

Методи розв'язування тригонометричних рівнянь

1. Зведення до найпростіших рівнянь шляхом введення нової змінної.

Якщо тригонометричне рівняння допускає перетворення до виразу, який містить лише одну функцію від невідомого x , то заміною цієї функції через y отримуємо алгебраїчне рівняння. Розв'язавши його відносно y , далі визначаємо x із одного чи кількох найпростіших тригонометричних рівнянь залежно від кількості коренів алгебраїчного рівняння.

Приклад 4.1. Розв'язати рівняння:

$$\sin x = \cos^2 x - \frac{1}{4}.$$

Розв'язання. Перетворимо рівняння до виразу, що містить лише $\sin x$, із застосуванням основної тригонометричної тотожності:

$$\sin x = 1 - \sin^2 x - \frac{1}{4},$$

звідки, позначивши $\sin x = y$, дістанемо квадратне рівняння

$$y^2 + y - \frac{3}{4} = 0,$$

коренями якого є числа $y_1 = \frac{1}{2}$ та $y_2 = -\frac{3}{2}$. Корінь y_2 не входить в область значень синуса, а тому для вихідного рівняння є стороннім. Отже, задане тригонометричне рівняння зводиться до найпростішого вигляду

$$\sin x = \frac{1}{2},$$

розв'язки якого записуються згідно з формулою

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + k\pi = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

або в еквівалентному вигляді з урахуванням періоду синуса

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2m\pi, & m \in \mathbb{Z}, \\ \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Зауваження 1. Дуже часто множина розв'язків тригонометричних рівнянь записується за допомогою кількох формул. Іноді їх можна об'єднати, і тоді отримується простіший запис відповіді. В інших випадках трапляється, що одна й та ж множина розв'язків повторюється кілька разів: тоді в остаточній відповіді повторювані записи потрібно виключити. Можливість об'єднання різних

чи виключення повторюваних розв'язків допомагає визначити, наприклад, числове тригонометричне коло, на якому позначаються кружечками кути, що належать множинам розв'язків, а хрестиками – ті, що їм не належать.

Приклад 4.2. Розв'язати рівняння:

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x.$$

Розв'язання. Значення тангенсів двох різних аргументів рівні тоді, коли обидва аргументи входять в область визначення функції тангенс, і відрізняються на період цієї функції. Згідно з цими міркуваннями маємо:

$$3x - x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$3x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, \quad m \in \mathbb{Z};$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отже,

$$x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}; \tag{I}$$

$$x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{3}, \quad m \in \mathbb{Z}; \tag{II}$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{III}$$

Мал. 4.1. Визначення множини розв'язків тригонометричного рівняння за допомогою числового кола.

Виключивши з множини (I) величини, що входять у множини (II) і (III), за допомогою числового кола (мал. 4.1), отримуємо остаточну відповідь:

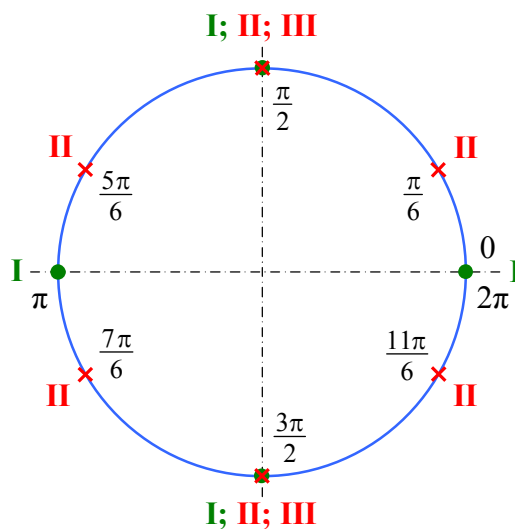
$$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Зауважимо, що вихідне рівняння допускає також розв'язання шляхом зведення до найпростішого тригонометричного рівняння з використанням формули різниці тангенсів:

$$\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 0,$$

$$\frac{\sin(3x - x)}{\cos 3x \cos x} = 0,$$

звідки $\sin 2x = 0$ при $\cos 3x \neq 0$ і $\cos x \neq 0$, що дає аналогічну остаточну відповідь.



2. Розкладання на множники. Якщо тригонометричне рівняння допускає розкладання на множники, тобто перетворення до добутку кількох виразів, то отримуємо рівносильну сукупність простіших рівнянь, розв'язки яких утворюють множину розв'язків вихідного рівняння.

Приклад 4.3. Розв'язати рівняння:

$$\sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

Розв'язання. Згрупуємо однойменні функції, і застосуємо формули перетворення суми функцій різних аргументів у добуток:

$$(\sin x + \sin 2x) + (\cos x + \cos 2x) = 0,$$

$$2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0,$$

$$2 \cos \frac{x}{2} \left(\sin \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2} \right) = 0,$$

і з застосуванням формул зведення, а потім ще раз формули перетворення суми косинусів у добуток отримуємо:

$$2 \cos \frac{x}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2} \right) + \cos \frac{3x}{2} \right] = 0,$$

$$4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2} \right) = 0,$$

$$2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2} \right) = 0.$$

Одержане рівняння рівносильне сукупності двох найпростіших рівнянь:

$$\cos \frac{x}{2} = 0, \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2} \right) = 0, \quad \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + \frac{2n\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Легко переконатися (зокрема за допомогою тригонометричного кола), що знайдені дві множини розв'язків не мають спільних елементів, а отже, множина розв'язків вихідного рівняння є об'єднанням отриманих множин.

3. Однорідні тригонометричні рівняння n -го степеня. Рівняння вигляду

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + \dots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0,$$

де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ — дійсні числа, називаються **однорідними** відносно $\sin x$ і $\cos x$.

Поділивши обидві частини даного рівняння на $\cos^n x$ (попередньо впевнившись, що розв'язки рівняння $\cos x = 0$ не є розв'язками вихідного рівняння), одержимо рівняння вигляду

$$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + \dots + a_{n-1} \operatorname{tg} x + a_n = 0.$$

Приклад 4.4. Розв'язати рівняння:

$$8\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x = 4.$$

Розв'язання. Подамо рівняння у вигляді однорідного з застосуванням основної тригонометричної тотожності:

$$8\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x),$$

$$4\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0.$$

Оскільки в отриманій рівності очевидно $\cos x \neq 0$, то, поділивши на $\cos^2 x$, маємо

$$4\tg^2 x + \tg x - 3 = 0,$$

звідки одержуються два найпростіші тригонометричні рівняння

$$\tg x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\tg x = \frac{3}{4}, \quad x = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Знайдені дві множини розв'язків очевидно не мають спільних елементів, а отже, множина розв'язків вихідного рівняння є об'єднанням отриманих множин.

4. Застосування універсальної тригонометричної підстановки. Усі тригонометричні функції аргументу α раціонально виражаються через $\tg \frac{\alpha}{2}$, якщо $\alpha \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$:

$$\sin \alpha = \frac{2 \tg \frac{\alpha}{2}}{1 + \tg^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \tg^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tg^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \tg \alpha = \frac{2 \tg \frac{\alpha}{2}}{1 - \tg^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \tg^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \tg \frac{\alpha}{2}}.$$

Із застосуванням цих формул усяке тригонометричне рівняння, яке містить функції $\sin x$, $\cos x$, $\tg x$ і $\operatorname{ctg} x$, можна звести до алгебраїчного рівняння з одним невідомим за допомогою підстановки $\tg \frac{x}{2} = t$, яка називається **універсальною тригонометричною підстановкою**. Однак при цьому слід мати на увазі, що за використання універсальної підстановки можлива втрата коренів рівняння, оскільки область визначення рівняння може звужитися. Тому при розв'язуванні рівняння цим методом необхідно перевіряти окремо, чи є числа $\pi + 2k\pi$ коренями даного рівняння.

Приклад 4.5. Розв'язати рівняння:

$$\sin 4x + \tg 2x = 2.$$

Розв'язання. Виразивши з «універсальних» формул $\sin 4x$ через $\tg 2x$, отуємо рівносильне заданому рівняння

$$\frac{2 \tg 2x}{1 + \tg^2 2x} + \tg 2x = 2,$$

яке після спрощення зводиться до кубічного рівняння відносно $\operatorname{tg} 2x$:

$$\operatorname{tg}^3 2x - 2\operatorname{tg}^2 2x + 3\operatorname{tg} 2x - 2 = 0.$$

Це рівняння розв'язується розкладанням на множники:

$$(\operatorname{tg} 2x - 1)(\operatorname{tg}^2 2x - 3\operatorname{tg} 2x + 2) = 0,$$

звідки отримуємо $\operatorname{tg} 2x - 1 = 0$ або $\operatorname{tg}^2 2x - 3\operatorname{tg} 2x + 2 = 0$. Із першого рівняння знаходимо

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Друге рівняння не має дійсних коренів.

Зауважимо, що загальний метод раціоналізації не завжди є прийнятним, оскільки часто приводить до раціональних рівнянь вищих степенів. Тому до нього вдаються, як правило, у «крайніх» випадках, коли не знайдено зручніших методів.

5. Лінійні рівняння відносно $\sin x$ і $\cos x$. Рівняння вигляду

$$a \sin x + b \cos x = c,$$

де a, b, c – сталі коефіцієнти, називаються **лінійними** відносно $\sin x$ і $\cos x$. Очевидно, що при $a = 0$ або $b = 0$ дане рівняння відноситься до найпростіших, а при $c = 0$ є однорідним, тому надалі розглядатимемо випадок $abc \neq 0$.

Таке рівняння допускає розв'язання різними способами: наприклад, зведенням до однорідного рівняння другого степеня відносно $\sin \frac{x}{2}$ та $\cos \frac{x}{2}$ шляхом застосування формул для синуса і косинуса подвоєного аргументу, або до квадратного рівняння відносно $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ шляхом застосування універсальної тригонометричної підстановки. Ці шляхи розв'язання згадувалися вище, а тому зосередимося на ще одному можливому способі зведення до найпростішого рівняння, який називається **методом введення допоміжного кута**

Поділимо обидві частини лінійного рівняння на $a \neq 0$:

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}.$$

Введемо допоміжний кут $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$, тоді $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$, і рівняння набуде ви-

гляду $\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x = \frac{c}{a}$, звідки $\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x = \frac{c}{a} \cos \varphi$, або

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi.$$

Якщо $\left| \frac{c}{a} \cos \varphi \right| \leq 1$, то рівняння має розв'язок

$$x + \varphi = (-1)^k \arcsin\left(\frac{c}{a} \cos \varphi\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

тобто

$$x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{c}{a} \cos \varphi\right) - \varphi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 4.6. Розв'язати рівняння:

$$3 \sin x + 4 \cos x = 5.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді:

$$\sin x + \frac{4}{3} \cos x = \frac{5}{3}.$$

Введемо допоміжний кут $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$, тоді $\frac{4}{3} = \operatorname{tg} \varphi$, і рівняння набуде вигляду $\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x = \frac{5}{3}$, звідки $\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x = \frac{5}{3} \cos \varphi$, або

$$\sin(x + \varphi) = \frac{5}{3} \cos \varphi.$$

Оскільки $\cos\left(\operatorname{arctg} \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg} \frac{4}{3}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}} = \frac{3}{5}$, то отримуємо най-

простіше рівняння вигляду $\sin(x + \varphi) = 1$, із якого знаходимо

$$x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

тобто

$$x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

або

$$x = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

6. Нестандартні тригонометричні рівняння. Досить часто зустрічаються задачі, що не розв'язуються стандартними методами, за допомогою звичних шкільних міркувань.

Деякі з цих задач зовні мають дуже незвичний вигляд, і тому незрозуміло, як за них братися. Інші ніби «замасковані»: наприклад, на перший погляд це здається звичайним рівнянням, однак стандартними прийомами воно не розв'язується. Цей тип задач умовно можна назвати нестандартними. Їх розв'язання вимагає кмітливості, вільного володіння різними розділами математики, і високої логічної культури.

Неможливо вказати всі методи розв'язування нестандартних задач. Тут доводиться застосовувати і графіки, і найрізноманітніші властивості функцій, і нерівності, і, нарешті, найперше за важливістю – логіку.

Приклад 4.7. Розв'язати рівняння:

$$\sin^{2022} x + \cos^{1991} x = 1.$$

Розв'язання. Оскільки $|\sin x| \leq 1$ і $|\cos x| \leq 1$, то

$$\sin^{2022} x \leq \sin^2 x, \quad \cos^{1991} x \leq \cos^2 x.$$

Тоді $\sin^{2022} x + \cos^{1991} x \leq 1$. Отже, ліва частина вихідного рівняння не перевищує одиниці, і дорівнює одиниці тільки у випадку, коли виконується система рівнянь:

$$\begin{cases} \cos^{1991} x = \cos^2 x, \\ \sin^{2022} x = \sin^2 x. \end{cases}$$

Перше рівняння системи справджується при $\cos x = 0$ і $\cos x = 1$. Але при цих значеннях x друге рівняння також справджується: якщо $\cos x = 0$, то $\sin^2 x = 1$, а якщо $\cos x = 1$, то $\sin x = 0$. Тому розв'язками системи, а водночас і вихідного рівняння, будуть $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ або $x = 2k\pi$, де $k \in \mathbb{Z}$.

7. Системи тригонометричних рівнянь. При розв'язуванні систем тригонометричних рівнянь застосовуються ті ж прийоми, що й при розв'язуванні систем алгебраїчних рівнянь.

Приклад 4.8. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання. Перепишемо систему з урахуванням формули суми синусів $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ до рівносильного вигляду:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2}, \\ \sin x \sin y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Оскільки $\sin x \sin y \neq 0$, то, помноживши обидві частини першого рівняння на $\sin y$, із урахуванням другого рівняння отримаємо простішу рівносильну систему:

$$\begin{cases} \sin^2 y - \frac{1}{2} \sin y - \frac{1}{2} = 0, \\ \sin x \sin y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Із першого рівняння знаходимо $\sin y = 1$ або $\sin y = -\frac{1}{2}$, тоді з другого рівняння відповідно $\sin x = -\frac{1}{2}$ або $\sin x = 1$. Отже,

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2}, \\ \sin y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \end{cases}$$
$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ y = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, \end{cases}$$

де $k, n \in \mathbb{Z}$.

Більше тригонометричних рівнянь та їх систем із наведеними прикладами і вказівками до розв'язань можна знайти у зазначеному нижче джерелі, а також інших джерелах, вказаних у робочій програмі навчальної дисципліни.

Джерело:

1. *Гайштут О.Г., Ушаков Р.П.* Тригонометрія. Довідник-задачник. – К.: «Магістр-S», 1997. – С. 99-190.