ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

1. Зведення рівнянь другого порядку до найпростіших форм

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння (ЛОДР) другого порядку вигляду

$$L_2[y] \equiv p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \tag{1.1}$$

де $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ – відомі неперервні в області задання рівняння (1.1) функції, причому $p_0(x) \neq 0$.

Наведемо деякі спрощені форми ЛОДР (1.1), що отримуються з нього шляхом певних перетворень, які ілюструються в наступних теоремах.

Теорема 1.1 (***зведення ЛОДР другого порядку до самоспряженої форми***). Будь-яке ЛОДР другого порядку можна звести до ***самоспряженої форми*** вигляду

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + qy = 0 \tag{1.2}$$

шляхом домноження на деяку функцію змінної x.

Доведення. Рівняння (1.2), записане в розгорнутому вигляді

$$py'' + p'y' + qy = 0,$$

показує, що коефіцієнт при y' є похідною від коефіцієнта при y''. Домножимо рівняння (1.1) на деяку функцію $\mu(x)$, і підберемо цю функцію таким чином, щоб для нового рівняння виконувалася умова

$$[\mu p_0(x)]' = \mu p_1(x).$$

Шукаючи частинний розв’язок останнього рівняння методом відокремлення змінних, маємо:

$$p_0\mu' + p_0'\mu = p_1\mu \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{p_1 - p_0'}{p_0} \quad \Rightarrow \quad \ln\mu = \int\frac{p_1}{p_0}dx - \int\frac{p_0'dx}{p_0},$$

звідки

$$\mu = \frac{1}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}.$$

Після домноження на знайдену $\mu(x)$ рівняння (1.1) набуде вигляду

$$e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}y'' + \frac{p_1}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}y' + \frac{p_2}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}y = 0,$$

або

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^{\int \frac{p_1}{p_0}dx}\frac{dy}{dx}\right)+\frac{p_2}{p_0}\mathrm{e}^{\int \frac{p_1}{p_0}dx}\,y=0,$$

тобто справді запишеться у самоспряженій формі (1.2), де $p=\mathrm{e}^{\int \frac{p_1}{p_0}dx}$, $q=\frac{p_2}{p_0}\mathrm{e}^{\int \frac{p_1}{p_0}dx}$.

Зауважимо, що коефіцієнти p, q неперервні на будь-якому інтервалі, де p_0 не обертається в нуль; крім того, на цьому інтервалі $p>0$.

Теорема 1.2 (***зведення ЛОДР другого порядку до канонічної форми шляхом заміни незалежної змінної***). Будь-яке ЛОДР другого порядку шляхом заміни незалежної змінної можна звести до ***канонічної форми*** вигляду

$$y''+Qy=0. \tag{1.3}$$

Доведення. Нехай ЛОДР (1.1) уже зведене до самоспряженої форми (1.2) (це завжди можна зробити, як показано в Теоремі 1.1). Введемо нову незалежну змінну ξ згідно з формулами $d\xi=\frac{dx}{p(x)}$, $\xi=\int\frac{dx}{p(x)}$; ξ як функція x визначена на довільному інтервалі осі x, де $p\neq 0$. Оскільки $\frac{d\xi}{dx}=\frac{1}{p}>0$, то x також визначається як неперервно-диференційовна функція ξ на відповідних інтервалах осі ξ: $x=\chi(\xi)$. Тоді $\frac{du}{d\xi}=\frac{1}{p}\frac{du}{dx}$ для будь-якої функції u. Підставляючи у рівняння (1.2), знаходимо

$$\frac{1}{p}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dy}{d\xi}\right)+qy=0,$$

що можна записати у вигляді (1.3) як

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+Q(\xi)y=0,$$

де $Q(\xi)$ є результат підстановки у $p(x)q(x)$ значення $x=\chi(\xi)$. Якщо повернутися до форми (1.1), то отримуємо

$$d\xi=\mathrm{e}^{-\int \frac{p_1}{p_0}dx}dx,\quad Q=\frac{p_2}{p_0}\mathrm{e}^{2\int \frac{p_1}{p_0}dx}.$$

Це перетворення, спрощуючи рівняння, іноді зводить його до вигляду, для якого відомий загальний розв'язок.

Теорема 1.3 (***зведення ЛОДР другого порядку до канонічної форми шляхом лінійної заміни залежної змінної***). Будь-яке ЛОДР другого порядку шляхом лінійної заміни залежної змінної можна звести до канонічної форми вигляду (1.3).

Доведення. Введемо нову невідому функцію $z(x)$, пов'язану зі старою лінійним співвідношенням

$$y=u(x)z, \tag{1.4}$$

звідки

$$y' = uz' + u'z\,, \quad y'' = uz'' + 2u'z' + u''z\,,$$

і після підстановки у вихідне ЛОДР (1.1) маємо

$$p_0(uz'' + 2u'z' + u''z) + p_1(uz' + u'z) + p_2uz = 0$$

або

$$p_0uz'' + (2p_0u' + p_1u)z' + (p_0u'' + p_1u' + p_2u)z = 0\,. \qquad (1.5)$$

Виберемо функцію $u(x)$ таким чином, щоб в отриманому рівнянні (1.5) коефіцієнт при z' обернувся в нуль:

$$2p_0u' + p_1u = 0\,.$$

З останнього рівняння знаходимо частинний розв'язок $u(x)$ і підкладаємо його в (1.5), скорочуючи на експоненціальний множник:

$$u = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int\frac{p_1}{p_0}dx}\,, \quad u' = -\frac{1}{2}\frac{p_1}{p_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int\frac{p_1}{p_0}dx}dx\,, \quad u'' = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)'\right]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int\frac{p_1}{p_0}dx}dx\,;$$

$$z'' + \left[\frac{p_2}{p_0} - \frac{1}{4}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)'\right]z = 0. \qquad (1.6)$$

Таким чином, ми отримали рівняння вигляду (1.3). Функція

$$I(x) = \frac{p_2}{p_0} - \frac{1}{4}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)'$$

називається ***інваріантом*** рівняння (1.1). Очевидно, ця функція не змінює своєї величини за будь-яких перетворень рівняння за допомогою підстановок вигляду (1.4), оскільки всі рівняння, у яких шукані функції відрізняються лише множником $u(x)$, зводяться до одного й того ж рівняння вигляду (1.6). Рівність інваріантів двох ЛОДР другого порядку є необхідною й достатньою умовою того, щоб одне з цих рівнянь могло бути перетворене до другого підстановкою вигляду (1.4).

2. Інтегрування ЛОДР другого порядку за відомим частинним розв'язком. Формула Абеля

Розглянемо ЛОДР другого порядку вигляду (1.1) із коефіцієнтом $p_0(x) \equiv 1$:

$$L_2[y] \equiv y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0\,, \qquad (2.1)$$

Нехай відомий деякий ненульовий частинний розв'язок $y_1(x)$ ЛОДР (2.1). Позначимо через $y(x)$ загальний розв'язок ЛОДР (2.1). Очевидно, що система функцій $\{y_1(x), y(x)\}$ є лінійно незалежною. Тоді згідно з формулою Остроградського-Ліувілля

$$W[y_1, y] \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = y_1y' - yy_1' = C_1\,\mathrm{e}^{-\int p_1(x)dx}\,, \qquad (2.2)$$

де $C_1 = const$. Поділимо рівність (2.2) на $y_1^2(x) \neq 0$ і подамо ліву частину у вигляді точної похідної. Маємо:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2}\cdot C_1\,\mathrm{e}^{-\int p_1(x)dx}\,.$$

Домноживши останню рівність на dx, зінтегрувавши обидві її частини та виразивши з отриманого співвідношення $y(x)$, дістанемо:

$$y(x) = y_1 \cdot \left(\int C_1 \,\mathrm{e}^{-\int p_1(x)dx} \frac{dx}{y_1^2} + C_2 \right). \tag{2.3}$$

Формула (2.3) називається ***формулою Абеля***. Вона визначає загальний розв'язок ЛОДР (2.1) за відомим ненульовим частинним розв'язком $y_1(x)$ цього рівняння. Її зручно застосовувати у випадках, коли частинний розв'язок ЛОДР (2.1) очевидний або легко підбирається.

Приклад 2.1. Із застосуванням формули Абеля розв'язати ЛОДР другого порядку

$$(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0. \tag{2.4}$$

Розв'язання. ЛОДР (2.4) має очевидний частинний розв'язок $y_1(x) = x$ (це легко перевірити безпосередньою підстановкою). Для застосування формули Абеля спочатку запишемо рівняння (2.4) у вигляді (2.1), поділивши на коефіцієнт при y'':

$$y'' - \frac{2x}{x^2 - 1} y' + \frac{2}{x^2 - 1} y = 0,$$

звідки $p_1(x) = -\dfrac{2x}{x^2 - 1}$. Підставивши знайдені $p_1(x)$ та $y_1(x)$ у формулу (2.3), одержимо вираз для загального розв'язку рівняння (2.4)

$$y(x) = x \cdot \left(\int C_1 \,\mathrm{e}^{\int \frac{2xdx}{x^2 - 1}} \frac{dx}{x^2} + C_2 \right).$$

Обчисливши інтеграли, отримаємо шуканий загальний розв'язок ЛОДР (2.4)

$$y = C_1(x^2 + 1) + C_2 x.$$

Зауважимо, що знання кількох ненульових частинних розв'язків дає змогу зінтегрувати ЛОДР і вищих за другий порядків. Має силу наступне твердження: якщо для ЛОДР n-го порядку

$$L_n[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0, \tag{2.5}$$

відомі $m < n$ лінійно незалежних ненульових частинних розв'язків, то його порядок можна понизити на m одиниць.

Справді, нехай $\{y_1(x), \ldots, y_m(x)\}$ – система m лінійно незалежних розв'язків ЛОДР (2.5). Ввівши послідовно заміни $y = y_1 z$, $z' = u$, одержимо ЛОДР $(n-1)$-го порядку відносно нової невідомої функції $u(x)$

$$L_{n-1}[u] = 0. \tag{2.6}$$

Очевидно, що для ЛОДР (2.6) відомі $(m-1)$ лінійно незалежних частинних розв'язків: $u_1 = \left(y_2 / y_1 \right)'$, ..., $u_{m-1} = \left(y_m / y_1 \right)'$: це безпосередньо випливає зі введених замін. У ЛОДР (2.6) вводимо послідовно заміни $u = u_1 v$, $v' = w$: тоді відносно функції $w(x)$ одержимо ЛОДР $(n-2)$-го порядку $L_{n-2}[w] = 0$ із відомими $(m-2)$ лінійно незалежними частинними розв’язками $w_1 = (u_2/u_1)'$, ..., $w_{m-2} = (u_{m-1}/u_1)'$, і т. д. Процес повторюємо, поки не отримаємо ЛОДР порядку $(n-m)$.

3. Інтегрування ЛОДР другого порядку за допомогою степеневих рядів

З огляду на велику важливість багатьох ЛОДР другого порядку у практичному застосуванні, у тих випадках, коли їх не вдається зінтегрувати в квадратурах, їх розв’язки вводяться в якості нових трансцендентних функцій. Такими є, наприклад, функції Бесселя першого та другого роду – два лінійно незалежні розв’язки рівняння Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,$$

де n довільна стала. Для визначення цих функцій часто користуються поданням розв’язку рівняння у вигляді степеневого ряду за зростаючими степенями $x - x_0$, де x_0 – початкове значення. В аналітичній теорії диференціальних рівнянь доводиться: якщо коефіцієнти p_0, p_1, p_2 рівняння (1.1) є поліномами або степеневими рядами з цілих невід’ємних степенів $x - x_0$, причому $p_0(x_0) \neq 0$, тоді розв’язки ЛОДР (1.1) також подаються збіжними степеневими рядами за цілими невід’ємними степенями $x - x_0$.

Приклад 3.1. Із застосуванням методу степеневих рядів знайти загальний розв’язок ЛОДР другого порядку

$$y'' + xy = 0. \tag{3.1}$$

Розв’язання. Будемо шукати розв’язок у вигляді степеневого ряду за степенями x:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

Формальним диференціюванням знаходимо

$$y'' = 2\cdot 1\cdot A_2 + 3\cdot 2\cdot A_3 x + \ldots + n(n-1)A_n x^{n-2} + \ldots$$

Підставивши в (3.1) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, маємо

$$2\cdot 1\cdot A_2 = 0,\quad 3\cdot 2\cdot A_3 + A_0 = 0,$$

$$4\cdot 3\cdot A_4 + A_1 = 0,\quad \ldots,\quad n(n-1)A_n + A_{n-3} = 0,\ \ldots$$

Із останніх рівнянь отримуємо:

$$A_2 = 0,\quad A_3 = -\frac{A_0}{2\cdot 3},\quad A_4 = -\frac{A_1}{3\cdot 4},\quad A_5 = -\frac{A_2}{4\cdot 5} = 0,$$

$$A_6 = -\frac{A_3}{5\cdot 6} = \frac{A_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6},\quad A_7 = -\frac{A_4}{6\cdot 7} = \frac{A_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7},$$

і загалом

$$A_{3k-1} = 0,\quad A_{3k} = (-1)^k \frac{A_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots\cdot (3k-1)\cdot 3k},\quad A_{3k+1} = (-1)^k \frac{A_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot \ldots\cdot 3k\cdot (3k+1)}.$$

Коефіцієнти A_0 і A_1 не визначаються з вищенаведених рівнянь: це – дві довільні сталі. Отже, загальний розв’язок має вигляд

$$y = A_0\left\{1 - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} - \ldots + \frac{(-1)^k x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots\cdot (3k-1)\cdot 3k} + \ldots\right\} +$$

$$+A_1\left\{x-\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}-\ldots+\frac{(-1)^k x^{3k+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot 3k\cdot(3k+1)}+\ldots\right\}=$$

$$=A_0 y_1(x)+A_1 y_2(x).$$

Із застосуванням елементарних ознак легко встановити збіжність рядів $y_1(x)$ та $y_2(x)$ для всіх значень x; згідно з загальними властивостями степеневих рядів ці ряди, а також отримані з них формальним диференціюванням, збігаються рівномірно на довільному скінченому відрізку осі x. Отже, формальна побудова цих розв'язків виправдана, і вони справді є розв'язками заданого рівняння (3.1).

4. Рівняння механічних коливань

Нехай матеріальна точка маси m здійснює прямолінійний рух під дією ***відновлювальної сили*** Q – тобто сили, яка намагається повернути матеріальну точку в положення рівноваги (наприклад, сили пружності, якщо тягарець маси m прикріплений до пружини). Такі сили залежать від відхилення точки від положення рівноваги $x(t)$ і напрямлені до цього положення, надаючи таким чином руху матеріальної точки коливального характеру.

Однак, крім відновлювальних сил, одночасно діють, як правило, залежні від швидкості руху ***сили опору*** R (наприклад, сила тертя, або опір середовища – повітря чи рідини, де відбуваються коливання), а також збурювальні сили $f(t)$, що залежать від часу.

Найбільш простими для вивчення є ті випадки коливальних рухів, коли відновлювальна сила пропорційна відхиленню матеріальної точки від положення рівноваги, а сила опору пропорційна швидкості точки, тобто в проекціях на вісь x

$$Q=-kx,\quad R=-\alpha v=-\alpha\dot{x}\ , \tag{4.1}$$

де $k>0$ – деяка стала для даної пружини величина, яка називається ***жорсткістю*** пружини і характеризує її здатність зазнавати пружної деформації під дією навантаження, α – додатна стала (***амортизатор***). Зауважимо, що жорсткість пружини можна легко визначити із застосуванням закону Гука для визначення деформації тонкого стрижня чи пружини під дією сили F, який має вигляд $F=k\Delta x$, де Δx – ***статична деформація*** (абсолютне видовження пружини внаслідок навантаження у врівноваженому стані): отже, якщо прикріплений до пружини тягарець маси m викликає видовження пружини на величину Δx, то згідно з законом Гука

$$mg=k\Delta x\quad\Rightarrow\quad k=\frac{mg}{\Delta x}.$$

У випадку лінійних сил (4.1) на підставі другого закону Ньютона $F=ma$, де F – сума проєкцій на вісь x сил, що діють на матеріальну точку, a – прискорення руху, рівне, як відомо, $a=\dot{v}=\ddot{x}$, отримуємо диференціальну модель механічних коливань у вигляді лінійного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\ddot{x}+p\dot{x}+qx=0,\quad p=\frac{\alpha}{m}>0,\quad q=\frac{k}{m}>0 \tag{4.2}$$

у випадку відсутності зовнішніх збурювальних сил, і

$$\ddot{x}+p\dot{x}+qx=f(t), \tag{4.3}$$

у випадку наявності зовнішніх збурювальних сил $f(t)$.

Однорідне рівняння (4.2) має назву ***рівняння вільних коливань***, а неоднорідне (4.3) – ***рівняння вимушених коливань***. Коливання, які описуються лінійними рівняннями вигляду (4.2) або (4.3), називають ***лінійними коливаннями***.

Характер вільних коливань, що описуються ДР (4.2), залежить від коренів характеристичного рівняння (ХР)

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{4.4}$$

Із урахуванням обмежень $p, q > 0$ можливі випадки:

а) якщо обидва корені ХР (4.4) мають від'ємні дійсні частини, то відхилення матеріальної точки від положення рівноваги з ростом t прямує до нуля, тобто коливання припиняються через відносно короткий проміжок часу. У випадку комплексних коренів такі коливання називають ***загасаючими***;

б) якщо ХР (4.4) має два чисто уявні корені $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$ (це можливо тільки тоді, коли відсутня сила опору), тоді загальний розв'язок ДР (4.2) має вигляд

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t\,. \tag{4.5}$$

На практиці формулу (4.5) записують в іншому вигляді, ввівши нові сталі A і φ_0, пов'язані з C_1, C_2 співвідношеннями:

$$C_1 = A\sin\varphi_0, \quad C_2 = A\cos\varphi_0 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{C_1}{C_2}.$$

Тоді на підставі (2.5)

$$x = A\sin\varphi_0 \cos\omega t + A\cos\varphi_0 \sin\omega t = A\sin(\omega t + \varphi_0)\,. \tag{4.6}$$

Коливання в цьому випадку називаються ***гармонічними***; такі коливання можуть відбуватися необмежено довго за синусоїдальним законом. Проміжок часу T, за який аргумент синуса змінюється на 2π, називається ***періодом*** коливань; зокрема для функції (4.6) $T = 2\pi\omega^{-1}$. ***Частотою*** коливань називається число коливань за час 2π; у нашому випадку частота рівна ω. Величина A, що визначає найбільше відхилення від положення рівноваги, називається ***амплітудою*** коливань, а φ_0 називається ***початковою фазою***.

Для визначення амплітуди й початкової фази використовують початкові умови

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0\,,$$

які задають початкові відхилення та швидкість матеріальної точки. Зауважимо, що частота коливань не залежить від початкових умов і визначається тільки параметрами динамічної системи, яка описується рівнянням (4.2). За цією ознакою частоту вільних коливань називають також ***власною частотою*** динамічної системи.

Якщо маємо вимушені коливання, то загальний розв'язок ДР (4.3) рівний сумі загального розв'язку відповідного однорідного ДР (4.2) і деякого частинного розв'язку неоднорідного ДР (4.3):

$$x = x_{з.о.} + x_{ч.н.}, \tag{4.7}$$

Розглянемо один практично важливий випадок вимушених коливань, коли сила зовнішнього збурення є періодичною і змінюється згідно з законом $f(t) = a\sin\beta t$.

Застосувавши метод невизначених коефіцієнтів для побудови частинного розв'язку неоднорідного рівняння, легко показати:

а) якщо корені ХР (4.4) – комплексні числа з від'ємними дійсними частинами, тоді

$x_{з.о.}$ описує загасаючі коливання; із ростом t ця функція спадає, а отже, через деякий проміжок часу визначальним стане другий член суми (4.7), що описує вимушені коливання. Частота β цих коливань рівна частоті зовнішньої сили $f(t)$;

б) якщо $p=0$ і $\beta \neq \omega$, тобто частота зовнішньої сили не рівна частоті власних коливань, то обидві складові розв'язку (4.7) є гармонічними функціями, і рух відбувається внаслідок суперпозиції (накладання) власних коливань із частотою ω, і вимушених коливань із частотою β;

в) якщо $p=0$ і $\beta = \omega$, тобто частота власних коливань співпадає з частотою зовнішньої сили, амплітуда коливань необмежено зростатиме при необмеженому рості часу t. Це явище, яке спостерігається за співпадіння частоти власних коливань динамічної системи з частотою зовнішньої сили, називається ***резонансом***.

Примітка. Детальне дослідження механічних коливань див. у джерелі [2], яке за потреби можна знайти в Інфо-центрі на сайті УжНУ.

Джерела:

[1] *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – Стор. 241-259.

[2] *Рейтій О. К.* Теоретична механіка (методичний посібник з лабораторних робіт), частина ІІ. – Ужгород: «Говерла», 2006. – С. 18-30.