Найпростіші динамічні моделі механіки

Диференціальне рівняння на мові механіки є *динамічна модель*, що описує деяке фізичне явище, пов'язане з рухом. Динамічна модель є функціональна залежність, яка пов'язує незалежну змінну, шукану функцію цієї змінної та її похідні. Розшифрування динамічної моделі дає *кінематичну модель* явища. Процес розшифрування динамічної моделі називається інтегруванням диференціального рівняння або знаходженням розв'язку цього рівняння.
У цьому розділі розглянемо найпростіші моделі руху, що будуються на підставі другого закону Ньютона, згідно з яким сила F, яка діє на тіло маси m, рівна добутку маси цього тіла на прискорення руху a:

$$F = ma. \tag{6.1}$$

1. ***Прямолінійний рух матеріальної точки.*** Нехай матеріальна точка маси m здійснює прямолінійний рух під дією сили F. Позначимо через $s(t)$ закон руху цієї точки, який визначає пройдений шлях на момент часу t, а через $v(t)$ швидкість руху в момент часу t. Відомо, що функції шляху, швидкості і прискорення руху пов'язані співвідношеннями:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}. \tag{6.2}$$

З урахуванням (6.2) із другого закону Ньютона (6.1) для визначення закону руху $s(t)$ одержимо диференціальне рівняння другого порядку

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = F. \tag{6.3}$$

Якщо задане початкове значення пройденого шляху $s(t_0) = s_0$, і початкова швидкість $v(t_0) = s'(t_0) = v_0$, то одержуємо диференціальну модель руху у вигляді задачі Коші для рівняння (6.3) з початковими умовами

$$s(t_0) = s_0, \quad s'(t_0) = v_0. \tag{6.4}$$

Якщо шуканою функцією є швидкість $v(t)$, то отримуємо задачу Коші для рівняння першого порядку

$$m\frac{dv}{dt} = F, \quad v(t_0) = v_0. \tag{6.5}$$

Приклад 6.1. Знайти закон прямолінійного руху $s(t)$ матеріальної точки маси m під дією сталої сили $F_0 = const$, якщо в початковий момент часу $t = 0$ $s(0) = s_0$, а початкова швидкість руху рівна v_0.
Розв'язання. Для знаходження закону руху одержуємо задачу Коші (6.3), (6.4) у вигляді

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{F_0}{m},\quad s(0)=s_0,\quad s'(0)=v_0.$$

Рівняння розв'язується двократним інтегруванням, причому після першого інтегрування з урахуванням другої початкової умови одержимо функцію швидкості руху $v(t)$, яка є розв'язком задачі Коші (6.5) при $t_0=0$ і $F=F_0$, а друге інтегрування з урахуванням першої початкової умови дає шуканий закон руху:

$$\frac{ds}{dt}=\frac{F_0}{m}t+C_1,\quad C_1=v_0\quad\Rightarrow\quad v=\frac{ds}{dt}=\frac{F_0}{m}t+v_0;$$

$$s=\frac{F_0}{2m}t^2+v_0t+C_2,\quad C_2=s_0\quad\Rightarrow\quad s=\frac{F_0}{2m}t^2+v_0t+s_0.$$

2. ***Вільне падіння тіл.*** Якщо тіло маси m підняти на деяку висоту над поверхнею землі і потім відпустити, то воно починає вільно падати. Очевидно, що без урахування опору довкілля (зазвичай повітря) рух тіла відбувається під дією сили тяжіння з прискоренням g = 9,81 м/с^2. Тоді згідно з формулами (6.2) для визначення закону руху тіла $s(t)$ одержуємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g,$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$s=0{,}5gt^2+C_1t+C_2.$$

Якщо задані початкові умови (6.4), то з них можна визначити значення сталих C_1, C_2:

$$s'(t_0)=v_0\quad\Rightarrow\quad C_1=v_0-gt_0;$$

$$s(t_0)=s_0\quad\Rightarrow\quad C_2=s_0-v_0t_0+0{,}5gt_0^2.$$

Отже, шуканий закон руху

$$s=0{,}5g(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+s_0,$$

а швидкість руху

$$v=s'(t)=g(t-t_0)+v_0. \tag{6.6}$$

Якщо вільне падіння відбувається в середовищі з опором, пропорційним швидкості (або квадрату швидкості), то за шукану функцію зручніше взяти швидкість $v(t)$. У цих випадках з урахуванням другого закону Ньютона (6.1) і формул (6.2) отримуємо задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку, які описують зокрема рух деяких типів парашутів:

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv \tag{6.7}$$

або

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv^2, \tag{6.8}$$

із початковою умовою $v(t_0)=v_0$. Тут сила F має дві складові: силу тяжіння mg і опір повітря $-kv$ або $-kv^2$ (знак «–» показує, що сила напрямлена протилежно до напряму руху; k – коефіцієнт пропорційності).

Приклад 6.2. Знайти закон зміни швидкості $v(t)$ падіння тіла маси m в середовищі з опором, пропорційним швидкості з коефіцієнтом k, якщо в початковий момент часу $t=0$ тілу була надана швидкість v_0.

Розв'язання. Математичною моделлю задачі є задача Коші для рівняння (6.7)

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv\,,\quad v(0)=v_0\,.$$

Рівняння інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{mdv}{mg-kv}=dt \quad\Rightarrow\quad v=C\,\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}\,.$$

Значення сталої інтегрування C знаходимо з початкової умови:

$$v(0)=v_0 \quad\Rightarrow\quad C=v_0-\tfrac{mg}{k}\,.$$

Отже, шуканий закон зміни швидкості

$$v=\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}\,. \tag{6.9}$$

Із формули (6.9) випливає, що при досить великих t швидкість v мало залежить від v_0. Зауважимо, що з (6.9), спрямувавши $k\to 0$, отримаємо закон зміни швидкості (6.6) при $t_0=0$ для випадку, коли опір повітря відсутній або настільки малий, що ним можна нехтувати:

$$\lim_{k\to 0}\left[\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}\right]=v_0+gt\,.$$

Також із формули (6.9) за потреби можна знайти закон вільного падіння тіла $s(t)$. Справді, якщо задане початкове значення $s(0)=s_0$, то

$$s(t)=\int_0^t v(\tau)d\tau+s_0=\frac{m}{k}\left[\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)+gt\right]+s_0\,.$$

Приклад 6.3. Тіло маси m підкинули вертикально вгору з рівня землі із початковою швидкістю v_0. Знайти максимальну висоту підйому тіла, вважаючи опір повітря пропорційним квадрату швидкості з коефіцієнтом k.

Розв'язання. Скористаємося рівнянням (6.8), модифікувавши його з огляду на те, що в нашому випадку сила тяжіння напрямлена протилежно до напряму руху. Отже, маємо задачу Коші

$$m\frac{dv}{dt}=-mg-kv^2\,,\quad v(0)=v_0\,.$$

Рівняння, як і в попередньому прикладі, інтегрується шляхом відокремлення змінних:

$$\frac{mdv}{v^2+\frac{mg}{k}}=-kdt \quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,\mathrm{tg}\left(C-\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right).$$

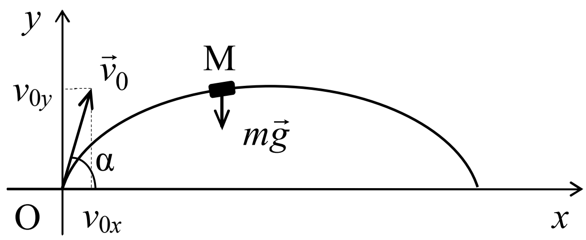
Із початкової умови визначаємо $C=\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}v_0\right)$. Очевидно, що в момент досягнення максимальної висоти швидкість тіла зменшується до нуля. Це дає можливість визначити час підйому $t_{\max}$:

$$v(t_{\max}) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{\max} = C\sqrt{\tfrac{m}{kg}} = \sqrt{\tfrac{m}{kg}}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\tfrac{k}{mg}}v_0\right).$$

Нехай $s(t)$ – закон висхідного руху тіла. Тоді максимальна висота підйому буде $h = s(t_{\max})$. Знайдемо цю величину з урахуванням того, що за умовою задачі $s(0) = 0$:

$$h = s(t_{\max}) = \int_0^{t_{\max}} v(\tau)d\tau = \frac{m}{2k}\ln\left(1 + \frac{k}{mg}v_0^2\right).$$

3. ***Політ тіла, запущеного під кутом до горизонту.*** Нехай тіло маси m запустили в політ під кутом α до горизонтальної поверхні з початковою швидкістю v_0. Виведемо рівняння руху тіла, нехтуючи опором довкілля.



Мал. 6.1

Виберемо осі координат так, як показано на мал. 6.1. Якщо нехтувати опором повітря, то на тіло в довільному положенні M діє єдина сила – його вага $P = mg$. Тому згідно з другим законом Ньютона (6.1) диференціальні рівняння руху тіла в проєкціях на осі x і y матимуть вигляд

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg. \tag{6.10}$$

До рівнянь (6.10) згідно з умовою задачі додаються початкові умови

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0\cos\alpha, \quad \dot{y}(0) = v_0\sin\alpha. \tag{6.11}$$

Із постановки задачі (6.10), (6.11) очевидно, що рух тіла не залежить від його маси m. Зінтегрувавши рівняння (6.10) з урахуванням початкових умов (6.11), одержимо рівняння руху тіла у вигляді

$$x = v_0 t\cos\alpha, \quad y = v_0 t\sin\alpha - 0{,}5gt^2. \tag{6.12}$$

На підставі співвідношень (6.12) можна зробити ряд висновків щодо характеру руху запущеного в політ тіла. Наприклад, *час польоту* T визначається тим ненульовим значенням змінної t, при якому $y = 0$, тобто

$$T = 2v_0 g^{-1}\sin\alpha.$$

Дальність польоту по горизонталі L рівна значенню змінної x при значенні змінної t, рівному часу польоту, отже

$$L = x(T) = v_0^2 g^{-1}\sin 2\alpha.$$

Із останньої рівності зокрема випливає, що дальність буде найбільшою, коли $2\alpha = 90^\circ$, тобто $\alpha = 45^\circ$: у цьому випадку $L = v_0^2 g^{-1}$.

Максимальну висоту польоту H можна знайти, вказавши найбільше значення функції $y(t)$ на проміжку $t \in [0;T]$. Для цього треба знайти ту точку t_0 з цього проміжку, для якої $\dot{y}(t_0) = 0$:

$$v_0 \sin\alpha - gt_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = v_0 g^{-1} \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad H = y(t_0) = 0{,}5 v_0^2 g^{-1} \sin^2\alpha .$$

Бачимо, що $t_0 = 0{,}5T$, звідки $x(t_0) = 0{,}5L$, тобто максимальної висоти тіло досягає на половині дальності свого польоту.

Траєкторію польоту у вигляді $y = f(x)$ отримаємо, виключивши з системи рівнянь (6.12) змінну t. Це дає рівняння параболи

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} .$$

Джерела:

1. *Амелькин В.В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: «Наука», 1987. – С. 57-59.
2. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 2. – М.: «Наука», 1970. – С. 15-16.
3. *Rontó Miklós, Raisz Péterné.* Differenciálegyenletek műszakiaknak. Elméleti összefoglaló 300 kidolgozott feladattal. – Miskolci egyetemi kiadó, 2004. – С. 225, 267.