

Міністерство освіти і науки України  
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
Фізичний факультет  
Кафедра оптики

Гуранич П.П. Кедюлич В.М.

## **Методи розрахунку електричних кіл.**

Методична розробка з курсу

“Теорія електричних кіл”.

Для студентів спеціальності 172 – телекомунікації та радіотехніка

Ужгород 2020

Методи розрахунку електричних кіл.

Методична розробка з курсу “Теорія електричних кіл”.

для студентів спеціальності – 172. Телекомунікації та радіотехніка

Фізичний факультет ДВНЗ «Ужгородський національний університет»  
Кафедра оптики

Курс - 2

Семестр - 4

Автор: кандидат фіз.-мат. наук, доцент Гуранич П. П.

## Зміст

Програма курсу	2
1. Комплексний метод	9
2. Еквівалентні перетворення електричних кіл.	13
2.1. Перетворення з'єднання зіркою в з'єднання трикутником	13
2.2. Перетворення джерела електрорушійної сили у джерело струму.	14
2.3. Перетворення декількох паралельно з'єднаних ланок із джерелами електрорушійних сил в одну еквівалентну	15
3. Метод контурних струмів	16
4. Метод вузлових потенціалів	18
5. Принцип суперпозиції струмів (накладання струмів).	20
6. Принцип взаємності	20
7. Метод еквівалентного генератора	21
8. Розрахунок електричних кіл за допомогою системи рівнянь за законами Кірхгофа.	22
9. Метод двох вузлів	24
10. Розрахунок електричних кіл при дії несинусоїдальних періодичних е.р.с.	24
11. Методи розрахунку перехідних процесів.	
11.1. Класичний метод.	26
11.2. Операторний метод	27
11.3. Метод розрахунку перехідних процесів за допомогою інтеграла Дюамеля.	29
12. Розрахунок нелінійних кіл.	30
13. Розрахунок трифазних кіл	33
14. Розрахунок чотириполюсників	34
15. Розрахунок електричних фільтрів	39

# Програма курсу

“Теорія електричних кіл”.

## *Вступ*

Історичний нарис розвитку і еволюції електротехніки, радіотехніки, радіоелектроніки. Зв'язок з іншими областями науки і техніки. Предмет і зміст курсу.

## *1. Лінійні електричні кола. Сигнали.*

Електричне коло. Поняття струму, напруги, ЄРС. Елементи електричного кола і їхні моделі. Закони Ома і Кірхгофа. Потужність і енергія. Дуальні електричні кола. Сигнали. Метод інтегрального перетворення Фур'є (спектральний метод). Ряди і інтеграли Фур'є. Поняття про спектр. Спектри періодичних і неперіодичних сигналів.

## *2. Магнітні кола.*

Магнітне поле. Магнітні матеріали, їх характеристики. Розгалужені та нерозгалужені магнітні кола. Магніторушійні сили. Закон повного струму. Закони Кірхгофа. Методи розрахунку магнітних кіл.

## *3. Методи аналізу електричних кіл.*

Символічний метод аналізу лінійних кіл при гармонічному впливі. Комплексні опори і провідності. Середня, повна і реактивна потужності. Метод контурних струмів, метод вузлових потенціалів, метод змінних станів, метод еквівалентних перетворень, метод еквівалентного генератора. Принцип і метод суперпозиції. Розрахунок кіл при дії періодичних негармонічних електрорушійних сил.

## *4. Резонансні явища в електричних колах.*

Власні коливання в лінійних консервативній і неконсервативній системах з одним ступенем свободи. Методи розв'язування диференціальних рівнянь цих систем на прикладі послідовного і паралельного коливального контурів. Поняття логарифмічного декременту затухання і добротності. Вимушені

коливання. Коливання в лінійних системах з багатьма ступенями вільності. Власні коливання системи двох індуктивно зв'язаних коливальних контурів. Частковий і повний резонанси в зв'язаних коливальних контурах Частотні і передавальні характеристики електричних кіл.

#### *5. Перехідні процеси.*

Перехідний режим в електричних колах. Перехідні і імпульсні характеристики найпростіших кіл. Перехідні процеси при впливі сигналів довільної форми. Операторний метод

#### *6. Основи теорії чотиріполосників.*

Системи параметрів і еквівалентні схеми. Експериментальні визначення параметрів. Вхідні і вихідні опори і провідності. Передавальні функції. Характеристичні опори і коефіцієнти передачі. Регулярні з'єднання чотиріполосників. Диференціюючі та інтегруючі ланки.

#### *7. Нелінійні електричні кола.*

Нелінійні елементи електричних кіл. Статичні характеристики і параметри нелінійних елементів. Динамічні характеристики і параметри нелінійних елементів. Лінеаризовані еквівалентні схеми. Графічний метод розрахунку електричних кіл. Напівпровідниковий діод. Еквівалентна схема н/п діоду.

#### *8. Транзистори.*

Схеми включення. Статистичні характеристики і диференціальні параметри транзисторів. Динамічні характеристики і параметри. Еквівалентні схеми заміщення транзистора як чотиріполосника. Режими роботи транзистора.

#### *9. Підсилювачі електричних сигналів.*

Класифікація, засоби дослідження і основні характеристики підсилювачів. Вхідні і вихідні опори. Коефіцієнти підсилення по напрузі, струму і потужності. Коефіцієнти підсилення. Перехідні і імпульсні характеристики. Підсилювальні каскади на транзисторах. Принципова і еквівалентна схеми каскаду підсилювача низьких частот. Вибір робочої точки. Робота каскаду на низьких, середніх, і високих частотах. Широкопasmові підсилювачі.

Зворотні зв'язки в підсилювачах. Вплив зворотних зв'язків на характеристики підсилювачів. Критерії стійкості підсилювачів. Каскади - повторювачі. Вибірні підсилювачі (смугові і резонансні).

#### *10. Підсилювачі постійного струму.*

Диференціальні і операційні підсилювачі. Характеристики операційного підсилювача. Схеми на операційних підсилювачах. Активні фільтри на основі операційних підсилювачів. Підсилювачі потужності.

#### *11. Генератори періодичних коливань.*

Загальні властивості і засоби дослідження нелінійних коливальних систем. Автоколивальні системи. Загальні властивості і основні характеристики. Автоколивальні системи першого і другого порядку. Баланс амплітуд і фаз. М'який і жорсткий режими самозбудження. Принципи роботи автогенераторів. Генератор з зовнішнім збудженням. Тривіткові схеми автогенераторів. Релаксаційні автогенератори. Параметричні коливання і системи. Підсилення, генерація, перетворення частоти, модуляції і детектування в параметричних системах.

#### *12. Перетворювачі електричних коливань.*

Принципи модуляції. Амплітудна, частотна і фазова модуляції. Спектри модульованих коливань. Метод отримання модульованих коливань. Детектування. Амплітудні детектори. Частотні і фазові детектори. Перетворювачі частоти.

### **Теми практичних занять.**

1. Розрахунок електричних кіл. Закони Ома і Кірхгофа. Векторні діаграми.
2. Еквівалентні перетворення в електричних колах.
3. Комплексний метод розрахунку електричних кіл.
4. Метод контурних струмів.
5. Метод вузлових потенціалів. Метод двох вузлів.
6. Принцип і метод суперпозиції. Метод еквівалентного генератора.

7. Перехідні процеси.
8. Чотириполіусники.
9. Фільтри.
10. Розрахунок кіл при дії періодичних негармонічних електрорушійних сил.
11. Резонанс в електричних колах.
12. Розрахунок електричних кіл з магнітно зв'язаними індуктивностями.
13. Методи розрахунку нелінійних кіл.
14. Розрахунок емітерного повторювача на біполярному транзисторі
15. Розрахунок підсилювача на біполярному транзисторі включеному по схемі з спільним емітером.
16. Генератор гармонічних коливань.
17. Магнітні кола.

### **Перелік екзаменаційних питань**

1. Основні поняття електротехніки. Струм, напруга, потужність.
2. Електричне коло та його елементи.
3. Закони електричних кіл.
4. Сигнали. Спектри сигналів. Модульовані коливання.
5. Синусоїдальний струм у колі з послідовним з'єднанням R, L, C.
6. Синусоїдальний струм у колі з паралельним з'єднанням R, L, C.
7. Комплексний опір
8. Комплексна провідність.
9. Метод вузлових потенціалів.
10. Метод контурних струмів.
11. Принципи накладання і взаємності.
12. Метод еквівалентного генератора.
13. Еквівалентні перетворення в електричних колах.
14. Закон Ома в комплексній формі.
15. Закони Кірхгофа в комплексній формі.

16. Розрахунок кіл комплексним методом при послідовному сполученні ділянок.
17. Розрахунок кіл комплексним методом при паралельному сполученні ділянок.
18. Миттєва потужність і коливання енергії в колі синусоїдального струму.
19. Активна, реактивна і повна потужності в колі синусоїдального струму. Комплексна потужність.
20. Резонанс у паралельному коливальному контурі.
21. Резонанс у послідовному коливальному контурі.
22. Еквівалентні параметри складного кола синусоїдального струму.
23. Розрахунок миттєвих усталених напруг і струмів при дії періодичних несинусоїдальних ЕРС.
24. Рівняння пасивного чотириполюсника у системі А-параметрів.
25. Рівняння пасивного чотириполюсника у системі Z-параметрів.
26. Рівняння пасивного чотириполюсника у системі Y-параметрів.
27. Матриці параметрів пасивного чотириполюсника.
28. Експериментальне визначення параметрів чотириполюсника.
29. П-подібна еквівалентна схема заміщення пасивних чотириполюсників.
30. Т-подібна еквівалентна схема заміщення пасивних чотириполюсників.
31. Каскадне сполучення чотириполюсників.
32. Послідовне сполучення чотириполюсників.
33. Електричні фільтри.
34. Виникнення перехідних процесів і закони комутації. Перехідний, вимушений та вільний режими при перехідних процесах.
35. Перехідні процеси в колах з ємнісним нагромаджувачем енергії.
36. Перехідні процеси в колах з індуктивним нагромаджувачем енергії.
37. Операторний метод розрахунку.
38. Магнітні кола. Методи розрахунку магнітних кіл.
39. Розрахунок електричних кіл при наявності індуктивного зв'язку.

40. Основні схеми включення транзистора. Їх параметри.
41. Електронні підсилювачі і їх класифікація.
42. Структурна схема підсилювача. Характеристики і параметри підсилювача.
43. RC- каскад: будова і принцип дії.
44. Схеми термостабілізації режиму роботи транзистора.
45. Вхідний і вихідний опори підсилювача. .
46. Зворотні зв'язки в підсилювачах: визначення, структурна схема, класифікація.
47. Коефіцієнт підсилення і стабільність підсилювача із зворотнім зв'язком.
48. Вибірні підсилювачі.
49. Повторювачі напруги та їх застосування.
50. Багатокаскадні підсилювачі.
51. Вихідні каскади підсилювачів.
52. Двотактний емітерний повторювач.
53. Підсилювач постійного струму. Операційний підсилювач.
54. Диференціальний підсилювач.
55. Схеми виконання математичних операцій над вхідними сигналами на операційних підсилювачах.
56. Генератори коливань і їх класифікація.
57. Структурна схема і умови самозбудження генератора.
58. LC-генератор.
59. RC-генератори.
60. Генератор із зовнішнім збудженням.
61. Загальні відомості про релаксаційні генератори.
62. Мультивібратор. Блокінг - генератор.

## Комплексний метод (символічний метод).

Метод базується на символічному зображенні дійсних синусоїдальних функцій часу комплексними числами.

**Суть методу:** синусоїдальні функції часу (струм, напруга, електрорушійна сила) замінюються комплексними числами і всі диференціальні й алгебраїчні рівняння, складені за законами Кірхгофа, замінюються алгебраїчними рівняннями в комплексній формі. Розв'язуючи ці рівняння, знаходять комплексні вирази шуканих функцій і від них переходять до оригіналів цих функцій.

Синусоїдальні функції часу (струм, напруга, електрорушійна сила) при заданій частоті  $\omega$ , що характеризуються двома величинами – амплітудою та початковою фазою, зображають комплексними числами, які містять дві величини – модуль і аргумент в показниковій формі запису  $\dot{A} = Ae^{j\varphi_A}$  або дійсну  $a_1 = A \cos \varphi_A$  і уявну  $ja_2 = A \sin \varphi_A$  складові при алгебраїчній формі запису:

$$\dot{A} = a_1 + ja_2$$

і тригонометричній формі запису:

$$\dot{A} = A \cos \varphi_A + A \sin \varphi_A,$$

де  $j = \sqrt{-1}$ .

Для комплексних чисел справедливі наступні співвідношення:

$$a_1 = \operatorname{Re}(\dot{A}) = A \cos \varphi_A;$$

$$a_2 = \operatorname{Im}(\dot{A}) = A \sin \varphi_A;$$

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}; \quad \varphi_A = \operatorname{arctg} \frac{a_2}{a_1};$$

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}; \frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}; j^2 = -1.$$

**Символічне зображення** деяких функцій часу:

синусоїдального струму -  $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) \text{ J } I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \dot{I}_m e^{j\omega t};$

синусоїдальної напруги -  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) \text{ J } U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \dot{U}_m e^{j\omega t};$

синусоїдальної е.р.с. -  $e = E_m \sin(\omega t + \varphi_e) \text{ J } E_m e^{j(\omega t + \varphi_e)} = \dot{E}_m e^{j\omega t};$

похідної по часу від струму -  $\frac{di}{dt} = \omega I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \text{ J } j\omega \dot{I}_m e^{j\omega t};$

похідної по часу від струму n-го порядку  $\frac{d^n i}{dt^n} \text{ J } (j\omega)^n \dot{I}_m e^{j\omega t};$

інтегралу від струму:  $q(t) = \int_0^t i dt + q(0) \text{ J } \frac{1}{j\omega} \dot{I}_m e^{j\omega t}.$

**Комплексний опір**  $Z$  – це відношення комплексної напруги  $\dot{U}$  до комплексного струму  $\dot{I}$ :

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = z e^{j\varphi} = z \cos \varphi + jz \sin \varphi = r + jx;$$

де  $r, x, z$  – активний, реактивний і повний опори кола;  $\varphi$  - зсув фаз між напругою і струмом на затискачах кола.

**Комплексна провідність**  $Y$  – це відношення комплексного струму  $\dot{I}$  до комплексної напруги  $\dot{U}$ :

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{ze^{j\varphi}} = ye^{j\varphi} = y \cos \varphi - jy \sin \varphi = g - jb;$$

де  $g, b, y$  – активна, реактивна і повна провідність кола;  $\varphi$  – зсув фаз між напругою і струмом на затискачах кола.

При цьому справедливо:

$$ZY = 1 \text{ або } (r + jx)(g - jb) = 1; \quad \varphi = \arctg \frac{x}{r}, \text{ або } \varphi = \arctg \frac{b}{g}.$$

**Комплексна потужність:**

$$\dot{S} = \dot{I} U^* = I e^{i\varphi_i} U e^{i\varphi_u} = UI e^{-i\varphi} = UI \cos \varphi - jUI \sin \varphi = P - iQ,$$

або

$$S^* = \dot{U}^* \dot{I} = I e^{i\varphi_i} U e^{i\varphi_u} = UI e^{i\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + iQ,$$

де  $P$  – активна потужність,  $Q$  – реактивна потужність,  $UI = S$  – повна потужність кола.

**Закони електричних кіл у комплексній формі:**

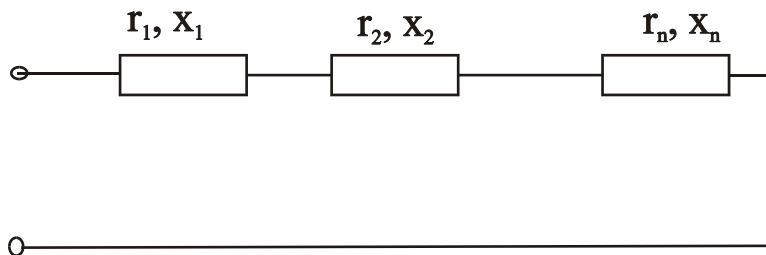
Закон Ома (враховується зв'язок, як між діючими значеннями струму та напруги, так і зсув фаз між ними):

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}; \quad \dot{U} = \dot{I}Z; \quad \dot{U} = \frac{\dot{I}}{Y}; \quad \dot{I} = \dot{U}Y.$$

Перший закон Кірхгофа:  $\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0.$

Другий закон Кірхгофа:  $\sum_{k=1}^n \dot{U}_k = \sum_{k=1}^n \dot{I}_k Z_k.$

### Послідовне з'єднання ланок кола.



Загальний комплексний опір послідовного з'єднання дорівнює сумі комплексних опорів окремих ланок кола:

$$Z = \sum_{k=1}^n Z_k = \sum_{k=1}^n r_k + j \sum_{k=1}^n x_k = r + jx,$$

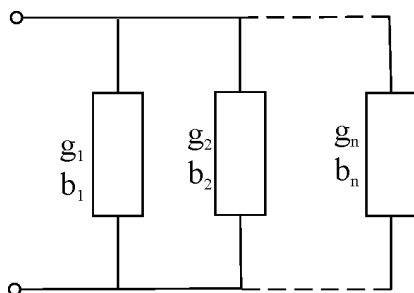
де  $Z_k = r_k + jx_k$  комплексний опір  $k$ -ланки електричного кола.

Загальна комплексна провідність послідовного з'єднання визначається через активний та реактивний опір наступним чином:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{r}{r^2 + x^2} - j \frac{x}{r^2 + x^2} = g - jb,$$

де  $g = \frac{r}{r^2 + x^2}$  - активна провідність, а  $b = \frac{x}{r^2 + x^2}$  - реактивна провідність.

### Паралельне з'єднання ланок кола.



Загальна комплексна провідність паралельного з'єднання дорівнює сумі комплексних провідностей окремих ділянок:

$$Y = \sum_{k=1}^n Y_k = \sum_{k=1}^n g_k - j \sum_{k=1}^n b_k = g - jb,$$

де  $Y_k = g_k - jb_k$  комплексна провідність  $k$ - ланки електричного кола.

Загальна комплексний опір паралельного з'єднання визначається через активну та реактивну провідність наступним чином:

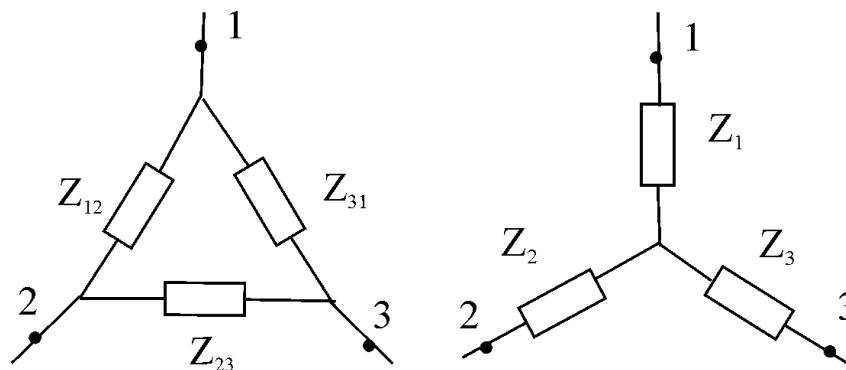
$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{g}{g^2 + b^2} + j \frac{b}{g^2 + b^2} = r + jx$$

де  $r = \frac{g}{g^2 + b^2}$  - активний опір,  $x = \frac{b}{g^2 + b^2}$  - реактивний опір.

## Еквівалентні перетворення електричних кіл.

### 1. Перетворення з'єднання зіркою в з'єднання трикутником.

З'єднання еквівалентні при умові, що при однакових в обох випадках напругах між точками 1,2,3, струми, що підходять до цих точок від іншої частини схеми є однакові.



Знаходження опорів для з'єднання трикутником через опори з'єднання зіркою:

$$Z_{12} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}{Z_3};$$

$$Z_{23} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}{Z_1};$$

$$Z_{31} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3}{Z_2}.$$

Знаходження опорів для з'єднання зіркою через опори з'єднання трикутником:

$$Z_1 = \frac{Z_{12} Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}};$$

$$Z_2 = \frac{Z_{12} Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}};$$

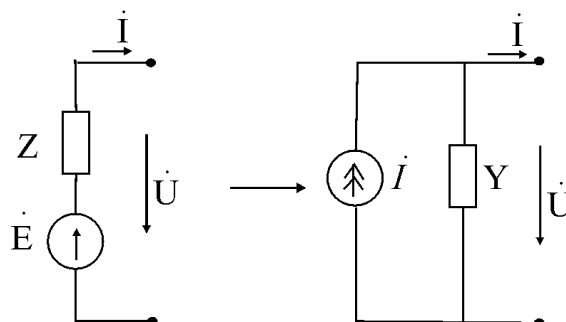
$$Z_3 = \frac{Z_{31} Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}.$$

Зауваження:

Перетворення втрачає зміст при рівності нулю сум опорів або провідностей.

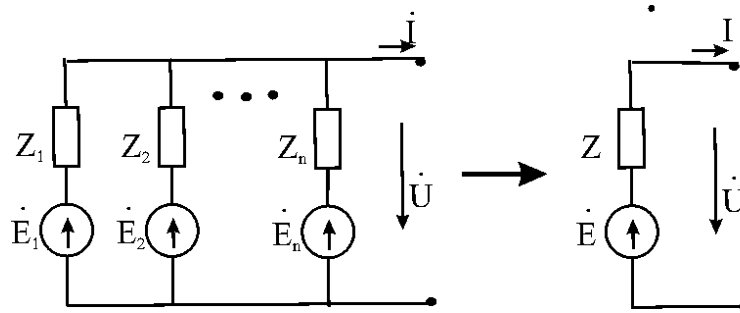
Поява від'ємних опорів означає, що реалізувати перетворення неможливо при використанні лише  $r, L, C$ .

## 2. Перетворення джерела електрорушійної сили у джерело струму.



Значення джерела струму визначається як  $\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z}$ ; а провідність  $Y = \frac{1}{Z}$ .

### 3. Перетворення декількох паралельно з'єднаних ланок із джерелами електрорушійних сил в одну еквівалентну.



Значення еквівалентної електрорушійної сили визначається:

$$\dot{E} = \frac{\dot{E}_1 Y_1 + \dot{E}_2 Y_2 + \dots + \dot{E}_n Y_n}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n} = \frac{\sum_{k=1}^n \dot{E}_k Y_k}{\sum_{k=1}^n Y_k},$$

а її внутрішній опір дорівнює:

$$Z = \frac{1}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n},$$

де  $Y_k = \frac{1}{Z_k}$  - провідність k-ї ділянки.

## Метод контурних струмів.

**Суть методу.** Для знаходження струмів у складному електричному колі спочатку знаходять контурні струми, а реальні струми в розгалуженнях знаходять як алгебраїчну суму контурних струмів, що замикаються в контурах, яким належить дане розгалуження.

**Реалізація методу:**

- Вибираємо  $n$  незалежних контурів.
- Довільно вибираємо додатні напрямки обходу контурів (додатні напрямки контурних струмів).
- Для  $n$  незалежних контурів складаємо систему зі  $n$  лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned}Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 + \dots + Z_{1n}\dot{I}_n &= \dot{E}_{11} \\Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 + \dots + Z_{2n}\dot{I}_n &= \dot{E}_{22} \\&\dots \\Z_{n1}\dot{I}_1 + Z_{n2}\dot{I}_2 + \dots + Z_{nn}\dot{I}_n &= \dot{E}_{nn}\end{aligned}$$

де

$\dot{I}_k$  - контурний струм  $k$ -го контуру;

$Z_{kk}$  - власний опір контуру  $k$  (сума опорів, що належать  $k$  контуру);

$Z_{km}$  - спільний опір контурів  $k$  і  $m$  (береться із знаком “+” якщо контурні струми для цього опору співпадають за напрямком, і береться із знаком “-” якщо контурні струми для цього опору протилежні за напрямком);

$\dot{E}_{kk}$  - сума електрорушійних сил, що входять до  $k$ -го контуру (е.р.с. напрям яких співпадає з напрямом обходу контуру в цю суму входять з знаком “+”, е.р.с. напрям яких протилежний напрямку обходу контуру в цю суму входять із знаком “-”).

- Розв'язок даної системи рівнянь:

$$\dot{I}_k = \dot{E}_{11} \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + \dot{E}_{22} \frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + \dots + \dot{E}_{mn} \frac{\Delta_{kn}}{\Delta},$$

де  $\Delta$  - головний визначник системи

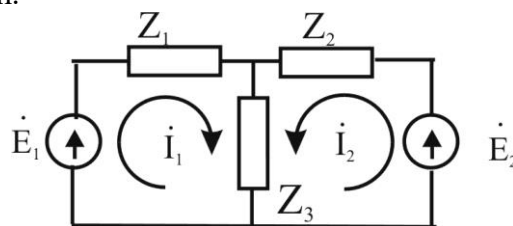
$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix}$$

а  $\Delta_{km}$  - алгебраїчне доповнення, що отримується із  $\Delta$  шляхом викреслювання  $k$ -го рядка та  $m$ -го стовпця та домноження отриманого визначника на  $(-1)^{k+m}$ .

- Знаходимо реальні струми в розгалуженнях як алгебраїчну суму контурних струмів, що замикаються в контурах, яким належить дане розгалуження.

**Приклад 1.**

Знайти струми в колі.



Користуючись методом контурних струмів запишемо систему рівнянь для цього кола:

$$Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 = \dot{E}_{11}, \quad Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = \dot{E}_{22},$$

Де власні опори контурів рівні:

$$Z_{11} = Z_1 + Z_3 \quad \text{та} \quad Z_{22} = Z_2 + Z_3,$$

а спільний опір дорівнює:  $Z_{12} = Z_{21} = Z_3$ ;

крім того,  $\dot{E}_{11} = \dot{E}_1$ ,  $\dot{E}_{22} = \dot{E}_2$ .

Визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 = (Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_3) - Z_3^2 = Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1 = D.$$

Відповідно:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= Z_{22} = Z_2 + Z_3; \\ \Delta_{22} &= Z_{11} = Z_1 + Z_3; \\ \Delta_{12} &= \Delta_{21} = -Z_{12} = -Z_3. \end{aligned}$$

Отримаємо вирази для струмів:

$$\begin{aligned} i_1 &= \dot{E}_1 \frac{Z_2 + Z_3}{D} - \dot{E}_2 \frac{Z_3}{D}; \\ i_2 &= -\dot{E}_1 \frac{Z_3}{D} + \dot{E}_2 \frac{Z_1 + Z_3}{D}. \\ i_3 &= i_1 + i_2 = \dot{E}_1 \frac{Z_2}{D} + \dot{E}_2 \frac{Z_1}{D} \end{aligned}$$

## Метод вузлових потенціалів (вузлових напруг).

**Суть методу.** Знаходять напруги між кожним із  $n-1$  вузлів схеми і одним опорним (вузлові напруги). Струми в розгалуженнях кола знаходять за законом Ома на ділянці кола, що підключена до різниці вузлових напруг.

**Реалізація методу:**

- Вибираємо опорний вузол і позначаємо всі інші вузли.
- При наявності паралельних віток між двома вузлами, перетворюємо їх в одну еквівалентну.
- Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} Y_{11}\dot{U}_{10} - Y_{12}\dot{U}_{20} - \dots - Y_{1,n-1}\dot{U}_{n-1,0} &= \dot{I}_1 \\ -Y_{21}\dot{U}_{10} + Y_{22}\dot{U}_{20} - \dots - Y_{2,n-1}\dot{U}_{n-1,0} &= \dot{I}_2 \\ \dots & \\ -Y_{n-1,1}\dot{U}_{10} - Y_{n-1,2}\dot{U}_{20} - \dots + Y_{n-1,n-1}\dot{U}_{n-1,0} &= \dot{I}_{n-1} \end{aligned}$$

де:

$\dot{U}_{k0}$  - вузлова напруга (напруга між  $k$ -м вузлом і опорним вузлом 0);

$Y_{kk}$  - сума провідностей всіх віток, приєднаних до  $k$ -го вузла;

$Y_{km}$  - провідність віток, підключених до вузлів  $k$  і  $m$ ;

$\dot{I}_k$  - задаючий струм ( рівний сумі струмів, підключених до k-го вузла

джерел струму:  $\dot{I}_k = -\sum_{m=0}^{n-1} Y_{km} \dot{E}_{km}$  ).

- Знаходимо розв'язок цієї системи рівнянь:

$$\dot{U}_{ko} = \dot{I}_1 \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} + \dot{I}_2 \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} + \dots + \dot{I}_{n-1} \frac{\Delta_{n-1,k}}{\Delta},$$

де  $\Delta$  - головний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1,n-1} \\ Y_{21}, Y_{22}, \dots, Y_{2,n-1} \\ \dots \\ Y_{n-1,1}, Y_{n-1,2}, \dots, Y_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

а  $\Delta_{km}$  - алгебраїчне доповнення, що отримують із  $\Delta$  шляхом викреслювання k-го рядка та m-го стовпця та домноження отриманого визначника на  $(-1)^{k+m}$ .

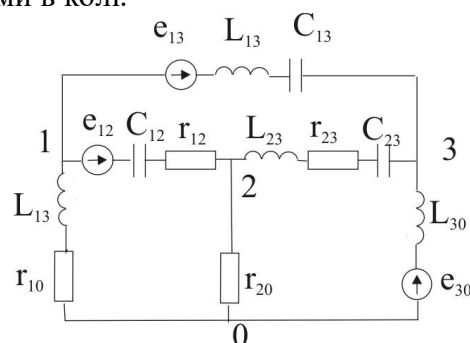
- Струми в розгалуженнях кола шукають за визначеними вузловими

напругами:  $\dot{I}_{km} = Y_{km} \dot{E}_{km} + (\dot{U}_{k0} - \dot{U}_{m0}) Y_{km}$ .

Примітка: метод не реалізується, якщо коло містить ланки з провідністю рівною нулю.

Приклад 2.

Розрахувати струми в колі:



Якщо задані е.р.с.:

$$e_{13} = E_{m13} \sin(\omega t + \varphi_{13}); \quad e_{12} = E_{m12} \sin(\omega t + \varphi_{12}); \quad e_{03} = E_{m03} \sin(\omega t + \varphi_{03});$$

і параметри всіх елементів.

Провідності ланок між вузлами та е.р.с. запишемо в комплексній формі:

$$\dot{E}_{13} = E_{13} e^{j\varphi_{13}}; \quad \dot{E}_{12} = E_{12} e^{j\varphi_{12}}; \quad \dot{E}_{03} = E_{03} e^{j\varphi_{03}};$$

$$Y_{12} = \frac{1}{r_{12} + \frac{1}{j\omega C_{12}}}; Y_{23} = \frac{1}{r_{23} + j\omega L_{23} + \frac{1}{j\omega C_{23}}}; Y_{13} = \frac{1}{j\omega L_{13} + \frac{1}{j\omega C_{13}}};$$

$$Y_{10} = \frac{1}{r_{10} + j\omega L_{10}}; Y_{20} = \frac{1}{r_{20}}; Y_{30} = \frac{1}{j\omega L_{30}}.$$

Система рівнянь для даного кола запишеться так:

$$Y_{11}\dot{U}_{10} - Y_{12}\dot{U}_{20} - Y_{13}\dot{U}_{30} = \dot{I}_1;$$

$$-Y_{21}\dot{U}_{10} + Y_{22}\dot{U}_{20} - Y_{23}\dot{U}_{30} = \dot{I}_2;$$

$$-Y_{31}\dot{U}_{10} - Y_{32}\dot{U}_{20} + Y_{33}\dot{U}_{30} = \dot{I}_3.$$

Де задаючі струми і провідності дорівнюють:

$$\dot{I}_1 = -\dot{E}_{12}Y_{12} - \dot{E}_{13}Y_{13}; \dot{I}_2 = -\dot{E}_{21}Y_{12} = \dot{E}_{21}Y_{12}; \dot{I}_3 = -\dot{E}_{30}Y_{30} - \dot{E}_{31}Y_{13} = \dot{E}_{03}Y_{30} + \dot{E}_{13}Y_{13}$$

$$Y_{11} = Y_{12} + Y_{10} + Y_{13}; Y_{22} = Y_{20} + Y_{12} + Y_{23}; Y_{33} = Y_{30} + Y_{13} + Y_{23}.$$

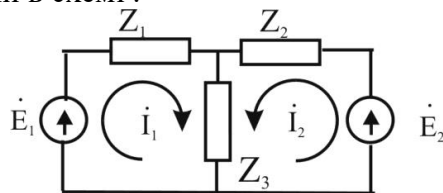
Розв'язавши систему трьох рівнянь, знаходять вузлові напруги а потім і струми у розгалуженнях.

## Принцип суперпозиції струмів (накладання струмів).

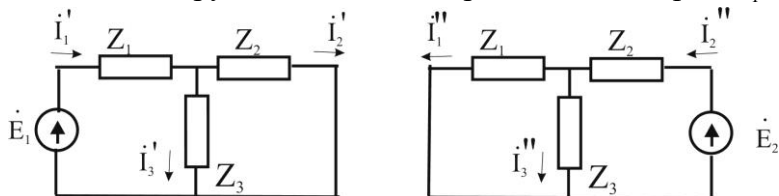
Контурний струм у будь-якому контурі дорівнює сумі струмів, що спричиняються в цьому контурі кожною електрорушійною силою, взятою окремо.

Приклад 3.

Знайти струми в схемі:



Знаходимо струми в схемі, що спричиняються е.р.с.  $\dot{E}_1$ :



$$i_1' = \frac{\dot{E}_1}{Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}} = \frac{\dot{E}_1 (Z_2 + Z_3)}{Z_1 Z_2 + Z_3 Z_2 + Z_1 Z_2} = \frac{\dot{E}_1 (Z_2 + Z_3)}{D} ;$$

$$i_2' = i_1' \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{\dot{E}_1 Z_3}{D} ; \quad i_3' = i_1' \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = \frac{\dot{E}_1 Z_2}{D} ;$$

Знаходимо струми в схемі, що спричиняються е.р.с.  $\dot{E}_2$ :

$$i_2'' = \frac{\dot{E}_2}{Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3}} = \frac{\dot{E}_2 (Z_1 + Z_3)}{D} ; \quad i_1'' = i_2'' \frac{Z_3}{Z_1 + Z_3} = \frac{\dot{E}_2 Z_3}{D} ; \quad i_3'' = i_2'' \frac{Z_2}{Z_1 + Z_3} = \frac{\dot{E}_2 Z_2}{D} ;$$

Шукані струми знаходяться як сума струмів при дії окремих е.р.с. з врахуванням напрямків:

$$i_1 = i_1' - i_1'' = \frac{\dot{E}_1 (Z_2 + Z_3) - \dot{E}_2 Z_3}{D} ; \quad i_2 = i_2' - i_2'' = \frac{\dot{E}_2 (Z_1 + Z_3) - \dot{E}_1 Z_3}{D} ;$$

$$i_3 = i_3' + i_3'' = \frac{\dot{E}_1 Z_2 + \dot{E}_2 Z_1}{D} .$$

## Принцип взаємності.

Якщо е.р.с., що діє в ланці  $ab$  будь-якого складного електричного кола, при відсутності інших е.р.с., спричинює в другій ланці  $cd$  цього кола струм  $I_{cd} = I$ , то така ж е.р.с., діючи в ланці  $cd$ , при відсутності інших е.р.с., спричинить у ланці  $ab$  такий самий струм  $I_{cd} = I$ .

## Метод еквівалентного генератора.

**Суть методу.** По відношенню до виділеної ланки  $ab$  з опором  $Z_{ab}$  вся інша частина складного кола, що містить джерела е.р.с., може бути замінена одним еквівалентним генератором з е.р.с.  $E_g$  і внутрішнім опором  $Z_g$ .

$\dot{E}_g = \dot{U}_{ab}$  де  $\dot{U}_{ab}$  - напруга на затискачах  $ab$  активного двополюсника при  $\dot{I}_{ab} = 0$ . (Для визначення  $\dot{U}_{ab}$  видаляється ланка  $ab$  і розраховується напруга на затискачах  $ab$ .)

$Z_g$  – внутрішній опір генератора, що дорівнює вхідному опору пасивного двополюсника відносно затискачів  $ab$ . (Для визначення  $Z_g$  видаляється ланка  $ab$  і розраховується загальний опір кола відносно затискачів  $ab$ .)

Приклад 4.

Нехай необхідно знайти струм  $\dot{I}_1$  в колі на рис 2.

Видалимо з кола ланку  $Z_1$  і знайдемо  $\dot{E}_{e.gen.}$  та  $Z_{e.gen.}$ :

$$\dot{E}_{e.gen.} = U_{ab} = \dot{E}_1 - \dot{I}Z_3 = \dot{E}_1 - \frac{\dot{E}_2}{Z_2 + Z_3} Z_3; \quad Z_{e.gen.} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

Звідси струм дорівнює  $\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_{e.gen.}}{Z_{e.gen.}} = \frac{\dot{E}_1(Z_2 + Z_3) - \dot{E}_2 Z_3}{D}$ .

## Розрахунок електричних кіл за допомогою системи рівнянь за законами Кірхгофа.

**Суть методу.** Для знаходження  $n$  невідомих струмів у розгалуженнях складного електричного кола за законами Кірхгофа складають систему з  $n$  незалежних рівнянь.

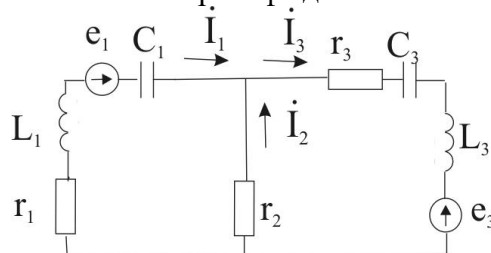
Реалізація методу:

- Позначаємо невідомі струми, довільно вибираємо їх позитивний напрямок.

- Вибираємо незалежні контури даного кола і їх напрям обходу.
- За першим законом Кірхгофа складаємо  $k-1$  рівняння для вузлів кола (де  $k$  – загальна кількість вузлів).
- Всі інші рівняння складаються за другим законом Кірхгофа для незалежних контурів даного кола (контур є незалежним якщо містять хоч одну ланку що не ввійшла до складу інших контурів). При цьому значення е.р.с. і струмів береться додатнім, якщо їх напрям збігається з напрямом обходу контуру і від’ємним, якщо їх напрям є протилежним до напрямку обходу контуру.
- Розв’язуючи цю систему рівнянь, отримують шукані значення струмів. (Якщо отримане значення струму є від’ємною величиною, то це означає, що реальний струм у відгалуженні має зворотний напрям до вибраного на схемі.)

Приклад 4.

Записати систему рівнянь за законами Кірхгофа для кола:



Довільно вибираємо напрямки струмів в колі. Невідомих струмів у схемі – 3, отже необхідно скласти систему, що містить 3 рівняння. Дане коло містить два вузли, отже за першим законом Кірхгофа можна записати тільки одне рівняння:

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3$$

Два інших – запишемо для контурів за другим законом Кірхгофа, вибравши за додатній напрямок обходу контурів – непрямою за часовою стрілкою. Для контура  $r_1, L_1, E_1, C_1, r_2$ :

$$\dot{I}_1 r_1 + \dot{I}_1 j\omega L_1 + \frac{\dot{I}_1}{j\omega C_1} - \dot{I}_2 r_2 = \dot{E}_1;$$

Для контура  $r_2, L_3, E_3, C_3, r_3$ :

$$\dot{I}_2 r_2 + \dot{I}_3 r_3 + \frac{\dot{I}_3}{j\omega C_3} + \dot{I}_3 j\omega L_3 = -\dot{E}_3.$$

## Метод двох вузлів.

**Суть методу.** Для кола, що складається з  $n$  відгалужень і містить лише два вузли  $ab$ , напруга між ними знаходиться за формулою:

$$\dot{U}_{ab} = \frac{\dot{E}_1 Y_1 + \dot{E}_2 Y_2 + \dots + \dot{E}_n Y_n}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n} = \frac{\sum_{k=1}^n \dot{E}_k Y_k}{\sum_{k=1}^n Y_k},$$

(при наявності джерел струму:  $\dot{U}_{ab} = \frac{\sum_{k=1}^n \dot{E}_k Y_k + \sum_{k=1}^m \dot{I}_k}{\sum_{k=1}^n Y_k}$ )

а струм у відгалуженнях розраховується за законом Ома:

$$\dot{I}_{km} = Y_{km} \dot{E}_{km} + \dot{U}_{ab} Y_{km}.$$

## Розрахунок електричних кіл при дії несинусоїдальних періодичних е.р.с.

Періодичні е.р.с., напруги і струми можна представити у виді рядів Фур'є, які в загальному випадку містять постійну складову, основну або першу гармоніку, період якої дорівнює періоду самої функції, і вищі гармоніки, частота яких у ціле число разів більша за частоту першої гармоніки.

Для періодичної е.р.с. можна записати:

$$e(t) = E_0 + E_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + E_{2m} \sin(2\omega t + \varphi_2) + \\ + E_{3m} \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots + E_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k) + \dots$$

Тут  $E_0$  – постійна складова е.р.с.,

$E_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1)$  - перша або основна гармоніка,

$E_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k)$  - вища гармоніка порядку  $k$ ,

$E_{km}$  - амплітуда  $k$ -ї гармоніки,

$\varphi_k$  - початкова фаза  $k$ -ї гармоніки.

Суть методу. Задані періодичні несинусоїдальні е.р.с. або напруги розкладають в ряд Фур'є. Для кожної складової цього ряду розраховують струми в електричному колі (методами, які використовуються для кіл при дії синусоїдальних е.р.с. для гармонічних складових і кіл при дії постійних е.р.с. для постійної складової).

Реалізація методу.

- Розкладаємо задані періодичні несинусоїдальні е.р.с. або напруги в ряд Фур'є:

$$e = e_0 + e_1 + e_2 + \dots + e_k + \dots$$

- Проводимо розрахунок електричного кола при дії окремо взятих  $e_0, e_1, e_2, \dots, e_k, \dots$ .
- Знаходимо, як функції часу миттєві значення струмів  $i_0, i_1, i_2, \dots, i_k, \dots$  в деякій ланці кола для кожної окремої складової е.р.с. або напруги:
- Шуканий струм отримуємо як суму миттєвих значень струмів.

$$i = i_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots$$

Примітка. При використанні комплексного методу результат не можна записувати як суму комплексів окремих гармонік, тому що вони мають різні частоти, а можна сумувати лише миттєві значення як функції часу.

# Методи розрахунку перехідних процесів.

## 1. Класичний метод.

Суть методу. Метод, в якому розв'язок диференціального рівняння беруть у вигляді суми вимушеного і вільного розв'язків і в якому визначення постійних інтегрування, які входять в вираз для вільного струму (або напруги), виконують шляхом спільного розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь за відомими коренями характеристичного рівняння та відомими значеннями вільної складової струму і її похідних взятих в момент комутації ( $t=0+$ ).

Реалізація методу.

- Складаємо диференціальні рівняння кола згідно першого та другого законів Кірхгофа. При заданих е.р.с. невідомими є струми в розгалуженнях кола. Нехай необхідно знайти струм  $i_k$  в  $k$ -й ланці. Розв'язуючи систему рівнянь відносно струму  $i_k$  отримаємо одне диференціальне рівняння, яке буде містити лише струм  $i_k$  і його похідні до порядку  $n$ :

$$a_n \frac{d^n i_k}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i_k}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{di_k}{dt} + a_0 i_k = f_k(t),$$

або інакше

$$\sum_{s=0}^n a_s \frac{d^s i_k}{dt^s} = f_k(t)$$

Порядок  $n$  рівняння визначається конфігурацією кола і характером її елементів. Вільний член  $f_k(t)$  містить в собі задані е.р.с.

- Знаходимо розв'язок диференціального рівняння. Повний розв'язок цього рівняння дорівнює сумі часткового розв'язку  $i'_k$ , який визначається видом функції  $f_k(t)$ , і повного розв'язку  $i''_k$  однорідного рівняння :

$$\sum_{s=0}^n a_s \frac{d^s i_k}{dt^s} = 0.$$

Для визначення  $i_k''$  знаходимо  $n$  коренів характеристичного рівняння:

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0.$$

У випадку простих коренів отримуємо розв'язок у вигляді:

$$i_k'' = A_{k1} e^{\alpha_1 t} + A_{k2} e^{\alpha_2 t} + \dots + A_{kn} e^{\alpha_n t}$$

тут  $A_{ks}$  - довільні постійні інтегрування, які визначаються з фізичних початкових умов.

- Визначаємо постійні інтегрування. В момент комутації залишаються незмінними напруги на обкладках конденсаторів та струми в індуктивних котушках:

$$u_C(+0) = u_C(-0),$$

$$i_L(+0) = i_L(-0).$$

Звідси підставляючи значення  $i_k$  і його при  $t=+0$  (тобто значення струму в момент часу безпосередньо після комутації), а також значення змінної часу  $t=0$  в диференціальне рівняння можна визначити постійні інтегрування.

## 2. Операторний метод.

**Суть методу.** Кожній функції часу ставиться у відповідність її операторне зображення, яке отримується за допомогою перетворення Лапласа. Всі операції диференціювання зводяться до операції множення, а операції інтегрування - до ділення. Це полегшує розв'язок диференціальних рівнянь. Для отримання часових залежностей шуканих величин використовують зворотне перетворення операторних функцій у часові (зворотне перетворення Лапласа).

**Реалізація методу.**

- Складають рівняння для шуканих функцій часу.

- Функції часу  $f(t)$  (струм, напруга, е.р.с.), яку називають оригіналом, ставлять у відповідність операторне зображення  $F(p)$ :

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

де  $p$  – комплексне число. Цю відповідність між функціями  $f(t)$  та  $F(p)$  записують так:  $F(p) \text{ J } f(t)$ .

Операторне зображення деяких функцій:

Постійна  $A$  -  $A \text{ J } \frac{A}{p}$ .

Показникова ф-ція -  $e^{\alpha t} \text{ J } \frac{1}{p - \alpha}$ .

Похідна ф-ції  $\frac{df(t)}{dt} \text{ J } pF(p) - f(0)$ .

Друга похідна ф-ції  $\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \text{ J } p^2 F(p) - pf(0) - \left[ \frac{df(t)}{dt} \right]_{t=0}$ .

Інтеграл -  $\int_0^t f(t) dt \text{ J } \frac{F(p)}{p}$ .

Струм -  $\frac{di(t)}{dt} \text{ J } pI(p) - i(0)$ .

Напруга на індуктивності  $L \frac{di}{dt} \text{ J } pLI(p)$ .

Напруга на конденсаторі -  $u_c = u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt \text{ J } \frac{I(p)}{Cp} + \frac{u_c(0)}{p}$ .

- Розв'язують систему рівнянь складених за законами Ома і Кірхгофа.

Закони електричних кіл в операторній формі записуються таким чином:

1. Закон Ома.

Для ланки з послідовним з'єднанням R, L, C що не містить е.р.с. записується :

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)},$$

де повний опір кола дорівнює:

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC};$$

2. Перший закон Кірхгофа.

$$\sum I(p) = 0.$$

3. Другий закон Кірхгофа.

$$\sum I_k(p)Z_k(p) = \sum E_k(p).$$

- Від розв'язку в операторній формі переходимо до оригіналів (до функції часу).

Для знаходження початкового значення функції  $f(0)$  за її оригіналом справедливо:

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p).$$

Для знаходження усталеного значення функції  $f(\infty)$  за її оригіналом справедливо:

$$f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p).$$

Примітка. Для переходу від зображення до відповідної функції часто користуються зворотнім перетворенням Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\nu-j\infty}^{\nu+j\infty} F(p)e^{pt} dp.$$

### 3. Метод розрахунку перехідних процесів за допомогою інтеграла Дюамеля.

Розрахунок за допомогою інтеграла Дюамеля проводять в чотири етапи:

- 1) визначають перехідні провідності  $g(t)$  для досліджуваного кола;
- 2) Визначають  $g(t-\tau)$  (за допомогою заміни  $t$  на  $(t-\tau)$ );
- 3) Визначають першу похідну  $u'(t)$ ;
- 4) Повний струм знаходять за допомогою інтегралу Дюамеля :

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^t u'(\tau)g(t-\tau)d\tau .$$

Даний метод використовується у випадку коли напруга прикладені до кола змінюється в часі за складним законом і для розв'язку використовуються диференціальні рівняння високих порядків.

## Розрахунок нелінійних кіл.

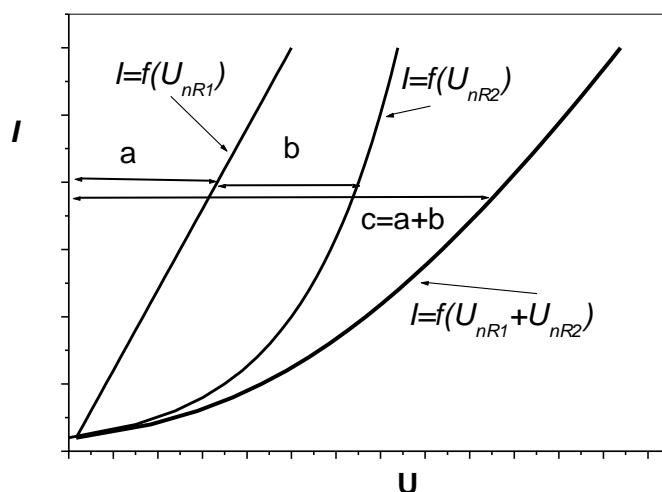
### Загальна характеристика методів розрахунку нелінійних кіл.

Для розрахунку нелінійних кіл можна використовувати метод двох вузлів, заміна паралельно включених ланок одною еквівалентною, метод холостого ходу і короткого замикання. При розрахунках повинні бути відомими вольтамперні характеристики нелінійних опорів, які входять в дане коло. Розрахунок нелінійних кіл постійного струму виконують, як правило, графічно.

### Послідовне з'єднання нелінійних опорів.

#### Перший спосіб.

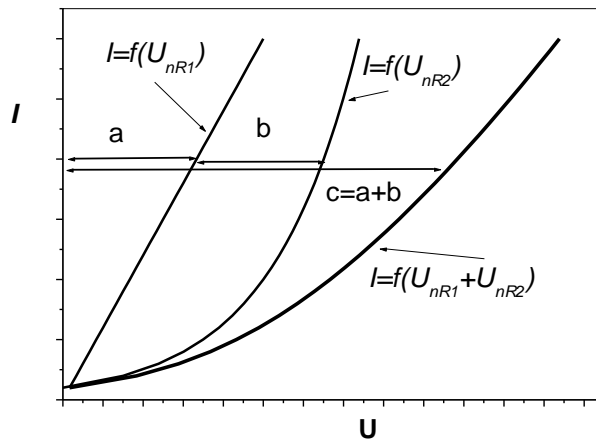
- Будують вольтамперні характеристики елементів на один графік.
- Так як для послідовного кола через всі елементи кола тече однаковий струм, то будують загальну вольтамперну характеристику такого кола як функцію  $I = f(U_{nR1} + U_{nR2} + \dots)$ , де  $U_{nR}$  - спад напруги на нелінійному опорі.



- За побудованою ВАХ кола визначають невідомі величини.

### Другий спосіб.

- Будують вольт-амперні характеристики елементів на один графік, перший безпосередньо а інший зсунутий по осі напруг на величину е.р.с.  $E$  і дзеркально повернутий відносно вертикальної осі.



- Координата точка перетину кривих по осі струмів дає значення загального струму к колі., по осі напруги - спад напруги на елементах кола.

### **Паралельне з'єднання нелінійних опорів.**

- Будують вольт амперні характеристики елементів на один графік.
- Так як для паралельного кола всі елементи кола підключені до однакової напруги, то будують загальну вольт амперну характеристику такого кола як функцію  $U = f(I_{nR1} + I_{nR2} + \dots)$ , де  $I_{nR}$  - струм через нелінійний опір.
- За побудованою ВАХ кола визначають невідомі величини.

### **Заміна нелінійного опору еквівалентним лінійним опором і е.р.с.**

Якщо наперед відома робоча область ВАХ нелінійного опору, то цю частину вольт-амперної характеристики можна екстраполювати прямою лінією, тобто при розрахунках нелінійний опір можна замінити еквівалентним лінійним опором і джерелом е.р.с.

## Розрахунок трифазних кіл.

Многофазною системою електричних кіл називають кола, в яких діють синусоїдальні е.р.с. однакової частоти зсунуті відносно одна одної по фазі і які створюються спільним джерелом енергії.

Симетричною називають многофазну систему, в якій е.р.с. однакові за амплітудою і відстають за фазою на однакові кути рівні  $q \frac{2\pi}{m}$ , де  $q$  – ціле число,  $m$  – кількість джерел е.р.с.

Трифазні кола ( $m=3$ ) при  $q=1$  називають симетричною системою прямої послідовності. Для цього випадку для е.р.с. можна записати:

$$e_1 = E_m \sin(\omega t + \varphi);$$

$$e_2 = E_m \sin(\omega t + \varphi - \frac{2\pi}{3});$$

$$e_3 = E_m \sin(\omega t + \varphi - \frac{4\pi}{3}).$$

В комплексній формі маємо:  $\dot{E}_2 = a^2 \dot{E}_1$ ,  $\dot{E}_3 = a \dot{E}_1$ ,

$$\text{де } a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Трифазні кола ( $m=3$ ) при  $q=2$  називають симетричною системою зворотної послідовності. Для цього випадку для е.р.с. можна записати:

$$\dot{E}_2 = a \dot{E}_1, \dot{E}_3 = a^2 \dot{E}_1.$$

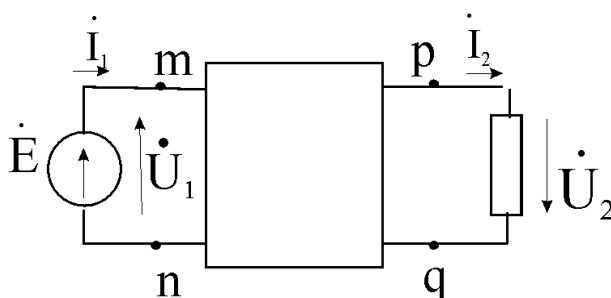
Трифазні кола при  $q=0$  називають симетричною системою нульової послідовності. Для цього випадку:  $\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = \dot{E}_3$ .

Розрахунок трифазних кіл може бути проведений будь-яким із методів, що використовуються для синусоїдальних кіл (трифазне коло є

частковим випадком складного кола при дії декількох джерел е.р.с., так як кожний трифазний генератор можна розглядати як три джерела е.р.с.).

## Розрахунок чотириполюсників.

Чотириполюсником називають електричну схему, що має два вхідні та два вихідні затискачі і є передавальною ланкою між джерелом живлення та навантаженням.



Для будь-якого пасивного чотириполюсника напруга та струм на вході  $\dot{U}_1$  і  $\dot{i}_1$  зв'язані з напругою та струмом на виході  $\dot{U}_2$  і  $\dot{i}_2$  наступними рівняннями :

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 \end{aligned} \quad ,$$

де комплексні коефіцієнти  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  залежать від схеми внутрішніх з'єднань чотириполюсника, від величин його внутрішніх опорів та частоти. При цьому  $AD - BC = 1$  .

Якщо джерело живлення під'єднати до полюсів  $pq$  чотириполюсника, а навантаження – до полюсів  $mn$  , то рівняння (1) будуть мати вид:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= D\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + A\dot{I}_2 \quad .\end{aligned}$$

Чотириполюсник називають *симетричним*, якщо при переміні місцями джерела живлення та навантаження струми в джерелі живлення та навантаженні не змінюються. В симетричному чотириполюснику  $A=D$ .

Системи рівнянь (1) і (3), записані у виді

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 &= A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2 \quad ,\end{aligned} \quad (4)$$

де  $A_{11}=A$ ,  $A_{12}=B$ ,  $A_{21}=C$ ,  $A_{22}=D$ , називають *A-формою* запису рівнянь чотириполюсника.

Інші форми запису рівнянь чотириполюсника:

$$Y\text{-форма: } \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2; \quad \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \quad .$$

$$Z\text{-форма: } \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2; \quad \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \quad .$$

$$H\text{-форма: } \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2; \quad \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \quad .$$

$$G\text{-форма: } \dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2; \quad \dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2 \quad .$$

$$B\text{-форма: } \dot{U}_2 = B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}\dot{I}_1; \quad \dot{I}_2 = B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}\dot{I}_1 \quad .$$

Для *Y*-, *Z*-, *H*- та *G*-форм додатній напрямок струму  $i_1$  такий самий, як для *A*-форми, а напрямок струму  $i_2$  протилежний. Для *B*-форми напрямки  $i_1$  та  $i_2$  протилежні відносно форми *A*. Слід звернути увагу на попарну інверсію напруг та струмів *Z*- та *Y*-форм, *A*- та *B*-форм, *H*- та *G*-форм.

Зв'язок між коефіцієнтами різних форм запису рівнянь чотириполюсника:

$$Z_{11} = \frac{A}{C}, Z_{12} = \frac{1}{C}, Z_{21} = \frac{1}{C}, Z_{22} = \frac{D}{C}.$$

$$Y_{11} = \frac{D}{B}, Y_{12} = -\frac{1}{B}, Y_{21} = -\frac{1}{B}, Y_{22} = \frac{A}{B}.$$

$$H_{11} = \frac{B}{D}, H_{12} = \frac{1}{D}, H_{21} = -\frac{1}{D}, H_{22} = \frac{C}{D}.$$

$$G_{11} = \frac{C}{A}, G_{12} = -\frac{1}{A}, G_{21} = \frac{1}{A}, G_{22} = \frac{B}{A}.$$

$$B_{11} = D, B_{12} = B, B_{21} = C, B_{22} = A.$$

Для практичного використання застосовують ту форму запису рівнянь чотиріполюсника, яка є найбільш зручною.

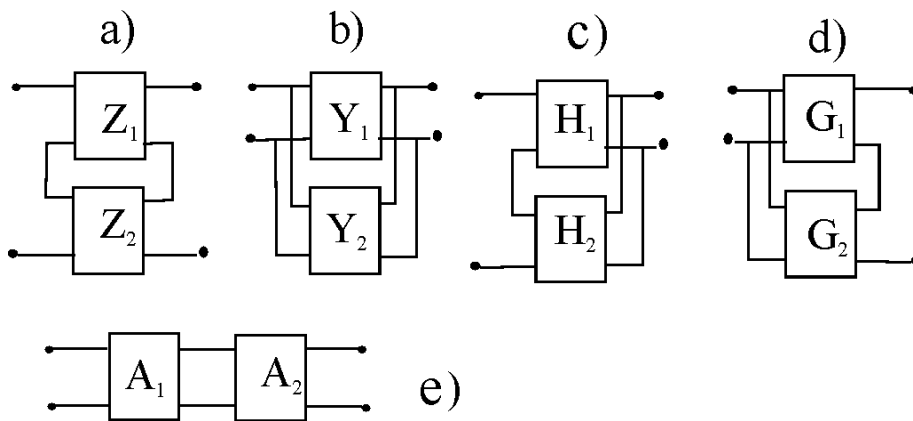
Рівняння чотиріполюсника можна записати в матричній формі:

$$\text{Через } Z \text{ параметри } \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}, \text{ або } \dot{U} = Z\dot{I};$$

$$\text{Через } Y \text{ параметри } \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix}, \text{ або } \dot{I} = Y\dot{U};$$

$$\text{Через } A \text{ параметри } \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}, \text{ або } \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}.$$

При послідовному з'єднанні чотиріполюсників (рис.а) застосовують  $Z$ -форму, при паралельному (рис.б) -  $Y$ -форму, при послідовно-паралельному (рис.с) -  $H$ -форму, при паралельно-послідовному (рис.д) -  $G$ -форму, при каскадному (рис.е) -  $A$ -форму.



При цьому -

для каскадного з'єднання  $A$  матриця загального чотириполюсника дорівнює добутку матриць окремих чотириполюсників  $A=A_1 \cdot A_2$ ;

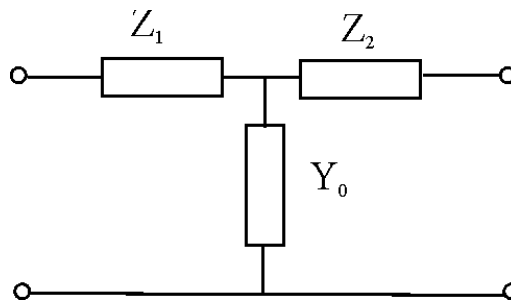
для паралельного з'єднання  $Y$  матриця загального чотириполюсника дорівнює сумі матриць окремих чотириполюсників  $Y=Y_1+Y_2$ ;

для послідовного з'єднання  $Z$  матриця загального чотириполюсника дорівнює сумі матриць окремих чотириполюсників  $Z=Z_1+Z_2$ .

### Схеми заміщення пасивного чотириполюсника

Функції пасивного чотириполюсника, як передавальної ланки між джерелом живлення та навантаженням, можуть виконувати найпростіші схеми заміщення:  $T$ -схема та  $\Pi$ -схема. Будь-який чотириполюсник при фіксованій частоті може бути замінений еквівалентною  $T$ -схемою або  $\Pi$ -схемою. Три опори схеми заміщення повинні бути розраховані з врахуванням того, що схема заміщення повинна мати такі ж коефіцієнти  $A, B, C, D$ , які має чотириполюсник.

### ***T*-схема схеми заміщення**



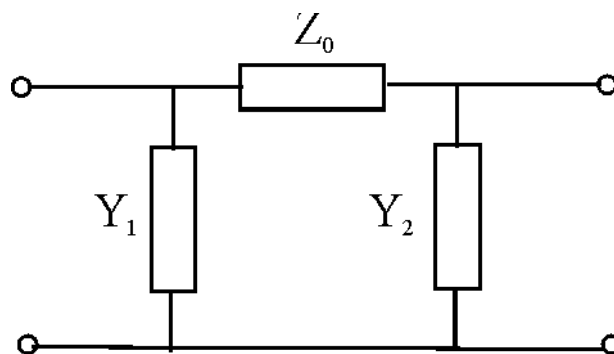
Для *T*-схеми коефіцієнти чотирьополусника виражаються через опори схеми заміщення наступним чином

$$A = 1 + Z_1 Y_0, \quad B = Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y_0, \quad C = Y_0, \quad D = 1 + Z_2 Y_0.$$

Тому

$$Z_1 = \frac{A-1}{C}, \quad Z_2 = \frac{D-1}{C}, \quad Y_0 = C.$$

### ***Π*-схема схеми заміщення.**



Для *Π*-схеми:

$$A = 1 + Z_0 Y_2, \quad B = Z_0, \quad C = Y_1 + Y_2 + Y_1 Y_2 Z_0, \quad D = 1 + Z_0 Y_1.$$

Тому

$$Z_0 = B, \quad Y_1 = \frac{D-1}{B}, \quad Y_2 = \frac{A-1}{B}.$$

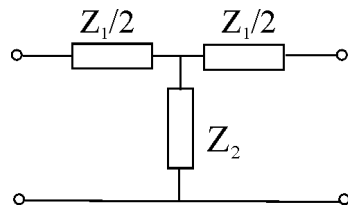
Якщо чотирьополусник симетричний, то  $A=D$  і в *T*-схемі  $Z_1=Z_2$ , а в *Π*-схемі  $Y_1=Y_2$ .

## Розрахунок електричних фільтрів.

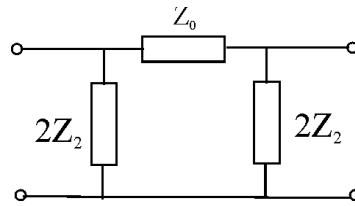
### Фільтри типу k.

Фільтри в яких добуток повздовжнього опору  $Z_1$  на поперечний  $Z_2$  не залежить від частоти (є постійною величиною рівною  $k^2$ ) називають фільтрами типу k. Для цих фільтрів справедливо:

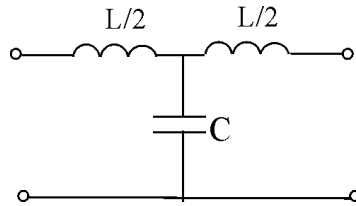
$$Z_1 Z_2 = k^2 .$$



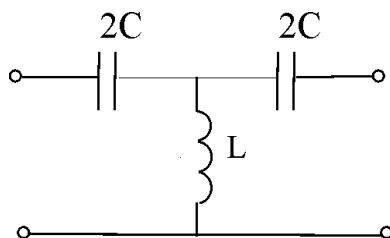
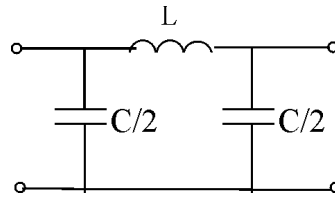
T - подібна ланка.



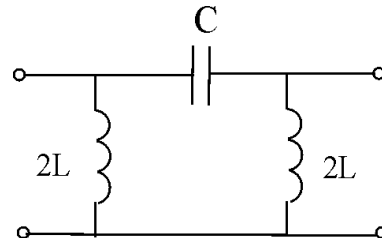
Π – подібна ланка.



T- і Π- подібна ланки ФНЧ.



T- і Π- подібна ланки ФВЧ.



Гранична частота:  $\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ ,  $f_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}}$ .

Затухання (в смузї затухання) :

$$\operatorname{ch} \alpha = 1 + Z_1 / 2Z_2 .$$

Затухання вимірюється в децибелах і визначається за формулою:

$$a = 20 \lg \frac{U_{in}}{U_{out}}, \text{ або } a = 20 \lg \frac{1}{K}$$

де  $U_{in}$  - напруга на вході фільтра,  $U_{out}$  - напруга на виході фільтра,

$K = \frac{U_{out}}{U_{in}}$  - коефіцієнт передачі.

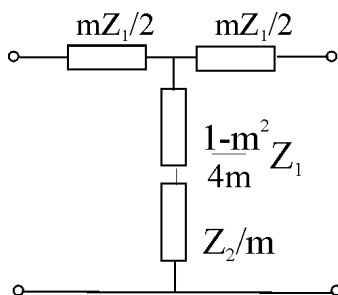
Характеристичний опір:

$$Z_{cT} = k \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}, \text{ де } k = \sqrt{\frac{L}{C}} - \text{ для } \Gamma - \text{ схеми;}$$

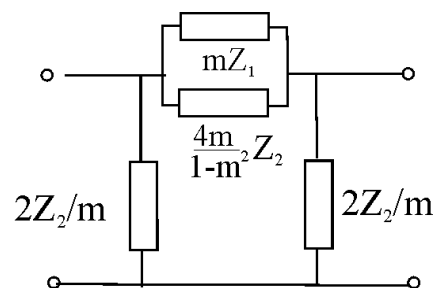
$$Z_{c\Pi} = k / \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}} = \sqrt{\frac{L}{C}} / \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}} - \text{ для } \Pi - \text{ схеми.}$$

### Фільтри типу m.

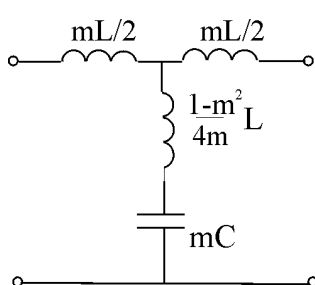
Фільтри типу m, будують на основі фільтрів типу k включаючи послідовно до  $Z_2$  або паралельно до  $Z_1$  додаткий опір, таким чином щоб відбувався резонанс напруги у першому випадку і резонанс струмів у другому. Фільтри типу m характеризуються параметром – m, який представляє собою довільне число в межах від 0 до 1 (найчастіше вибирають  $m=0.6$ ) і визначає рівномірність частотної характеристики характеристичного опору.



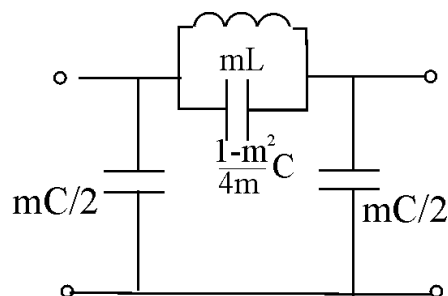
Т – ланка фільтра типу m.



П – ланка фільтра типу m.



Т – подібна ланка ФНЧ m типу.



П – подібна ланка ФНЧ m типу.

Фільтри типу  $m$  мають однакові з прототипами ( фільтрами типу  $k$ ) граничні частоти і характеристичні опори, але мають велику крутизну росту затухання в смузі затухання.

Гранична частота:

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}}.$$

Затухання (в смузі затухання) :

$$\operatorname{ch} \alpha = 1 + Z_1/2Z_2.$$

Затухання вимірюється в децибелах і визначається за формулою:

$$a = 20 \lg \frac{U_{in}}{U_{out}}, \text{ або } a = 20 \lg \frac{1}{K}$$

де  $U_{in}$  - напруга на вході фільтра,  $U_{out}$  - напруга на виході фільтра,

$K = \frac{U_{out}}{U_{in}}$  - коефіцієнт передачі.

Характеристичний опір:

$$Z_{cT} = k \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}, \text{ де } k = \sqrt{\frac{L}{C}} - \text{ для } T - \text{ схеми;}$$

$$Z_{c\Pi} = k / \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}} = \sqrt{\frac{L}{C}} / \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}} - \text{ для } \Pi - \text{ схеми.}$$

Частота, що відповідає нескінченно великому затуханню для цих фільтрів дорівнює:

$$\omega_{a=\infty} = \omega_0 / \sqrt{1 - m^2}.$$

### **Література:**

1. Каяцкас А. А. Основы радиоэлектроники. М., Высш. шк. , 1988, 464 с.
2. Баскаков С, И. Радиотехнические цепи и сигналы. , Высш. школа, 1988, 448 с.
3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи., Высш. школа, 1984, 558 с..
4. Мигулин Д.В. и др. Основы теории колебаний. М., Наука, 1938, 392 с.
5. Капранов У.В.. Кулешов Б.Н., Уткин ГМ. Теория колебаний в радиотехнике., Наука, 1934, 320 с.
6. Молчанов А.П, Занадворов П.К. Курс электротехники и радиотехники., Наука, М., Энергия , 1975, 473 с.
7. Мирский Г. Я. Радиотехнич. измерения. М., Энергия, 1975, 600 с.
8. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач .М., Высш. школа, 1987, 207 с.

### **Додаткова література.**

1. Скаржепа В.А., Луценко А.Н. Электроника и микросхемотехника. К.: Вища школа. Гол. вид-во. - 1989. - 431 с.
2. Закалик Л.І., Ткачук Р.А. Основи мікроелектроніки. Тернопіль . - 1998. - 352 с.
3. Герасимов С.М., Белоус М.В., Москалюк В.А. Физические основы электронной техники. К.: Вища школа. Гол. вид-во. - 1981. - 368 с.