Курс: «Диференціальні рівняння» **ст. викл. Рего В. Л.**
До Модуля 3
Цикл лекцій по темах розділу:

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1. Загальні поняття та означення

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння другого порядку
$$F\left[x, y(x), y'(x), y''(x)\right] = 0, \quad x \in (a,b). \tag{1.1}$$
Нехай $\{x_i\}$ – деяка множина точок із проміжку $[a,b]$; $i = \overline{0,k}$, $k \geq 1$. Будемо вважати, що $x_0 = a$, $x_k = b$. Введемо позначення: $y(x_i) = y_i$, $y'(x_i) = y'_i$.

Означення 1. Співвідношення вигляду
$$U_j\left[y_0, y'_0, \ldots, y_k, y'_k\right] = 0, \quad j = \overline{1,m}, \tag{1.2}$$
де U_j – задані функції, називаються ***крайовими умовами***.

Означення 2. Розв'язок диференціального рівняння (1.1) називається ***регулярним***, якщо він належить класу $C^2_{(a,b)}$, тобто при $x \in (a,b)$ він є функцією, неперервною разом із похідними до другого порядку включно.

Означення 3. Задача знаходження регулярного розв'язку рівняння (1.1), який справджував би крайові умови (1.2), називається ***крайовою задачею***. При цьому кількість крайових умов m у крайовій задачі (1.1), (1.2) може бути довільною.

Означення 4. Якщо кількість точок x_i рівна 2 $(k = 1)$, то крайова задача (1.1), (1.2) називається ***двоточковою***; якщо $k > 1$, то крайова задача (1.1), (1.2) називається ***багатоточковою***.

Якщо ж в (1.2) покласти $m = 2$ і $k = 0$, то співвідношення (1.2) вироджуються в початкові умови в точці $x_0 = a$, і одержуємо задачу Коші для рівняння (1.1) вигляду
$$\begin{aligned} &F\left[x, y(x), y'(x), y''(x)\right] = 0, \quad x \in (a,b); \\ &U_j\left[y_0, y'_0\right] = 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{aligned} \tag{1.3}$$
Як відомо з теорії звичайних диференціальних рівнянь, за виконання умов теореми існування і єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння (1.1) розв'язок задачі (1.3) існує і є єдиним. Цього не можна стверджувати щодо крайової задачі (1.1), (1.2), що ілюструє наступний приклад.

Приклад 1.1. Знайти розв'язок рівняння
$$y'' + y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (a,b), \tag{1.4}$$
який справджує крайові умови
$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{1.5}$$

де A, B – задані сталі.

Розв'язання. Загальним розв'язком рівняння (1.4) є функція

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Із крайових умов (1.5) одержимо систему для визначення довільних сталих C_1 та C_2 :

$$\begin{cases} y(a) \equiv C_1 \cos a + C_2 \sin a = A; \\ y(b) \equiv C_1 \cos b + C_2 \sin b = B. \end{cases} \tag{1.6}$$

Детермінант цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos a & \sin a \\ \cos b & \sin b \end{vmatrix} = \sin(b-a)$$

залежно від значень a і b може бути рівним нулеві чи відмінним від нуля.

Так, наприклад, при $a = 0$, $b = \frac{\pi}{4}$ $\Delta = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$, і крайова задача (1.4), (1.5) матиме єдиний розв'язок

$$y(x) = A\cos x + \left(B\sqrt{2} - A\right)\sin x.$$

Зате при $a = 0, b = \pi$ будемо мати $\Delta = \sin\pi = 0,$ а система (1.6) набуде вигляду

$$\begin{cases} C_1 = A; \\ -C_1 = B. \end{cases}$$

Звідси очевидно: якщо $B = -A,$ то крайова задача (1.4), (1.5) матиме безліч розв'язків вигляду

$$y(x) = A\cos x + C_2 \sin x,$$

де C_2 – довільна стала. Якщо ж $B \neq -A,$ то задача (1.4), (1.5) не має розв'язку.

Таким чином, якщо задача Коші за виконання умов теореми існування та єдиності завжди має єдиний розв'язок, то на відміну від неї крайова задача може мати єдиний чи безліч розв'язків, або ж не мати жодного.

У подальших дослідженнях зосередимося на розгляді двоточкових крайових задач для лінійного диференціального рівняння другого порядку

$$L_2[y] \equiv p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \quad x \in (a,b), \tag{1.7}$$

де $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $f(x)$ – задані неперервні на інтервалі $x \in (a,b)$ функції, причому $p_0(x) \neq 0,$ із лінійними крайовими умовами вигляду

$$U_j(y) \equiv \alpha_{0,j}y(a) + \alpha_{1,j}y'(a) + \beta_{0,j}y(b) + \beta_{1,j}y'(b) = \gamma_j, \quad j = \overline{1,m}. \tag{1.8}$$

2. Лінійні однорідні крайові задачі

Означення 5. ***Лінійна однорідна крайова задача*** (ЛОКЗ) полягає у знаходженні регулярного на інтервалі (a,b) розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння

$$L_2[y] \equiv p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \quad x \in (a,b), \tag{2.1}$$

який справджує лінійні однорідні крайові умови

$$U_j(y) \equiv \alpha_{0,j}y(a) + \alpha_{1,j}y'(a) + \beta_{0,j}y(b) + \beta_{1,j}y'(b) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{2.2}$$

Очевидно, що ЛОКЗ (2.1), (2.2) завжди має тривіальний розв'язок $y(x)\equiv 0$, проте це не означає, що такий розв'язок завжди є єдиним. Дослідимо, за яких умов задача (2.1), (2.2) матиме і нетривіальні розв'язки.
Позначимо через $\{y_1(x), y_2(x)\}$ фундаментальну систему частинних розв'язків (ФСЧР) рівняння (2.1). Зауважимо, що внаслідок умов, накладених на коефіцієнти $p_k(x)$, ФСЧР для рівняння (2.1) існує. Тоді загальний розв'язок цього рівняння запишеться у вигляді лінійної комбінації

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{2.3}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. ЛОКЗ (2.1), (2.2) матиме нетривіальний розв'язок, якщо можна підібрати такі C_1, C_2, не рівні одночасно нулеві, щоб функція (2.3) справджувала крайові умови (2.2). Підклавши (2.3) в (2.2), одержимо алгебраїчну систему рівнянь відносно невідомих сталих C_1, C_2 вигляду

$$U_j\big(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)\big) = 0, \quad j=\overline{1,m}. \tag{2.4}$$

Враховуючи лінійність крайових умов (2.2), із (2.4) одержимо:

$$C_1 U_j(y_1) + C_2 U_j(y_2) = 0, \quad j=\overline{1,m}. \tag{2.5}$$

Позначимо через $U \equiv \left\| U_j(y_i) \right\|$ матрицю системи (2.5), а через $s = \operatorname{rank} U$ – ранг цієї матриці. Очевидно, що $s \le 2$ і не залежить від вибору ФСЧР рівняння (2.1). Число s називається ***рангом*** крайової задачі (2.1), (2.2).
Система (2.5) – а отже, і ЛОКЗ (2.1), (2.2) – матиме нетривіальний розв'язок, якщо ранг матриці системи $s<2$. Мають силу наступні критерії:

1. Якщо $s=2$, то ЛОКЗ (2.1), (2.2) має тільки тривіальний розв'язок.
2. Якщо $s<2$, то ЛОКЗ (2.1), (2.2) матиме і нетривіальні розв'язки, причому число лінійно незалежних частинних розв'язків буде $2-s$.

Очевидно також:

а) якщо $m<2$, то ЛОКЗ (2.1), (2.2) завжди має нетривіальний розв'язок;
б) якщо $m=2$, то нетривіальний розв'язок існує тільки за виконання умови $\det U = 0$;
в) якщо $m>2$, то існування нетривіального розв'язку залежить від рангу крайової задачі (див. критерії ***1.*** і ***2.***).

Приклад 2.1. Дослідити лінійну однорідну крайову задачу:

$$y'' - 4y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння є

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Із крайових умов одержуємо систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1\,\mathrm{e}^{2} + C_2\,\mathrm{e}^{-2} = 0. \end{cases}$$

Маємо випадок $m=2$ (кількість крайових умов співпадає з порядком диференціального рівняння), причому

$$\det\ U = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^2 & e^{-2} \end{vmatrix} = -2\,\mathrm{sh}\,2 \neq 0.$$

Отже, згідно з критерієм ***б)*** наведена ЛОКЗ має тільки тривіальний розв'язок.

Приклад 2.2. Дослідити лінійну однорідну крайову задачу:

$$y'' + 4y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\pi);$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \quad y'(\pi/4) = 0.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння є

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Із крайових умов одержуємо систему

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ C_1 = 0; \\ -2C_1 = 0. \end{cases} \quad \text{Матриця системи } U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \ \ \mathrm{rank}\ U = 1.$$

Маємо випадок $s = 1 < 2$. Отже, згідно з критерієм ***2.*** наведена ЛОКЗ має нетривіальні розв'язки, а саме $y(x) = C \sin 2x,$ де $C = const$, серед яких лінійно незалежних є $2 - s = 2 - 1 = 1$.

3. Лінійні неоднорідні крайові задачі

Означення 6. Лінійна крайова задача називається ***неоднорідною*** (ЛНКЗ), якщо рівняння або крайові умови неоднорідні. У загальному випадку ЛНКЗ полягає у знаходженні регулярного на інтервалі (a,b) розв'язку лінійного диференціального рівняння (1.7), який справджує крайові умови (1.8).

Як відомо, за виконання умов, накладених на коефіцієнти рівняння (1.7), загальний розв'язок цього рівняння подається у вигляді суми загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (2.1) та деякого частинного розв'язку рівняння (1.7):

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_0(x), \tag{3.1}$$

де $\{y_1(x), y_2(x)\}$ – ФСЧР однорідного рівняння (1.7).

Підклавши (3.1) у крайові умови (1.8), одержимо систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих сталих вигляду

$$C_1 U_j(y_1) + C_2 U_j(y_2) = \gamma_j - U_j(y_0), \quad j = \overline{1,m}. \tag{3.2}$$

Очевидно, що існування розв'язку ЛНКЗ (1.7), (1.8) визначатиметься розв'язністю системи (3.2).

Позначимо через U матрицю системи (3.2), а через U_e – відповідну розширену [стовпцем вільних членів $\gamma_j - U_j(y_0)$] матрицю системи. Тоді мають силу наступні твердження:

1. Якщо $m > 2$, то можливі випадки:

а) $\mathrm{rank}\, U = \mathrm{rank}\, U_e = 2$. Тоді система (3.2) має єдиний розв'язок;

б) $\mathrm{rank}\, U = 2$, $\mathrm{rank}\, U_e > 2$. Тоді система (3.2) не має розв'язку;

в) $\mathrm{rank}\, U = s < 2$. Тоді при $\mathrm{rank}\, U_e = s$ система (3.2) має безліч розв'язків, причому довільних сталих у розв'язку залишиться $2 - s$; при $\mathrm{rank}\, U_e \neq \mathrm{rank}\, U$ система (3.2) не має розв'язку.

2. Якщо $m = 2$, то можливі випадки:
а) $\det U \neq 0$. Тоді система (3.2) має єдиний розв'язок;
б) $\det U = 0$, $\operatorname{rank} U_e \neq \operatorname{rank} U$. Тоді система (3.2) не має розв'язку;
в) $\det U = 0$, $\operatorname{rank} U_e = \operatorname{rank} U = s < 2$. Тоді система (3.2) має безліч розв'язків, причому довільних сталих у розв'язку знову залишиться $2 - s$.
3. Якщо $m < 2$, то система (3.2) або має безліч розв'язків (якщо ранги матриць U та U_e рівні), або не має розв'язку (якщо ранги не співпадають).

Приклад 3.1. Дослідити лінійну неоднорідну крайову задачу

$$y'' + y = \sin x, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння є

$$\bar{y}(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо за допомогою методу невизначених коефіцієнтів у вигляді

$$y_0(x) = x(A \sin x + B \cos x).$$

Тоді $y_0''(x) = 2A \cos x - 2B \sin x - x(A \sin x + B \cos x)$. Із неоднорідного рівняння дістанемо $A = 0$, $B = -0{,}5$. Тоді $y_0(x) = -0{,}5x \cos x$ і

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x - 0{,}5x \cos x. \qquad (3.3)$$

Із крайових умов одержуємо систему

$$\begin{cases} C_2 = 0; \\ C_1 \sin 1 + C_2 \cos 1 = 0{,}5 \cos 1. \end{cases}$$

Маємо випадок $m = 2$, $\det U = -\sin 1 \neq 0$. Отже, згідно з пунктом ***а)*** критерію **2.** ЛНКЗ повинна мати єдиний розв'язок. Визначивши сталі з системи та підклавши в (3.3), одержимо

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x) = 0{,}5(\operatorname{ctg} 1 \sin x - x \cos x).$$

4. Функція Ґріна лінійної крайової задачі

Означення 7. Функція $G(x,\xi)$, визначена в прямокутнику $D = \{(x,\xi) \mid a \le x, \xi \le b\}$, називається ***функцією Ґріна*** крайової задачі для рівняння (2.1) із крайовими умовами

$$U_j(y) \equiv \alpha_{0,j} y(a) + \alpha_{1,j} y'(a) + \beta_{0,j} y(b) + \beta_{1,j} y'(b) = 0, \quad j = \overline{1,2} \qquad (4.1)$$

(тобто умовами (2.2) при $m = 2$), якщо
а) вона неперервна за обома аргументами в області D;
б) при $x \neq \xi$ $G(x,\xi)$ має неперервні похідні до другого порядку включно в області D, а при $x = \xi$ її перша похідна має розрив першого роду зі стрибком $p_0^{-1}(\xi)$:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=\xi_+} - \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=\xi_-} = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$

в) при $x \neq \xi$ $G(x,\xi)$ як функція змінної x є розв'язком рівняння (2.1) і справджує крайові умови (4.1):

$$L_2[G(x,\xi)] = 0; \quad U_j[G(x,\xi)] = 0, \quad j = \overline{1,2} \quad (x \neq \xi).$$

Теорема 4.1 ***(про існування функції Ґріна лінійної крайової задачі).*** Якщо крайова задача (2.1), (4.1) має тільки тривіальний розв'язок, то для неї існує функція Ґріна, яка визначається однозначно.

Оскільки $G(x,\xi)$ є розв'язком рівняння (2.1) як функція змінної x при $x \neq \xi$, то її очевидно можна шукати у вигляді

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1(\xi)y_1(x) + a_2(\xi)y_2(x), & a \le x < \xi; \\ b_1(\xi)y_1(x) + b_2(\xi)y_2(x), & \xi < x \le b, \end{cases} \tag{4.2}$$

де $\{y_1(x), y_2(x)\}$ – деяка ФСЧР рівняння (2.1), а $a_i(\xi)$, $b_i(\xi)$, $i = \overline{1,2}$ – довільні функції змінної ξ, які слід вибрати таким чином, щоб для виразу (4.2) виконувалися й інші умови з означення функції Ґріна.

Теорема 4.2 ***(метод функції Ґріна).*** Якщо однорідна крайова задача (2.1), (4.1) має тільки тривіальний розв'язок, то для довільної $f(x) \in C_{(a,b)}$ розв'язок крайової задачі (1.7), (4.1) дається формулою

$$y(x) = \int_a^b f(\xi) G(x,\xi) d\xi .$$

5. Спектральні задачі

Розглянемо крайову задачу для рівняння другого порядку з параметром

$$L_2[y] \equiv p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = \lambda y, \quad x \in (a,b), \quad \lambda = const, \tag{5.1}$$

із крайовими умовами (2.2).

Означення 8. Ті значення параметру λ, при яких ЛОКЗ (5.1), (2.2) має нетривіальні розв'язки $y(x) \neq 0$, називаються ***власними значеннями*** крайової задачі, а відповідні нетривіальні розв'язки називаються ***власними функціями***.

Означення 9. Уся множина власних значень називається ***спектром*** крайової задачі. Тому ЛОКЗ (5.1), (2.2), а також подібні до неї задачі знаходження власних значень і власних функцій часто називають ***спектральними задачами***. Однією з найпоширеніших спектральних задач для рівнянь другого порядку є так звана ***задача Штурма-Ліувілля***

$$[p(x)y']' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (a,b);$$
$$A_0 y(a) + B_0 y'(a) = 0, \quad A_1 y(b) + B_1 y'(b) = 0,$$

де $p(x) \in C^1_{(a,b)}$, а $q(x)$, $\rho(x) \in C_{(a,b)}$, причому $p(x) > p_0 > 0$, $\rho(x) > \rho_0 > 0$.

Означення 10. Максимальна кількість лінійно незалежних власних функцій, які відповідають одному й тому ж власному значенню, називається ***кратністю*** цього власного значення. Кратність довільного власного значення не може перевищувати порядку диференціального рівняння (5.1).

Означення 11. Спектр крайової задачі називається ***дискретним***, якщо всі його власні значення однократні, тобто кожному власному значенню відповідає єдина лінійно незалежна власна функція.

Позначимо через $y_i(\lambda, x)$, $i = \overline{1,2}$, розв'язки задач Коші

$$L_2(y_i) = \lambda y_i(x), \quad x > a, \quad i = \overline{1,2};$$
$$y_1(a) = 1, \quad y_1'(a) = 0;$$
$$y_2(a) = 0, \quad y_2'(a) = 1.$$

Очевидно, що наведені задачі Коші мають розв'язки і ці розв'язки єдині, а система функцій $\{y_1(\lambda, x), y_2(\lambda, x)\}$ є лінійно незалежною. Тоді функція

$$y(\lambda, x) = C_1 y_1(\lambda, x) + C_2 y_2(\lambda, x), \tag{5.2}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі, буде загальним розв'язком рівняння (5.1). Для існування власних значень необхідно, щоб із (5.2) можна було вибрати нетривіальний розв'язок, котрий справджував би крайові умови (2.2), тобто щоб існував нетривіальний розв'язок системи, залежної від параметра

$$C_1 U_j(y_1) + C_2 U_j(y_2) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{5.3}$$

Мають силу наступні критерії:

1) якщо $m < 2$, то система (5.3), а отже, й крайова задача (5.1), (2.2) має нетривіальні розв'язки при будь-яких значеннях параметра λ;

2) якщо $m = 2$, то нетривіальні розв'язки існують тоді й тільки тоді, коли детермінант матриці системи (5.3) рівний нулеві:

$$\Delta(\lambda) \equiv \det \left\| U_j(y_i) \right\| = 0. \tag{5.4}$$

У цьому випадку рівняння (5.4) називається ***характеристичним***, а нулі функції $\Delta(\lambda)$ – тобто ті значення параметра λ, котрі справджують рівність (5.4) – є власними значеннями крайової задачі (5.1), (2.2). Кратність власного значення не може перевищувати кратності відповідного кореня характеристичного рівняння;

3) якщо $m > 2$, то система (5.3) має нетривіальні розв'язки, коли ранг її матриці менший за 2, тобто всі мінори другого порядку рівні нулеві. Тут можливі два випадки:

а) усі мінори другого порядку тотожно рівні нулеві при довільних значеннях параметра λ – тоді будь-яке значення λ буде власним;

б) серед мінорів другого порядку є не рівні тотожно нулеві – тоді власними значеннями крайової задачі (5.1), (2.2) будуть ті значення параметра λ, за яких усі мінори другого порядку обертаються в нуль, а відповідні їм нетривіальні розв'язки будуть власними функціями.

Приклад 5.1. Дослідити спектральну задачу, вважаючи параметр λ дійсним:

$$y'' = -\lambda y(x), \quad x \in (0,1); \tag{5.5}$$
$$y(0) - y(1) = 0, \quad y'(0) - y'(1) = 0. \tag{5.6}$$

Розв'язання. Залежно від знаку параметра λ загальний розв'язок рівняння (5.5) матиме різний вигляд. Тому для повного дослідження необхідно розглянути три можливі випадки.

1. Нехай $\lambda < 0.$ Тоді загальний розв'язок рівняння (5.5) матиме вигляд $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Із крайових умов (5.6) одержимо систему:

$$\begin{cases} C_1\left(1-\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}}\right) + C_2\left(1-\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}}\right) = 0; \\ C_1\sqrt{-\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}}\right) - C_2\sqrt{-\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}}\right) = 0. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}} & 1-\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}} \\ \sqrt{-\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}}\right) & \sqrt{-\lambda}\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}}-1\right) \end{vmatrix} \equiv 4\sqrt{-\lambda}\left(\mathrm{ch}\sqrt{-\lambda}-1\right) = 0$$

не має від'ємних коренів. Отже, $C_1 = C_2 = 0,$ тобто крайова задача має тільки тривіальний розв'язок, а тому при $\lambda < 0$ власних значень не існує.

2. Нехай $\lambda = 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (5.5) матиме вигляд $y(x) = C_3 x + C_4$. Ця функція справджує крайові умови (5.6) при довільному значенні C_4, якщо тільки $C_3 = 0$. Отже, $\lambda = 0$ буде власним значенням, якому відповідатиме власна функція $y(x) = C_4 \neq 0.$

3. Нехай $\lambda > 0.$ Тоді загальний розв'язок рівняння (5.5) матиме вигляд $y(x) = C_5\cos\sqrt{\lambda}x + C_6\sin\sqrt{\lambda}x.$ Із крайових умов (5.6) одержимо систему:

$$\begin{cases} C_5\left(\cos\sqrt{\lambda}-1\right) + C_6\sin\sqrt{\lambda} = 0; \\ C_5\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - C_6\sqrt{\lambda}\left(\cos\sqrt{\lambda}-1\right) = 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda}-1 & \sin\sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}\left(1-\cos\sqrt{\lambda}\right) \end{vmatrix} \equiv 2\sqrt{\lambda}\left(\cos\sqrt{\lambda}-1\right) = 0$$

має додатні корені вигляду $\lambda_k = 4\pi^2k^2,\ k = \overline{1,\infty},$ які й будуть шуканими власними значеннями. Для цих значень обидва рівняння системи (5.7) обертаються в тотожності, тому відповідні власні функції запишуться у вигляді $y_k(x) = C_5\cos 2\pi kx + C_6\sin 2\pi kx.$ Це означає, що кожному додатному власному значенню відповідатимуть дві лінійно незалежні власні функції, тобто спектр крайової задачі (5.5), (5.6) не є дискретним. Об'єднавши випадки $\lambda = 0$ і $\lambda > 0,$ можна записати всю множину власних значень і власних функцій крайової задачі (5.5), (5.6):

$$\lambda_k = 4\pi^2k^2, \quad y_k(x) = A_k\cos 2\pi kx + B_k\sin 2\pi kx, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Тут A_k, B_k – довільні сталі, причому $A_0 \neq 0,\ A_k^2 + B_k^2 \neq 0,\ k = \overline{1,\infty}.$

Джерело:

Маринець В. В., Рего В. Л., Маринець К. В. Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. – Ужгород: «Говерла», 2013. – 196 с.