) оцінку витрат машинного часу на моделювання з указівкою необхідних ресурсів ЕОМ. Таким чином, на цьому етапі розробляється схема моделі системи S , проводиться її алгоритмізація і програмування з використанням конкретних програмно-технічних засобів обчислювальної техніки, тобто будується машинна модель M_m , з якою має бути працювати для одержання необхідних результатів моделювання по оцінці характеристик процесу функціонування системи S (задача аналізу) чи для пошуку оптимальних структур, алгоритмів і параметрів системи S (задача синтезу).

Одержання і інтерпретація результатів моделювання

На третьому етапі моделювання — етапі одержання й інтерпретації результатів моделювання — ЕОМ використовується для проведення робочих розрахунків по складеній і налагодженій програмі. Результати цих розрахунків дозволяють проаналізувати і сформулювати висновки про характеристики процесу функціонування системи S .

При реалізації моделюючих алгоритмів на ЕОМ виробляється інформація про стани процесу функціонування досліджуваних систем $z(t) \in Z$. Ця інформація є вихідним матеріалом для визначення наближених оцінок шуканих характеристик, отриманих у результаті машинного експерименту, тобто критеріїв оцінки. Критерієм оцінки будемо називати будь-який кількісний показник, по якому можна судити про результати моделювання системи. Критеріями оцінки можуть служити показники, одержувані на основі процесів, дійсно протікаючих у системі, чи одержуваних на основі спеціально сформованих функцій цих процесів.

У ході машинного експерименту вивчається поведінка досліджуваної моделі M процесу функціонування системи S на заданому інтервалі часу $[0, T]$. Тому критерій оцінки є в загальному випадку векторною випадковою функцією, заданою на цьому ж інтервалі:

$$\vec{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$$

Часто використовують більш прості критерії оцінки, наприклад імовірність визначеного стану системи в заданий момент часу $t^* \in [0, T]$, відсутність відмовлень і збоїв у системі на інтервалі $[0, T]$ і т.п. При інтерпретації результатів моделювання обчислюються різні статистичні характеристики закону розподілу критерію оцінки.

Розглянемо загальну схему фіксації й обробки результатів моделювання системи. Будемо розглядати гіпотетичну модель M , призначену для дослідження поведінки системи S на інтервалі часу $[0, T]$. У загальному випадку критерієм інтерпретації результатів моделювання є нестационарний випадковий n -мірний процес $q(t), 0 \leq t \leq T$.

Припускаємо для визначеності, що стан системи S перевіряється кожні Δt часових одиниць, тобто використовується "принцип Δt ". При цьому обчислюють значення $\vec{q}(j\Delta t), j = \overline{0, k}$ критерію $q(t)$. Таким чином, про властивості випадкового процесу $\vec{q}(t)$ судять за властивостями випадкової послідовності $q(j\Delta t), j = \overline{0, k}$, $\vec{q}(j\Delta t), j = \overline{0, k}$ чи, інакше кажучи, за властивостями m -мірного вектора виду

$$\vec{q} = (\vec{q}(0), \vec{q}(\Delta t), \dots, \vec{q}[(k-1)\Delta t], \vec{q}(T)), m = n(k+1), T = k\Delta t$$

Процес функціонування системи S на інтервалі $[0, T]$ моделюється N -кратно з одержанням незалежних реалізацій $q_i, i = \overline{1, N}$ вектора q . Робота моделі на інтервалі $[0, T]$ називається прогоном моделі.

3.1. Планування машинного експерименту з моделлю системи. Перед виконанням робочих розрахунків на ЕОМ повинний бути складений план проведення експерименту з указівкою комбінацій змінних і параметрів, для яких повинне проводитися моделювання системи S . Планування машинного експерименту покликано дати в підсумку максимальний обсяг необхідної інформації про об'єкт моделювання при мінімальних витратах машинних ресурсів. При цьому розрізняють стратегічне і тактичне планування машинного експерименту. При стратегічному плануванні експерименту ставиться задача побудови оптимального плану експерименту для досягнення мети, поставленої перед моделюванням (наприклад, оптимізація структури, алгоритмів і параметрів системи S , досліджуваної методом моделювання на ЕОМ). Тактичне планування машинного експерименту переслідує часткові цілі оптимальної реалізації кожного конкретного експерименту з множини необхідних, заданих при стратегічному плануванні (наприклад, рішення задачі вибору оптимальних правил зупинки при статистичному моделюванні системи S на ЕОМ. Для одержання найбільш ефективного плану машинного експерименту необхідно використовувати статистичні методи.

3.3. Проведення робочих розрахунків. Після складання програм ми моделі і плану проведення машинного експерименту з моделлю системи S можна

приступити до робочих розрахунків на ЕОМ, що звичайно містять у собі: а) підготовку наборів вихідних даних; б) підготовку вихідних даних для введення в ЕОМ; в) перевірку вихідних даних, підготовлених для введення; г) проведення розрахунків на ЕОМ; д) одержання вихідних даних, тобто результатів моделювання.

Проведення машинного моделювання раціонально виконують у два етапи: контрольні, а потім робочі розрахунки. Причому контрольні розрахунки виконуються для перевірки машинної моделі M_m , і визначення чутливості результатів до зміни вихідних даних.

3.4. Аналіз результатів моделювання системи. Щоб ефективно проаналізувати вихідні дані, отримані в результаті розрахунків на ЕОМ, необхідно знати, що робити з результатами робочих розрахунків і як їх інтерпретувати. Ці задачі можуть бути вирішені на підставі попереднього аналізу на двох перших етапах моделювання системи S . Планування машинного експерименту з моделлю M_m дозволяє вивести необхідну кількість вихідних даних і визначити метод їхнього аналізу. При цьому необхідно, щоб на роздруківку видавались тільки ті результати, що потрібні для подальшого аналізу. Також необхідно повніше використовувати можливості ЕОМ з погляду обробки результатів моделювання і представлення цих результатів найбільш наочному виді. Обчислення статистичних характеристик перед висновком результатів з ЕОМ підвищує ефективне застосування машини і зводить до мінімуму обробку вихідної інформації після її виведення з ЕОМ.

3.5. Представлення результатів моделювання. Як уже відзначалося, необхідно на третьому етапі моделювання приділити увагу формі представлення остаточних результатів моделювання у виді таблиць, графіків, діаграм, схем і т.п. Доцільно в кожному конкретному випадку вибрати найбільш придатну форму, тому що це істотно впливає на ефективність їхнього подальшого використання замовником. У більшості випадків найбільш простою формою вважаються таблиці, хоча графіки більш наочно ілюструють результати моделювання системи S . При діалогових режимах моделювання найбільш раціональними засобами оперативного відображення результатів моделювання є дисплеї.

3.6. Інтерпретація результатів моделювання. Одержавши і проаналізувавши результати моделювання, їх потрібно інтерпретувати стосовно об'єкта моделювання, тобто системи S . Основний зміст цього підетапу — перехід від інформації, отриманої в результаті машинного експерименту з моделлю M_m до інформації стосовно до об'єкта моделювання, на підставі якої і будуть робитися висновки щодо характеристик процесу функціонування досліджуваної системи S .

3.7. Підведення підсумків моделювання і видача рекомендацій. Проведення цього підетапу тісно зв'язане з попереднім другим етапом. При підведенні підсумків моделювання повинні бути відзначені головні особливості отриманих відповідно до плану експерименту над моделлю M_m результатів, проведена перевірка гіпотез і припущень і зроблені висновки на підставі цих

результатів. Усе це дозволяє сформулювати рекомендації з практичного використання результатів моделювання, наприклад на етапі проектування системи S.

3.8. Складання технічної документації по третьому етапі. Ця документація повинна містити в собі: а) план проведення машинного експерименту; б) набори вихідних даних для моделювання; в) результати моделювання системи; г) аналіз і оцінку результатів моделювання; д) висновки за отриманими результатами моделювання; вказівка шляхів подальшого удосконалення машинної моделі і можливих областей її застосування. Повний комплект документації по моделюванню конкретної системи S на ЕОМ повинен містити технічну документацію по кожному з трьох розглянутих етапів.

Таким чином, процес моделювання системи S зводиться до виконання перерахованих етапів моделювання. На етапі побудови концептуальної моделі Мм проводиться дослідження об'єкта моделювання, визначаються необхідні апроксимації і будується узагальнена схема моделі, що перетвориться в машинну модель Мм на другому етапі моделювання шляхом послідовної побудови логічної схеми моделі і схеми програми. На останньому етапі моделювання проводять робочі розрахунки ЕОМ, одержують і інтерпретують результати моделювання системи S.

Розглянута послідовність етапів і підетапів відбиває найбільш загальний підхід до побудови і реалізації моделі системи S.

Застосування імітаційного моделювання для дослідження характеристик складних систем управління

Імітаційне моделювання є відносно новим і швидким методом дослідження поведінки, що розвивається, складних систем управління. Цей метод полягає в тому, що за допомогою ЕОМ відтворюється поведінка досліджуваною складних систем управління, а дослідник-системотехнік, управляючи ходом процесу імітації і аналізуючи одержувані результати, робить висновок про її властивості і якість поведінки. Тому під імітацією потрібно розуміти чисельний метод проведення на ЕОМ експериментів з математичними моделями, що описують поведінку складних систем управління для визначення функціональних характеристик, що цікавлять, нас. Поява імітаційного моделювання і перетворення його в ефективний засіб аналізу складних систем було, з одного боку, обумовлено потребами практики, а з іншого боку, забезпечено розвитком методу статистичних випробувань (методу МОНТЕ-КАРЛО), моделювання випадкових чинників, що відкрило, можливість, якими рясніють реальні системи, а також розвитком електронної обчислювальної техніки, що є базою для проведення статистичних експериментів.

В розвиток методу МОНТЕ-КАРЛО, що є математичною основою машинної імітації, значний внесок був внесений роботами Н. П. Бусленко, Д. І. Голенко, І. М. Соболя і ін. Велике значення для розвитку машинної імітації також мала серія робіт Н. П. Бусленко, в яких на основі теоретичного узагальнення досвіду статистичного моделювання була розроблена так звана теорія агрегатів, що дозволяє будувати імітаційні моделі широкого класу систем по загальній схемі.

Достатньо широке застосування методу імітації при дослідженні поведінки складних систем управління обумовлено наступними причинами: а) складністю моделі поведінки системи; наявністю множини випадкових чинників, які обмежують ефективність застосування традиційних аналітичних методів дослідження, а у ряді випадків взагалі виключають можливість їхнього застосування, внаслідок чого імітаційне моделювання виявляється єдиним способом дослідження; б) новими можливостями, які дозволяють здійснювати: спостереження за поведінкою системи в таких умовах, в яких натурний експеримент просто неможливий (або через чисто фізичні причини, або через обмеженість часових і вартісних ресурсів); проведення імітаційних експериментів в широкому діапазоні зміни параметрів системи і зовнішнього середовища, що дозволяє отримати додаткову корисну інформацію в умовах інформаційної невизначеності, завжди супутньої початковим етапам розв'язання системотехнічних задач; прогнозування поведінки системи дозволяє одержувати до того ж відповідь в стислому масштабі часу; в) детальне спостереження за поведінкою імітованої системи дозволяє краще зрозуміти зміст самої системи і розробити такі пропозиції по її поліпшенню, які були б неможливі без імітації; г) імітаційне моделювання дозволяє дати уявлення про те, які з параметрів системи є найістотнішими; д) імітаційне моделювання може бути використано як педагогічний прийом для навчання студентів і інженерів основним навикам теоретичного аналізу, статистичного аналізу і теорії прийняття рішень при управлінні складними системами управління.

Але, як і у будь-якого інструмента дослідження, у методі імітації є переваги і недоліки. До недоліків можна віднести: а) у ряді випадків імітаційні моделі виявляються достатньо складними, що вимагає великих часових і вартісних витрат на програмування, відладку моделей і проведення експериментів; б) «імітаційний світ», як і реальна дійсність, виявляється важко зрозумілим, бо складна імітаційна модель приводить до такого числа різноманітних виходів, що в результаті одержувану інформацію не так легко інтерпретувати; в) аналіз результатів імітації заснований тільки на використанні математичної статистики, а, як відомо, для отримання статистичної достовірності результатів, достатньої для обґрунтування вибору варіанту управління, варіанту побудови системи і інших, потрібне багатократне повторення імітаційних експериментів, що у ряді випадків вимагає великих часових витрат. Проте, не дивлячись на це, все одно залишаються флюктуації результатів примушують виявляти обережність при підведенні підсумків машинних імітаційних експериментів; г) імітаційне моделювання поки не має в своєму розпорядженні добре методично обґрунтованих принципів побудови моделей для широкого класу складних систем управління, а тому кожний конкретний випадок вимагає значного спеціального опрацювання.

Проте слід зазначити, що, не дивлячись на відзначені недоліки, метод імітаційного моделювання як інструмент дослідження складних систем управління викликає великий науковий інтерес і в даний час інтенсивно розробляється. Тому можна сподіватися, що багато хто з відзначених недоліків цього методу будуть усунені найближчим часом.

Імітація функціонування систем з дискретними подіями

Клас складних систем управління, що формалізуються у вигляді систем з дискретними подіями, достатньо широкий і включає великі системи інформаційних систем, обчислювальні системи, системи зв'язку і ін. При вирішенні задачі програмної імітації будь-якої системи, у тому числі і системи з дискретними подіями, складається змістовний опис процесу функціонування, формалізований у вигляді математичної моделі. При цьому визначаються параметри моделі, що апроксимують функції для детермінованих залежностей, а також типові закони розподілу для випадкових величин і апроксимуючі таблиці частот експериментальних даних.

При імітації функціонування систем на ЕОМ математична перетворюється в моделюючий алгоритм, в якому зберігаються логічна структура, послідовність протікання процесу у часі, характер і склад інформації про стани процесу.

ЕОМ представляють собою пристрої дискретного типу і тому моделюючий алгоритм повинен бути дискретною апроксимацією побудованої математичної моделі функціонування системи. Особливість імітації поведінки складних систем управління на ЕОМ зводиться до визначення правила розгортання квазіпаралельних процесів функціонування множини елементів в системі в послідовний моделюючий алгоритм.

Прямий шлях розв'язання даної задачі дуже простий. Інтервал часу $[0; T)$, протягом якого розглядається робота системи, розбивається на інтервали завдовжки Dt , через що даний спосіб розв'язання отримав назву "принципу Dt ".

В межах кожного інтервалу послідовно обчислюються приріст всіх процесів в моделі і проводиться, якщо це потрібно, зміна стану окремих елементів моделі. При достатньо малих Dt одержуємо добре наближення імітованих процесів до процесів в реальній системі з паралельним виконанням операцій. При такому способі побудови моделюючого алгоритму точність моделювання досягається ціною великих витрат машинного часу. Звичайно такий спосіб побудови імітаційних моделей використовується при моделюванні безперервних динамічних систем. Принцип Dt є самим універсальним принципом побудови моделюючих алгоритмів, хоча й якнайменше економічним з точки зору обчислень на ЕОМ.

Проте даний спосіб мало придатний для вирішення задач імітації великих інформаційних систем, динаміка яких полягає в переході із стану в стан, причому в проміжках між переходами стан системи залишається незмінним. Кожний такий перехід пов'язаний з настанням деякої події в системі, наприклад прихід вхідного або керівницького дискретного сигналу, прихід вимоги, відмова елемента, досягнення деякою характеристикою системи заданого порогового значення і ін. Аналіз різних алгоритмів моделювання для такого класу систем показав, що найбільш часто використовується принцип особливих станів. При побудові алгоритму імітації відповідно до даного принципу функціонування системи, формалізоване в математичній моделі, розглядається як сукупність паралельно протікаючих процесів, причому кожний процес є деяка послідовність подій, з кожною подією пов'язана зміна стану системи.

Подія, що виникає в системі, визначається як особливий стан. Процеси в загальному випадку не є незалежними, а взаємодіють між собою.

З метою формалізації принципу особливих станів визначимо для кожного виділеного процесу момент T_i настання чергової події i -го процесу i , якщо таких процесів буде n , то вибір самого раннього моменту настання особливого стану визначиться відповідно до операції

$$Tr = \min T_i$$

де r — номер процесу, в якому наступила найближча подія.

Моменти T_i називаються моментами системного часу, на відміну від реального часу, в якому працює моделююча ЕОМ.

Розгортання квазіпаралельних процесів функціонування системи в послідовний відповідно до принципу особливих станів називається диспетчеризацією за принципом вузлових точок.

Розглянемо структурну схему моделюючого алгоритму і призначення основних операторів.

Оператор завдання початкових умов A містить: оператор завдання початкових умов для модельованого варіанту A_1 оператор завдання початкових умов для однієї реалізації (одного імітаційного експерименту) A_2 .

Оператор визначення чергового моменту зміни стану системи B знаходить момент настання самої ранньої події і визначає вид стану системи, в який вона переходить в даний момент часу. Таким чином, оператор B містить два масиви: масив часу T_i , і масив стану Z_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Логічний оператор C здійснює перехід по номеру події, що наступило, до відповідного оператора D_i , що імітує реакцію системи на подію. Оператор реакції D_i має наступні основні функції:

а) виконує всі необхідні операції, передбачені в алгоритмі функціонування системи, як реакцію на дану подію; б) обчислює і накопичує статистику, що цікавить, системотехніку по досліджуваних характеристиках системи, якщо вона відноситься до даного процесу; в) визначає момент наступного настання події в даному процесі і стан системи і заносить їх у відповідні масиви для оператора B ; г) обчислює і заносить в масиви оператора B моменти настання подій і стан в інших процесах, якщо останні були припинені, а ініціаліція їх можливе тільки подією даного процесу; в результаті цього пасивні загальмовані процеси стають активними. Потрібно відмітити, що якщо процес переходить в припинений стан, то час настання чергової події визначити не можна. В цьому випадку звичайно приймають $T_j = \infty$ (де j — номер такого процесу) для того, щоб виключити цей процес з масиву T . Даний процес активізується тільки у разі ініціалізації його подіями інших процесів.

Оператор реакції D_{n+1} звичайно вводиться в тих випадках, коли імітація проводиться на обмеженому інтервалі довжини T_0 , де $T_{n+1} = T_0$ — тривалість одного імітаційного експерименту. Коли T_0 виявиться черговим моментом зміни стану, управління передається блоку D_{n+1} , що виконує всі необхідні дії по завершенню одного імітаційного експерименту.

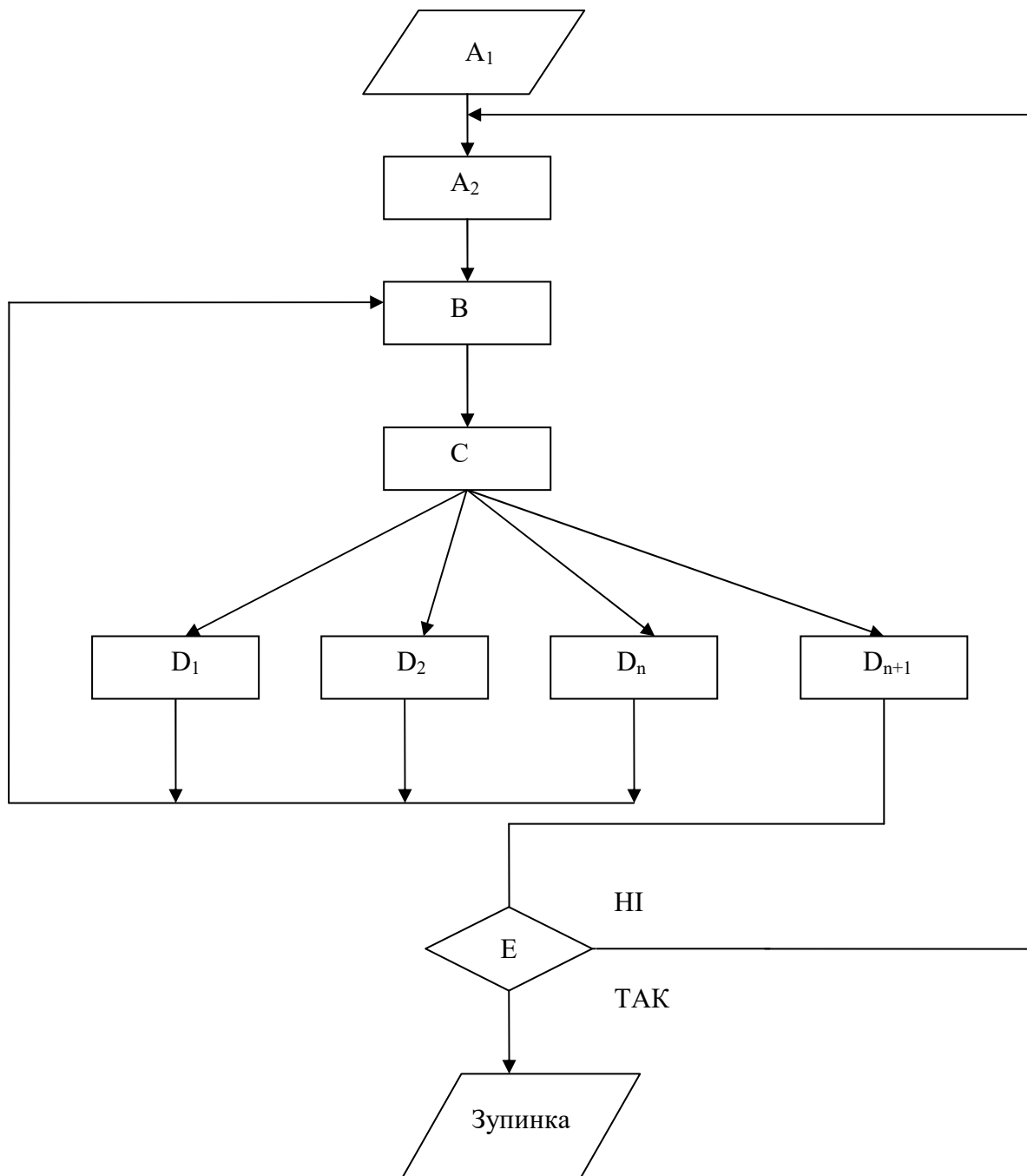


Рис. 14.4. Структурна схема моделюючого алгоритму поведінки складних систем управління у відповідності з принципом особливих станів.

Якщо не проведено достатнє для статистичної точності число експериментів, що перевіряється оператором E , то здійснюється повернення до оператора A_2 ; інакше проводиться обробка результатів в блоці оператора O (закінчення) і видача результатів імітаційних експериментів на пристрій друку. Розглянутий принцип імітації поведінки систем з дискретними подіями є основою побудови імітаційних моделей для вирішення різних задач, що виникають при проектуванні складних систем управління; при цьому структура і зміст узагальнених операторів реакції у кожному конкретному випадку будуть

залежати як від характеру досліджуваної системи, так і від цілі проведення імітаційних експериментів. Загальна ж структура алгоритму моделювання залишиться такою ж. Даний принцип дозволяє легко перейти до блокового уявлення моделі, коли можна включити в імітаційний експеримент як блоки, алгоритмічний зміст яких припускає аналітичне дослідження, так і блоки, що припускають експериментальне дослідження. Одночасно даний принцип є основою для забезпечення наочності імітаційної моделі, якщо розчленовування моделі на оператори і блоки проводиться не тільки з обчислювальних зручностей але з набору категорій, понять, зображень, звичних для фахівців, працюючих в даній області дослідження.

Оскільки при функціонуванні складних систем управління завжди є безліч випадкових чинників, то виникає задача їхньої програмної імітації на ЕОМ. В розглянутих прикладах до таких випадкових чинників відносяться: випадкова тривалість інтервалу між вимогами в потоці вимог на обслуговування; випадкова тривалість обслуговування в системі; вибір напряму передачі вимоги відповідно до заданих характеристик вірогідності. Тому далі розглянемо основні алгоритми програмної імітації різних випадкових чинників, супроводжуючих процес функціонування складних систем управління.

Методи імітації випадкових чинників при програмному моделюванні систем

Базовою послідовністю випадкових чисел, що використовується для формування в ЕОМ випадкових елементів різної природи, з різними законами розподілу, є сукупність випадкових чисел з рівномірним законом розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b]; \\ 0 & x < a, x > b \end{cases}$$

де $f(x)$ — диференціальний закон розподілу рівномірно розподілених чисел x в інтервалі $[a, b]$,

Строго кажучи, на цифровій ЕОМ отримати послідовність випадкових величин з рівномірним розподілом не представляється можливим. Тому, якщо вважати, що число розрядів ЕОМ рівно k , а випадкове число сформовано згідно із формулою

$$\alpha = \sum_{j=1}^k \alpha_j 2^j$$

де $\alpha_j = 0, P_j = 1/2$ $\alpha_j = 1, 1 - P_j = 1/2$, то $x = i/2^k - 1$ приймає значення $i/2^k - 1$ ($i = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$) з вірогідністю $P_i = 1/2^k$. Такий розподіл чисел x називається квазірівномірним в інтервалі $[0; 1]$, причому математичне очікування і дисперсія визначаються наступними співвідношеннями:

$$M[x] = \sum_{i=0}^{2^k-1} \frac{i}{2^k-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2};$$

$$D[x] = \sum_{i=0}^{2^k-1} \left(\frac{i}{2^k-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \right)^2 * \frac{1}{2^k} = \frac{1}{12} * \frac{2^k+1}{2^k-1}$$

З формул видно, що математичне очікування $M[x]$ точно співпадає з генеральним середнім для рівномірного розподілу в інтервалі $[0; 1]$, а дисперсія при $k \rightarrow \infty$ асимптотически прагне дисперсії для рівномірного розподілу при $a = 0, b = 1$, рівною $1/12$.

Практично при $k > 15$ забезпечується необхідна точність в імітаційних дослідженнях. Тому надалі будемо говорити про рівномірний закон, хоча насправді при програмному моделюванні маємо справу з квазірівномірним законом. При виводі виразів передбачалося, що x формується на основі випадкових чисел a_i , приймаючих значення $(0; 1)$ з вірогідністю $P_i=1/2$, для чого в машині повинен існувати випадковий генератор, що дає строго випадкові послідовності чисел a_i з відповідним розподілом. Оскільки в ЕОМ такого генератора немає, випадкові числа виробляються програмним шляхом, через що вони, строго кажучи, не є випадковими, оскільки формуються на основі цілком детермінованих перетворень, тому їх називають псевдовипадковими. Такі послідовності випадкових чисел є періодичними, тому дуже довгі послідовності, довжина яких перевершує період, вже не будуть строго випадковими. Проте, якщо при моделюванні число звернень до програмного датчика випадкових чисел виявляється менше періоду, вимірюється числом різних випадкових чисел, то така періодичність програмного датчика не робить істотного впливу на результати моделювання. Основні плюси програмного способу отримання псевдовипадкових чисел полягають в наступному: а) не потрібні спеціальні зовнішні пристрої; б) отримання чисел достатньо швидко (звичайно потрібний 3—10 команд на число); в) можливе повторне відтворення чисел; г) потрібна тільки однократна перевірка алгоритму отримання заданої послідовності чисел. Методи отримання псевдовипадкових квазірівномірних чисел програмним шляхом можна розбити на дві основні групи: а) аналітичні; б) методи перемішування. При використанні аналітичних методів чергове число псевдовипадкової послідовності виходить за допомогою деякого рекуррентного співвідношення, аргументами якого є одне або декілька попередніх чисел послідовності

$$X_r = \varphi(x_{r-1}, x_{r-2}, \dots, x_0)$$

Найпростішим прикладом указанного способу отримання випадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі $[0; 1]$, може служити методом вирахувань, в якому використовується наступне рекуррентне відношення:

$$x_{i+1} = bx_i \pmod{M}$$

де вираз $bx_i \pmod{M}$ означає залишок від розподілу ділення bx_i на число M ; X_{i+1} — чергове випадкове число; x_i — попереднє випадкове число; m — деяка константа; M — число, визначальне щонайбільше значення одержуваних

випадкових чисел. число; m — деяка константа; M — число, визначальне щонайбільше значення одержуваних випадкових чисел.

Даний спосіб є основою побудови мультиплікативного програмного датчика випадкових чисел. В цьому випадку алгоритм побудови послідовності випадкових чисел зводиться до наступного: 1) вибрати як параметра a_0 — довільне непарне число, наприклад $a_0 = 5^{13}$ при розрядності ЕОМ $k = 32$, $M = 2^{31} - 1$; 2) обчислити коефіцієнт b по формулі $b = 8c \pm 3$, де c — будь-яке ціле позитивне число, в окремому випадку $b = 5^{13}$; 3) обчислити добуток ba_0 ; узяти k молодших розрядів як першого члена послідовності a_0 , інші відкинути; 4) провести нормалізацію числа по формулі $x_1 = a_1 / (2^k - 1)$; 5) обчислити чергове псевдовипадкове число a_2 як k молодших розрядів добутку ba_1 і повернутися до пункту 4.

Описаний генератор піддавався широкій експериментальній перевірці і виявив достатньо добрі властивості. З іншими аналітичними способами отримання випадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі $[0; 1]$.

У разі застосування методів перемішування чергове число послідовності виходить шляхом хаотичного змішування розрядів попереднього випадкового числа за допомогою операцій зсуву, спеціальних складань і різних арифметичних операцій. Наприклад, часто використовуються наступні комбінації операцій для перемішування розрядів попереднього випадкового числа: а) зсув попереднього числа на деяке число розрядів вліво і спеціальне складання результатів цього зсуву з попереднім числом послідовності; б) зсув попереднього числа на деяке число розрядів вліво і управо і спеціальне складання результатів цих зсувів.

Дані операції закінчуються взяттям модулю і нормалізацією. Як початкової константи для формування послідовності звичайно беруть ірраціональні числа ($\sqrt{3}/3$, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{5}/5$). Взагалі в даний час не існує загальної теорії отримання випадкових чисел. Застосування тих або інших методів отримання випадкових чисел багато в чому визначається тим типом ЕОМ, який використовується для моделювання. Правомірність же застосування того або іншого способу отримання випадкових чисел програмною колією визначається тільки результатом статистичної перевірки.

Для перевірки якості серії квазірівномірних псевдовипадкових чисел використовуються різні системи перевірочних тестів. Укажемо найбільш часто вживані тести.

Тест частот. Відрізок $[0; 1]$ розбивається на m (звичайно 10—20)

рівних інтервалів. Отримані емпіричні частоти $n_i / N = 1, 2, \dots, m$; $\sum_{i=1}^m n_i = N$)

(порівнюються з теоретичною вірогідністю $1/m$).

Узгодження перевіряється за критерієм λ^2 , як статистична функція

$$\lambda^2 = \frac{m}{n} \sum_{i=1}^m \left(n_i - \frac{N}{m} \right)^2$$

що, підкоряється розподілу λ^2 с $(m - 1)$ ступенями свободи, де N — об'єм вибірки.

Тест пар. Розглядаються послідовні пари випадкових чисел при розподілі інтервалу $[0; 1]$ на m частин. Кожна пара випадково попадає в один з m^2 розподілів квадратної таблиці $m \times m$. При цьому залежно від методу утворення пар змінюється число ступенів свободи.

Нехай дана серія чисел x_1, x_2, \dots, x_N - **ЯКЩО** пари утворювати у вигляді $(x_1, x_2), (x_3, x_4), \dots$, то пари взаємно незалежні, емпіричні частоти (їхнє число m^2) порівнюються з теоретичною вірогідністю рівномірного розподілу $1/m^2$.
Функція

$$\chi^2 = (2m^2 / N) \sum_{i=1, j=1}^m (n_{ij} - N / 2m^2)^2$$

розподілена згідно із законом χ^2 з $(m^2 - m)$ ступенями свободи, де n_{ij} число попадань в (i, j) -у клітку таблиці розміром $m \times m$; $N/2$ — об'єм вибірки пар випадкових чисел.

Більш складна ситуація виникає, якщо пари утворювати у вигляді $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_i, x_{i+1})$. Цей метод утворення пар більш вигідний, оскільки повніше використовує вибірку чисел, але через залежність пар розподіл функції χ^2 вже інший.

$$\chi^2 = \frac{m^2}{N} \sum_{i=1, j=1}^m (n_{ij} - \frac{N}{m^2})^2 - \frac{m}{N} \sum_{i=1}^m (n_i - \frac{N}{m})^2$$

яка, розподілена згідно із законом χ^2 з $(m^2 - m)$ ступенями свободи.

Тест частот направлений на перевірку близькості розподілу отриманої послідовності чисел до рівномірної, а тест пар — на перевірку незалежності, а точніше, відсутність кореляції в послідовності випадкових чисел.

Тест на періодичність. Якщо серед множини програмно-одержуваних випадкових чисел x_1, x_2, \dots, x_{r-1} немає однакових, а наступне випадкове число x_r співпадає з одним з отриманих раніше чисел, то r називають відрізком аперіодичності. Очевидно, що $r \leq 2^k$ де k — число розрядів ЕОМ. При дослідженні програмного генератора випадкових чисел завжди необхідно встановити довжину відрізка аперіодичності. Якщо число необхідних для імітаційних експериментів випадкових чисел менше відрізка аперіодичності r , то може бути використаний датчик. Інакше необхідно, строго кажучи, використовувати інший генератор випадкових послідовностей. В даний час програмне забезпечення будь-якою сучасною ЕОМ містить програми генераторів випадкових послідовностей з перевіреними статистичними властивостями і орієнтованими на широкий клас імітаційних експериментів. Далі розглянемо способи імітації різних випадкових чинників на ЕОМ на базі послідовності псевдовипадкових квазірівномірних чисел.

Імітація випадкових подій. Нехай в результаті експерименту повинна наступити одна з несумісних подій $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_n$

яке утворюють повну групу подій, тобто $\sum_{k=1}^n P_k = 1$ де P_k - вірогідність події A_k .

Розбиваємо відрізок $[0; 1]$ на n частин завдовжки P_1, P_2, \dots, P_n ; при

цьому точки розподілу відрізка мають наступні координати:

$$l_0=0, l_1=P_1, l_2=P_1+P_2 \dots l_n = \sum_{k=1}^n P_k = 1$$

Нехай тепер x — чергове число від генератора випадкових чисел, Якщо $l_{k-1} \leq X \leq l_k$ то вважаємо, що відбулася подія A_k . Дійсно

$$P(A_k) = P(l_{k-1} \leq X \leq l_k) = l_k - l_{k-1} = P$$

Розглянута процедура може бути покладена в основу вибору напряму передачі вимог при моделюванні замкнених сіток масового обслуговування. Аналогічним чином можна моделювати дискретні випадкові величини при кінцевому числі їхніх значень. Якщо маємо дискретну випадкову величину y , причому $y = 1$ з вірогідністю P , а $y = 0$ з вірогідністю $1 - P$, то при імітації її на ЕОМ необхідно кожного разу вирішувати наступну систему нерівностей: якщо $0 \leq x_i \leq P$, то $y_i = 1$; якщо $P \leq x_i \leq 1$ то $y_i = 0$, де x_i — чергове випадкове число від генератора випадкових рівномірно розподілених чисел.

Імітація безперервних випадкових величин. В літературі розглядаються декілька способів імітації, заснованих на різних перетвореннях рівномірно розподілених випадкових чисел в числа із заданим законом розподілу.

Метод зворотної функції. Він заснований на використанні наступної теореми.

Якщо x — випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку $[0; 1]$, то випадкова величина y , є розв'язанням рівняння

$$\int_{-\infty}^y f(z) dz = x \quad (1)$$

має густину розподілу $f(y)$.

Даний метод дозволяє сформулювати правило генерації випадкових чисел, що мають довільний безперервний розподіл $f(y)$: 1) виробляється випадкове число x_i генератором випадкової рівномірної послідовності; 2) випадкове число y_i , що має розподіл $f(y)$ знаходиться з розв'язання рівняння

$$\int_{-\infty}^y f(z) dz = x_i$$

Таким чином, послідовність чисел $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i$ перетвориться в послідовність $y_0, y_1, y_2, \dots, y_i$ задану густину розподілу, що має $f(y)$. Розглянемо приклади.

Приклад. Необхідно отримати послідовність чисел, рівномірно розподілених на відрізку $[a, b]$. Тоді маємо:

$$x_i = \int_a^{y_i} \frac{1}{b-a} dz = \frac{y_i - a}{b-a}$$

звідки $y_i = x_i(b-a) + a$

Приклад. Необхідно отримати послідовність чисел, що мають розподіл по показовій функції

$$f(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & 0 \leq y < \infty; \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

маємо

$$x_i = \int_0^{y_i} \lambda e^{-\lambda z} dz = 1 - e^{-\lambda y_i}$$

звідки

$$y_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x_i)$$

Оскільки величина $(1-x_i)$ також має рівномірний розподіл на відрізку $[0; 1]$, то формула може бути записана іншим способом:

$$y_i = -\frac{1}{\lambda} \ln x_i$$

Проте такі формули не для всіх розподілів може бути використані із таких причин: а) залежність $y_i = y(X_i)$ не можна отримати в явному вигляді; залежність $Y_i = y(x_i)$ є складною для чисельних розрахунків. В цьому випадку використовують наближені методи, наприклад метод східчастої апроксимації і граничні теореми теорії вірогідності.

Метод східчастої апроксимації. Залежність густини розподілу $f(y)$ від можливих значень випадкової величини y представляється графічно в інтервалі зміни y від a до b . Якщо випадкова величина задана на нескінченному інтервалі, то проводимо зрізання розподілу із заданою точністю. В даному випадку указана густина $f(y)$ може бути отримана також і експериментально. Розіб'ємо відрізок $[a, B]$ на n частин, таких, що

$$\int_{a_0}^{a_1} f(y) dy = \int_{a_1}^{a_2} f(y) dy = \dots = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(y) dy = \dots = \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(y) dy = \frac{1}{n}$$

де a_i — координата точки розбиття ($i = 0, 1, 2, \dots, n$).

Тоді вірогідність того, що випадкова величина y попадає в один з інтервалів,

$$P(a_i \leq y \leq a_{i+1}) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(y) dy = \frac{1}{n} = \text{const},$$

тобто попадання на будь-який відрізок $[a_i, a_{i+1}]$ випадкової точки рівномірно. На кожному з інтервалів функція $f(y)$ апроксимується східчастою функцією так, щоб значення $f(y)$ в кожному інтервалі було постійним; тоді координата випадкової крапки може бути представлена як $y_i = a_i + c_i$, де c_i — відстань крапки від лівого кінця інтервалу. Через східчасту апроксимацію c_i є рівномірно розподіленою випадковою величиною на інтервалі $[0; a_{i+1} - a_i]$. Правило імітації в цьому випадку зводиться до наступного: а) одержуємо два числа x_1, x_2 від генератора рівномірно розподілених чисел; б) за допомогою x_1 знаходимо індекс $i = [nx_1]$ для інтервалу, де $[nx_1]$ — ціла частина числа nx_1 , причому $[nx_1] \leq nx_1$; в) за допомогою числа x_2 знаходимо $c_i = x_2 (a_{i+1} - a_i)$; г) знаходимо випадкове число, що задовольняє необхідному закону розподілу $f(y)$:

$$y = a_{[nx_1]} + x_2 (a_{[nx_1]+1} - a_{[nx_1]})$$

Таким чином, для отримання випадкового числа y , маємо закон $f(y)$, для якого використовуються два числа від генератора випадкових чисел x_1 ,

x_2 .

Використання граничних теорем. В деяких випадках для імітації певних законів розподілу використовують граничні теореми теорії вірогідності. Так, наприклад, для отримання нормального закону розподілу використовується властивість збіжності незалежних величин до нормального розподілу. Метод зворотної функції в цьому випадку виявляється неефективним, оскільки одержуваний при цьому інтеграл

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{y_i} \exp\left[-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right] dz$$

не розкривається в явну залежність $y_i = y(x_i)$. Для отримання нормально розподілених чисел з параметрами $m_y = a = 0$, $\sigma_y = 1$ зручний штучний прийом, заснований на центральній граничній теоремі теорії вірогідності. Для цього як початкових чисел візьмемо n рівномірно розподілених на відрізку $[-1; 1]$ чисел, одержуваних з інтервалу $[0; 1]$ за правилом: $z_i = 2x_i - 1$.

Сформуємо величину z згідно наступної формули:

$$z = \sum_{i=1}^n z_i$$

За центральною граничною теоремою при достатньо великому значенні n величина z може вважатися нормально розподіленою з параметрами

$$m_z = \sum_{i=1}^n M[z_i] = 0$$

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{z_i}^2 = n/3$$

Провівши нормування величини z , отримаємо, що величина

$$u = \frac{z}{\sigma_z} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \left[\sum_{i=1}^n (2x_i - 1) \right]$$

буде мати нормальний розподіл з параметрами $m_u = 0$ і $\sigma_u^2 = 1$. Практично встановлено що при $n \geq 8$ маємо цілком добрі результати.

Для прискорення процесу отримання нормально розподілених випадкових чисел іноді вводять так звану корекцію. Нормально розподілені випадкові числа з параметрами $m_y = 0$ і $\sigma_y^2 = 1$ може бути, наприклад, обчислені за допомогою емпіричних формул

$$y_i = u_i - \frac{1}{20n} (3u_i - u_i^3)$$

$$y_i = u_i - \frac{41}{13440n^2} (u_i^5 - 10u_i^3 + 15u_i)$$

При використанні достатньо прийняти $n = 5$.

Для отримання нормальної послідовності чисел s_i з параметрами $m_s = a$ і $\sigma_s^2 = \sigma^2$ достатньо виконати лінійне перетворення $s_i = \sigma u_i + a$.

Імітація дискретних випадкових величин. Зі всієї множини законів розподілу дискретних випадкових величин розглянемо імітації поведінки, що найбільш часто зустрічаються, в задачах складних систем управління:

а) величини y_i мають біноміальний розподіл

$$P_n(y_i = i) = C_n^i P^i (1 - P)^{n-i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

б) величини y_i мають пуассоновський розподіл з параметром a

$$P_n(y_i = i) = \frac{a^i}{i!} e^{-a}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

В першому випадку імітація величини y_i зводиться до n -кратної імітації експерименту з двома виходами: $x_{ij} = 1$ з вірогідністю P і $x_{ij} = 0$ з вірогідністю $1 - P$ ($j = 1, 2, \dots, n$), що реалізується по вже розглянутій вище схемі імітації дискретних випадкових подій.

Тоді $y_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}$ має розподіл, близький до біноміального; в другому випадку необхідно скористатися граничною теоремою Пуассона: якщо P_0 — вірогідність настання події A при одному випробуванні, то вірогідність настання i подій при n незалежних випробуваннях у випадку, якщо $n \rightarrow \infty$ і $P_0 \rightarrow 0$ асимптотично прагне до при

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (nP_0) = a$$

Тому імітація в цьому випадку проводиться так само, як і в першому, тільки за умови, що

$$P \approx P_0 = \frac{a}{n} \leq 0.1$$

Чим більше значення n , тим більше розподіл чисел y_i буде наближатися до закону Пуассона. Значення n вибирається з умови при відомому параметрі a .

Імітація потоків дискретних подій. Під потоком подій, як раніше було відзначено, розуміють послідовність однорідних подій, що відбуваються в якісь, взагалі кажучи, випадкові моменти часу. В складних системах управління ми маємо справу з різними видами потоків (наприклад потоки задач, викликів, довідок в інформаційних системах; потоки відмов і відновлень; потоки команд управління типу «включити», «відключити» в складних ієрархічних системах управління розподіленими об'єктами; потоки вимог на заняття певного ресурсу, причому в обчислювальних системах — вимога на заняття магістралі, зовнішнього пристрою, що запам'ятовує; в системах зв'язку — вимога на заняття каналу зв'язку і т. п.).

При імітаційному моделюванні потік подій частіше за всього відтворюється через інтервали часу між сусідніми подіями. Якщо час між сусідніми подіями випадковий, то залежно від виду розподілу відтворення його в ЕОМ відбувається відповідно до тих способів, які були розглянуті при імітації

безперервних випадкових величин, причому випадковою величиною є тривалість інтервалу між сусідніми подіями. Модифікація найпростішого потоку — потік Ерланга виходить в результаті імітації найпростішого потоку і подальшого просіювання його подій відповідно до порядку цього потоку. Регулярний потік в системі легко імітується, оскільки він задається постійним часом інтервалу між подіями. Аналогічним чином можуть бути змодельовані і потоки більш загального вигляду через завдання відповідного розподілу інтервалів між сусідніми подіями в потоці.

Розглянуті вище способи імітації випадкових чинників є далеко не повним переліком способів моделювання різних, можливих випадкових ситуацій, що виникають в складних систем управління ; вони найбільш характерні для виділеного класу систем.

Контрольні питання

1. Які основні етапи імітаційного моделювання?
 2. З яких блоків складається модель функціонування складних систем управління?
 3. Які основні математичні схеми застосовуються при імітаційному моделюванні складних систем управління?
 4. Яким чином моделюють випадкові події?
 5. Які алгоритми використовують при імітації випадкових подій?
 6. Які моделі автоматів використовують при імітаційному моделюванні складних систем управління?
 7. Які моделі потоків використовують при імітаційному моделюванні складних систем управління?
 8. Які методи апроксимації використовують при імітації неперервних випадкових процесів?
- [7,с.190-205]

ЛІТЕРАТУРА

1. Автоматизация технологических процессов пищевых производств /Под ред. Е.Б. Карпина. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Агропромиздат, 1985. – 536с.
2. Автоматическое управление в химической промышленности: Учеб. для вузов /Под ред. Е.Г. Дудникова. – М.: Химия, 1987. – 368с.
3. Балакирев В.С., Дудников Е.Г., Цирлин А.М. Экспериментальное определение динамических характеристик промышленных объектов управления. – М.: Энергия, 1967. – 232с.
4. Бондарь А.Г., Статюха Г.А., Потяженко И.А. Планирование эксперимента при оптимизации процессов химической технологии (алгоритмы и примеры): Учеб. пособие. – К.: Вища шк., 1980. – 264с.
5. Закгейм А.Ю. Введение в моделирование химико – технологических процессов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Химия, 1982. – 288с.
6. Остапенко Ю.О. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів керування: Підруч. – К.: Задруга, 1999. – 424с.
7. Остапчук Н.В. Основы математического моделирования процессов пищевых производств: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища шк., 1991. – 367с.
8. Полоцкий Л.М., Лапшенков Г.И. Автоматизация химических производств. Теория, расчет и проектирование систем автоматизации. – М.: Химия, 1982. – 296с.
9. Растрингин Л.А., Маджаров Н.Е. Введение в идентификацию объектов управления. – М.: Энергия, 1977. – 216с.

З М І С Т

<i>Тема 1.</i> Моделювання як один із методів пізнання.....	3
<i>Тема 2.</i> Основні принципи моделювання.....	5
<i>Тема 3.</i> Основні особливості моделей.....	8
<i>Тема 4.</i> Види моделювання.....	10
<i>Тема 5.</i> Фізичне моделювання.....	15
<i>Тема 6.</i> Математичне моделювання, загальна його характеристика.....	17
<i>Тема 7.</i> Основні види математичного моделювання технологічних об'єктів.....	20
<i>Тема 8.</i> Використання математичних моделей при вирішенні задач автоматизації.....	24
<i>Тема 9.</i> Ідентифікація об'єктів управління (ОУ). Основні поняття.....	26
<i>Тема 10.</i> Побудова математичних моделей експериментальним шляхом.....	30
<i>Тема 11 .</i> Системи управління з ідентифікатором.....	32
<i>Тема 12 .</i> Організація статистичного моделювання систем на ЕОМ. Загальна характеристика методу статистичного моделювання систем.....	33
<i>Тема 13.</i> Псевдовипадкові числа і процедури їх машинної генерації.....	36
<i>Тема 14.</i> Використання моделювання при дослідженні і проектуванні АСУ.....	54