

**ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ  
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь**

**«ЗАТВЕРДЖУЮ»**  
Декан факультету математики та  
цифрових технологій  
\_\_\_\_\_ /Маляр М.М./  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2022 року

**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ**

Рівень вищої освіти	<b>перший (бакалаврський) рівень</b>
Галузь знань	<b>11 Математика та статистика</b>
Спеціальність	<b>111 Математика</b>
Освітня програма	<b>Комп'ютерна та бізнес-математика</b>
Статус дисципліни	<b>обов'язкова</b>
Мова навчання	<b>українська</b>

Робоча програма навчальної дисципліни «Обчислювальна та диференціальна геометрія» для здобувачів вищої освіти галузі знань **11 Математика та статистика** спеціальності **111 Математика** освітньої програми **Комп'ютерна та бізнес-математика**.

**Розробник:** Семчишин Г.Я., старший викладач кафедри алгебри та диференціальних рівнянь

Робочу програму розглянуто та затверджено на засіданні кафедри алгебри та диференціальних рівнянь

протокол №10 від « 01 » липня 2022 р.

Завідувач кафедри \_\_\_\_\_ Рейтій О.К.

Схвалено науково-методичною комісією факультету математики та цифрових технологій

протокол №11 від « 01 » липня 2022 р.

Голова науково-методичної комісії \_\_\_\_\_ Юрченко Н.В.

© Семчишин Г.Я., 2022 р.

© ДВНЗ «Ужгородський національний університет», 2022 р.

## 1. ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Найменування показників	Розподіл годин за навчальним планом	
	Денна форма навчання	Заочна форма навчання
Кількість кредитів ЄКТС – 4	Рік підготовки:	
Загальна кількість годин – 120	3-й	-
Кількість модулів – 2	Семестр:	
Тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних – 3,3 самостійної роботи студента – 3,3	5-й	-
	Лекції:	
	30 год.	-
	Практичні (семінарські):	
	-	-
Вид підсумкового контролю: екзамен	Лабораторні:	
	30 год.	-
Форма підсумкового контролю: усна	Самостійна робота:	
	60 год.	-

## 2. МЕТА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Метою вивчення навчальної дисципліни «Обчислювальна та диференціальна геометрія» є оволодіння теоретичними положеннями та основними застосуваннями диференціальної геометрії в різних задачах математики.

Основним завданням вивчення навчальної дисципліни «Обчислювальна та диференціальна геометрія» є розвиток в студентів абстрактного мислення та просторової уяви, вивчення нових методів дослідження геометричних образів, необхідних для подальшого успішного вивчення інших математичних дисциплін та їх прикладного застосування.

Відповідно до освітньої програми «Комп'ютерна та бізнес-математика», вивчення дисципліни сприяє формуванню у здобувачів вищої освіти спеціальності 111 Математика таких компетентностей:

### Загальні компетентності (ЗК):

ЗК-1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК-2 Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ЗК-3 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності.

ЗК-9 Здатність приймати обґрунтовані рішення.

### Спеціальні (фахові, предметні) компетентності (СК):

СК-1 Здатність формулювати проблеми математично та в символічній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.

СК-4 Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих.

## 3. ПЕРЕДУМОВИ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Передумовами вивчення навчальної дисципліни «Обчислювальна та диференціальна геометрія» є опанування таких навчальних дисциплін (НД) освітньої програми (ОП):

ОК 5 Математичний аналіз функції однієї змінної

ОК 6 Математичний аналіз функції багатьох змінних

ОК 8 Лінійна алгебра

ОК 10 Диференціальні рівняння та їх застосування

ОК 11 Аналітична геометрія

## 4. ОЧІКУВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

Відповідно до освітньої програми «Комп'ютерна та бізнес-математика», вивчення навчальної дисципліни повинно забезпечити досягнення здобувачами вищої освіти спеціальності 111 Математика таких програмних результатів навчання (ПРН):

Програмні результати навчання	Шифр ПРН
Знати принципи <i>modus ponens</i> (правило виведення логічних висловлювань) та <i>modus tollens</i> (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень.	РН-3
Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми.	РН-4
Мати навички використання спеціалізованих програмних засобів комп'ютерної та прикладної математики і використовувати інтернет-ресурси у галузі математики.	РН-5
Знати теоретичні основи і застосовувати методи аналітичної та диференціальної геометрії для розв'язування професійних задач.	РН-14

Очікувані результати навчання, які повинні бути досягнуті здобувачами освіти після опанування навчальної дисципліни «Обчислювальна та диференціальна геометрія»:

Очікувані результати навчання з дисципліни	Шифр ПРН
знання основних властивостей векторної функції скалярного аргументу	РН-3
знання означення найпростішої та елементарної ліній, поняття лінії та способів її задання	РН-3
вміння обчислювати довжину дуги кривої	РН-4, РН-5
вміння записувати рівняння елементів тригранника Френе	РН-4
вміння обчислювати кривину та скруг кривої	РН-4, РН-5
вміння обчислювати еволюту та евольвенту плоскої кривої	РН-4, РН-5
знання означення поверхні та способів її задання	РН-3
вміння записувати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні	РН-4
вміння знаходити першу квадратичну форму поверхні	РН-4, РН-5
вміння обчислювати довжину дуги кривої на поверхні	РН-5, РН-14
вміння обчислювати кут між кривими на поверхні	РН-5, РН-14
вміння знаходити другу квадратичну форму поверхні	РН-4, РН-5
вміння обчислювати нормальну кривину лінії на поверхні	РН-5, РН-14
вміння обчислювати головні кривини поверхні	РН-5, РН-14
вміння обчислювати повну та середню кривини поверхні	РН-5, РН-14
вміння обчислювати геодезичну кривину лінії на поверхні	РН-5, РН-14

## 5. ЗАСОБИ ДІАГНОСТИКИ ТА КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ

### Засоби оцінювання та методи демонстрування результатів навчання

Засобами оцінювання та методами демонстрування результатів навчання з навчальної дисципліни є:

- розв’язування задач під час лабораторних занять;
- індивідуальні розрахункові роботи;
- модульні контрольні роботи;
- екзамен.

### Форми контролю та критерії оцінювання результатів навчання

Форми поточного контролю: робота студента на лабораторному занятті (усна або письмова відповідь, враховується також виконання домашніх завдань), написання студентом типових індивідуальних розрахункових робіт.

Форма модульного контролю: письмова модульна контрольна робота.

Форма підсумкового семестрового контролю: усне опитування за екзаменаційним білетом, який складається з двох теоретичних питань та двох практичних завдань.

### Розподіл балів, які отримують здобувачі вищої освіти (модуль 1)

Поточне оцінювання та самостійна робота						Модульна контрольна робота	Сума
T1	T2	T3	T4	T5	T6	40	100
10	10	10	10	10	10		

T1, T2, ..., T6 – теми

## Розподіл балів, які отримують здобувачі вищої освіти (модуль 2)

Поточне оцінювання та самостійна робота							Модульна контрольна робота	Сума
T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	40	100
8	8	8	9	9	9	9		

T1, T2, ..., T7 – теми

## Оцінювання окремих видів навчальної роботи з дисципліни

Вид діяльності здобувача вищої освіти	Модуль 1		Модуль 2	
	Кількість	Максимальна кількість балів (сумарна)	Кількість	Максимальна кількість балів (сумарна)
Лабораторні заняття (відвідування та виконання домашніх завдань)	7	30	8	30
Індивідуальні розрахункові роботи	2	30	2	30
Модульна контрольна робота	1	40	1	40
<b>Разом</b>		<b>100</b>		<b>100</b>

## Критерії оцінювання індивідуальних розрахункових робіт

Оцінювання індивідуальних розрахункових робіт проводиться за наступним критерієм (у % від кількості балів, виділених на розрахункову роботу із заокругленням до цілого числа):

0% - індивідуальна розрахункова робота не виконана;

40% - індивідуальна розрахункова робота виконана частково та містить суттєві помилки у розрахунках;

60% - індивідуальна розрахункова робота виконана повністю, але містить суттєві помилки у розрахунках;

80% - індивідуальна розрахункова робота виконана повністю і вчасно, проте містить окремі несуттєві недоліки;

100% - індивідуальна розрахункова робота виконана правильно, вчасно і без зауважень.

## Критерії оцінювання модульної контрольної роботи

Протягом семестру проводиться дві модульні контрольні роботи. Кожна модульна контрольна робота складається з двох блоків.

Блок А. Теоретична частина (16 балів) складається з 16 теоретичних тестових питань, на які потрібно дати правильну відповідь (обрати правильну відповідь з кількох запропонованих). Правильна відповідь на кожне теоретичне тестове питання оцінюється в 1 бал.

Блок Б. Практична частина (24 балів) складається з 3 практичних завдань. Розв'язання кожного практичного завдання оцінюється у 8 балів:

8 балів – ставиться, якщо практичне завдання розв'язано вірно;

6 балів – ставиться, якщо в практичному завданні допущені незначні помилки;

4 бали – якщо розв'язано вірно не менше 50% обсягу практичного завдання;

0 балів - якщо практичне завдання не розв'язано або розв'язано невірно.

## Критерії оцінювання підсумкового семестрового контролю

Обов'язковою умовою допуску студента до підсумкового семестрового контролю є вчасне виконання індивідуальних розрахункових робіт, а також сумарна кількість балів за кожен модуль – не менше 35 балів.

Підсумковий семестровий контроль поводить у вигляді екзамену, який представляє собою усне опитування за екзаменаційним білетом, який складається з двох теоретичних питань та двох практичних завдань. Максимальна оцінка за правильну відповідь на екзаменаційний білет становить 100 балів. Кожне з двох теоретичних питань та двох практичних завдань оцінюється в 25 балів.

### Шкала оцінювання: національна та ECTS

Оцінка ECTS	Оцінка за 100-бальною шкалою	Оцінка за національною шкалою	
		для екзамену, диференційованого заліку, курсового проекту (роботи)	для заліку
A	90 – 100	<i>Відмінно</i>	<i>Зараховано</i>
B	82-89	<i>Добре</i>	
C	74-81	<i>Задовільно</i>	
D	64-73		
E	60-63		
FX	35-59	<i>Незадовільно</i> з можливістю повторного складання	<i>Незараховано</i> з можливістю повторного складання
F	0-34	<i>Незадовільно</i> з обов'язковим повторним вивченням дисципліни	<i>Незараховано</i> з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

### Критерій оцінювання з дисципліни

– “**відмінно**” A (90 та вище балів) заслуговує студент, який виявив всебічне і глибоке знання програмового матеріалу, вміння вільно виконувати завдання, передбачені програмою, засвоїв основну і ознайомився з додатковою літературою, розуміє взаємозв'язок головних понять дисципліни та їх значення для майбутньої професії;

– “**добре**” B (82-89 балів) заслуговує студент, який виявив повне знання програмного матеріалу, успішно виконує передбачені програмою завдання, засвоїв основну літературу рекомендовану програмою, виявив систематичний характер знань з дисциплін і здатний до самостійного доповнення, але під час відповіді допустив деякі неточності;

– “**добре**” C (74-81 балів) заслуговує студент, що виявив не цілком повне знання програмного матеріалу, не завжди успішно виконує передбачені програмою завдання, частково засвоїв основну літературу, рекомендовану програмою, виявив не систематичний характер знань з дисциплін і не завжди здатний до їх самостійного доповнення і під час відповіді допускає деякі неточності;

– “**задовільно**” D (64-73 балів) заслуговує студент, що виявив знання основного програмного матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий з основною рекомендованою літературою. Як правило, оцінка “задовільно” виставляється студентам, що допустили помилки у відповіді на екзамені та при виконанні екзаменаційних завдань, але які володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомогою викладача;

– “**задовільно**” E (60-63 балів) заслуговує студент, що виявив часткове знання основного програмового матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та

майбутньої роботи за професією, не завжди вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий лише частково з основною рекомендованою літературою. Як правило, оцінка "достатньо" виставляється студентам, що допустили грубі помилки у відповіді на екзамені та при виконанні екзаменаційних завдань, але які частково володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомогою викладача.

– "незадовільно" **FX** (35-59 балів) з можливістю повторного складання виставляється студенту, який виявив суттєві прогалини в знаннях основного програмового матеріалу, допустив принципові помилки у виконанні передбачених програмою завдань.

– "незадовільно" **F** (1-34 балів) з обов'язковим повторним вивченням дисципліни виставляється студенту коли протягом семестру він допустив грубі помилки у виконанні передбачених програмою завдань.

## **6. ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

### **6.1. Зміст навчальної дисципліни**

#### **Модуль 1. Лінії в евклідовому просторі.**

##### **Тема 1. Векторна функція скалярного аргументу.**

Поняття про векторну функцію скалярного аргументу. Границя векторної функції скалярного аргументу. Неперервність векторної функції скалярного аргументу. Диференційовність векторної функції скалярного аргументу. Правила диференціювання векторних функцій скалярного аргументу.

##### **Тема 2. Поняття лінії. Гладкі лінії.**

Фізичні уявлення про закон руху частинки. Найпростіші та елементарні лінії. Означення лінії. Способи задання ліній. Гладкі лінії.

##### **Тема 3. Дотична пряма та нормальна площина кривої. Довжина дуги кривої.**

Дотична пряма та нормальна площина кривої. Довжини дуги кривої. Натуральна параметризація. Одиничний вектор дотичної.

##### **Тема 4. Кривина та скрут кривої. Тригранник Френе. Формули Френе.**

Кривина кривої в точці. Геометричний зміст кривини. Теорема про найпростішу лінію. Тригранник Френе. Формули Френе. Скрут кривої в точці. Геометричний зміст скриту. Натуральні рівняння кривої.

##### **Тема 5. Кривини та скриту кривої в довільній параметризації.**

Обчислення кривини та скриту кривої в довільній параметризації.

##### **Тема 6. Плоска крива. Еволюта та евольвента плоскої кривої.**

Плоска крива як частинний випадок просторової кривої. Еволюта та евольвента плоскої кривої.

#### **Модуль 2. Поверхні в евклідовому просторі. Внутрішня геометрія поверхні.**

##### **Тема 1. Поняття поверхні. Гладкі поверхні.**

Векторна функція двох скалярних аргументів. Поняття поверхні. Способи задання поверхонь. Гладкі поверхні. Криволінійні координати точки на поверхні.

##### **Тема 2. Дотична площина та нормаль до поверхні.**

Теорема про дотичні до ліній на поверхні. Дотичної площина та нормаль до поверхні.

##### **Тема 3. Перша квадратична форма поверхні та її застосування.**

Першої квадратична форма поверхні. Застосування першої квадратичної форми поверхні. Довжини дуги кривої на поверхні. Кут між кривими на поверхні. Площі гладкої компактної поверхні.

##### **Тема 4. Друга квадратична форма поверхні.**

Друга квадратична форма поверхні. Нормальна кривина кривої на поверхні. Індикатриса кривини поверхні. Еліптичні, гіперболічні та параболічні точки поверхні.



**Тема 5. Головні кривини поверхні. Повна та середня кривини поверхні.**

Асимптотичні напрями. Асимптотичні лінії на поверхні. Головні напрямки поверхні. Головні кривини поверхні. Середня та повна кривини поверхні. Поверхні сталої кривини.

**Тема 6. Внутрішня геометрія поверхні. Дериваційні формули.**

Внутрішня геометрія поверхні. Дериваційні формули. Символи Кристоффеля.

**Тема 7. Геодезична кривина лінії на поверхні. Геодезичні лінії на поверхні.**

Теорема Гаусса. Геодезична кривина лінії на поверхні. Геодезичні лінії на поверхні.

**6.2. Структура навчальної дисципліни**

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	Форма навчання: денна					
	у тому числі					
	Усього	Лекції	практичні (семінарські)	лабораторні	індивідуальна робота	самостійна робота
<b>Модуль 1. Лінії в евклідовому просторі</b>						
Тема 1. Векторна функція скалярного аргументу.	8	2		2		4
Тема 2. Поняття лінії. Гладкі лінії.	8	2		2		4
Тема 3. Дотична крива та нормальна площина кривої. Довжина дуги кривої.	8	2		2		4
Тема 4. Кривина та скрут кривої. Тригранник Френе. Формули Френе.	8	2		2		4
Тема 5. Кривина та скрут кривої в довільній параметризації.	12	2		4		6
Тема 6. Плоска крива. Еволюта та евольвента плоскої кривої.	8	2		2		4
Модульна контрольна робота	4	2				2
Разом за модуль	56	14		14		28
<b>Модуль 2. Поверхні в евклідовому просторі. Внутрішня геометрія поверхні</b>						
Тема 1. Поняття поверхні. Гладкі поверхні.	8	2		2		4
Тема 2. Дотична площина та нормаль до поверхні.	8	2		2		4
Тема 3. Перша квадратична форма поверхні та її застосування.	10	2		3		5
Тема 4. Друга квадратична форма поверхні.	10	2		3		5
Тема 5. Головні кривини поверхні. Повна і середня кривини поверхні.	8	2		2		4
Тема 6. Внутрішня геометрія поверхні. Дериваційні формули.	8	2		2		4
Тема 7. Геодезична кривина лінії на поверхні. Геодезичні лінії на поверхні.	8	2		2		4
Модульна контрольна робота	4	2				2
Разом за модуль	64	16		16		32
<b>Разом за семестр</b>	<b>120</b>	<b>30</b>		<b>30</b>		<b>60</b>

### 6.3. Теми лабораторних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин	
		денна	заочна
1	Векторна функція скалярного аргументу	2	
2	Поняття лінії та способи її задання. Гладкі лінії.		
3	Довжина дуги кривої. Натуральна параметризація.	2	
4	Тригранник Френе та його елементи.	2	
5	Обчислення кривина та скрут кривої в натуральній параметризації.	2	
6	Обчислення кривини і скриту лінії в довільній параметризації.	2	
7	Плоска крива. Еволюта та евольвента плоскої кривої.	2	
8	Поняття поверхні та різні способи її задання. Гладкі поверхні.	2	
9	Дотична площина та нормаль до поверхні.	2	
10	Перша квадратична форма поверхні та її застосування.	3	
11	Друга квадратична форма поверхні.	3	
12	Головні кривини поверхні. Повна і середня кривини поверхні.	2	
13	Внутрішня геометрія поверхні. Дериваційні формули.	2	
14	Геодезична кривина лінії на поверхні. Геодезичні лінії на поверхні.	2	
<b>Разом</b>		30	

### 6.4. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин	
		денна	заочна
1	Векторна функція скалярного аргументу.	4	
2	Поняття лінії. Гладкі лінії.	4	
3	Дотична пряма та нормальна площина кривої. Довжина дуги кривої.	4	
4	Кривина та скрут кривої. Тригранник Френе. Формули Френе.	4	
5	Кривини та скриту лінії в довільній параметризації.	6	
6	Плоска крива. Еволюта та евольвента плоскої кривої.	4	
7	Підготовка до модульної контрольної роботи	2	
8	Поняття поверхні. Гладкі поверхні.	4	
9	Дотична площина та нормаль до поверхні.	4	
10	Перша квадратична форма поверхні та її застосування.	5	
11	Друга квадратична форма поверхні.	5	
12	Головні кривини поверхні. Повна і середня кривини поверхні.	4	
13	Внутрішня геометрія поверхні. Дериваційні формули.	4	
14	Геодезична кривина лінії на поверхні. Геодезичні лінії на поверхні.	4	
15	Підготовка до модульної контрольної роботи	2	
<b>Разом</b>		60	

## **7. ІНСТРУМЕНТИ, ОБЛАДНАННЯ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ, ВИКОРИСТАННЯ ЯКИХ ПЕРЕДБАЧАЄ НАВЧАЛЬНА ДИСЦИПЛІНА**

Технічні засоби: комп'ютер та проектор для демонстрації розв'язання деяких завдань за допомогою системи комп'ютерної алгебри Maple.

Програмне забезпечення: система комп'ютерної алгебри Maple.

## **8. РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ**

### **Основна література**

1. Атанасян Л. С., Базылев В.Г. Геометрия, ч II. – М.: Просвещение, 1987. – 352 с.
2. Атанасян Л. С. Сборник задач по геометрии, ч II. – М.: Просвещение, 1975. – 176 с.
3. Баранник В. Ф., Тилищак О. А. Практикум з диференціальної геометрії: Методичний посібник. – Ужгород: Вид-во Ужгород. ун-ту, 2005. – 60 с.
4. Борисенко О. А. Диференціальна геометрія і топологія. – Х.: Основа, 1995. – 304 с.
5. Городецький В.В., Мартинюк О.В. Диференціальна геометрія в теоремах і задачах: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2006. – 400 с.
6. Кованцов М. І. Диференціальна геометрія. – К.: Вища школа, 1973. – 276 с.
7. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1974. – 176 с.
8. Пришляк О. О. Диференціальна геометрія. Курс лекцій – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2004. – 68 с.
9. Теплінський Ю.В. Лекції з диференціальної геометрії. – Кам'янець-Подільський державний педагогічний університет, 1999. – 148 с.
10. Трохименко В.С. Конспект лекцій з диференціальної геометрії і топології. – Вінницький державний педагогічний університет ім. М. Коцюбинського, 2009. – 68 с.

### **Інформаційні ресурси в мережі Інтернет**

1. <http://e-learn.uzhnu.edu.ua> – сайт електронного навчання ДВНЗ «Ужгородський національний університет».
2. <http://mechmat.univ.kiev.ua/ua/study/library.php> – електронна бібліотека механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.
3. <http://www.nbuv.gov.ua> – Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського.