МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
“УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”
ІНЖЕНЕРНО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ПРИЛАДОБУДУВАННЯ

М.В. Стойка

ОПТИМІЗАЦІЯ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Методичні вказівки для практичних робіт

Ужгород 2019

УДК 519.85(07)
ББК 22.183.4р
С 81

Оптимізація систем керування. Методичні вказівки для практичних робіт. – Ужгород. УжНУ, 2019. – 44 с.

Укладач:
Стойка Мирослав Вікторович – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри приладобудування.

Рецензенти:

В.П. Іваницький, доктор фізико-математичних наук, професор
В.О. Петенько, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Відповідальний за випуск:

В.П. Іваницький, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри приладобудування

Схвалено методичною комісією інженерно-технічного факультету.
Протокол № 3 від 20 листопада 2019 року.

Зміст

Вступ

Нині жодний нетривіальний прогноз розвитку будь-якої реальної соціально- економічної системи без застосування математики вже не вважається науково обґрунтованим, жодна пропозиція щодо управління такою системою без всебічного попереднього математичного аналізу не сприймається (адже наслідки управління хоча б приблизно мають відповідати бажаним!). Акумульований людством досвід свідчить, що саме математика є основою постановки й подальшого дослідження чітко окреслених проблем, систематизованим комплексом ефективних методів розв'язання прикладних задач і виконання кількісних розрахунків. Обсяг засвоєння студентами змісту базових розділів методів оптимізації має бути достатнім для розуміння основних понять, що застосовуються при постановці й розв'язанні типових задач.

Велика кількість планово-виробничих і економічних задач пов'язана з розподілом яких-небудь, як правило, обмежених ресурсів (сировини, робочої сили, енергії, палива і т. ін.). Часто розподіл ресурсів можна здійснити не єдиним чином. Наприклад, дану продукцію можна отримати різними способами, по-різному вибираючи технологію, сировину, застосовуючи обладнання, організацію процесу. При цьому кожний спосіб розподілу ресурсів, що оцінюється з позиції деякого критерію (прибуток, об'єм випуску продукції і т. ін.), характеризується певним значенням показника цього критерію. Природним тому є намір знайти такий варіант розподілу (програму, план), який би гарантував найбільший економічний ефект. Такий план називають оптимальним.

Реальні процеси систем керування досить складні. При їх математичному описанні доводиться враховувати багато різних факторів. Тому математична модель містить велике число умов обмежень із багатьма невідомими. Якщо невідомі входять в модель тільки в першій степені, то задача належить до розділу лінійного програмування, в протилежному випадку – до розділу нелінійного програмування. Оптимізаційні задачі, в яких потрібно враховувати послідовність дій або фактор часу, розглядаються в розділі динамічного програмування. Якщо в задачі фігурують параметри, що є випадковими величинами, то вона відноситься до задач стохастичної оптимізації.

1. Приклади задач оптимізації

1. *Задача оптимального виробничого планування*

Однією із найбільш розповсюджених задач даної групи є задача про максимальний випуск продукції із наявних обмежених запасів сировини при різних технологіях виробництва. Сюди ж можна віднести задачу досягнення максимальної рентабельності підприємства при виробництві із наявних запасів ресурсів різних видів продукції.

Приклад 1. Для виготовлення трьох видів виробів A, B і C використовується токарне, фрезерне, зварювальне і шліфувальне обладнання. Затрати часу на обробку одного виробу для кожного з типів обладнання вказані в таблиці 1. У ній же вказаний загальний фонд робочого часу кожного із типів використовуваного обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду.

Таблиця 1

Тип обладнання	Затрати часу (верстато-год.) на обробку одного виробу виду			Загальний фонд робочого часу обладнання (год.)
	A	B	C	
Фрезерне	2	4	5	120
Токарне	1	8	6	280
Зварювальне	7	4	5	240
Шліфувальне	4	6	7	360
Прибуток (грн.)	10	14	12	

Вимагається визначити, скільки виробів і якого виду потрібно виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним. Скласти математичну модель задачі.

Розв'язання. Припустимо, що буде виготовлено x_1 одиниць виробів виду A, x_2 одиниці – виду B і x_3 одиниці – виду C. Тоді для виробництва такої кількості виробів потрібно затратити $2x_1 + 4x_2 + 5x_3$ верстато-годин фрезерного обладнання.

Оскільки загальний фонд робочого часу верстатів даного типу не може перевищувати 120, то повинна виконуватися нерівність

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120.$$

Аналогічні міркування відносно можливого використання токарного, зварювального і шліфувального обладнання призведуть до таких нерівностей:

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280,$$
$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240,$$
$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360.$$

При цьому через те, що кількість виробів, які виготовляються, не може бути від'ємною, то

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \qquad (1)$$

Далі, якщо буде виготовлено x_1 одиниць виробів виду A, x_2 одиниць виробів виду B і x_3 одиниць виробів виду C, то прибуток від їх реалізації складе $F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$.

Таким чином, приходимо до наступної математичної задачі: дана система

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360 \end{cases} \quad (2)$$

чотирьох лінійних нерівностей з трьома невідомими x_j $(j = \overline{1,3})$ і лінійна функція відносно цих змінних

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3; \quad (3)$$

потрібно серед усіх невід'ємних розв'язків системи нерівностей (2) знайти такий, при якому функція (3) набуває максимального значення. Як це зробити, буде показано пізніше.

Лінійна функція (3), максимум якої потрібно визначити, разом із системою нерівностей (2) і умовою невід'ємності змінних (1) утворюють математичну модель початкової задачі.

Оскільки функція (3) лінійна, а система (2) містить тільки лінійні нерівності, то задача (1) – (3) є задачею оптимізації.

Приклад 2. Міський молочний завод виготовляє молоко, кефір і сметану, розфасовані в пляшки. На виробництво 1т молока, кефіру і сметани потрібно відповідно 1010, 1010 і 9450 кг молока. При цьому затрати робочого часу при розливі 1т молока і кефіру складають 0,18 і 0,19 машино-годин. На розфасовці 1т сметани зайняті спеціальні автомати протягом 3,25 год. Усього для виробництва молочних виробів завод може використати 136 000 кг молока. Основне обладнання може бути зайняте протягом 21,4 машино-годин, а автомати з розфасовки сметани – впродовж 16,25 год. Прибуток від реалізації 1 т молока, кефіру і сметани відповідно становить 30, 22 і 136 грн. Завод повинен щодня виробляти не менше 100 т молока, розфасованого в пляшки. На виробництво іншої продукції немає ніяких обмежень.

Потрібно визначити, яку продукцію і в якій кількості потрібно щодня виробляти заводу, щоб прибуток від її реалізації був максимальний. Скласти математичну модель задачі.

Розв'язання. Припустимо, що молочний завод буде щодня виготовляти x_1 тонну молока, x_2 тонни кефіру і x_3 тонни сметани. Тоді йому для виробництва цієї продукції необхідно $1010x_1 + 1010x_2 + 9450x_3$ тонни молока.

Оскільки завод може використовувати щодня не більше 136 000 т молока, то повинна виконуватися нерівність

$$1010x_1 + 1010x_2 + 9450x_3 \le 136000.$$

Аналогічні міркування, проведені відносно можливого використання ліній розливу молочної продукції і автоматів з розфасовки сметани, дозволяють записати такі нерівності:

$$0{,}18x_1 + 0{,}19x_2 \le 21{,}4,$$
$$3{,}25\ x_2 \le 16{,}25.$$

Оскільки щодня повинно вироблятися не менше 100 т молока, то $x_1 \ge 100$. Далі, за своїм економічним значенням змінні x_2 і x_3 можуть набувати тільки невід'ємних значеннь: $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$. Загальний прибуток від реалізації x_1 тонни молока, x_2 тонни кефіру і x_3 тонни сметани дорівнює $30x_1 + 22x_2 + 136x_3$ грн. Таким чином, переходимо до наступної математичної задачі: дана система

$$\begin{cases} 1010x_1 + 1010x_2 + 9450x_3 \le 136000, \\ 0{,}18x_1 + \ 0{,}19x_2 \qquad\qquad \le 21{,}4, \\ \qquad\quad 3{,}25x_2 \qquad\qquad \le 16{,}25, \\ \quad x_1 \qquad\qquad\qquad\quad \ge 100 \end{cases} \tag{4}$$

чотирьох лінійних нерівностей із трьома невідомими x_1, x_2, x_3 і лінійна функція відносно цих же змінних

$$F = 30x_1 + 22x_2 + 136x_3. \tag{5}$$

Потрібно серед усіх невід'ємних розв'язків системи нерівностей (4) знайти такий, при якому функція (5) матиме максимальне значення. Оскільки система (4) являє собою співвідношення лінійних нерівностей і функція (5) лінійна, то вихідна задача є задачею оптимізації.

2. *Задача про оптимальний склад суміші*

Досить широкий клас задач програмування становлять так звані задачі на складання сумішей або задачі на використання замінників.

Приклад 3. При відгодівлі тварин кожна тварина щодня повинна одержувати не менше 60 одиниць поживної речовини *A,* не менше 50 одиниць речовини *B* і не менше 12 одиниць речовини *C*. Вказані поживні речовини містяться в трьох видах корму. Склад одиниць поживних речовин в 1кг кожного з видів корму наведений у таблиці 2:

Таблиця 2

Поживні речовини	Кількість одиниць поживних речовин в 1кг корму виду		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Скласти денний раціон, що забезпечує отримання необхідної кількості поживних речовин при мінімальних грошових витратах, якщо ціна 1кг корму I виду складає 9 коп., корму II виду — 12 коп. і корму III виду — 10 коп.

Приклад 4. Для виробництва чавунного литва використовується n різних початкових шихтових матеріалів (чавун різних марок, сталевий брухт, ферофосфор та ін.). Хімічний склад чавунного литва визначається вмістом в ньому хімічних елементів (кремнію, марганцю, фосфору та ін.). Готовий чавун повинен мати строго визначений хімічний склад, який задається величинами H_j що є частками (у відсотках) j-ого хімічного елементу в готовому продукті. При цьому відомі величини: h_{ij} — вміст (у відсотках) j-го хімічного елементу в i-му початковому шихтовом матеріалі; c_i — ціна одиниці кожного i-го шихтового матеріалу. Визначити склад шихти, що забезпечує отримання литва заданої якості при мінімальній загальній вартості використовуваних шихтових матеріалів.

3. *Задача про оптимальний план перевезень*

Цю задачу часто називають транспортною. У простішому варіанті транспортна задача виникає при необхідності найбільш раціонального перевезення деякого однорідного вантажу. При цьому споживачам байдуже, з яких пунктів він надходить, важливо, щоб був задоволений попит, а кожен постачальник має можливість постачати вантаж будь-якому споживачу. Зворотні перевезення не передбачаються.

Приклад 5. У трьох пунктах відправлення зосереджений однорідний вантаж у кількостях, відповідно рівних 420, 380 і 400 т. Цей вантаж необхідно перевезти в три пункти призначення в кількостях, відповідно рівних 260, 520 і 420 т. Вартості перевезень 1 т вантажу з кожного пункту відправлення в кожен пункт призначення є відомими величинами і задаються матрицею

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знайти план перевезень, що забезпечує вивіз наявного в пунктах відправлення і завезення необхідного в пункти призначення вантажу при мінімальній загальній вартості перевезень.

4. *Задача про оптимальне розміщення виробництва*

Це одна з важливих модифікацій транспортної задачі.

Приклад 6. У m пунктах можуть бути розміщені підприємства, що виробляють деяку однорідну продукцію. Ця продукція надходить у n пунктів її споживання, причому в j-му пункті потреби в продукції рівні a_j одиницям. Витрати, пов'язані з доставкою одиниці продукції з i-го пункту відправлення в j-й пункт споживання, складають c_{ij} грн. Відомо, що в i-му пункті виготовлення продукції максимальний об'єм її виробництва не може перевищувати b_i одиниць, а витрати, пов'язані з виготовленням одиниці продукції, складають d_i грн. Визначити таке розміщення підприємств, при якому забезпечуються потреби в продукції у кожному з пунктів її споживання при якнайменших загальних затратах, пов'язаних із виробництвом і доставкою продукції.

5. *Задача про раціональний розкрій матеріалів*

Модель цієї задачі має важливе значення для економії матеріалів та сировини.

Приклад 7. На швейній фабриці тканина може бути розрізана кількома способами для виготовлення потрібних деталей швейних виробів. Нехай при j-му варіанті розкрою $(j = \overline{1,n})$ 100 м^2 тканини виготовляється b_{ij} деталей i-го виду $(i = \overline{1,m})$, а розміри відходів при даному варіанті розкрою дорівнюють c_j м^2. Знаючи, що деталей i-го виду потрібно виготовляти B_i штук, потрібно розкроїти тканину так, щоб було одержано необхідну кількість деталей кожного виду при мінімальних загальних відходах. Скласти математичну модель задачі.

6. *Задача динаміки виробництва і створення запасів*

Ця задача полягає в оптимальному розподілі деякої продукції та її запасів. В умовах діючого підприємства всяка зміна об'єму випуску продукції пов'язана з додатковими витратами. Зберігання готової продукції також вимагає певних витрат. У випадках, коли попит на готову продукцію в окремі відрізки часу не постійний, виникає потреба пошуку такого компромісного плану випуску, при якому сумарні затрати на розширення і згортання виробництва, а також на зберігання залишків продукції були б мінімальними за умови своєчасного і повного задоволення потреб.

7. *Стохастична задача комплектування станочного парку*

Приклад 8. На авторемонтний завод протягом деякого відрізку часу надходять замовлення на виконання ремонтних робіт. Наперед невідомі час надходження замовлень і їх кількість. Однак зрозуміло, що якщо верстатів для виконання різноманітних замовлень недостатньо, то це призведе до затримки у здійсненні ремонту, а замовники звернуться за послугами до інших, більш укомплектованих підприємств, і даний завод зазнає збитків у зв’язку з недоотриманням прибутку.

З другого боку, якщо набір різних верстатів занадто розширити, то більшу частину часу вони будуть простоювати, а завод, витративши гроші на їх закупівлю, змушений буде і далі терпіти збитки у зв’язку з утримуванням надлишкової кількості оснащення.

У даному випадку прибуток, що отримує завод, є випадковою величиною, а тому говорити про його максимізацію немає сенсу. Тому на практиці як цільова функція вибирається або математичне сподівання прибутку, обчислене на основі відомих ймовірностей надходження замовлень (цей випадок зводиться до звичайної задачі оптимізації), або ймовірності того, що розмір доходу буде не меншим заданої величини (тут потрібні спеціальні методи досліджень).

2.Загальна і основна задачі оптимізації

У попередньому розділі були розглянуті приклади задач оптимізації. У всіх цих задачах потрібно знайти максимум або мінімум лінійної функції за умови, що її змінні набували невід'ємних значень і задовольняли деяку систему лінійних рівнянь або лінійних нерівностей або систему, що містить як лінійні нерівності, так і лінійні рівняння. Кожна з цих задач є окремим випадком загальної задачі оптимізації.

*Загальною задачею оптимізації*називається задача, яка полягає у визначенні максимального (мінімального) значення функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \;\; (i = \overline{1,k}), \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \;\; (i = \overline{k+1,m}), \quad (3)$$

$$x_i \ge 0 \;\; (j = \overline{1,l}, \quad l \le n), \quad (4)$$

де a_{ij}, b_i, c_j — заданіпостійні величини і $k \le m$.

Функція (1) називається *цільовою функцією* (або *лінійною формою)* задачі (1) – (4), а умови (2) – (4) — обмеженнями даної задачі.

Стандартною (або *симетричною) задачею* оптимізації називається задача, яка полягає у визначенні максимального значення функції (1) при виконанні умов (2) і (4), де $k = m$ і $l = n$.

Канонічною (або *основною) задачею* оптимізації називається задача, яка полягає у визначенні максимального значення функції (1) при виконанні умов (3) і (4), де $k = 0$ і $l = n$.

Сукупність чисел $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$,що задовольняють обмеженням задачі (2) – (4), називається *допустимим розв'язком* (або *планом).*

План $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, при якому цільова функція задачі (1) набуває свого максимального (мінімального) значення, називається *оптимальним.*

Значення цільової функції (1) при плані X будемо позначати через $F(X)$. Отже, X^* — *оптимальний* план задачі, якщо для будь-якого X виконується нерівність $F(X) \le F(X^*)$ [відповідно $F(X) \ge F(X^*)$].

Вказані вище три форми задачі оптимізації еквівалентні в тому значенні, що кожна з них за допомогою нескладних перетворень може бути переписана у формі іншої задачі. Це означає, що якщо є спосіб знаходження розв'язку однієї з вказаних задач, то тим самим може бути визначений оптимальний план будь-якої з трьох задач.

Щоб перейти від однієї форми запису задачі оптимізації до іншої, потрібно в загальному випадку вміти, по-перше, зводити задачу мінімізації функції до задачі максимізації, по-друге, переходити від обмежень-нерівностей до обмежень-рівності і навпаки, по-третє, замінювати змінні, які не підлягають умові невід'ємності.

У тому випадку, коли вимагається знайти мінімум функції $F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, можна перейти до знаходження максимуму функції $F_1 = -F = -c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n$, оскільки $\min F = -\max(-F)$.

Обмеження-нерівність початкової задачі оптимізації, що має вигляд «≤»,можна перетворити в обмеження-рівність додаванням до його лівої частини додаткової невід'ємної змінної, а обмеження-нерівність виду «≥» — в обмеження-рівність відніманням із його лівої частини додаткової невід'ємної змінної. Таким чином, обмеження-нерівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i$$

перетвориться в обмеження-рівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i \ (x_{n+1} \ge 0), \tag{5}$$

а обмеження-нерівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \ge b_i$$

— в обмеження-рівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i \ (x_{n+1} \ge 0). \tag{6}$$

У той же час кожне рівняння системи обмежень

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$$

можна записати у вигляді нерівностей:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i, \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - ... - a_{in}x_n \le -b_i. \end{cases} \tag{7}$$

Число додаткових невід'ємних змінних, що вводяться, при перетворенні обмежень-нерівностей в обмеження-рівність дорівнює числу перетворюваних нерівностей.

Додаткові змінні, що вводяться, мають цілком певний економічний зміст. Так, якщо в обмеженнях початкової задачі оптимізації відображається витрата і наявність виробничих ресурсів, то числове значення додаткової змінної в плані задачі, записаної у формі основної, дорівнює об'єму невживаного відповідного ресурсу.

Відзначимо, нарешті, що якщо змінна x_k непідлягає умові невід'ємності, то її слід замінити двома невід'ємними змінними u_k і v_k ,прийнявши $x_k = u_k - v_k$.

Приклад. Записати у формі основної задачі оптимізації наступну задачу: знайти максимум функції $F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \le 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \le 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \le 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \ge 8, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0 .$$

Розв'язання. У даній задачі вимагається знайти максимум функції, а система обмежень містить чотири нерівності. Отже, щоб записати її у формі основної задачі, потрібно перейти від обмежень-нерівностей до обмежень-рівності. Оскільки число нерівностей, що входять у систему обмежень задачі, дорівнює чотирьом, то цей перехід може бути здійснений введенням чотирьох додаткових невід'ємних змінних. При цьому до лівих частин кожної з нерівностей типу «≤» відповідна додаткова змінна додається, а від лівих частин кожної з нерівностей типу «≥» віднімається. У результаті обмеження набувають виду рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, ..., x_9 \geq 0\,.$$

Отже, дана задача може бути записана у формі основної задачі таким чином: максимізувати функцію $F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, ..., x_9 \geq 0\,.$$

Приклад. Записати задачу, що полягає в мінімізації функції $F = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

у формі основної задачі оптимізації.

Розв'язання. У даній задачі вимагається знайти мінімум цільової функції, а система обмежень містить три нерівності. Отже, щоб записати її у формі основної задачі, замість знаходження мінімуму функції F потрібно знайти максимум функції $F_1 = -F$ при обмеженнях, що виходять з обмежень початкової задачі, додаванням до лівих частин кожного від обмежень-нерівностей типу «$\leq$» додаткової невід'ємної змінної і відніманням додаткових змінних відлівих частин кожного з обмежень-нерівностей типу «$\geq$».

Отже, початкова задача може бути записана у формі основної задачі оптимізації так: знайти максимум функції $F_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 = 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, ..., x_7 \geq 0\,.$$

3.Геометричний метод розв'язування задач оптимізації

Розглянемо основну задачу оптимізації. Вона полягає у визначенні максимального значення функції $F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ за умов $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \ (i=1,m)$, $x_j \ge 0 \ (j=1,n)$.

Перепишемо цю задачу у векторній формі: знайти максимум функції

$$F = CX \tag{1}$$

за умов

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_n P_n = P_0, \tag{2}$$

$$X \ge 0, \tag{3}$$

де $C=(c_1;c_2;\ldots;c_n)$, $X=(x_1;x_2;\ldots;x_n)$; CX – скалярний добуток; $P_1,...,P_n$, і P_0 –m-вимірні вектор-стовпці, складені з коефіцієнтів при невідомих і вільних членах системи рівнянь задачі:

$$P_0=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad P_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \ P_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \ \ldots; \ P_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

План $X=(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ називається *опорним планом* основної задачі оптимізації, якщо система векторів P_j, що входять у розклад (2) з додатними коефіцієнтами x_j, лінійно незалежна.

Оскільки вектори P_j є m-вимірними, то з визначення опорного плану випливає, що число його позитивних компонент не може бути більше, ніж m.

Опорний план називається *невиродженим,* якщо він містить рівно m позитивних компонент, у протилежному випадку він називається *виродженим.*

Властивості основної задачі лінійного програмування (1) – (3) тісно пов'язані з властивостями опуклих множин.

Нехай X_1, X_2, …, X_n – довільні точки евклідового простору E_n. *Опуклою лінійною комбінацією* цих *точок* називається сума $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n$, де α_i — довільні невід'ємні числа, сума яких дорівнює 1:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \quad \alpha \ge 0 \ (i=\overline{1,n}).$$

Множина називається *опуклою,* якщо разом із будь-якими двома своїми точками вона містить і їх довільну опуклу лінійну комбінацію.

Точка X опуклої множини називається *кутовою,* якщо вона не може бути представлена у вигляді опуклої лінійної комбінації яких-небудь двох інших різних точок даної множини.

Теорема 1. Множина планів основної задачі оптимізації є опуклою (якщо вона не порожня).

Непорожня множина планів основної задачі оптимізації називається *багатогранником розв'язків,* а всяка кутова точка багатогранника розв'язків — *вершиною.*

Теорема 2. Якщо основна задача оптимізації має оптимальний план, то максимального значення цільова функція задачі набуває в одній з вершин багатогранника розв'язків. Якщо максимального значення цільова функція задачі набуває більш ніж в одній вершині, то вона набуває його у будь-якій точці, що є опуклою лінійною комбінацією цих вершин.

Теорема 3. Якщо система векторів $P_1, P_2, \ldots, P_k$ $(k \le n)$ в розкладі (2) лінійно незалежна і така, що

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_k P_k = P_0, \tag{4}$$

де всі $x_j \ge 0$, то точка $X = (x_1; x_2; \ldots; x_k, 0, \ldots; 0)$ є вершиною багатогранника розв'язків.

Теорема 4. Якщо $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ — вершина багатогранника розв'язків, то вектори P_j, що відповідають додатним x_j в розкладі (2), лінійно незалежні.

Сформульовані теореми дозволяють зробити такі висновки.

Непорожня множина планів основної задачі оптимізації утворює опуклий багатогранник. Кожна вершина цього багатогранника визначає опорний план. В одній із вершин багатогранника розв'язків (тобто для одного з опорних планів) значення цільової функції є максимальним (за умови, що функція обмежена зверху на множині планів). Якщо максимального значення функція набуває більш ніж в одній вершині, то цього ж значення вона набуває в будь-якій точці, яка є опуклою лінійною комбінацією даних вершин.

Вершину багатогранника розв'язків, у якій цільова функція набуває максимального значення, знайти порівняно просто, якщо задача, записана у формі стандартної, містить не більше двох змінних, або якщо задача, записана у формі основної, містить не більше двох вільних змінних.

Знайдемо розв'язок задачі, що полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 \tag{5}$$

за умов

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i (i = \overline{1, \kappa}), \tag{6}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2). \tag{7}$$

Кожна з нерівностей (6), (7) системи обмежень задачі геометрично визначає напівплощину відповідно з граничними прямими $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i$ $(i = \overline{1, \kappa})$ $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$. У тому випадку, якщосистема нерівностей (6), (7) сумісна, областю її розв'язків є множина точок, що належать усім вказаним напівплощинам. Оскільки множина точок перетину даних напівплощин опукла, то областю допустимих розв'язків задачі (5) – (7) є опукла множина, яка називається багатокутником розв'язків (введений раніше термін „багатогранник розв'язків" звичайно використовується, якщо $n \ge 3$). Сторони цього багатокутника лежать на прямих, рівняння яких отримуються з початкової системи обмежень заміною знаків нерівностей на знаки точної рівності.

Таким чином, початкова задача оптимізації полягає в знаходженні такої точки багатокутника розв'язків, в якій цільова функція F набуває максимального значення. Ця точка існує тоді, коли багатокутник розв'язків не порожній і на ньому цільова функція обмежена зверху. За вказаних умов в одній із вершин багатокутника розв'язків цільова функція набуває максимального значення. Для визначення даної вершини побудуємо лінію рівня $c_1 x_1 + c_2 x_2 = h$ (де h — деяка стала), яка проходить через багатокутник розв'язків, і пересуватимемо її у напрямі вектора $\vec{C} = (c_1; c_2)$ доти, поки вона не пройде через останню її спільну точку з багатокутником розв'язків. Координати вказаної точки і визначають оптимальний план даної задачі.

Закінчуючи розгляд геометричної інтерпретації задачі (5) – (7), відзначимо, що при знаходженні її розв'язку можуть зустрітися випадки, зображені на рис. 1–4. Рис. 1 характеризує такий випадок, коли цільова функція набуває максимального значення в єдиній точці *A*. Із рис. 2 видно, що максимального значення цільова функція набуває в будь-якій точці відрізка *AB*. Нарис. 3 зображений випадок, коли цільова функція не обмежена зверху на множині допустимих розв'язків, а на рис. 4 —випадок, коли система обмежень задачі несумісна.

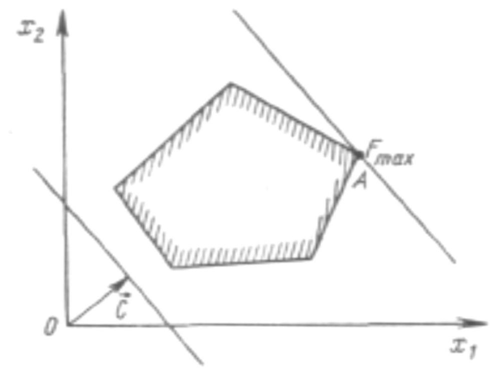

Рис.1

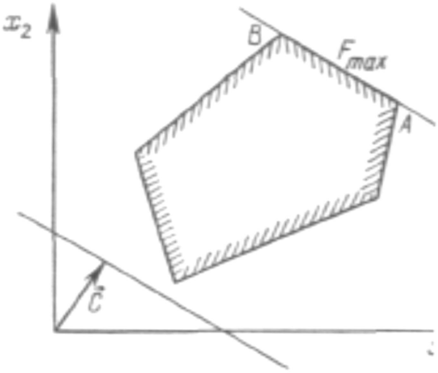

Рис.2

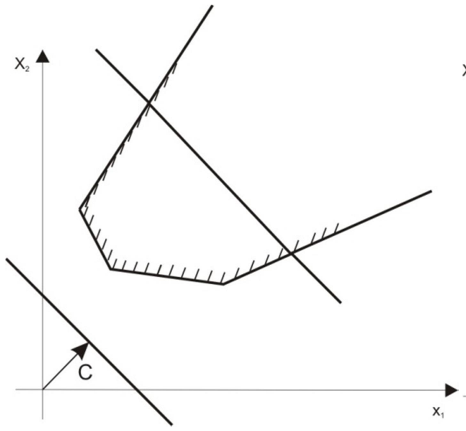

Рис. 3

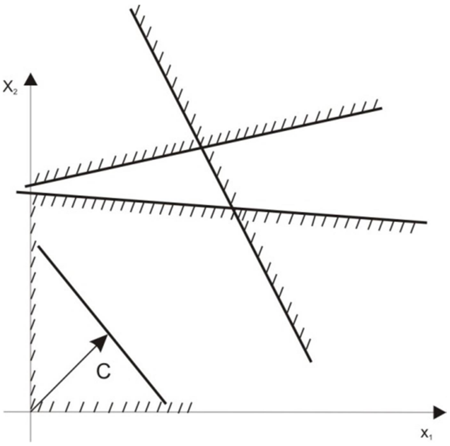

Рис. 4

Відзначимо, що знаходження мінімального значення лінійної функції при даній системі обмежень відрізняється від знаходження її максимального значення за тих же обмежень лише тим, що лінія рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ пересувається не у напрямі вектора $\vec{C} = (c_1; c_2)$, а в протилежному напрямі. Таким чином, відзначені вище випадки, що зустрічаються при знаходженні максимального значення цільової функції, мають місце і при визначенні її мінімального значення.

Отже, *знаходження розв'язку задачі оптимізації* (5) – (7) *на основі її геометричної інтерпретації включає наступні етапи*:

1. Будують прямі, рівняння яких отримуємо в результаті заміни в обмеженнях (6) і (7) знаків нерівностей на знаки точної рівності.
2. Знаходять напівплощини, що визначаються кожним з обмежень задачі.
3. Знаходять багатокутник розв'язків.
4. Будують вектор $\vec{C} = (c_1; c_2)$.
5. Будують пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, яка проходить через багатокутник розв'язків.

6. Рухають лінію рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ у напрямі вектора $\vec{C}$. Остання спільна точка (точки) лінії рівня і багатокутника розв'язків і є точкою, в якій цільова функція набуває максимального значення. Або встановлюють необмеженість зверху функції на множині планів.

7. Визначають координати точки максимуму функції і обчислюють значення цільової функції в цій точці.

Приклад. Для виробництва двох видів виробів A і B підприємство використовує три види сировини. Норми витрат сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції даного виду наведені в таблиці 3. У ній же вказаний прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальна кількість сировини даного виду, яка може бути використана підприємством.

Таблиця 3

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на один виріб		Загальна кількість сировини (кг)
	A	B	
I II III	12 4 3	4 4 12	300 120 252
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	30	40	

Враховуючи, що вироби A і B можуть виготовлятися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), вимагається встановити такий план їх випуску, при якому прибуток підприємства від реалізації всіх виробів буде максимальним.

Розв'язання. Припустимо, що підприємство виготовить x_1 виробів виду A і x_2 виробів виду B. Оскільки виробництво продукції обмежене кількістю сировини кожного виду і кількість виробів, що виготовляється, не може бути від'ємною, то повинні виконуватися нерівності:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Загальний прибуток від реалізації x_1 виробів виду A і x_2 виробів виду B складе $F = 30x_1 + 40x_2$.

Таким чином, ми приходимо до наступної математичної задачі: серед усіх невід'ємних розв'язків даної системи лінійних нерівностей вимагається знайти такий, при якому функція F набуває максимального значення.

Знайдемо розв'язок сформульованої задачі, використовуючи її геометричну інтерпретацію. Спочатку визначимо багатокутник розв'язків. Для цього в нерівностях системи обмежень і в умовах невід'ємності змінних знаки нерівностей замінимо на знаки точної рівності і побудуємо відповідні прямі:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300, & (I) \\ 4x_1 + 4x_2 = 120, & (II) \\ 3x_1 + 12x_2 = 252, & (III) \\ x_1 = 0, & (IV) \\ x_2 = 0. & (V) \end{cases}$$

Ці прямі зображені на рис. 5. Кожна з побудованих прямих ділить площину на дві півплощини. Координати точок однієї півплощини задовольняють початковій нерівності, а іншої — ні. Щоб визначити шукану півплощину, потрібно взяти яку-небудь точку, що належить одній із півплощин, і перевірити, чи задовольняють її координати даній нерівності. Якщо координати взятої точки задовольняють даній нерівності, то шуканою є та напівплощина, якій належить ця точка, в протилежному випадку — інша півплощина.

Знайдемо, наприклад, півплощину, що визначається нерівністю $12x_1 + 4x_2 < 300$. Для цього, побудувавши пряму $12x_1 + 4x_2 = 300$ (на рис. 5 ця пряма *I*), візьмемо яку-небудь точку, що належить одній із двох отриманих півплощин, наприклад, точку $O = (0;0)$. Координати цієї точки задовольняють нерівність $12 \cdot 0 + 4 \cdot 0 < 300$. Отже, півплощина, якій належить точка $O = (0;0)$, визначається нерівністю $12x_1 + 4x_2 \le 300$. Це і показано стрілками на рис. 5.

Перетин отриманих півплощин і визначає багатокутник розв'язків даної задачі.

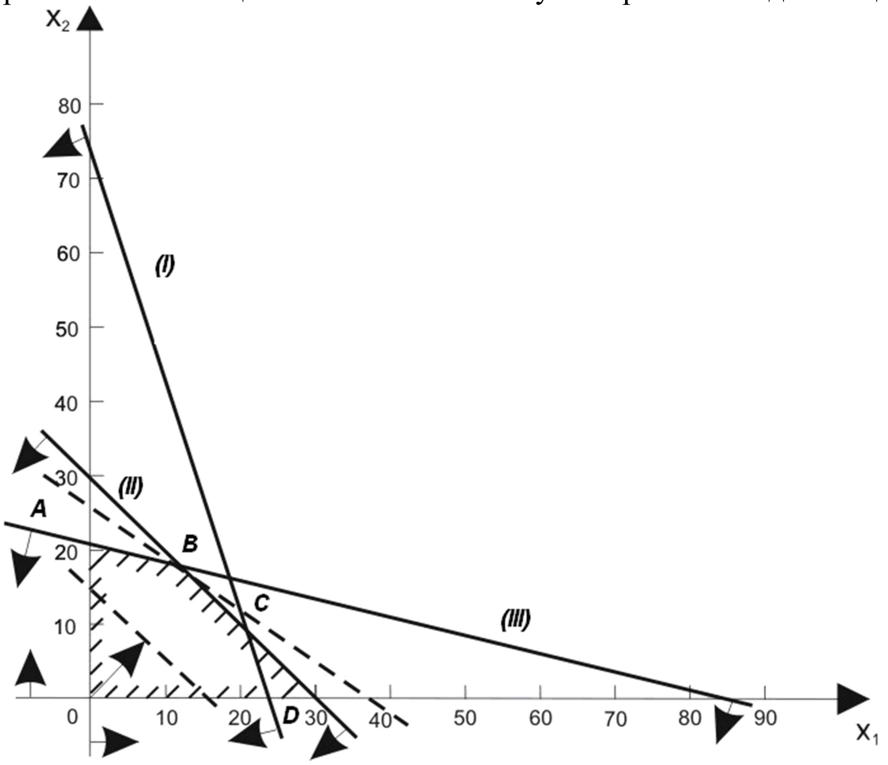

Рис. 5

Як видно з рис. 5, багатокутником розв'язків є п'ятикутник *OABCD*. Координати будь-якої точки, що належить цьому п'ятикутнику, задовольняють даній системі нерівностей і умові невід'ємності змінних. Тому сформульована задача буде розв'язана, якщо ми зможемо знайти точку, що належить п'ятикутнику $OABCD$, в якій функція F набуває максимального значення. Щоб знайти вказану точку, побудуємо вектор $\vec{C} = (30;40)$ і пряму $30 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = h$, де h – деяка стала така, що пряма $30 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = h$ має спільні точки з багатокутником розв'язків. Покладемо, наприклад, $h = 480$ і побудуємо пряму $30x_1 + 40x_2 = 480$ (рис. 5).

Якщо тепер взяти яку-небудь точку, що належить побудованій прямій і багатокутнику розв'язків, то її координати визначають такий план виробництва виробів A і B, при якому прибуток від їх реалізації дорівнює 480 грн. Далі, вважаючи h рівним деякому числу, більшому, ніж 480, ми одержуватимемо різні паралельні прямі. Якщо вони мають спільні точки з багатокутником розв'язків, то ці точки визначають плани виробництва виробів A і B, при яких прибуток від їх реалізації перевершить 480 грн.

Рухаючи побудовану пряму $30x_1 + 40x_2 = 480$ у напрямі вектора $\vec{C}$, бачимо, що останньою спільною точкою її з багатокутником розв'язків задачі слугує точка B. Координатицієї точки і визначають план випуску виробів A і B, при якому прибуток від їх реалізації є максимальним.

Знайдемо координати точки B як точки перетину прямих (II) і (III). Отже, її координати задовольняють рівнянням цих прямих

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 252. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо $x_1^* = 12,\ x_2^* = 18$. Отже, якщо підприємство виготовить 12 виробів виду A і 18 виробів виду B, то воно отримає максимальний прибуток, рівний $F_{\max} = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080$ (грн.).

Приклад. Знайти максимум і мінімум функції $F = x_1 + x_2$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Розв'язання. Побудуємо багатокутник розв'язків (рис. 6).

Як видно з рис. 6, багатокутником розв'язків є трикутник ABC. Координати точок цього трикутника задовольняють умові невід'ємності і нерівностям системи обмежень задачі. Отже, задача буде розв'язана, якщо серед точок трикутника ABC знайти такі, в яких функція $F = x_1 + x_2$ набуває максимального і мінімального значення. Для знаходження цієї точки побудуємо пряму $x_1 + x_2 = 4$ і вектор $\vec{C} = (1;1)$.

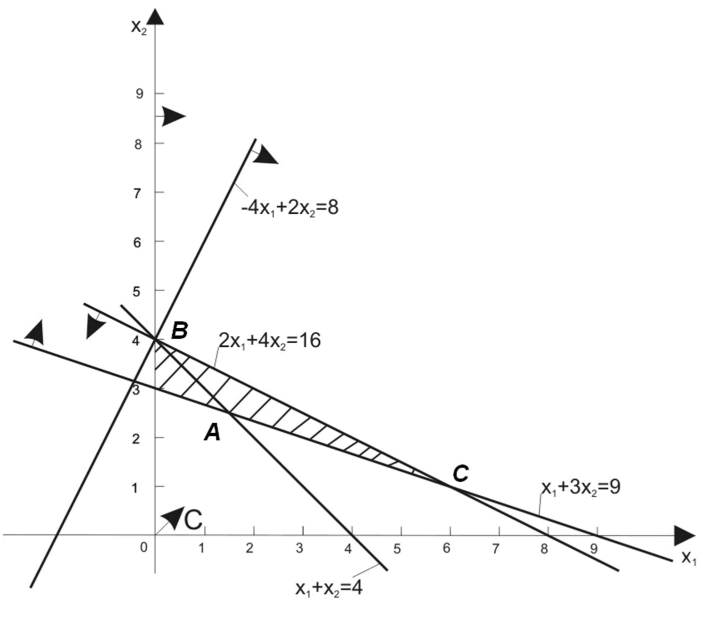

Рис. 6

Рухаючи дану пряму паралельно самій собі у напрямі вектора $\vec{C}$, бачимо, що її останньою спільною точкою з багатокутником розв’язків задачі є точка C. Отже, в цій точці функція F матиме максимальне значення. Оскільки C — точка перетину прямих (І) і (ІІ), то її координати задовольняють рівнянням цих прямих:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, \\ x_1 + 3x_2 = 9. \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему рівнянь, отримаємо $x_1^* = 6,\ x_2^* = 1$. Таким чином, максимальне значення функції $F_{\max} = 7$.

Для знаходження мінімального значення цільової функції задачі рухаємо пряму $x_1 + x_2 = 4$ в напрямку, протилежному напряму вектора $\vec{C} = (1;1)$. Для визначення координат точки A розв’язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9, \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

звідки $x_1^* = 0,\ x_2^* = 3$. Підставляючи знайдені значення змінних у цільову функцію, отримаємо $F_{\min} = 3$.

Приклад. Знайти максимальне значення функції

$$F = -16x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 8, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Розв’язання. На відміну від розглянутих вище задач, у даній задачі обмеження задані у вигляді рівнянь. При цьому число невідомих дорівнює п’яти. Тому дану задачу потрібно звести до задачі, в якій число невідомих дорівнювало б двом. Для цього перейдемо від запису заданої задачі у формі основної до задачі, записаної у стандартній формі:

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 8, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,2}.$$

Із цільової функції початкової задачі змінні x_3, x_4, x_5 виключені за допомогою підстановки їх значень із відповідних рівнянь системи обмежень.

Побудуємо багатокутник розв’язків отриманої задачі (рис. 7).

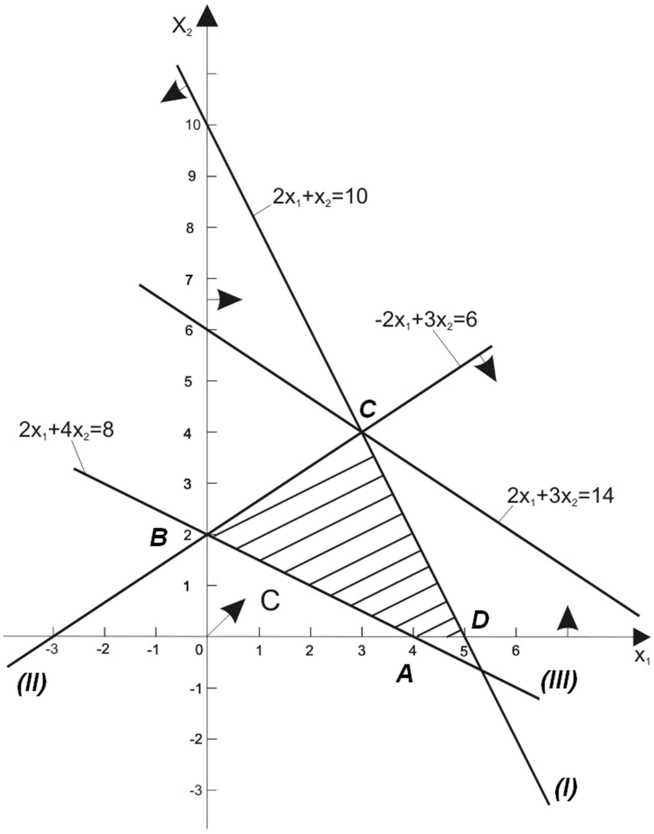

Рис. 7

Як видно з рис. 7, максимального значення цільова функція задачі набуває в точці *C* перетину прямих *I* і *II*. Тому в кожній із вершин отриманого багатокутника розв’язків останньої задачі принаймні дві змінні початкової задачі набувають нульових значень. Так, у точці *C* маємо $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Підставляючи ці значення в перше і друге рівняння системи обмежень початкової задачі, отримаємо $x_1^* = 3$, $x_2^* = 4$. Підставляючи знайдені значення x_1 і x_2 у третє рівняння системи обмежень початкової задачі, знайдемо $x_5 = 14$.

Отже, оптимальним планом заданої задачі буде $X^* = (3;\, 4;\, 0;\, 0;\, 14)$. При цьому плані $F_{\max} = 18$.

4. Симплекс-метод знаходження розв'язку задач оптимізації

Симплекс-метод розв'язання задачі оптимізації полягає у переході від одного опорного плану до іншого, при якому значення цільової функції зростає (за умов, що дана задача має оптимальний план і кожен її опорний план є невиродженим). Вказаний перехід можливий, якщо відомий який-небудь початковий опорний план. Розглянемо задачу, для якої цей план можна безпосередньо записати.

Нехай потрібно знайти максимальне значення функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \ ... + a_{1n}x_n \ = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + ... + a_{2n}x_n \ = b_2, \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + ... + a_{mn}x_n \ = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,n}).$$

Тут a_{ij}, b_i та c_j $(i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n})$ — задані сталі числа $(m < n \ \ і \ \ b_i > 0 \ )$.

Векторна форма даної задачі має такий вигляд: знайти максимум функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

за умов

$$x_1P_1 + x_2P_2 + ... + x_mP_m + ... + x_nP_n = P_0, \tag{2}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,n}), \tag{3}$$

де

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \cdots; \quad P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}; \quad P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \vdots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}; \ \cdots; \quad P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; \quad P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$b_1P_1 + b_2P_2 + ... + b_mP_m = P_0,$$

то за означенням опорного плану $X = (b_1; \ b_2; ... ; \ b_m; \ 0;...; \ 0)$ є опорним планом даної задачі (останні $n - m$ компонент вектора X дорівнюють нулю). Цей план визначається системою одиничних векторів $P_1, \ P_2,..., \ P_m$, які утворюють базис $m-$вимірного простору. Тому кожний із векторів $P_1, P_2 ,..., \ P_n$, а також вектор P_0 можуть бути представлені у вигляді лінійної комбінації векторів даного базису. Нехай

$$P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}P_i \ \ (j = \overline{0,n}).$$

Покладемо $z_j = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i x_{ij} \ \ (i = \overline{1,n}); \ \Delta_j = z_j - c_j \ \ (j = \overline{1,n})$. Оскільки вектори $P_1, \ P_2 ,..., \ P_m$ – одиничні, то $x_{ij} = a_{ij} \ \ і \ \ z_j = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$, а

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j.$$

Теорема 1. (*ознака оптимальності опорного плану*). Опорний план $X^* = (x^*{}_1; x^*{}_2; ... ; x^*{}_m; 0; 0;...; 0)$ задачі (1) – (3) є оптимальним, якщо $\Delta_j \geq 0$ для будь-якого $j\ (j = \overline{1,n})$.

Теорема 2. Якщо $\Delta_k < 0$ для деякого $j = k$ і серед чисел $a_{ik}\ (i = \overline{1,m})$ немає додатних $(a_{ik} \leq 0)$, то цільова функція (1) задачі (1) – (3) не обмежена на множині її планів.

Теорема 3. Якщо опорний план X задачі (1) – (3) невироджений і $\Delta_k < 0$, але серед чисел a_{ik} є додатні (не всі $a_{ik} \leq 0$), то існує опорний план X' такий, що $F(X') > F(X)$.

Сформульовані теореми дозволяють перевірити, чи є знайдений опорний план оптимальним, і виявити доцільність переходу до нового опорного плану.

Дослідження опорного плану на оптимальність, а також подальший обчислювальний процес зручніше вести, якщо умова задачі і початкові дані, одержані після визначення початкового опорного плану, записати так, як показано в таблиці 4.

У стовпці C_σ цієї таблиці записують коефіцієнти при невідомих у цільовій функції, які мають ті ж індекси, що і вектори даного базису.

У стовпці P_0 записують додатні компоненти початкового опорного плану, в ньому ж у результаті обчислень одержують додатні компоненти оптимального плану. Стовпці векторів P_j є коефіцієнтами розкладу цих векторів по векторах даного базису.

У табл. 4 перші m рядків визначаються початковими даними задачі, а показники $(m+1)$-го рядка обчислюють. У цьому рядку в стовпці вектора P_0 записують значення цільової функції, якого вона набуває при даному опорному плані, а в стовпці вектора P_j – значення $\Delta_j = z_j - c_j$.

Значення z_j знаходиться як скалярний добутку вектора $P_j\ (j = \overline{1,m})$ на вектор $C_\sigma = (c_1; c_2; ...; c_m)$:

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \quad (j = \overline{1,n}).$$

Значення F_0 дорівнює скалярному добутку вектора P_0 на вектор C_σ:

$$F_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i .$$

Таблиця 4

i	Базис	$C\sigma$	P_0	c_1	c_2	…	c_r	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
				P_1	P_2	…	P_r	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	P_r	c_r	b_r	0	0	…	1	…	0	a_{rm+1}	…	a_{rk}	…	a_{rn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	P_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}
$m+1$			F_0	0	0	⋯	0	⋯	0	Δ_{m+1}	⋯	Δ_k	⋯	Δ_n

Після заповнення табл. 4 початковий опорний план перевіряють на оптимальність. Для цього переглядають елементи $(m+1)$-го рядка таблиці. У результаті може мати місце один із наступних трьох випадків:

1) $\Delta_j \geq 0$ для $j = m+1, m+2, ..., n$ (при $j = 1,\ m,\ z_j = c_j$). Тому в даному випадку числа $\Delta_j \geq 0$ для всіх j від 1 до n. У цьому випадку на підставі ознаки оптимальності початковий опорний план є оптимальним.

2) $\Delta_j < 0$ для деякого j, і всі відповідні цьому індексу величини $a_{ij} \leq 0$ $(j = \overline{1,m})$. У цьому випадку цільова функція не обмежена зверху на множині планів.

3) $\Delta_j < 0$ для деяких індексів j, і для кожного такого j принаймні одне з чисел a_{ij} додатне. У цьому випадку можна перейти від початкового плану до нового опорного плану, при якому значення цільової функції збільшиться. Цей перехід від одного опорного плану до іншого здійснюється виключенням із початкового базису якого-небудь із векторів і введенням у нього нового вектора. Як вектор, що вводиться в базис, можна взяти будь-який із векторів P_j, що маєіндекс j, для якого $\Delta_j < 0$. Нехай, наприклад, $\Delta_k < 0$ і вирішено ввести в базис вектор P_k.

Для визначення вектора, що підлягає виключенню з базису, знаходять $\min\,(b_i / a_{ik})$ для всіх $a_{ik} > 0$. Нехай цей мінімум досягається при $i = r$. Тоді з базису виключають вектор P_r, а число a_{rk} називають *ключовим елементом.*

Стовпець і рядок, на перетині яких знаходиться ключовий елемент, називають *провідними.*

Після виділення провідного рядка і провідного стовпця знаходять новий опорний план і коефіцієнти розкладу векторів P_j, через вектори нового базису, що відповідають новому опорному плану. Це легко реалізувати, якщо скористатися методом Жордана-Гауса. При цьому можна показати, що додатні компоненти нового опорного плану обчислюються за формулами

$$b_i = \begin{cases} b_i - (b_r / a_{rk}) a_{ik} & \text{при } i \neq r, \\ b_r / a_{rk} & \text{при } i = r, \end{cases} \tag{4}$$

акоефіцієнти розкладу векторів P_j через вектори нового базису, відповідних новому опорному плану, – за формулами

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - (a_{rj} / a_{rk}) a_{ik} & \text{при } i \neq r, \\ a_{rj} / a_{rk} & \text{при } i = r. \end{cases} \tag{5}$$

Після обчислення b'_i та a'_{ij} за формулами (4) і (5) їх значення заносять до табл. 5. Елементи $(m+1)$-го рядка цієї таблиці можуть бути обчислені або за формулами

$$F'_0 = F_0 - (b_r / a_{rk}) \Delta_k, \tag{6}$$

$$\Delta'_j = \Delta_j - (a_{rj} / a_{rk}) \Delta_k, \tag{7}$$

або на підставі їх визначення.

Таблиця 5

i	Базис	$C\sigma$	P_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_r	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_k	$\cdots$	c_n
				P_1	P_2	$\cdots$	P_r	$\cdots$	P_m	P_{m+1}	$\cdots$	P_k	$\cdots$	P_n
1	P_1	c_1	$b_1^{'}$	1	0	$\cdots$	$a^{'}_{1r}$	$\cdots$	0	$a^{'}_{1m+1}$	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{1n}
2	P_2	c_2	$b_2^{'}$	0	1	$\ldots$	$a^{'}_{2r}$	$\ldots$	0	$a^{'}_{2m+1}$	$\ldots$	0	$\ldots$	$a^{'}_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	P_k	c_k	$b_r^{'}$	0	0	$\ldots$	$a^{'}_{rr}$	$\ldots$	0	$a^{'}_{rm+1}$	$\ldots$	1	$\ldots$	$a^{'}_{rn}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	P_m	c_m	$b_m^{'}$	0	0	$\ldots$	$a^{'}_{mr}$	$\ldots$	1	$a^{'}_{mm+1}$	$\ldots$	0	$\ldots$	$a^{'}_{mn}$
$m+1$			F_0	0	0	$\cdots$	$z^{'}_r - c_r$	$\cdots$	0	$z^{'}_{m+1} - c_{m+1}$	$\cdots$	Δ_k	$\cdots$	Δ_n

Наявність двох способів знаходження елементів $(m+1)$-го рядка дозволяє здійснювати контроль правильності обчислень, що проводяться.

З формули (6) випливає, що при переході від одного опорного плану до іншого найбільш доцільно ввести в базис вектор P_j, що має індекс j, при якому максимальним за абсолютною величиною є число $(b_r / a_{rj})\Delta_j$ $(\Delta_j < 0,\ a_{rj} > 0)$. Проте з метою спрощення обчислювального процесу надалі будемо вектор, що вводиться в базис, визначати, виходячи з максимальної абсолютної величини від'ємних чисел Δ_j. Якщо ж таких чисел декілька, то в базис вводитимемо вектор, що має такий же індекс, як і максимальне з чисел c_j, визначений даними числами Δ_j $(\Delta_j < 0)$.

Отже, перехід від одного опорного плану до іншого зводиться до переходу від однієї симплекс-таблиці до іншої. Елементи нової симплекс-таблиці можна обчислити як за допомогою рекурентних формул (4) – (7), так і за правилами, що безпосередньо з них випливають. Ці правила полягають в наступному.

У стовпцях векторів, що входять у базис, на перетині рядків і стовпців однойменних векторів проставляються одиниці, а всі решта елементів даних стовпців вважають рівними нулю.

Елементи векторів P_0 і P_j у рядку нової симплекс-таблиці, в якій записаний вектор, що вводиться в базис, отримують з елементів цього ж рядка початкової таблиці шляхом поділу їх на величину ключового елемента. У стовпці C_σ у рядку вектора, що вводиться в базис, ставлять величину c_k, де k — індекс вектора, що вводиться.

Решта елементів стовпців векторів P_0 і P_j нової симплекс-таблиці обчислюють за *правилом трикутника*:

Для обчислення якого-небудь із цих елементів знаходять три числа:

1) число, що стоїть у початковій симплекс-таблиці на місці шуканого елемента нової симплекс-таблиці;

2) число, що стоїть у початковій симплекс-таблиці на перетині рядка, в якому знаходиться шуканий елемент нової симплекс-таблиці, і стовпця відповідного вектора, що вводиться в базис;

3) число, що стоїть у новій симплекс-таблиці на перетині стовпця, в якому стоїть шуканий елемент, і рядка вектора, що вводиться в базис (як зазначено вище, цей рядок отримуємо з рядка початкової симплекс-таблиці шляхом поділу її елементів на ключовий елемент).

Ці три числа утворюють своєрідний трикутник, дві вершини якого відповідають числам, що знаходяться в початковій симплекс-таблиці, а третя — числу, що знаходиться в новій симплекс-таблиці. Для обчислення шуканого елемента нової симплекс-таблиці від першого числа віднімають добуток другого на третє.

Після заповнення нової симплекс-таблиці проглядають елементи $(m+1)$-го рядка. Якщо всі $z'_j - c_j \geq 0$, то новий опорний план є оптимальним. Якщо ж серед вказаних чисел є від'ємні, то, використовуючи описану вище послідовність дій, знаходять новий опорний план. Цей процес продовжують доти, доки або не одержують оптимальний план задачі, або не встановлюють її нерозв'язність.

При знаходженні розв'язку задачі оптимізації ми припускали, що ця задача має опорні плани і кожен такий план є невиродженим. Якщо ж задача має вироджені опорні плани, то на одній з ітерацій одна або декілька змінних опорного плану можуть виявитися рівними нулю. Таким чином, при переході від одного опорного плану до іншого значення функції може залишитися попереднім. Більше того, можливий випадок, коли функція зберігає своє значення протягом декількох ітерацій, а також можливе повернення до первинного базису. У останньому випадку звичайно говорять, що відбулося *зациклення.*

Отже, *знаходження оптимального плану симплекс-методом включає наступні етапи*:

1. Знаходять опорний план.
2. Складають симплекс-таблицю.
3. З'ясовують, чи є хоча б одне від'ємне число Δ_j. Якщо ні, то знайдений опорний план оптимальний. Якщо ж серед чисел Δ_j є від'ємні, то або встановлюють нерозв'язність задачі, або переходять до нового опорного плану.
4. Знаходять провідний стовпець і рядок. Провідний стовпець визначається найбільшим за абсолютною величиною від'ємним числом Δ_j, а провідний рядок – мінімальним співвідношенням компонент стовпця вектора P_0дододатних компонент провідного стовпця.
5. За формулами (4) – (7) визначають додатні компоненти нового опорного плану, коефіцієнти розкладу векторів P_j по векторах нового базису і числа F'_0, Δ'_j. Всі ці числа записуються в новій симплекс-таблиці.
6. Перевіряють знайдений опорний план на оптимальність. Якщо план не оптимальний і необхідно перейти до нового опорного плану, то повертаються до етапу 4, а у разі отримання оптимального плану або встановлення нерозв'язності процес розв'язання задачі закінчують.

Приклад 1. Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі *A*, *B* і *C* використовує три види основної сировини: цукровий пісок, патоку і фруктове пюре. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1 т. карамелі даного виду наведені в таблиці 6.

У ній же вказані загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана фабрикою, а також прибуток від реалізації 1 т карамелі даного виду.

Таблиця 6

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на 1 т карамелі			Загальна кількість сировини (т)
	A	B	C	
Цукровий пісок Патока Фруктове пюре	0,8 0,4 –	0,5 0,4 0,1	0,6 0,3 0,1	800 600 120
Прибуток від реалізації 1т продукції (грн.)	108	112	126	

Знайти план виробництва карамелі, який би забезпечив максимальний прибуток від її реалізації.

Розв'язання. Складемо математичну модель задачі. Позначимо через x_1 шуканий план виготовлення карамелі A, через x_2 – карамелі B і через x_3 – карамелі C. Оскільки фонд сировини для виготовлення цих трьох видів карамелі обмежений, то змінні x_1, x_2, x_3 повинні задовольняти систему нерівностей:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}6x_3 \le 800, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 \le 600, \\ \qquad\qquad 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 \le 120. \end{cases}$$

Загальна вартість виготовленої фабрикою карамелі за умов випуску x_1 т карамелі виду A, x_2 т – виду B і x_3 т виду C становить

$$F = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3.$$

За своїм економічним змістом x_1, x_2, x_3 можуть набувати тільки невід'ємних значень:

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Таким чином, отримали таку математичну задачу:

$$F = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}6x_3 = 800, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 = 600, \\ \qquad\qquad 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 = 120, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Зведемо цю задачу до канонічного вигляду. Для цього введемо три додаткові змінні x_4, x_5, x_6, у результаті чого обмеження запишуться у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}6x_3 + x_4 = 800, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 + x_5 = 600, \\ \qquad\qquad 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 + x_6 = 120. \end{cases}$$

Економічний зміст.

Ці додаткові змінні за економічним змістом означають невикористану за даним планом виробництва кількість сировини того чи іншого виду. Наприклад, x_4– це невикористана кількість тонн цукрового піску, x_5– патоки, x_6– фруктового пюре.

Запишемо нашу систему рівнянь у векторній формі:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

де

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}4 \\ 0{,}1 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}3 \\ 0{,}1 \end{pmatrix},\ P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_0 = \begin{pmatrix} 800 \\ 600 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

Оскільки серед векторів $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ є три одиничних вектора (P_4, P_5, P_6), то для даної задачі можна безпосередньо записати опорний план: $X = (0;\ 0;\ 0;\ 800;\ 600;\ 120)$

Складемо симплекс-таблицю (табл.7) для першої ітерації, обчислимо значення F_0 і Δ_j, перевіримо план на оптимальність:

$F_0 = (C_\sigma, P_0) = 0\cdot 800 + 0\cdot 600 + 0\cdot 120 = 0$;

$\Delta_1 = (C_\sigma, P_1) - c_1 = 0\cdot 0{,}8 + 0\cdot 0{,}4 + 0\cdot 0 - 108 = -108$;

$\Delta_2 = (C_\sigma, P_2) - c_2 = 0\cdot 0{,}5 + 0\cdot 0{,}4 + 0\cdot 0{,}1 - 112 = -112$;

$\Delta_3 = (C_\sigma, P_3) - c_3 = 0\cdot 0{,}6 + 0\cdot 0{,}3 + 0\cdot 0{,}1 - 126 = -126$.

Для базисних векторів $\Delta_j = 0$.

Таблиця 7

і	Б	C_σ	P_0	108	112	126	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	800	0,8	0,5	0,6	1	0	0
2	P_5	0	600	0,4	0,4	0,3	0	1	0
3	P_6	0	120	0	0,1	0,1	0	0	1
4			0	– 108	– 112	– 126	0	0	0

Як видно з таблиці 7, значення всіх основних змінних x_1, x_2, x_3 дорівнюють нулю, а додаткові змінні набувають своїх значень у відповідності з обмеженнями задачі. Ці значення змінних відповідають такому плану, при якому нічого не виготовляється, сировина не використовується і значення цільової функції дорівнює нулю. Цей план, звичайно, не є оптимальним.

Це видно із 4-го рядка нашої таблиці: $\Delta_1 = -108 < 0$, $\Delta_2 = -112 < 0$, $\Delta_3 = -126 < 0$. Від'ємні числа не тільки свідчать про можливість збільшення прибутку, але й показують, наскільки збільшиться ця сума при введенні в план одиниці того чи іншого виду продукції.

Економічний зміст.

Так, число (– 108) означає, що при включенні в план виробництва однієї тонни карамелі *A* забезпечується збільшення прибутку на 108 грн. Якщо включити в план виробництва по одній тонні карамелі *B* і *C*, то прибуток зросте відповідно на 112 і 126 грн. Тому з економічної точки зору найбільш доцільним є включення в план виробництва карамелі *C*.

Це ж необхідно зробити і на основі формальної ознаки симплексного методу, оскільки максимальне за абсолютною величиною від'ємне число Δ_j відповідає вектору P_3.

Визначимо вектор, який будемо виключати з базису. Для цього складаємо співвідношення.

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{i3}}\right\} \text{ для } a_{i3} > 0, \text{ тобто } \min\left\{\frac{800}{0,6}; \frac{600}{0,3}; \frac{120}{0,1}\right\} = \frac{120}{0,1} = 1200.$$

Оскільки мінімум досягається за третім рядком, то з базису виводиться вектор P_6. Стовпчик вектора P_3 та рядок вектора P_6 називаються *провідними*, а елемент 0,1, який знаходиться на їх перетині, називається *ключовим* елементом.

Економічний зміст.

Знайшовши число $\frac{120}{0,1}$, ми таким чином з економічної точки зору визначимо, скільки тонн карамелі *C* кондитерська фабрика може виготовити із врахуванням норм витрат і наявних об'ємів сировини кожного виду. Тому що сировини даного виду відповідно є 800, 600, 120 тонн, а на одну тонну карамелі *C* потрібно витратити сировини кожного виду відповідно 0,6; 0,3; 0,1 т, то максимальна кількість тонн карамелі *C*, яка може бути виготовлена підприємством, дорівнює $\min\left\{\frac{800}{0,6}; \frac{600}{0,3}; \frac{120}{0,1}\right\} = \frac{120}{0,1} = 1200$, тобто обмежуючим фактором для виробництва карамелі *C* є наявний об'єм фруктового пюре. З урахуванням його наявності фабрика може виготовити 1200 т карамелі *C*. При цьому фруктове пюре буде повністю використане.

Заповнюємо таблицю наступної ітерації (табл. 8):

Таблиця 8

i	Б	C_σ	P_0	108	112	126	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	80	0,8	– 0,1	0	1	0	– 6
2	P_5	0	240	0,4	0,1	0	0	1	– 3
3	P_3	126	1200	0	1	1	0	0	10
4			151200	– 108	14	0	0	0	1260

Спочатку заповнюємо рядок щойно введеного в базис вектора (третій рядок). Для цього кожен елемент третього рядка попередньої симплекс-таблиці ділимо на 0,1 (на ключовий елемент). Далі заповнюємо елементи стовпців для векторів, що входять у новий базис. У цих стовпцях на перетині однойменних векторів ставимо 1, а всі інші елементи покладаємо рівними 0.

Для обчислення інших елементів таблиці 8 використовуємо правило трикутника. Почнемо із P_0. Обчислюємо перший елемент стовпчика. Для цього знаходимо три числа:

1) число, що знаходиться у шуканій клітинці в попередній симплекс-таблиці (табл.7) (тобто, на перетині першого рядка і стовпчика P_0): 800;
2) число, що знаходиться у провідному стовпці навпроти першого числа (тобто, що знаходиться на перетині стовпчика вектора P_3 і першого рядка таблиці 7): 0,6;
3) число нової симплекс-таблиці, отримане шляхом поділу провідного рядка на ключовий елемент, що стоїть у стовпчику P_0 (тобто, на перетині стовпчика P_0 і третього рядка табл. 8): 1200.

Обчислюємо вираз $800 - 0,6 \cdot 1200 = 80$ і записуємо його в першому рядку стовпчика вектора P_0.

Знаходимо значення третього елемента стовпчика P_0. Для цього згідно з правилом трикутника перші два числа старої симплекс-таблиці (табл. 7) – це 600 і 0,3, третє число – 120 з нової таблиці (табл. 8). Отже, третім елементом стовпчика P_0 буде число $600 - 0{,}3 \cdot 1200 = 240$.

Обчислимо елементи стовпчика P_1. Для обчислення першого елемента маємо два числа таблиці 7 0,8 та 0,6 і третє число таблиці 8 0. Отже, $a'_{41} = 0{,}8 - 0{,}6 \cdot 0 = 0{,}8$. Аналогічно для третього елемента стовпчика P_1: $0{,}4 - 0{,}3 \cdot 0 = 0{,}4$.

Аналогічним чином заповнюються стовпчики P_2 і P_6.

Залишилося заповнити останній, четвертий рядок:

$$F_0 = (C_\sigma, P_0) = 0 \cdot 80 + 0 \cdot 240 + 126 \cdot 1200 = 151200;$$

$$\Delta_1 = (C_\sigma, P_1) - c_1 = 0 \cdot 0{,}8 + 0 \cdot 0{,}4 + 126 \cdot 0 - 108 = -108;$$

$$\Delta_2 = (C_\sigma, P_2) - c_2 = 0 \cdot (-0{,}1) + 0 \cdot 0{,}1 + 126 \cdot 1 - 112 = 14;$$

$$\Delta_6 = (C_\sigma, P_6) - c_6 = 0 \cdot (-6) + 0 \cdot (-3) + 126 \cdot 10 - 0 = 1260;$$

$$\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5 = 0.$$

Одержаний опорний план $X = (0;\, 0;\, 1200;\, 80;\, 240;\, 0)$ не є оптимальним, оскільки $\Delta_1 < 0$.

Економічний зміст.

При даному плані виготовлення карамелі виготовляється 1200 т карамелі C і залишаються невикористаними 80 т цукрового піску і 240 т патоки. Прибуток при цьому плані складає 151 200 грн. Розглянемо для прикладу дані стовпчика P_1. Число 0 у третьому рядку цього стовпчика показує, на скільки слід зменшити виготовлення карамелі C, якщо запланувати випуск одної тонни карамелі A. Числа 0,8 і 0,4 в 1-му і 2-му рядках вектора P_1 показують відповідно, скільки потрібно цукрового піску і патоки при включенні в план виробництва одної тонни карамелі A, а число (– 108) у четвертому рядку показує, що якщо буде заплановано випуск 1т карамелі A, то це забезпечить збільшення прибутку на 108 грн. Такий же зміст мають числа стовпчика P_2. Дещо інший економічний зміст мають числа, записані в стовпці P_6. Число 10 у 3-му рядку цього стовпця показує, що збільшення запасів фруктового пюре на 1 т дозволило б збільшити випуск карамелі C на 10 т. При цьому знадобилося б 6 т цукрового піску і 3 т патоки. Збільшення випуску карамелі C на 10 т приведе до збільшення прибутку на 1260 грн.

Із викладеного економічного змісту даних таблиці 8 випливає, що отриманий план не є оптимальним.

Оскільки єдине $\Delta_1 < 0$, то P_1 включаємо в базис. Для визначення провідного рядка шукаємо $\min\left\{\frac{80}{0{,}8}; \frac{240}{0{,}4}\right\} = \frac{80}{0{,}8} = 100$; а, отже, з базису виключаємо P_4. Число 0,8 буде ключовим елементом.

Будуємо нову симплекс-таблицю (табл. 9):

Таблиця 9

i	Б	C_σ	P_0	108	112	126	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	108	100	1	– 0,125	0	1,25	0	– 7,5
2	P_5	0	200	0	0,15	0	– 5	1	0
3	P_3	126	1200	0	1	1	0	0	10
4			162000	0	0,5	0	135	0	450

Спочатку ділимо всі елементи першого рядка таблиці 8 на 0,8 і результат записуємо в першому рядку таблиці 9. Далі заповнюємо елементи стовпчиків векторів базису і за правилом трикутника всі інші числа таблиці. Після цього підраховуємо елементи 4-го рядка нової симплекс-таблиці:

$F_0 = (C_\sigma, P_0) = 162000$; $\Delta_2 = (C_\sigma, P_2) - c_2 = 0{,}5$; $\Delta_4 = (C_\sigma, P_4) - c_4 = 135$;

$\Delta_6 = (C_\sigma, P_6) - c_6 = 450$; $\Delta_1 = \Delta_3 = \Delta_5 = 0$.

Оскільки всі $\Delta_j \geq 0\ (j = \overline{1,6})$, то план $X = (100;\, 0;\, 1200;\, 0;\, 200;\, 0)$ буде оптимальним і $F_{\max} = 162000$.

Економічний зміст.

Отже, оптимальний план виготовлення карамелі включає виготовлення 100 т карамелі A, 1200 т карамелі C. При даному плані повністю використовується цукровий пісок і фруктове пюре, але залишаються невикористаними 200 т патоки. Прибуток при такому плані складає 162000 грн.

Оптимальним планом виготовлення карамелі не передбачено випуск карамелі B. Введення у план виготовлення 1 т карамелі B призвело б до зменшення прибутку на 0,5 грн. (це видно з 4-го рядка стовпчика P_2).

Приклад 2. Знайти максимум функції

$$F = 2x_1 - 6x_2 + 5x_5$$

за умов

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24, \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0\ (j = \overline{1,6}).$$

Розв'язання. Систему рівнянь задачі запишемо у векторній формі:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

де

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix};\quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix};\quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\quad P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix};\quad P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\quad P_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix};$$

Оскільки серед векторів $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5,\ P_6$ є три одиничних вектори, то для даної задачі можна безпосередньо знайти опорний план. Таким є план $X = (0;\, 0;\, 20;\, 24;\, 0;\, 18;)$. Складаємо симплекс-таблицю (табл.10) і перевіряємо, чи є даний опорний план оптимальним.

Таблиця 10

Б	C_σ	P_0	2	-6	0	0	5	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_3	0	20	-2	1	1	0	1	0
P_4	0	24	-1	-2	0	1	3	0
P_6	0	18	3	-1	0	0	-12	1
		0	-2	6	0	0	-5	0

Як видно з таблиці 10, початковий опорний план не є оптимальним. Тому переходимо до нового опорного плану. Це можна зробити, оскільки в стовпцях векторів P_1 і P_5, четвертий рядок яких містить від'ємні числа, є додатні елементи. Для переходу до нового опорного плану введемо в базис вектор P_5 і виключимо з базису вектор P_4. Складаємо таблицю II ітерації (табл. 11).

Таблиця 11

Б	C_σ	P_0	2	-6	0	0	5	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_3	0	12	-5/3	5/3	1	-1/3	0	0
P_5	5	8	-1/3	-2/3	0	1/3	1	0
P_6	0	114	-1	-9	0	4	0	1
		40	-11/3	8/3	0	5/3	0	0

Як видно з таблиці 11, новий опорний план задачі не є оптимальним, оскільки в четвертому рядку стовпця вектора P_1 стоїть від'ємне число (-11/3). Оскільки в стовпці цього вектора немає додатних елементів, то дана задача не має оптимального плану.

5. Метод штучного базису

Як показано вище, для задачі, записаної у формі основної задачі оптимізації, можна безпосередньо вказати її опорний план, якщо серед векторів P_j,компонентами яких слугують коефіцієнти при невідомих у системі рівнянь даної задачі, є m одиничних. Проте для багатьох задач оптимізації, записаних у формі основної задачі, які мають опорні плани, серед векторів P_j не завжди є m одиничних. Розглянемо таку задачу:

Нехай потрібно знайти максимум функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{1}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \geq 0 \;\; (j = \overline{1,n}), \tag{3}$$

де $b_i \geq 0 \;\; (i = \overline{1,m})$, $m < n$ і серед векторів

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \qquad P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \quad \dots ; \qquad P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

немає m одиничних.

Задача, що полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n - Mx_{n+1} - ... - Mx_{n+m} \tag{4}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \tag{5}$$

$$x_j \geq 0 \;\; (j = \overline{1, n+m}), \tag{6}$$

де M — деяке достатньо велике додатне число, конкретне значення якого зазвичай не задається, називається *розширеною задачею* по відношенню до задачі (1) – (3).

Розширена задача має опорний план

$$X = (\underbrace{0;\; 0\; ;\; ...;\; 0}_{n\ нулів};\; b_1;\; b_2;\; ...;\; b_m),$$

визначається системою одиничних векторів $P_{n+1}, P_{n+2}, ..., P_{n+m}$, щоутворюють базис m-вимірного векторного простору, який називається *штучним.* Самі вектори, так само як і змінні $x_{n+i}(i = \overline{1,m})$, називаються *штучними.* Оскільки розширена задача має опорний план, то її розв'язок може бути знайдений симплексним методом.

Теорема.Якщо в оптимальному плані $X^* = (x_1^*; x_2^*; ...; x_n^*; x^*_{n+1}; x^*_{n+m})$ розширеної задачі (4) – (6) значення штучних змінних $x^*_{n+i} = 0 \ (i = \overline{1, m})$, то $X^* = (x_1^*; x_2^*; ...; x_n^*)$ є оптимальним планом задачі (1) – (3).

Таким чином, якщо в знайденому оптимальному плані розширеної задачі значення штучних змінних дорівнюють нулю, то тим самим одержано оптимальний план початкової задачі. Тому зупинимося детальніше на знаходженні розв’язку розширеної задачі.

При опорному плані $X = (0;\ 0;\ ...;\ 0;\ b_1;\ b_2;\ ...;\ b_m)$ розширеноїзадачі значення лінійної форми $F_0 = -M\sum_{i=1}^{m} b_i$, а значення $\Delta_j = z_j - c_j$ дорівнюють $-M\sum_{i=1}^{m} a_{ij} - c_j$. Таким чином, F_0 і різниці $z_j - c_j$складаються з двох незалежних частин, одна з яких залежить від M ,а інша – ні.

Після обчислення F_0 і Δ_j їхзначення, а також початкові дані розширеної задачі заносять у таблицю, яка містить на один рядок більше, ніж звична симплекс-таблиця. При цьому в $(m+2)$-й рядок записують коефіцієнти при M , а в $(m+1)$-й – доданки, що не містять M .

При переході від одного опорного плану до іншого в базис вводять вектор, що відповідає найбільшому за абсолютною величиною від’ємному числу $(m+2)$-го рядка. Штучний вектор, виключений із базису в результаті деякої ітерації, надалі не має сенсу вводити ні в один з подальших базисів і, отже, перетворення стовпців цього вектора зайве. Проте якщо потрібно знайти розв’язок двоїстої задачі для даної, то таке перетворення необхідне. Може трапитися так, що в результаті деякої ітерації жоден із штучних векторів із базису не буде виключений.

Перерахунок симплекс-таблиць при переході від одного опорного плану до іншого здійснюють за загальними правилами симплекс-методу.

Ітераційний процес по $(m+2)$-му рядку ведуть доти, поки:

1) всі штучні вектори не будуть виключені з базису;

2) не всі штучні вектори виключені, але $(m+2)$-й рядок не містить більше від’ємних елементів у стовпцях векторів $P_1, P_2, ..., P_{n+m}$.

У першому випадку базис відповідає деякому опорному плану початкової задачі і відшукання її оптимального плану продовжують за $(n+1)$-м рядком.

У другому випадку, якщо елемент, що стоїть в $(m+2)$-му рядку стовпця вектора P_0 від’ємний, початкова задача не має розв’язку; якщо ж він дорівнює нулю, то знайдений опорний план початкової задачі є виродженим і базис містить принаймні один із векторів штучного базису.

Якщо початкова задача містить декілька одиничних векторів, то їх слід включити в штучний базис.

Отже, *процес знаходження розв’язку задачі* (1) – (3) *методом штучного базису включає такі основні етапи*:

1) складають розширену задачу (4) – (6);

2) знаходять опорний план розширеної задачі;

3) за допомогою звичайних обчислень симплекс-методу виключають штучні вектори з базису. В результаті або знаходять опорний план початкової задачі (1) – (3), або встановлюють її нерозв'язність;

4) використовуючи знайдений опорний план задачі (1) – (3), або знаходять симплекс-методом оптимальний план початкової задачі, або встановлюють її нерозв'язність.

Приклад. Знайти мінімум функції

$$F = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \qquad \le 22, \\ x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 \qquad \ge 10, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

Розв'язання.Запишемо дану задачу у формі основної задачі:знайтимаксимум функції $F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 + x_4 \qquad = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \qquad + x_5 \qquad = 22, \\ x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 \qquad - x_6 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,6}).$$

У системі рівнянь останньої задачі розглянемо вектори зкоефіцієнтів при невідомих:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad P_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Серед векторів $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ тільки два одиничних $(P_4 \ i \ P_5)$. Тому в ліву частину третього рівняння системи обмежень задачі додамо додаткову невід'ємну змінну x_7 і розглянемо розширену задачу, що полягає у знаходженні максимуму функції

$$F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - Mx_7$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 + x_4 \qquad = 24, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 \quad + x_5 \qquad = 22, \\ x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 \qquad - x_6 + x_7 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,7}).$$

Розширена задача має опорний план $X = (0;\,0;\,0;\,24;\,22;\,0;\,10)$, визначений системою трьох одиничних векторів: P_4; P_5; P_7.

Складаємо таблицю І ітерації, що містить п'ять рядків (табл. 12).

Таблиця 12

i	Б	C_σ	P_0	2	-3	6	1	0	0	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_4	1	24	2	1	-2	1	0	0	0
2	P_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0
3	P_7	$-M$	10	1	-1	2	0	0	-1	1
4			24	0	4	-8	0	0	0	0
5			-10	-1	1	-2	0	0	1	0

Для заповнення 4-го і 5-го рядків знаходимо F_0 і значення $\Delta_j\,(j=\overline{1,7})$:

$$F_0 = 24-10M;\ \Delta_1 = 0-M;\ \Delta_2 = 4+M;\ \Delta_3 = -8-2M;\ \Delta_4 = 0;$$
$$\Delta_5 = 0;\ \Delta_6 = 0+M;\ \Delta_7 = 0.$$

Значення F_0 і Δ_j складаються з двох доданків, один з яких містить M, адругий – ні. Для зручності ітераційного процесу число, що стоїть при M, записуємо в 5-й рядок, а доданок, який не містить M ,–у 4-й рядок.

У 5-му рядку таблиці 12 в стовпцях векторів P_1 і P_3 є два від'ємних числа (-1 і -2). Наявність цих чисел свідчить про те, що даний опорний план розширеної задачі не є оптимальним. Переходимо до нового опорного плану розширеної задачі. У базис вводимо вектор P_3. Щоб визначити вектор, що виключається з базису, знаходимо $\min\left\{\frac{22}{4};\frac{10}{2}\right\}=\frac{10}{2}$. Отже, вектор P_7 виключаємо з базису. Цей вектор немає сенсу вводити ні в один із подальших базисів, тому надалі стовпець даного вектора не заповнюється.

Складаємо таблицю ІІ ітерації (табл. 13). Вона містить тільки чотири рядки, оскільки штучний вектор із базису виключений.

Таблиця 13

i	Базис	C_σ	P_0	2	-3	6	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	1	34	3	0	0	1	0	-1
2	P_5	0	2	-1	4	0	0	1	2
3	P_3	6	5	1/2	-1/2	1	0	0	1/2
4			64	4	0	0	0	0	-4

Отримуємо новий опорний план задачі $X=(0;\,0;\,5;\,34;\,2;\,0)$ цієї таблиці. Перевіримо його на оптимальність. Для цього розглянемо елементи 4-го рядка. У цьому рядку в стовпці вектора P_6 є від'ємне число (-4). Отже, даний опорний план не є оптимальним і може бути покращений шляхом введення в базис вектора P_6 .З базису виключається вектор P_5. Складаємо таблицю ІІІ ітерації (табл. 14).

Таблиця 14

i	Базис	C_σ	P_0	2	-3	6	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	1	35	5/2	2	0	1	1/2	0
2	P_6	0	1	-1/2	2	0	0	1/2	1
3	P_3	6	11/2	1/4	1/2	1	0	1/4	0
4			68	2	8	0	0	2	0

У 4-му рядку таблиці 14 серед чисел Δ_j немає невід'ємних. Це означає, що знайдений новий опорний план початкової задачі $X^* = (0; 0; 11/2; 35; 0; 1)$ є оптимальним. При цьому плані значення $F_{\max} = 68$.

Приклад. Знайти мінімум функції

$$F = 2x_1 - x_2 - x_4$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 \geq 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 36, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Розв'язання. Запишемо дану задачу у формі основної задачі оптимізації: знайти максимум функції

$$F = -2x_1 + x_2 + x_4$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 - x_5 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 - x_6 = 36, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,6}).$$

Оскільки серед векторів

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

є тільки один одиничний (P_3), то знаходимо розв'язок розширеної задачі, що полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = -2x_1 + x_2 + x_4 - Mx_7 - Mx_8$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 & = 10, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 - x_5 + x_7 & = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 - x_6 + x_8 & = 36, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,8}).$$

Розширена задача має опорний план $X = (0; 0; 10; 0; 0; 0; 18; 36)$, що визначається системою трьох одиничних векторів: P_3, P_7 і P_8.

Складаємо таблицю I ітерації (табл. 15).

Таблиця 15

i	Б	C_σ	P_0	-2	1	0	1	0	0	$-M$	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
1	P_3	0	10	-1	-2	1	0	0	0	0	0
2	P_7	$-M$	18	-2	-1	0	-2	-1	0	1	0
3	P_8	$-M$	36	3	2	0	1	0	-1	0	1
4			0	2	-1	0	-1	0	0	0	0
5			-54	-1	-1	0	1	1	1	0	0

У п'ятому рядку таблиці 15 у стовпцях векторів P_1 і P_2 є від'ємні числа. Тому переходимо до нового опорного плану розширеної задачі. У базис вводимо вектор P_2, а з базису виключаємо вектор P_8.

Складаємо таблицю II ітерації (табл. 16). Оскільки виключений із базису штучний вектор P_8 немає сенсу вводити ні в один з подальших базисів, то в таблиці цей вектор не вказується.

Таблиця 16

i	Б	C_σ	P_0	-2	1	0	1	0	0	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_3	0	46	4	0	1	1	0	-1	0
2	P_7	$-M$	36	-1/2	0	0	-3/2	-1	-1/2	1
3	P_2	1	18	3/2	1	0	1/2	0	-1/2	0
4			18	7/2	0	0	-1/2	0	-1/2	0
5			-36	1/2	0	0	3/2	1	1/2	0

У п'ятому рядку таблиці 16 у стовпчиках векторів P_1, P_2, ..., P_7 не міститься від'ємних елементів. У стовпці вектора P_0 цього рядка знаходиться від'ємний елемент (– 36).

Отже, вихідна задача не має опорного плану.

6. Поняття про вироджений розв'язок

При розгляді симплекс-методу припускалося, що $b_i > 0, \quad i = \overline{1,m}$ як у вихідній системі обмежень, так і в системах, які одержуються після чергових ітерацій. Якщо ж у деяких рівняннях вільні члени $b_i = 0$, то в опорному плані, який відповідає цій системі, базисні змінні, відносно яких ці рівняння розв'язані, набувають нульового значення. Опорний план, в якому хоча б одна з базисних змінних набуває нульового значення, називається *виродженим планом*, а задача оптимізації, яка має хоча б один вироджений план, – *виродженою задачею*. Застосовуючи в цьому випадку алгоритм симплекс-методу, ми можемо повернутися до такого набору базисних та вільних змінних, які зустрічалися раніше, тобто з'являється так зване зациклювання в схемі розрахунку. В цьому випадку доцільно користуватися правилом *усунення можливого зациклювання*, суть якого така.

Якщо на якомусь етапі виконання симплекс-методу виникає невизначеність у виборі направляючого рядка, тобто виявляється кілька рівних мінімальних відношень $\frac{b_i}{a_{ip}}$, то слід вибирати той рядок, для якого відношення елементів наступного стовпчика до направляючого виявиться найменшим. Якщо при цьому знову виявляються рівними мінімальні відношення, то складають відношення елементів наступного стовпчика, і так доти, поки направляючий рядок не визначиться однозначно.

Приклад. Розв'язати задачу оптимізації

$$f = 4x_5 + 2x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_5 + x_6 = 12, \\ x_2 + 5x_5 - x_6 = 30, \\ x_3 + x_5 - 2x_6 = 6, \\ 2x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 18, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,6}.$$

Розв'язання. Розділивши останнє рівняння на 2, складаємо таблицю симплекс-методу (табл. 17).

Таблиця 17

i	Б	C_σ	P_0	0	0	0	0	4	2
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	12	1	0	0	0	1	1
2	P_2	0	30	0	1	0	0	5	-1
3	P_3	0	6	0	0	1	0	1	-2
4	P_4	0	9	0	0	0	1	3/2	-1
5			0	0	0	0	0	-4	-2

Для вибору провідного рядка маємо співвідношення: $\min\left\{\frac{12}{1}; \frac{30}{5}; \frac{6}{1}; \frac{9}{3/2}\right\} = \min\{12; 6; 6; 6\}$.

Складаємо співвідношення елементів стовпця P_6 до елементів стовпця P_5: $\min\left\{\frac{1}{1}; \frac{-1}{5}; \frac{-2}{1}; \frac{-1}{3/2}\right\} = -2$.

Отже, виводимо вектор P_3 (табл. 18).

Таблиця 18

i	Б	C_σ	P_0	0	0	0	0	4	2
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	6	1	0	-1	0	0	3
2	P_2	0	0	0	1	-5	0	0	9
3	P_5	4	6	0	0	1	0	1	-2
4	P_4	0	0	0	0	-3/2	1	0	2
5			24	0	0	4	0	0	-10

Складаємо відношення: $\min\left\{\frac{6}{3}; \frac{0}{9}; \frac{0}{2}\right\}$.

Взявши за основу стовпчик P_3, маємо: $\min\left\{\frac{-1}{3}; \frac{-5}{9}; \frac{1}{-2}; \frac{-3/2}{2}\right\} = -\frac{3}{4}$.

Отже, виводимо вектор P_4 (табл. 19).

Таблиця 19

i	Б	C_σ	P_0	0	0	0	0	4	2
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	6	1	0	5/4	-3/2	0	0
2	P_2	0	0	0	1	7/4	-9/2	0	0
3	P_5	4	6	0	0	-1/2	1	1	0
4	P_6	2	0	0	0	-3/4	½	0	1
5			24	0	0	-7/2	5	0	0

$\min\left\{\frac{6}{5/4}; \frac{0}{7/4}\right\} = 0$. Отже, виводимо вектор P_2 (табл. 20).

Таблиця 20

i	Б	C_σ	P_0	0	0	0	0	4	2
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	6	1	-5/7	0	12/7	0	0
2	P_3	0	0	0	4/7	1	-18/7	0	0
3	P_5	4	6	0	2/7	0	-2/7	1	0
4	P_6	2	0	0	3/7	0	-10/7	0	1
5			24	0	2	0	-4	0	0

Таблиця 21

i	Б	C_σ	P_0	0	0	0	0	4	2
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	7/2	7/12	-5/12	0	1	0	0
2	P_3	0	9	3/2	-1/2	1	0	0	0
3	P_5	4	7	1/6	1/6	0	0	1	0
4	P_6	2	5	5/6	-1/6	0	0	0	1
5			38	7/3	1/3	0	0	0	0

Оптимальним планом задачі є вектор $X^* = \left(0; 0; 9; \frac{7}{2}; 7; 5\right)$, при якому $f_{\max} = 38$ (табл. 21).

У даній схемі розрахунків зациклювання не з'явилося, хоча протягом трьох ітерацій (таблиці 18, 19, 20) ми фактично „топталися на місці”, оскільки змінювалися тільки базисні та вільні змінні, а значення цільової функції залишалося тим самим, а саме $f = 24$. Оптимальний розв'язок було одержано завдяки тому, що на перших ітераціях застосувалося правило усунення можливого зациклювання, описане вище.

7. Модифікований симплекс-метод

При розв’язанні задач оптимізації симплексним методом здійснювався впорядкований перехід від одного опорного плану до іншого доти, поки або не була встановлена нерозв'язність задачі, або не було знайдено її оптимальний план. При цьому для визначення того, є знайдений опорний план оптимальним чи ні, на кожній з ітерацій потрібно було знаходити числа

$$\Delta_j = Z_j - c_j = c_{i_1} x_{i_1 j} + c_{i_2} x_{i_2 j} + ... + c_{i_m} x_{i_m j} - c_j ,$$

де $i_1, i_2, ..., i_m$ — номери базисних векторів, а $x_{i_1 j}, x_{i_2 j}, ..., x_{i_m j}$ — коефіцієнти розкладу векторів P_j по векторах даного базису. Всі зазначені коефіцієнти потрібно буловизначати на кожній з ітерацій обчислювального процесу. Ця необхідність відпадає при розв’язаннізадачоптимізації модифікованим симплекс-методом. У цьому випадку на кожній з ітерацій обчислюють вектор

$$\Omega = C_\sigma B^{-1} , \tag{1}$$

де B^{-1} — матриця, обернена матриці B, складеної з компонентів векторів даного базису, а потім знаходять числа Δ_j заформулою:

$$\Delta_j = \Omega P_j - c_j . \tag{2}$$

Визначимо компоненти вектора Ω і чисел Δ_j у випадку розв’язання основної задачіоптимізації модифікованим симплекс-методом.

Отже, нехай дана задачаоптимізації записана у формі основної задачі, і нехай для неї знайдений опорний план, який визначається базисом, утвореним із векторів $P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_m}$. Відповідно, відома матриця B,для якої можна знайти обернену матрицю B^{-1}.Наступні обчислення зручніше вести, якщо їхні результати, як і при розв’язаннізадачі симплекс-методом, оформляти у вигляді таблиць. У цьому випадку при переході від однієї так званої основної таблиці до іншої використовується допоміжна таблиця.

Допоміжна таблиця (табл. 22) відрізняється від звичайної симплекс-таблиці тим, що в ній знаходяться додаткові стовпці і рядки, у яких відповідно записують координати векторів $\Omega^{(i)}$ і значення $\Delta_j^{(1)}$, отримані в процесі знаходженнярозв’язку задачі.

Таблиця 22

i	*Б*	*Сб*	*Po*	c_1	c_2	...	c_n	$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(2)}$	...	$\Omega^{(k)}$
				P1	*P2*	...	*Pn*				
1	P_{i_1}	c_{i_1}	$X_{i_1 0}$	$X_{i_1 1}$	$X_{i_1 2}$	...	$X_{i_1 n}$	$\lambda_1^{(1)}$	$\lambda_1^{(2)}$	...	$\lambda_1^{(k)}$
2	P_{i_2}	c_{i_2}	$X_{i_2 0}$	$X_{i_2 1}$	$X_{i_2 2}$	...	$X_{i_2 n}$	$\lambda_2^{(1)}$	$\lambda_2^{(2)}$	...	$\lambda_2^{(k)}$
…	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	P_{i_m}	c_{i_m}	$X_{i_m 0}$	$X_{i_m 1}$	$X_{i_m 2}$	...	$X_{i_m n}$	$\lambda_m^{(1)}$	$\lambda_m^{(2)}$	...	$\lambda_m^{(k)}$
$m+1$	$\Delta_j^{(1)}$			$\Delta_1^{(1)}$	$\Delta_2^{(1)}$	…	$\Delta_n^{(1)}$				
$m+2$	$\Delta_j^{(2)}$			$\Delta_1^{(2)}$	$\Delta_2^{(2)}$	…	$\Delta_n^{(2)}$				
...	…			…	…	…	…				
$m+k$	$\Delta_j^{(k)}$			$\Delta_1^{(k)}$	$\Delta_2^{(k)}$	…	$\Delta_n^{(k)}$				

Таблиця 23

i	$Б$	$C_б$	P_o	A_1	A_2	...	A_m	P_s
1	P_{i_1}	$c_{i_1 0}$	$X_{i_1 0}$	a_{11}	a_{11}	...	a_{1m}	$X_{i_1 s}$
2	P_{i_2}	$c_{i_2 0}$	$X_{i_2 0}$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}	$X_{i_2 s}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
r	P_{i_r}	$c_{i_2 0}$	$X_{i_2 0}$	a_{r1}	a_{r2}	...	X_{rm}	$X_{i_r s}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	P_{i_m}	$c_{i_m o}$	$X_{i_m 0}$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mm}	$X_{i_m s}$
$m+1$	$\Omega^{(1)} F_0$			$\lambda_1^{(1)}$	$\lambda_2^{(1)}$	...	$\lambda_m^{(1)}$	$\Delta_s^{(i)}$

Основна таблиця (табл. 23) відрізняється від звичайної симплекс-таблиці, по-перше, тим що замість стовпців векторів P_j з відповідними числами c_j записують стовпці векторів A_i,координатами яких є відповідні стовпці матриці B^{-1}; по-друге, в $m+1$-мурядку записують компоненти векторів Ω, а не числа Δ_j; по-третє, табл. 23 має один додатковий стовпець, у першихт рядках якого записують координати вектора P_s у базисі $\mathrm{P}_{i_1}, \mathrm{P}_{i_2}, ..., \mathrm{P}_{i_m}$ іякий було б доцільно включити в базис у наступній ітерації.

Щоб визначити вектор P_s, спочатку знаходять вектор $\Omega^{(1)}$. Його компоненти визначають як скалярний добуток вектора C_σ на відповідні вектори A_i, тобто за формулою $\Omega = C_\sigma \mathrm{B}^{-1}$. Знайдені компоненти вектора $\Omega^{(1)}$ записують в останньому рядку табл. 23, і у стовпці $\Omega^{(1)}$ табл. 22. Після цього за формулою (2) знаходять елементи $(m+1)$-го рядка допоміжної таблиці. Якщо серед знайдених чисел $(m+1)$-горядка допоміжної таблиці немає від'ємних значень, то вихідний опорний план є оптимальним. Якщо ж є від'ємні, то абозадача не має розв'язку, або можна перейти до нового опорного плану, при якому значення цільової функції не зменшиться. Для з'ясування цього вибирають серед від'ємних чисел $(m+1)$-горядка табл. 22 найбільше за модулем значення. У тому випадку, коли таких чисел є декілька, вибирають будь-яке. Нехай цим числом буде $\Delta_s^{(1)}$. Тоді останній стовпець табл. 23 відводять для вектора P_s. У першихт рядках цього стовпця записують компоненти вектора P_s, а в базис $\mathrm{P}_{i_1}, \mathrm{P}_{i_2}, ..., \mathrm{P}_{i_m}$. Їх отримуємо шляхом множення матриці B^{-1}, записаної в табл. 23, на вектор P_s, компоненти якого вказані в табл. 22. Після визначення чисел $x_{i_1 s}, x_{i_2 s}, ..., x_{i_m s}$ з'ясовують, є серед них додатні чи ні. Якщо таких чисел немає, то задача немає розв'язку. Якщо ж додатні числа є, то переходять до наступного опорного плану задачі. Для цього знаходять $\min\limits_{x_{i_k s}>0}(x_{i_k 0} / x_{i_k s})$. Нехай $\min\limits_{x_{i_k s}>0}(x_{i_k 0} / x_{i_k s}) = \dfrac{x_{i_r 0}}{x_{i_r s}}$. Тоді новий опорний план визначається базисом, отриманим із вихідного опорного плану шляхом виключення з базису вектора P_{i_r} і введенням замість нього вектора P_s. Вважаючи елемент $x_{i_r s}$ ключовим, а r рядок і стовпець вектора P_s провідними, переходять до нової основної таблиці. Першіт рядків стовпців векторів $\mathrm{P}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_m$ нової таблиці знаходять за відомими правилами переходу від однієї симплекс-таблиці до іншої, розглянутими вище. Після того як ці елементи обчислені, знаходять вектор $\Omega^{(2)}$. Компоненти цього вектора записують як у новій основній таблиці, так і у допоміжній таблиці (табл. 22). Потім обчислюють числа $\Delta_j^{(2)}$ і перевіряють новий опорний план на оптимальність. Якщо план не оптимальний, то або встановлюють нерозв'язність вихідної задачі, або переходять до нового опорного плану. Продовжуючи ітераційний процес, після скінченого числа кроків або знаходять оптимальний план задачі, або встановлюють її нерозв'язність.

Таким чином, *процес знаходженнярозв'язкузадачі модифікованим симплекс-методом включає такі етапи*:

1. Знаходять опорний план задачі.

2. Обчислюють матрицю B^{-1}, обернену матриці B, складеної з компонентів векторів вихідного базису.

3. Знаходять вектор $\Omega = C_\sigma \mathrm{B}^{-1}$.

4. Обчислюють числа $\Delta_j = \Omega \mathrm{P}_j - c_j$. Якщо всі Δ_j додатні, то досліджуваний опорний план є оптимальним. Якщо ж серед чисел Δ_j є від'ємні, то вибирають серед них найбільше за модулем. Нехай це буде Δ_s.

5. Обчислюють компоненти вектора P_s у вихідному базисі. Якщо серед компонентів вектора P_s немає додатних, то цільова функція задачі не обмежена на множині планів. Якщо ж серед компонентів вектора P_s є додатні, то переходять до нового опорного плану.

Література

1. *Бугір М. К.* Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі / М. К. Бугір. – К., 1998. – 272 с.
2. *Ващук Ф.Г.* Задачі лінійного програмування: [*Електронний ресурс*] // Курс лекцій. – *Режим доступу*:https://dspace.uzhnu.edu.ua › jspui › bitstream › lib
3. *Зайченко Ю. П.* Дослідження операцій: підручник / Ю. П. Зайченко. – К.:ВІПОЛ, 2000.
4. *Кулян В. Р.* Математическое программирование с элементами информационных технологий / В. Р. Кулян, Е. А. Юнькова, А. Б. Жильцов. –К.: МАУП, 2000. – 124 с.
5. *Кутковецький В. Я.* Дослідження операцій: [навч. посіб.] / В. Я. Кутковецький. – [2-ге видання, виправлене]. – К.: ВД «Професіонал», 2005. – 264 с.
6. *Ляшенко И. Н., Карагодова Е. А., Черникова Н. В., Шор Н. З.* Линейное инелинейное программирование / Под ред. И. Н. Ляшенка. – К.: Вища школа,1975. – 372 с.