Основні формули тригонометрії. Тотожні перетворення тригонометричних виразів

2.1. Основні формули тригонометрії [1]

1. Співвідношення між функціями одного кута:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\qquad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha;\qquad \sin\alpha\cdot\csc\alpha=1;$$

$$\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha=1;\qquad \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1;$$

$$\csc^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=1;\qquad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha;\qquad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1.$$

2. Формули вираження однієї функції через іншу (того ж кута):

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}=\frac{1}{\csc\alpha};$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\csc\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}=\sqrt{\sec^2\alpha-1}=\frac{1}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}=\sqrt{\csc^2\alpha-1}.$$

Зауваження 1. У наведених формулах перед знаком радикалу має ставитися знак «плюс» або «мінус» залежно від того, в якій чверті знаходиться кут.

3. Формули зведення функцій кутів із II, III та IV чвертей до функцій гострого кута отримуються згідно з таблицею:

Функція	$\beta=90^\circ\pm\alpha$	$\beta=180^\circ\pm\alpha$	$\beta=270^\circ\pm\alpha$	$\beta=360^\circ-\alpha$
sinβ	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
cosβ	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
tgβ	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
ctgβ	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

4. Формули додавання (функції суми та різниці кутів):

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;\qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta}{1\mp\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta};\qquad \mathrm{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta\mp1}{\mathrm{ctg}\,\beta\pm\mathrm{ctg}\,\alpha};$$

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma;$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

5. Формули для функцій кратних кутів:

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;\qquad \sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;\qquad \cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

$$\sin4\alpha=8\cos^3\alpha\sin\alpha-4\cos\alpha\sin\alpha;\qquad \cos4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1;$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha};\qquad \mathrm{tg}\,3\alpha=\frac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\,\mathrm{tg}^2\alpha};\qquad \mathrm{tg}\,4\alpha=\frac{4\,\mathrm{tg}\,\alpha-4\,\mathrm{tg}^3\alpha}{1-6\,\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^4\alpha};$$

$$\mathrm{ctg}\,2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha};\qquad \mathrm{ctg}\,3\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^3\alpha-3\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{3\,\mathrm{ctg}^2\alpha-1};\qquad \mathrm{ctg}\,4\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^4\alpha-6\,\mathrm{ctg}^2\alpha+1}{4\,\mathrm{ctg}^3\alpha-4\,\mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

Зауваження 2. $\sin n\alpha$ та $\cos n\alpha$ для великих n зручно визначати, користуючись формулою Муавра для комплексних чисел:

$$\cos n\alpha+i\sin n\alpha=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos^n\alpha+in\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-$$

$$-C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha-iC_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha+\ldots,$$

звідки

$$\cos n\alpha=\cos^n\alpha-C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha+C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha-C_n^6\cos^{n-6}\alpha\sin^6\alpha+\ldots,$$

$$\sin n\alpha=n\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha+\ldots,$$

де C_n^m – біноміальні коефіцієнти, які можна знайти з відомого трикутника Паскаля, або за формулою сполук із n елементів по m

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

6. Формули для функцій половинного кута:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{2};\qquad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{2};\qquad \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

При застосуванні наведених формул слід враховувати Зауваження 1.

7. Формули перетворень суми й різниці функцій:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\qquad \mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

8. Формули перетворень добутку функцій:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin(\beta+\gamma-\alpha) + \sin(\gamma+\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta+\gamma)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta-\gamma) - \sin(\beta+\gamma-\alpha) + \sin(\gamma+\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta+\gamma)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[-\cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\beta+\gamma-\alpha) + \cos(\gamma+\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta+\gamma)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[\cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\beta+\gamma-\alpha) + \cos(\gamma+\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta+\gamma)].$$

9. Формули пониження степенів функцій:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha); \qquad \sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha);$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha); \qquad \cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha);$$

$$\sin^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3); \qquad \cos^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3).$$

Зауваження 3. Для обчислення $\sin^n\alpha$ та $\cos^n\alpha$ при великих n можна послідовно використовувати формули для $\sin n\alpha$ та $\cos n\alpha$ із Зауваження 2.

2.2. Тотожні перетворення тригонометричних виразів [2]

На практиці часто потрібно доводити тотожність різних тригонометричних виразів. Такі доведення пов'язані з виконанням тотожних алгебраїчних перетворень та застосуванням тригонометричних формул. Для простіших тотожних перетворень зазвичай достатньо застосування однієї-двох тригонометричних формул, тоді як складніші тотожності вимагають їх комплексного використання.

Приклад 2.1. Виразити через функції простого аргументу α величини: ***а)*** $\cos 8\alpha$; ***б)*** $\sin 6\alpha$.

Розв'язання. Для вираження першої з величин досить застосування двох формул функцій подвоєного кута для косинуса та синуса:

$$\cos 8\alpha = \cos^2 4\alpha - \sin^2 4\alpha = (\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)^2 - 4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha =$$

$$= [(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha]^2 - 16\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2,$$

звідки після розкриття дужок і зведення подібних доданків отримуємо

$$\cos 8\alpha = \cos^8\alpha + 34\sin^4\alpha\cos^4\alpha - 28\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha) + \sin^8\alpha.$$

Для вираження другої з величин, окрім застосованих у попередньому випадку формул, необхідно також використати функції суми кутів для синуса та косинуса:

$$\sin 6\alpha = 2\sin 3\alpha\cos 3\alpha = 2\sin(\alpha + 2\alpha)\cos(\alpha + 2\alpha) =$$

$$= 2(\sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha)(\cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha) =$$

$$= 2[\sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos^2\alpha]\cdot[\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) -$$

$$- 2\sin^2\alpha\cos\alpha],$$

звідки після розкриття дужок і зведення подібних доданків отримуємо

$$\sin 6\alpha = 6\sin\alpha\cos\alpha(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha) - 20\sin^3\alpha\cos^3\alpha.$$

Приклад 2.2. Спростити вираз:

$$\sin\alpha(\sin\alpha - \sin\beta) + \cos\alpha(\cos\alpha - \cos\beta).$$

Розв'язання. Розкриваючи дужки, отримуємо:

$$\sin\alpha(\sin\alpha - \sin\beta) + \cos\alpha(\cos\alpha - \cos\beta) =$$

$$= \sin^2\alpha - \sin\alpha\sin\beta + \cos^2\alpha - \cos\alpha\cos\beta =$$

$$= 1 - \cos(\alpha - \beta) = 2\sin^2\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Зауважимо, що для отримання наведеного вище результату були використані три тригонометричні формули: основна тригонометрична тотожність $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, формула косинуса різниці кутів, а також формула пониження степеня для квадрата синуса.

Приклад 2.3. Довести тотожність:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} + 2\operatorname{tg}^2\alpha = 2\sec^2\alpha.$$

Розв'язання. Для допустимих значень аргументів α і β маємо:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} + 2\operatorname{tg}^2\alpha =$$

$$= 1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + 1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + 2\operatorname{tg}^2\alpha =$$

$$= 2 + 2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha = 2(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha) = 2\sec^2\alpha,$$

що й вимагалося довести. Зауважимо, що в ході даного доведення були використані наступні тригонометричні формули: формули тангенса суми й різниці кутів, а також формула вираження тангенса через секанс.

Джерела:

1. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике (для инженеров и учащихся втузов). – М.: Физматгиз, 1962. – С. 179-182.
2. *Гайштут О.Г., Ушаков Р.П.* Тригонометрія. Довідник-задачник. – К.: «Магістр-S», 1997. – С. 15-82.