

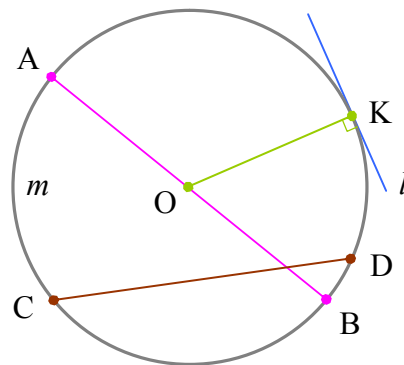
Коло і круг

Коло – фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від заданої точки. Ця точка називається **центром кола**. Відстань від точок кола до його центра (або також відрізок, який сполучає точку кола з його центром) називається **радіусом** кола. Відрізок, який сполучає дві точки кола, називається **хордою**. Хорда, яка проходить через центр кола, називається **діаметром**.

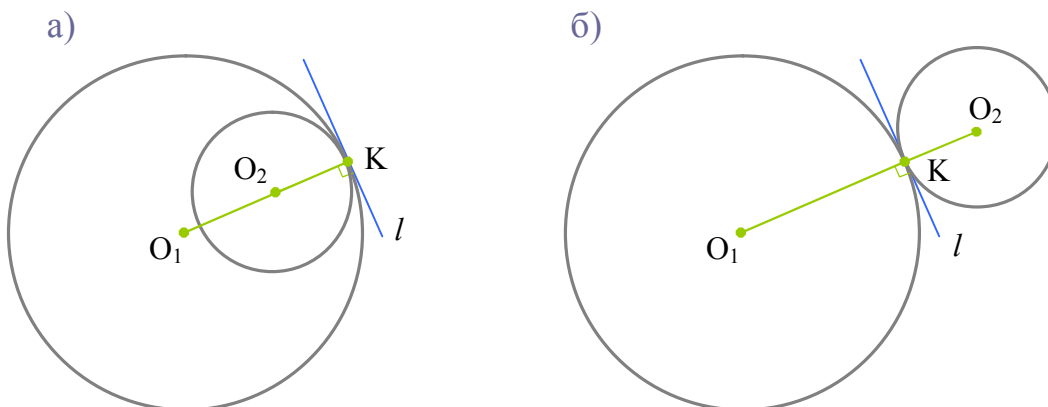
Пряма, що проходить через точку кола перпендикулярно до радіуса, проведеного в цю точку, називається **дотичною**. При цьому дана точка (спільна точка дотичної та кола) називається **точкою дотику**.

Мал. 5.1. Коло та його елементи:

O – центр кола;
 AB – діаметр кола;
 $OA = OB = OK$ – радіуси кола;
 CD – хорда;
 l – дотична до кола;
 K – точка дотику;
 AmC – дуга.



Кажуть, що два кола, які мають спільну точку, **дотикаються** в цій точці, якщо вони мають у ній спільну дотичну. При цьому дотик кіл називається **внутрішнім**, якщо центри кіл лежать по один бік від їх спільної дотичної, і **зовнішнім** – якщо по різні боки.



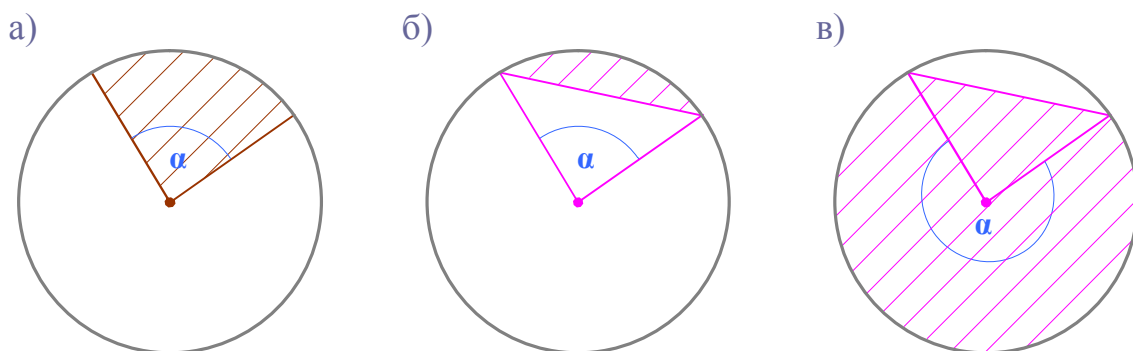
Мал. 4.2. Дотик кіл: а) внутрішній; б) зовнішній;
 O_1, O_2 – центри кіл, l – спільна дотична, K – точка дотику.

Круг – фігура, яка складається з усіх точок площини, що лежать від даної точки (центра круга) на відстані, не більшій за задану (радіус круга). Межею круга є коло з тим же центром і радіусом.

Центральним кутом у колі (крузі) називається плоский кут із вершиною в центрі кола. Частина кола, розміщена всередині центрального кута, називається **дугою** кола, що відповідає даному центральному куту. Градусною мірою дуги кола називається градусна міра відповідного центрального кута. Дуга з градусною мірою 180° називається **півколом**.

Круговий сектор – частина круга, що лежить усередині центрального кута. Межею сектора є дуга кола, що відповідає деякому центральному куту, і два відрізки радіусів, які обмежують цей кут.

Круговий сегмент – спільна частина круга і півплощини. Межею сегмента є дуга кола, що відповідає деякому центральному куту, і хорда, що стягує цю дугу. Найбільша відстань від точок дуги до хорди називається **стрілою сегмента**.



Мал. 5.3. Сектор і сегмент (α – центральний кут):

а) сектор; б) сегмент $\alpha < 180^\circ$; в) сегмент $\alpha > 180^\circ$.

Концентричними називаються кола, які мають спільний центр. **Круговим кільцем** називається фігура, яка складається з двох концентричних кіл різних радіусів R і r , і всіх точок площини, що лежать між цими колами. Якщо $R > r$, то величина $d = 2r$ називається **внутрішнім діаметром**, $D = 2R$ – **зовнішнім діаметром**, $\rho = 0,5(R + r)$ – **середнім радіусом**, а $\delta = R - r$ – **товщиною** кільця.

5.1. Загальні властивості кола та круга

1. Рівняння кола з центром у точці $M(x_0; y_0)$ і радіусом R має вигляд:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Щоб знайти точки перетину двох кіл, або кола із прямою $ax + by + c = 0$, треба розв'язати відповідну систему рівнянь (рівнянь двох кіл або рівнянь кола та прямої).

При перетині прямої з колом можливі три випадки (позначимо d – відстань від центра кола до прямої, R – радіус кола):

а) якщо $d > R$, то пряма не перетинає коло;
 б) якщо $d = R$, то пряма є дотичною до кола;
 в) якщо $d < R$, то пряма перетинає коло у двох точках, тобто є **січною** відносно кола.

При перетині двох кіл радіусів $R \geq r$ можливі такі випадки (d – відстань між центрами кіл):

а) якщо $R - r < d < R + r$, то кола перетинаються у двох точках;
 б) якщо $d = R - r$ (внутрішній дотик), або $d = R + r$ (зовнішній дотик), то кола дотикаються;
 в) якщо $d < R - r$ (менше з кіл міститься всередині більшого), або $d > R + r$ (менше з кіл знаходиться зовні більшого), то кола не перетинаються;
 г) якщо $d = 0$, то кола є концентричними, і при $R \neq r$ не мають спільних точок, а при $R = r$ збігаються.

2. Відношення довжини кола до його діаметра не залежить від кола і рівне ірраціональному числу

$$\pi = 3,1415926536\dots$$

3. Довжина кола радіусу R (d – діаметр):

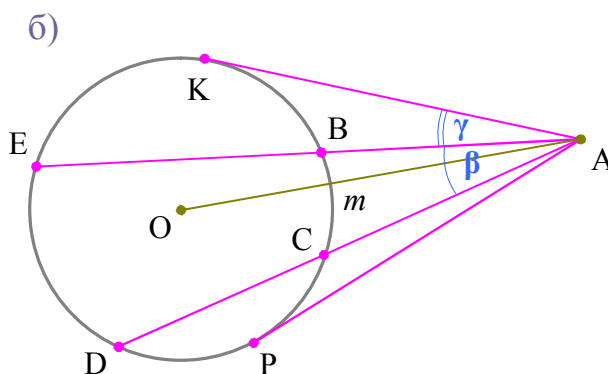
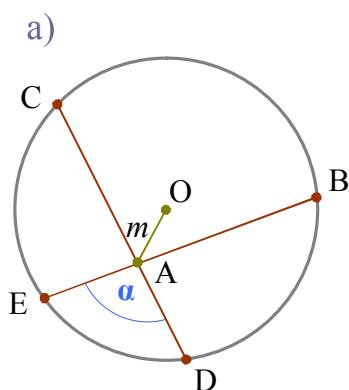
$$C = 2\pi R = \pi d.$$

4. Довжина дуги кола, яка відповідає центральному куту α° (в градусах):

$$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ.$$

Радіанною мірою кута називається відношення довжини відповідної дуги до радіуса кола. Зв'язок між радіанною мірою α_p та градусною мірою α° кута дається формулами:

$$\alpha_p = \frac{\pi \alpha^\circ}{180^\circ}, \quad \alpha^\circ = \frac{180^\circ \cdot \alpha_p}{\pi}.$$



Мал. 5.4. Властивості:

а) перетинів хорд і б) відрізків січних у колі.

5. Властивість перетинів хорд у колі (мал. 5.4а):

$$AC \cdot AD = AB \cdot AE = R^2 - m^2,$$

де $m = OA$ – відрізок, що сполучає центр кола з точкою перетину хорд, R – радіус кола.

6. Властивість відрізків січних, проведених до кола з точки A зовні кола (мал. 5.4б):

$$AB \cdot AE = AC \cdot AD = AK^2 = m^2 - R^2;$$

тут $m = OA$ – відрізок, що сполучає точку A з центром кола, R – радіус кола. Звідси випливає: відрізки дотичних, проведених із довільної точки зовні кола до нього, мають рівні довжини (на мал. 5.4б $AK = AP$).

7. Площа круга радіусу R (d – діаметр, C – довжина кола, що обмежує круг):

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{Cd}{4}.$$

Площа кругового сектора (α° – градусна міра відповідного центрального кута):

$$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ.$$

Площа кругового сегмента (одержується з формули для сектора відніманням – при $\alpha < 180^\circ$, чи додаванням – при $\alpha > 180^\circ$, площі трикутника, утвореного хордою, що стягує дугу сектора, і двома відрізками радіусів; див. мал. 5.3):

$$S = \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi \alpha^\circ}{180^\circ} \pm \sin \alpha \right) = \frac{1}{2} [lR \pm a(R - h)].$$

Тут l – довжина дуги сегмента, a – його хорда, h – висота (стріла сегмента). Для елементів сегмента справджуються формули

$$a = 2\sqrt{2hR - h^2} = 2R \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$h = R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = R \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}.$$

Площа кругового кільця, обмеженого колами радіусів R і r ($R > r$):

$$S = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 2\pi\rho\delta$$

(D – зовнішній і d – внутрішній діаметри, ρ – середній радіус, δ – товщина).

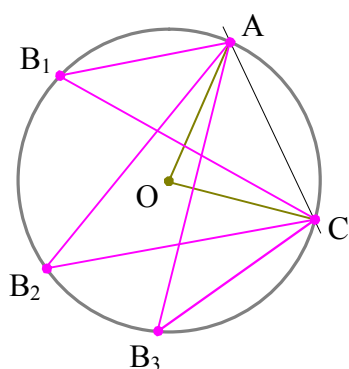
Площа частини кільця – «кільцевого сектора», що відповідає центральному куту α° :

$$S = \frac{\pi \alpha^\circ}{360^\circ} (R^2 - r^2) = \frac{\pi \alpha^\circ}{1440^\circ} (D^2 - d^2) = \frac{\pi \alpha^\circ}{180^\circ} \rho \delta.$$

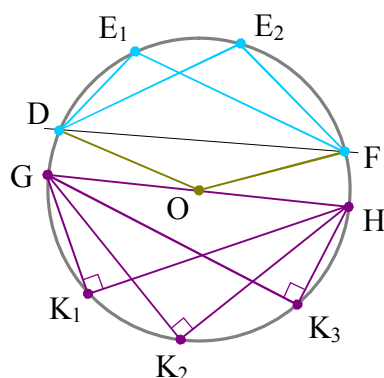
5.2. Властивості кутів, пов'язаних із колом

8. Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають коло, називається вписаним у коло. Вписаний у коло кут, сторони якого проходять через дві дані точки кола, дорівнює половині кута між радіусами, проведеними в ці точки (якщо вершина кута і центр кола лежать по один бік від прямої, яка сполучає точки перетину сторін кута з колом), або доповнює половину цього кута до 180° (у протилежному випадку). Звідси випливає: усі вписані в коло кути, сторони яких проходять через дві дані точки кола, а вершини лежать по один бік від прямої, що сполучає ці точки, рівні між собою; зокрема кути, сторони яких проходять через кінці діаметра кола («опираються на діаметр»), прямі.

а)



б)



Мал. 5.5. Властивості кутів, вписаних у коло:

а) $\angle AB_1C = \angle AB_2C = \angle AB_3C = \frac{1}{2} \angle AOC$; б) $\angle DE_1F = \angle DE_2F = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle DOF$.

Оскільки GH – діаметр, то $\angle GK_1H = \angle GK_2H = \angle GK_3H = 90^\circ$.

9. Кут між дотичною до кола і хордою, проведеною з точки дотику, рівний половині центрального кута, сторони якого проходять через кінці хорди.

10. Кут між двома хордами кола (мал. 5.4а):

$$\alpha = \frac{1}{2} (\angle COB + \angle DOE).$$

Формула справедлива і у випадку, коли хорди мають спільний кінець: тоді один із центральних кутів рівний нулю, і одержеємо властивість вписаного в коло кута.

11. Кут між двома січними до кола (мал. 5.4б):

$$\beta = \frac{1}{2} (\angle DOE - \angle COB).$$

Звідси випливає: кут між дотичною і січною до кола, проведеними з однієї точки зовні кола, рівний (мал. 5.4б)

$$\gamma = \frac{1}{2}(\angle KOE - \angle KOB).$$

Кут між двома дотичними до кола, проведеними з однієї точки зовні кола, рівний піврізниці центральних кутів, утворених відрізками радіусів, проведеними в точки дотику.

Джерела:

Шкільні підручники з геометрії за 6 і 7 класи