

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»  
ФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ЖИХАРЄВ В.М., КОВАЧ Є.Т.,  
ХАРХАЛІС Л.Ю., БЕРЧА Д.М.

# МЕХАНІКА

ФІЗИЧНИЙ ПРАКТИКУМ



Ужгород  
Видавництво УжНУ «Говерла»  
2012

ББК 22.3 Я73  
УДК: 53(075.8)

**МЕХАНІКА. Фізичний практикум: Навчальний посібник / ЖИХАРЄВ В.М., КОВАЧ Є.Т., ХАРХАЛІС Л.Ю., БЕРЧА Д.М. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2012. – 156 с.**

У посібнику наведено опис лабораторних робіт, які відповідають курсу «МЕХАНІКА» дисципліни «Загальна фізика» для фізичних факультетів університетів.

Для студентів, які навчаються по напрямку підготовки спеціалістів «Прикладна фізика» та «Фізика». Буде корисним і для студентів інших спеціальностей.

**Рецензент:** доктор фізико-математичних наук,  
професор **Попик Ю.В.**

*Рекомендовано до друку  
Редакційно-методичною радою університету  
Протокол №7 від 27 березня 2012 року*

© Жихарєв В.М., Ковач Є.Т., Хархаліс Л.Ю., Берча Д.М., 2012.

## ВСТУП

Оскільки курс “Механіка” є експериментальним, він повинен ознайомити студента з основними методами спостережень, вимірювань і експериментування. Тому курс супроводжується лабораторними заняттями в загальному фізичному практикумі.

Нижче наводимо тематику лабораторних занять.

1. Вступ, організаційні питання, правила техніки безпеки, значення фізичного експерименту. Загальна характеристика фізичних вимірювань. Систематичні похибки вимірювань.

2. Основи теорії випадкових похибок вимірювань. Прямі вимірювання. Лабораторна робота №1. **Експериментальне визначення функцій розподілу випадкових величин.**

3. Основи теорії випадкових похибок вимірювань. Непрямі вимірювання. Аналітична обробка результатів вимірювань з допомогою мікроЕОМ, на яких можна програмувати.

4. Лабораторна робота №2. **Вимірювання лінійних розмірів і визначення об'ємів твердих тіл.**

5. Графічна обробка експериментальних результатів. Лабораторна робота №3. **Вивчення систематичних і випадкових похибок на прикладі вимірювання питомого опору ніхромової дротини.**

6. Необхідне число вимірювань. Похибка похибки. Повторення матеріалу з теорії похибок. **Контрольна робота.**

7. Лабораторна робота №4. **Вивчення законів прямолінійного руху на машині Атвуда.**

8. Лабораторна робота №5. **Визначення густини твердих тіл.**

9. Лабораторна робота №6. **Визначення прискорення сили земного тяжіння за допомогою математичного маятника.**

10. Лабораторна робота №7. **Визначення прискорення сили земного тяжіння за допомогою оборотного маятника.**

11. Лабораторна робота №8. **Визначення модуля Юнга за розтягом дротини та прогином стержня.**

12. Лабораторна робота №9. **Визначення коефіцієнта сили сухого тертя (тертя кочення)**

13. Лабораторна робота №10. **Вивчення законів обертового руху за допомогою маятника Обербека.**

14. Лабораторна робота №11. **Визначення еліпсоїда інерції твердих тіл за допомогою крутильних коливань.**

15. Лабораторна робота №12. **Визначення моменту інерції металевих кілець за допомогою маятника Максвелла.**

16. Лабораторна робота №13. **Визначення моментів інерції та перевірка теореми Гюйгенса-Штейнера методом крутильних коливань.**

17. Лабораторна робота №14. **Визначення швидкості куль з допомогою балістичного крутильного маятника.**

18. Лабораторна робота №15. **Вивчення законів збереження за допомогою зіткнення тіл.**

19. Лабораторна робота №16. **Вивчення коливань зв'язаних систем.**

20. Лабораторна робота №17. **Рух тіл при наявності аеродинамічних сил опору.**

21. Лабораторна робота №18. **Вивчення прецесії вільного гіроскопа.**

22. Лабораторна робота №19. **Визначення швидкості звуку акустичним методом.**

Мета проведення лабораторних занять – ознайомлення з основними методиками вимірювання фізичних величин, приладами і установками, набуття навиків проведення експерименту й обробки експериментальних результатів, поглиблення знань і розуміння суті фізичних явищ і законів.

Завдання проведення лабораторних робіт. У результаті проведення лабораторних занять студент повинен :

- знати суть фізичних законів і понять, основи експериментальних методик, їх чутливість і точність, основи теорії похибок.

- вміти критично аналізувати і виконувати всі етапи лабораторної роботи, вірно використовувати методи наближених обчислень, найбільш поширені засоби обчислювальної техніки для підрахунку результатів експериментальних вимірювань, робити виводи формул абсолютної і відносної похибок для різних випадків, правильно оформляти одержані експериментальні результати і звіт про виконану роботу, скласти коротке резюме по кожному завданню.

Підготовка до лабораторних робіт, їх виконання, оформлення звітів передбачають велику самостійну працю як вдома, так і при роботі в лабораторії. Перш ніж приступити до виконання лабораторної роботи, студент повинен підготувати теоретичні питання, що запропоновані у методичному посібнику до даної лабораторної роботи, вивчити експериментальну установку та суть фізичного явища, вивести робочі формули, вміти оцінити похибки вимірювань. Після допуску викладачем до виконання роботи студент зобов'язаний вести чітко записи в робочому зошиті і на протязі заняття не тільки виконати вимірювання по лабораторній роботі, але

й провести обчислення вимірюваної величини та оцінити похибку вимірювань [1-4]. Під час самопідготовки студент оформляє звіт про виконану лабораторну роботу і знайомиться з установками, методичними матеріалами до наступної лабораторної роботи [2-6], вивчає теоретичний матеріал [1,7-12], готує таблиці і схеми в робочому зошиті, виводить робочі формули і формули для похибок вимірювань, складає програми розрахунків на ЕОМ.

Нижче приводимо основні вимоги до підготовки і оформлення звіту про лабораторну роботу.

**1. Підготовка до лабораторної роботи.** В робочому зошиті повинні бути записи (в довільній формі) по наступних пунктах:

- *назва роботи;*
- *відповіді на теоретичні питання, знання яких необхідне для виконання роботи;*
- *опис експериментальної установки;*
- *робочі формули та їх вивід;*
- *формули для оцінки похибок вимірювань та їх вивід;*
- *таблиця для запису результатів вимірювань.*

Всі розрахунки виконуються в робочому зошиті протягом лабораторного заняття.

**2. Порядок допуску до виконання лабораторної роботи.** До виконання роботи студент допускається, якщо він:

- *вивчив явища, закони, які досліджуються чи застосовуються в даній лабораторній роботі;*
- *знає методику експерименту, хід виконання роботи;*
- *оформив звіт про лабораторну роботу, виконану на попередньому занятті;*
- *захистив всі виконані попередні роботи (має заборгованість не більше, ніж із двох робіт).*

**3. Оформлення звіту про виконану роботу.** Звіт про лабораторну роботу виконується студентом в окремому зошиті протоколів лабораторних робіт після виконання роботи згідно наступної схеми:

- *назва роботи;*
- *мета роботи;*
- *використані матеріали і прилади;*
- *короткі теоретичні відомості про явища, що вивчаються в роботі;*
- *схема установки і опис її роботи;*
- *хід виконання роботи;*
- *кінцевий результат вимірювань і оцінка похибок вимірювань;*
- *аналіз одержаних результатів і висновки.*

## ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК

### 1. Вимірювання фізичних величин, обробка результатів вимірювання.

Основу науково-технічних знань становлять вимірювання. Про значення вимірювань дуже вдало висловився Д.І. Менделєєв: "Наука починається... з того часу, коли починають вимірювати...". Вимірювання мають важливе значення і у практичному житті людини. Завдяки вимірюванням кількісно характеризуються властивості фізичних об'єктів, мірою яких є фізична величина. Згідно державної системи стандартів: "Фізична величина – це властивість, спільна в якісному відношенні для багатьох фізичних об'єктів (фізичних систем, їхніх станів та процесів, що в них відбуваються), але в кількісному відношенні – індивідуальна для кожного об'єкта". "Вимірювання – знаходження значення фізичної величини дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів".

Технічні засоби, які використовуються для вимірювань і мають нормовані метрологічні властивості, називаються засобами вимірювання. Їх поділяють на міри (наприклад: міра маси – важок, гиря; міра довжини – лінійка, метр, мікрометр), вимірювальні перетворювачі, прилади (штангенциркуль, амперметр, тощо), вимірювальні установки (місток Уїтстона).

Кожному фізичному об'єкту властиве певне значення фізичної величини. Значення, яке ідеально відтворює властивості даного об'єкта в кількісному та в якісному відношенні, називають істинним значенням фізичної величини. Істинні значення не залежать від засобів нашого пізнання і є тією абсолютною істиною, до якої ми прагнемо, намагаючись виразити їх у вигляді чисел. Істинне значення величини ми можемо оцінити експериментальним шляхом за допомогою засобів вимірювання. Значення величини, знайдене вимірюваннями, називають результатом вимірювання. Результат вимірювання – це продукт нашого пізнання, наближена оцінка істинного значення величини. Він залежить не лише від самого значення величини, яку оцінюють, але і від засобів вимірювання, методів вимірювання, від навичок і властивостей органів чуття експериментатора.

Величина, яка характеризує відхилення результату вимірювання від істинного значення вимірюваної величини є однією з найважливіших характеристик вимірювання і називається похибкою вимірювань.

Якщо  $x$  – результат вимірювання, а  $x_0$  – істинне значення вимірюваної величини, то різниця між ними виражає так звану абсолютну похибку:

$$\Delta x = x - x_0. \quad (1)$$

Всі вимірювання поділяються на такі види: **прямі, посередні або непрямі, сукупні та спільні.**

**Прямі вимірювання:** шукане значення величини знаходять безпосередньо з дослідних даних порівнянням з мірою цієї величини чи безпосередньо за відліковим пристроєм вимірювального приладу.

**Посередні (непрямі) вимірювання** – це такі вимірювання, результат яких знаходять на основі прямих вимірювань величин, пов'язаних з вимірюваною величиною відомою аналітичною, графічною чи табличною залежністю. Приклад: знаходження густини речовини  $\rho$  однорідного тіла за його масою  $m$  та геометричними розмірами; для тіла у формі прямокутного паралелепіпеда довжиною  $a$ , шириною  $b$ , висотою  $c$ :  $\rho = m/(a \cdot b \cdot c)$

**Сукупні вимірювання** – це такі, коли виконуються одночасно вимірювання кількох однойменних величин, за якими шукані значення величин знаходять розв'язуванням системи рівнянь, знайдених при прямих вимірюваннях різних комбінацій цих величин. Приклад: знаходження маси зважуванням. Нехай маємо гирі 1 кг, 2 кг і 5 кг, та деякі невідомі маси  $m_1$  і  $m_2$ . Нехай зважування на терезах дало такий результат (рівновагу терезів):

$$\begin{cases} m_2 = m_1 + 5 + 1 \\ m_1 + 2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 5 - 2 = 3 \text{ кг} \\ m_2 = 3 + 6 = 9 \text{ кг} \end{cases}$$

**Спільні вимірювання** – це такі, в результаті яких одночасно вимірюють кілька різнойменних величин для визначення залежності між ними. Приклад: залежність опору провідника від температури для знаходження, наприклад, температурних коефіцієнтів опору, струму від напруги для оцінки вольт-амперних характеристик діода. Одночасним вимірюванням сили струму у колі і падіння напруги на змінному опорі цього кола знаходять е.р.с. та внутрішній опір джерела струму: нехай при деяких двох значеннях змінного опору виміряні значення є  $U_1, I_1$  і  $U_2, I_2$ ; тоді

$$\left. \begin{array}{l} E = I_1 r + U_1 \\ E = I_2 r + U_2 \end{array} \right\} \Rightarrow (I_1 - I_2) \cdot r + U_1 - U_2 = 0 \Rightarrow r = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2}; E = \frac{I_1 U_2 - U_1 I_2}{I_1 - I_2}$$

У залежності від умов проведення експерименту вимірювання поділяють на рівноточні (умови при проведенні дослідів залишаються незмінними) і нерівноточні.

## 2. Види похибок вимірювань.

Мета вимірювання-знаходження результату вимірювання (наближеної оцінки істинного значення фізичної величини) та оцінка його відхилення від істинного значення. Характеризує це відхилення абсолютна похибка, яка визначається формулою (1).

Оскільки  $x_0$  (істинне значення) невідоме, то його замінюють дійсним значенням  $X$ , яке знаходять на експерименті і яке найкраще наближається до істинного. Тоді похибку обчислюють за формулою:

$$\Delta x = x - X. \quad (2)$$

Найпростіше ця формула використовується в тих випадках, коли відоме  $X$ . Наприклад, при встановленні похибок засобів вимірювання при їх перевірці (перевірка засобів вимірювання). Якщо при перевірці гирі, на якій нанесено 100 г, виявиться, що маса дорівнює 100,030 г, то  $\Delta m = 100 - 100,030 = -0,030$  г. А дійсне значення маси гирі  $X = x + (-\Delta x) = x - \Delta x$ , оскільки поправка дорівнює похибці, взятій з протилежним знаком. Якщо похибку в -0,030г матиме гиря масою 5 г, то зрозуміло, що гиря в 100 г виготовлена точніше. Для порівняння користуються так званою *відносною похибкою*, яка визначається за формулою

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0} \approx \frac{\Delta x}{X} \approx \frac{\Delta x}{x} \quad (3)$$

і виражається в процентах. Величина обернена до похибки називається точністю вимірювання. Якщо похибка вимірювання становить  $10^{-2}\% = 10^{-4}$ , то точність дорівнює  $10^4$ .

Оскільки істинне значення фізичної величини залишається невідомим, то похибку вимірювання точно встановити неможливо. Під час обробки результатів спостережень оцінюється лише проміжок, в якому може знаходитися значення похибки, а отже, й результат вимірювання матиме не одне, конкретне, значення, а множину значень.

Щоб оцінити похибки вимірювання, потрібно розглянути їх характер і причини появи. Щодо останніх похибки поділяються на три класи: випадкові, систематичні й промахи.

Випадкова похибка – складова похибки вимірювання, яка змінюється випадково під час повторних вимірювань однієї й тієї самої величини. Її наявність виявляється в тому, що при повторенні вимірювань тієї самої величини з однаковою ретельністю дістають

значення, які відрізняються від попередніх останніми значущими цифрами. Випадкові похибки зумовлюються багатьма причинами, дія яких на результат кожного спостереження різна і не може бути врахована наперед (струси фундаменту будинку, вплив незначних переміщень повітря, тощо).

Систематична похибка – складова похибки вимірювання, яка залишається сталою або закономірно змінюється під час повторних вимірювань тієї самої величини. Вона завжди односторонньо впливає на результати спостережень, тільки збільшуючи, чи тільки зменшуючи їх. Наприклад, похибки мір, що виникають у результаті допусків під час їх виготовлення, похибки показів вимірювальних приладів через неточне їх градування і т.д. До систематичних похибок належить похибка внаслідок не абсолютної рівності плеч терезів.

Промахи – грубі похибки, які спотворюють результати вимірювань. Причинами їх виникнення можуть бути: неправильне визначення ціни поділки шкали (особливо, коли ціна поділки змінюється), помилковий відлік поділок шкали, помилковий запис результату спостереження (описка), пропуски в спостереженнях, помилки під час обчислення чи переписування. Як правило, результати таких вимірювань вилучаються з сукупності даних вимірювань.

### 3. Похибки прямих вимірювань [2,3]

Нехай у результаті повторюваних рівноточних вимірювань фізичної величини маємо послідовність значень:

$$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n.$$

подамо результати  $n$  вимірювань у вигляді:

$$\Delta x_1 = x_1 - X; \Delta x_2 = x_2 - X; \Delta x_i = x_i - X; \Delta x_n = x_n - X. \quad (4)$$

Підсумовуючи члени в (4), дістаємо:

$$X = \langle x \rangle - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \quad \text{де} \quad \langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

– середнє арифметичне значення вимірюваної величини.

При великій кількості вимірювань, у випадку їх нормального (гаусівського) розподілу, випадкові відхилення  $\Delta x_i$ , однакові за модулями, але з різними знаками, зустрічаються однаково часто, тому

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{а} \quad X = \langle x \rangle.$$

Отже, при  $n \rightarrow \infty$  істинне значення фізичної величини дорівнює середньому арифметичному (звичайно, якщо при цьому немає систематичних похибок).

У реальній метрологічній практиці число вимірювань  $n$  є скінченною величиною. Через це завдання теорії обробки результатів вимірювань зводиться до оцінки ступеня наближення вимірюваного значення до істинного.

Прояв випадкової події визначається імовірністю  $P$ . Імовірністю називається число, навколо якого групуються відносні частоти появи випадкової події в різних серіях випробувань.

Відносною частотою події  $A$  ( $P_A$ ) називається відношення числа появи певної події  $n_A$  до числа всіх випробувань  $n$  ( $P_A = \frac{n_A}{n}$ ).

Повне описання появи випадкових подій здійснюється за допомогою функції розподілу ймовірностей. Аналогічно використовується і функція розподілу випадкових похибок.

Інтегральною функцією розподілу, або просто функцією розподілу випадкової величини  $x$ , називається функція  $F(x)$ , яка дорівнює ймовірності того, що випадкова величина  $x$  набуває значення, яке менше від деякого числа  $x_i$ , тобто  $F(x) = P[x < x_i]$ .

Геометричний зміст функції розподілу полягає в тому, що при кожному значенні  $x$  функція  $F(x)$  дорівнює ймовірності того, що випадкова величина  $x$  набуває на числовій осі значень, які містяться ліворуч від точки  $x$ .

У теорії ймовірностей стосовно до фізичних вимірювань розглядаються випадкові величини, можливі значення яких містяться в певному інтервалі  $[\alpha, \beta]$ .

На основі закону розподілу ймовірностей такої випадкової величини  $x$  визначається імовірність попадання її значення в довільний інтервал  $[x_1, x_2]$ , який міститься всередині  $[\alpha, \beta]$ . Цю імовірність позначатимемо  $p(x_1 < x < x_2)$ . Обмежимося тільки такими випадковими величинами  $x$ , для яких імовірність попадання в інтервал  $[x_i, x_i + \Delta x]$  малої довжини  $\Delta x > 0$  можна вважати пропорційною довжині цього інтервалу:

$$p(x_i < x < x_i + \Delta x) \approx f(x) \cdot \Delta x$$

Точний зміст цього співвідношення дається граничним співвідношенням

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p(x_i < x < x_i + \Delta x)}{\Delta x} = f(x),$$

де функція  $f(x)$  називається густиною розподілу випадкової величини  $x$ , а добуток  $f(x)dx$  – елементом імовірності.

Користуючись елементом імовірності, шляхом інтегрування можна знайти імовірність попадання значення  $x$  в довільний інтервал  $[x_1, x_2]$ :

$$p(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \quad (5)$$

Густина розподілу має такі властивості:

1)  $f(x) \geq 0$ , як похідна неспадної функції  $p(x)$ , що пов'язано з невід'ємністю ймовірностей;

2) функція повинна бути нормована:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \quad (6)$$

яка відображає вірогідність події ( $-\infty < x < \infty$ ). Якщо всі можливі значення випадкової величини  $x$  скупчені в скінченному інтервалі  $[\alpha, \beta]$  (отже, поза цим інтервалом  $f(x) \equiv 0$ ), то умова (6) набирає вигляду:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 1.$$

З (5) випливає, що імовірність попадання випадкової величини  $x$  в інтервал  $[x_1, x_2 = x_1 + \Delta x]$  геометрично можна подати площею криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції розподілу, ординатами  $f(x_1)$  і  $f(x_2)$  (на осі ординат відкладається значення  $f(x)$ ) та віссю абсцис.

Підкреслимо, що густина розподілу ймовірностей, знайдена вище, визначає закон розподілу неперервної величини  $x$ . Густину розподілу  $f(x)$  називають ще диференціальною функцією розподілу.

Досвід обробки результатів вимірювань показує, що розподіл похибок описується різними законами. Проте досить часто для опису розподілу випадкових похибок використовується нормальний закон розподілу (закон Гауса)

$$f(\Delta x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta x^2}{2\sigma^2}\right), \quad \Delta x = x - x_0 \quad (7)$$

де  $\sigma^2$  - дисперсія генеральної сукупності, а  $\Delta x$  – відхилення від істинного значення. Генеральною сукупністю називається множина всіх можливих значень вимірювань  $x_i$  або можливих значень похибок  $\Delta x_i$ .

Закон Гауса знаходить широке застосування в теорії похибок. Це зумовлене такими причинами:

1) для великої кількості вимірювань рівні за модулем, але протилежні за знаком, похибки зустрічаються однаково часто;

2) малі за модулем похибки зустрічаються частіше, ніж великі, тобто імовірність появи похибки тим менша, чим більше її абсолютне значення;

3) похибки вимірювань становлять неперервний ряд значень. На рис. 1 наведено форму кривої розподілу Гауса для трьох значень  $\sigma$ . Початок координат розміщено в точці з нульовою похибкою. Для нормального закону розподілу є характерним його симетрія (при великій кількості вимірювань появи випадкових похибок, які рівні за величиною, але різні за знаком – рівноімовірні) і монотонність зменшення густини ймовірності (поява великих випадкових похибок – малоімовірна). Права і ліва вітки кривої Гауса асимптотично наближаються до осі абсцис.

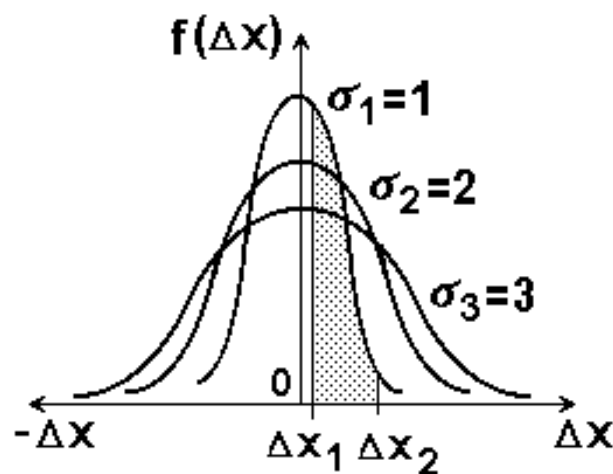


рис.1

Закон Гауса – одномодальний. Максимальне значення закону розподілу (густини імовірності) називається модою. Закон розподілу з одним максимальним значенням називається одномодальним, з двома- двомодальним і т.д. Мода нормального розподілу дорівнює  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$ . Чим менше  $\sigma$ , тим вище, гостріше крива розподілу і навпаки. Із збільшенням  $\sigma$  зростає розкид відліків, тобто точність вимірювання зменшується. Величина  $\sigma$  – є основним параметром, який визначає вид кривої розподілу випадкових похибок.

Зміст функції Гауса такий. Площа фігури, обмеженої кривою Гауса, віссю  $\Delta x$  і лініями –  $f(\Delta x_1)$  і  $f(\Delta x_2)$  (заштрихована площа на рис.1), чисельно дорівнює імовірності, з якою довільний відлік попадає в інтервал  $[\Delta x_1, \Delta x_2]$ .

Безпосереднім інтегруванням (5) можна пересвідчитися, що вся площа під кривою Гауса дорівнює точно одиниці.

Для оцінки величини випадкової похибки є кілька способів. Найбільш поширеною є оцінка за допомогою середньої квадратичної (або стандартної) похибки  $S_n$ , згідно з означенням:

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n-1}}. \quad (8)$$

Генеральна сукупність (всі можливі значення вимірювальної величини при  $n \rightarrow \infty$ ) характеризується математичним сподіванням або генеральним середнім –  $M(x)$  і дисперсією –  $D(x)$ .

Центр розкиду значень  $x_i$  відповідає математичному сподіванню  $M(x)$ , яке являє собою істинне значення вимірюваної величини. Дисперсія – це міра відхилення випадкових величин від математичного сподівання: чим більше  $D(x)$ , тим менш точні вимірювання.

Для нормального розподілу випадкових величин

$$M(x) = X; \quad D(x) = \sigma^2.$$

Мірою розсіяння вимірюваних значень  $x_i$  відносно  $M(x)$  є також середнє квадратичне (або стандартне) відхилення:  $\sigma = +\sqrt{D(x)}$ .

В лабораторній практиці вимірювань дістають обмежене число виміряних значень величини і тому обчислюють лише наближені значення  $M(x)$  і  $D(x)$ ; їх називають оцінками.

Оцінкою математичного сподівання є середнє арифметичне виміряних даних фізичної величини

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum x_i \approx M(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x \rangle = M(x). \quad (9)$$

Оцінками дисперсії  $D$  та стандартного відхилення  $\sigma$  є

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2 \approx D(x); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^2 = D(x);$$

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2} \approx \sqrt{D(x)} = \sigma; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sigma.$$

Зауважимо, що результат вимірювання величин  $\langle x \rangle$ , обчислений за (9), є також випадковою величиною (про це ми переконаємося при виконанні лабораторної роботи №1).

Для оцінки точності результату вимірюного значення фізичної величини використовують такі характеристики: *надійний інтервал* та *граничну похибку середнього арифметичного*.

Надійний (або довірчий) інтервал – це інтервал, який містить істинне значення  $X$  вимірюної фізичної величини  $x$  із заданою імовірністю  $\alpha$ , яка називається *надійною (або довірчою) імовірністю* (або коефіцієнтом надійності). При цьому справедливий вираз

$$p(\langle x \rangle - \Delta x \leq X \leq \langle x \rangle + \Delta x) = \alpha, \quad (10)$$

де  $\Delta x$  – гранична похибка  $\langle x \rangle$ , яка дорівнює половині надійного інтервалу (10),

$$\Delta x = t_{\alpha n} \cdot S_{\bar{x}}, \quad (11)$$

де  $S_{\bar{x}}$  – оцінка стандартного відхилення  $\langle x \rangle$  від істинного значення  $X$  (*середня квадратична похибка середнього арифметичного*), яка обчислюється за формулою

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}; \quad (12)$$

$t_{\alpha n}$  – нормований коефіцієнт Стьюдента (табл.1, Додаток);  $n$  – число ступенів вільності (для знаходження коефіцієнта Стьюдента  $t_{\alpha n}$  число ступенів вільності беруть таким, що дорівнює  $n-1$  при обробці однієї групи вимірювань, розподілених за нормальним законом для невеликих вибірок з генеральної сукупності (вибірка – скінчене число значень величини  $x_i$ ). Результати вимірювань записуються у вигляді

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x = \bar{x} \pm t_{\alpha n} \cdot S_{\bar{x}}.$$

Отже, коефіцієнт Стьюдента залежить від надійної імовірності та кількості вимірювань.

Якщо надійний інтервал збільшується, то зростає імовірність того, що істинне значення величини попаде в розглядуваний інтервал. Високий ступінь надійності необхідний при відповідальних вимірюваннях. Надійну імовірність  $\alpha$  прийнято задавати такою, що дорівнює 0,90; 0,95; 0,98; 0,99 (значення 0,99 рекомендується брати для випадків, коли вимірювання не можна повторити; в особливо відповідальних випадках, коли результати вимірювання мають певне значення для здоров'я людей, допускається брати більш високу надійну імовірність).

Отже, для характеристики величини випадкової похибки потрібне знання двох чисел: значення самої похибки (або надійного інтервалу  $\Delta x$ ) та значення надійної імовірності  $\alpha$ .

Використання середньої квадратичної похибки як основного числового виразу випадкової похибки є зручним на тій підставі, що цій величині відповідає цілком певна надійна імовірність, яка дорівнює 0,68; подвоєній середній квадратичній похибці ( $2\sigma$ ) відповідає надійна імовірність -0,95, потроєній ( $3\sigma$ ) -0,999.

Розподіл Стюдента справедливий для малого числа вимірювань ( $n \geq 2$ ), що і характерно як для техніки, так і для наукових досліджень. Із зростанням числа вимірювань розподіл Стюдента прагне до нормального розподілу (фактично при  $n > 20$ ). Математичного виразу розподілу Стюдента ми не наводимо, зважаючи на його складність.

Характерним для розподілу Стюдента є його незалежність від параметрів  $\langle x \rangle$  (або  $\Delta x$ ) та  $\sigma$  нормальної генеральної сукупності, а також можливість оцінки при невеликому числі вимірювань ( $n < 20$ ) похибки  $\Delta x = \langle x \rangle - x_i$  за заданою надійною імовірністю  $\alpha$  або знаходженням надійності вимірювань за заданим значенням  $\Delta x$ .

Розподіл Стюдента дає також змогу встановити, що при досить великому  $n$  середнє арифметичне значення  $\langle x \rangle$  з імовірністю, близькою до вірогідності, дуже мало відрізняється від істинного значення  $x_0$ .

Методика визначення та єдиний підхід до оцінки показників точності вимірювань для основних видів вимірювання знайшли своє відображення в ГОСТ 8000-72 (Державна система забезпечення єдності вимірювань. Основні положення) та в спеціальних метрологічних працях.

Статистична обробка результатів прямих вимірювань з багаторазовими спостереженнями виконується згідно схеми №1.

#### Схема №1 обробки результатів прямих вимірювань [3].

Необхідно враховувати як випадкові, так і систематичні похибки і починати із виключення відомих систематичних похибок і визначення невиключених систематичних похибок, зокрема інструментальних.

Для знаходження випадкової похибки треба виконати кілька спостережень в такій послідовності:

1. Вимірюють фізичну величину  $n$  разів і дані заносять в таблицю.
2. Відкидають промахи.

3. Знаходять середнє значення шуканої величини  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .

4. Обчислюють похибки кожного із вимірів  $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$ .

5. Обчислюють квадрати похибок  $(\Delta x_i)^2$ .

6. Визначають середню квадратичну похибку середнього арифметичного

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}.$$

7. Задають значення коефіцієнта надійності (надійної імовірності)  $\alpha$  (0,95 або 0,9).

8. Знаходять за таблицею №1 (Додаток) для вибраного  $n$  і заданого  $\alpha$  коефіцієнт Стюдента  $t_{\alpha n}$ .

9. Визначають межі надійного інтервалу  $\Delta x = t_{\alpha n} \cdot S_{\bar{x}}$ .

10. Якщо величина  $\Delta x$  (межа надійного інтервалу) виявиться порівняною з величиною систематичної похибки (інструментальної похибки), то за межу надійного інтервалу слід взяти результуючу похибку

$$\Delta x = \sqrt{(t_{\alpha n} \cdot S_{\bar{x}})^2 + (t_{\alpha \infty} \frac{\delta}{3})^2},$$

де  $\delta$  – величина похибки приладу, а  $t_{\alpha \infty}$  – коефіцієнт Стюдента при  $n = \infty$ . Систематична похибка вимірювання може бути визначена за формулою  $\Delta x = t_{\alpha \infty} \frac{\delta}{3}$ , або ж оцінюється як половина ціни поділки вимірного приладу.

11. Обчислюють відносну похибку результату серії вимірювань  $\varepsilon = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%$ .

12. Кінцевий результат записують у вигляді  $x = \bar{x} \pm \Delta x$ .

#### 4. Похибки посередніх (непрямих) вимірювань [3].

##### а) Метод дисперсій.

Нехай вимірювана величина  $y$  є функцією кількох величин  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n$ , значення яких знаходять прямими вимірюваннями. Ці величини є аргументами. Отже можемо записати:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

Значення  $\bar{y}$  знаходять за середніми арифметичними значеннями аргументів:

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n). \quad (13)$$

Зупинимося на найпростішому випадку, коли  $\bar{y} = f(\bar{x})$ .

Абсолютна похибка прямого вимірювання величини  $x$  дорівнює  $\pm dx$  і нею зумовлена похибка функції  $\pm dy$ . Очевидно, що

$$\bar{y} \pm dy = f(\bar{x} \pm dx). \quad (14)$$

Розкладемо праву частину (14) в ряд Тейлора:

$$\bar{y} \pm dy = f(x) \pm \frac{df(x)}{dx} dx \pm \frac{1}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} (dx)^2 + \dots$$

Обмежуючись членами, які містять першу степінь, одержимо:

$$\bar{y} \pm dy = f(x) \pm \frac{df(x)}{dx} dx,$$

тоді

$$dy = \pm \frac{df(x)}{dx} dx.$$

Оскільки вимірювана нами величина в загальному задається формулою (13), то при однаковому коефіцієнті надійності  $\alpha$  для цих прямих вимірювань надійна межа похибки посереднього вимірювання знаходиться за формулою:

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2}, \quad (15)$$

де  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \dots$  – частинні похідні  $y$  по  $x_1, x_2, x_i, \dots$ ;  $\Delta y, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots$  – надійні межі похибок вимірювання величин  $y, x_1, x_2, \dots$ .

Межа відносної похибки дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots)} \cdot 100\%. \quad (16)$$

Значення похідних обчислюють при  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots$ .

Застосувавши ці формули для функцій певного виду, відповідно знайдемо похибки за формулами, приведеними в таблиці №3 [2].

#### б) Метод приведення.

У посередніх вимірюваннях можна значення функції обчислювати для кожного окремого спостереження

$$y_1 = f(x_1, x_2, \dots); y_2 = f(x_1, x_2, \dots); y_3 = f(x_1, x_2, \dots),$$

а надійну межу похибки посереднього вимірювання – в результаті обробки вибірки  $y_1, y_2, y_3, \dots$  як це робимо в прямих вимірюваннях, наприклад:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \quad \Delta y = t_{\alpha n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n(n-1)}} \quad \text{і т.д.}$$

Щоб знайти результат посереднього вимірювання, виконують математичні операції і результати обчислень округлюють. Тому, очевидно, немає потреби виконувати обчислення з результатами прямих вимірювань як з точними числами, а робити їх, знайшовши

необхідну кількість значущих цифр у результаті. Це значно полегшить обчислення і звільнить від зайвої роботи, але в таких обчисленнях неминучі похибки. Щоб можна було нехтувати похибкою заокруглення при обчисленнях, вона повинна бути хоча б у 10 раз менша за похибку посередніх вимірювань. Тому всі обчислення слід проводити з такою кількістю значущих цифр, які перевищують на одиницю кількість значущих цифр, знайдених при вимірюваннях (для наступного округлення результату). Похибка однозначного числа не менша від  $(1/9) \cdot 100\% \approx 10\%$ , двозначного –  $(1/99) \cdot 100\% \approx 1\%$ , тризначного –  $(1/999) \cdot 100\% \approx 0,1\%$ . Тому при обчисленнях потрібно додержувати таких правил:

- а) якщо відносна похибка результату вимірювань становить 10-100%, обчислення можна виконувати з двома значущими цифрами;
- б) якщо відносна похибка 1-10%, обчислення можна виконувати з трьома значущими цифрами (ще можна використовувати логарифмічну лінійку);
- в) якщо відносна похибка 0,1-1%, обчислення можна виконувати з чотирма значущими цифрами (наприклад, за допомогою чотиризначних таблиць) і т.д.

У обчисленнях доводиться користуватися наближеними значеннями чисел, наприклад  $\pi$ . Округлюючи число (тобто замінюючи його наближеним значенням) до різних розрядів, дістанемо різні за значенням і знаком похибки. Щоб нехтувати похибкою таких чисел під час обчислення результату вимірювань, треба брати їх з такою кількістю значущих цифр, щоб похибка округлення була на порядок менша за похибку результату вимірювання.

Так само слід підходити до табличних і експериментальних даних. Якщо табличні дані наводяться без похибок, вважається, що похибка даного значення є похибкою округлення і межа її дорівнює 0,5 одиниці розряду останньої цифри числа. Похибка округлення підлягає рівномірному розподілу. Тому, коли треба визначити надійну межу похибки даного значення з довірчою імовірністю  $\alpha$ , використовують формулу:

$$\Delta x = P \cdot \ell \quad (P = \alpha \int f(x) dx), \quad (18)$$

в якій  $\ell$  дорівнює 0,5 одиниці розряду останньої цифри числа.

Результати сукупних вимірювань і надійні інтервали їх похибок можна знайти методами обробки результатів посередніх вимірювань, згідно схеми №4 [3].

#### СХЕМА №4

1. Для кожної вибірки величин прямих вимірів, які входять в ролі аргументу в досліджувану функцію, проводиться обробка

результатів за схемою №1 для прямих вимірювань при одному і тому ж значенні коефіцієнта надійності  $a$ .

2. Вираховують середнє значення шуканої величини

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n)$$

3. Оцінюють межі надійного інтервалу для результату непрямих вимірювань

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2},$$

де похідні  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$  і т.д. вираховуються при середніх значеннях аргументів  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ , і т.д.

4. Визначають відносну похибку  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\bar{y}} 100\% = \frac{\Delta y}{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n)} \cdot 100\%.$$

5. Кінцевий результат записують у формі:

$$y = \bar{y} \pm \Delta y$$

### 5. Графічне представлення результатів спільних вимірювань

Результати спільних вимірювань часто зображують графічно. Перевага графічного зображення в тому, що воно дає наочне зображення досліджуваної залежності між фізичними величинами, дає змогу швидко визначити деякі значення (наприклад, максимальне значення функції).

Похибку в експериментальному значенні на графіку можна вказувати рисками інтервалів:  $\perp$   $\dashv$ . Оскільки нанесення таких значків вимагає додаткових затрат часу і призводить до ускладнення графіків, їх треба наносити лише тоді, коли потрібні. Доцільність нанесення похибок на графіку можна продемонструвати на такому прикладі. Нехай потрібно провести криву через експериментальні точки, зображені на рис.2. З'єднати точки графіка ламаною лінією (а) не можна, бо це означало б, що при зміні однієї величини друга змінюється стрибками, що мало ймовірно. Як саме з'єднати точки, яку саме криву провести – пряму лінію чи плавну криву – визначають межі похибок вимірювань. Якщо вони такі як на графіку "б", то через точки графіка треба провести плавну криву; якщо ж похибки такі, як на графіку "в", то слід провести пряму лінію, бо вона є найпростішою функціональною залежністю. Експериментальні значення задовольняють і рівняння кривої графіка "б", але при таких великих похибках через експериментальні точки можна провести багато різних кривих, що відповідатимуть великій

кількості функціональних залежностей. Тому через експериментальні точки, що на рис.2в, найкраще провести пряму лінію.

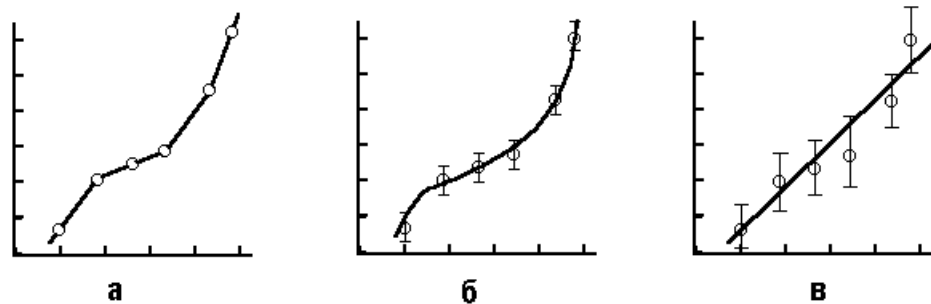


Рис.2

Графіки часто використовують для того, щоб перевірити, чи задовольняє досліджувана залежність ту або іншу функцію. При цьому лінію проводять між експериментальними точками так, щоб вони розташовувались, по можливості, в однаковій кількості по обидві сторони лінії. Детально про графічну обробку експериментальних даних описано в методичному посібнику [2], стор.103-132, та [3].

#### 6. Похибки заокруглення

Часто табличні значення математичних або фізичних постійних, а також розраховані результати непрямих вимірювань і їх похибок, у записі кінцевого результату необхідно представляти наближеним числом з певною кількістю значущих цифр. *Значущими цифрами* довільного числа називаються всі правильні і перша сумнівна цифри 1, 2, 3, ... 9, що входять у число, а також 0 (нуль, якщо він стоїть всередині або справа). *Тому при заокругленні результату вимірювання узвичай залишають тільки значущі цифри, тобто всі правильні і одну сумнівну цифри.*

Деяка k-та цифра наближеного числа правильна, якщо абсолютна похибка  $\Delta x$  не перевищує половини одиниці k-го розряду. Наприклад, якщо це розряд одиниць – то при  $\Delta x \leq 0,5$ ; якщо це розряд десяткових – то при  $\Delta x \leq 0,05$  і т.д., тобто цифра, наприклад, в розряді десяткових є *останньою* правильною цифрою, якщо похибка  $\Delta x \leq 0,05$ , а наступна цифра в розряді сотих є вже *першою* сумнівною. У протилежному випадку цифру k-го розряду називають першою сумнівною цифрою (тобто при  $\Delta x > 0,5 \cdot 10^k$ ). Таким чином, величина похибки визначає місцеположення (розряд) правильних і сумнівних цифр у наближеному числі, яке отримане в результаті вимірювання, і при його заокругленні залишають всі правильні і тільки одну

(першу) сумнівну цифри. У свою чергу це накладає обмеження на вибір кількості цифр при запису значення похибки  $\Delta x$  і яке визначається такими двома правилами. Число вимірювань  $3 < n < 10$ : при запису значення  $\Delta x$  необхідно зберегти *дві значущі цифри*, якщо перша 1 або 2, і достатньо записати *одну значущу цифру*, якщо перша 3 і більше (відносна похибка заокруглення до числа 3 становить  $\approx 17\%$ , тоді як така ж похибка оцінки самого СКВ  $S_n$  або  $S_{\bar{x}}$  становить  $\approx 24\%$  [3]). Число вимірювань  $n > 10$ : при запису значення  $\Delta x$  необхідно зберегти *дві значущі цифри*, якщо перша 1, 2 або 3 і достатньо записати *одну значущу цифру*, якщо перша 4 і більше.

Для задоволення цього способу запису кількості цифр у числі проводять його заокруглення. Нехай після заокруглення в числі повинно залишитись  $k$  значущих чисел, тоді користуються такими *правилами*:

- якщо  $k+1$  цифра менше 5, то цифра  $k$  не змінюється;
- якщо  $k+1$  цифра більше 5, то цифра  $k$  збільшується на 1;
- якщо  $k+1$  цифра дорівнює 5, то можливі два випадки:
  - а) якщо серед цифр, що відкидаються, крім цифри 5 є відмінні від 0, то  $k$ -та цифра збільшується на 1,
  - б) але якщо ці цифри 0, то:  $k$ -ту цифру збільшують на 1, якщо вона непарна, і залишають без змін, якщо вона парна (цифра 0 вважається парною).

*Якщо з наближеними числами ще будуть проводитись обчислення, то в них необхідно зберігати не більше двох сумнівних цифр.*

Виконуючи математичні операції з наближеними числами, необхідно дотримуватися *правила*: після виконання математичних операцій в кінцевому результаті необхідно залишити стільки значущих цифр після коми, скільки їх було в числі з найменшою кількістю таких цифр.

Приклад. При вимірюванні деяких 3-х одноіменних фізичних величин було проведено по 15 дослідів (вимірювань) і зроблені такі записи усереднених результатів і їх похибок:  $X_1=3,405$ ;  $X_2=4,9784$ ;  $X_3=1,33175$ ;  $\Delta x_1=0,04159$ ;  $\Delta x_2=0,00553$ ;  $\Delta x_3=0,000359$ . Написати правильно результати вимірювань, а також суми і добутки одержаних величин.

Розв'язок. Враховуючи кількість зроблених вимірювань (15), дані похибки необхідно заокруглити, залишивши доцільну кількість значущих цифр:

$\Delta x_1=0,04159$  – потрібно записати:  $\Delta x_1=0,04$ ;

$\Delta x_2=0,00553$  – потрібно записати:  $\Delta x_2=0,006$ ;

$\Delta x_3=0,000359$  – потрібно записати:  $\Delta x_3=0,0036$ .

Після цього середні величини  $X_i$  також необхідно заокруглити, залишивши правильні і одну сумнівну цифри:

$X_1=3,40$  – оскільки цифра 4 правильна ( $\Delta x_1=0,04<0,05$ ), тому залишається ще одна сумнівна цифра 0 (яка не збільшується на 1, бо є парною);

$X_2=4,98$  – оскільки  $\Delta x_2=0,06>0,05$ , то цифра сотих в числі  $X_2$  (7) вже є сумівною, тому вона залишається, збільшуючись на 1, а інші відкидаються;

$X_3=1,3318$  – цифри 1,3,3,1 – правильні ( $\Delta x_3=0,00036<0,0005$ ), 8 – сумнівна (7 непарна і при заокругленні збільшується на 1).

$$\sum X_i = 3,40 + 4,98 + 1,3318 = 9,7098 = 9,71;$$

$\prod X_i = 3,40 \cdot 4,98 \cdot 1,3318 = 22,54098136 = 22,54$  – результат математичної дії в даному прикладі заокруглюється до двох значущих цифр після коми (в числі  $X_1$  дві цифри після коми).

# Лабораторна робота №1

## ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

**I. МЕТА РОБОТИ:** ознайомлення з методом визначення функції розподілу густини імовірності випадкових величин, оцінка параметрів розподілу та вивчення впливу випадкових факторів на результат вимірювання в залежності від числа вимірювань.

**II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ:** генератор синусоїдальних коливань, частотомір-хронометр, секундомір.

**III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ,** знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

1. Випадкові величини. Імовірність появи випадкової величини.

2. Функції розподілу випадкових величин.

3. Середнє арифметичне значення випадкових величин. Дисперсія.

4. Похибки прямих вимірювань.

### IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Імовірність випадкової величини похибки полягає, наприклад, в появі величини "А" і може бути визначена так:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta N}{N} = P(A), \quad (1.1)$$

де  $N$  – число спостережень,  $\Delta N$  - число сприятливих спостережень, тобто таких, при яких подія "А" відбулась.  $P(A)$  – умовне позначення імовірності появи події, яка записана в дужках.  $\frac{\Delta N}{N}$  - відносна частота появи події.

З (1.1) випливає, що

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad (1.2)$$

Подія вважається практично достовірною, якщо  $P(A)$  мало відрізняється від одиниці і практично неможливою, якщо  $P(A)$  близьке до нуля. Поява одного будь-якого значення із  $n$  – можливих – імовірна подія, тобто:

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1. \quad (1.3)$$

Дискретна випадкова величина може бути описана з допомогою таблиці, яка містить всі можливі значення та їх імовірності.

Випадкова величина неперервна, якщо її можливі значення неперервно займають певний інтервал, тобто мають нескінченну множину значень. Неперервна випадкова величина, певні значення якої будемо позначати  $X$ , а можливі значення через  $x$ , описується за допомогою функції, яка дозволяє визначити імовірність того, що величина  $X$  буде знаходитися в інтервалі від  $x$  до  $x + dx$ , тобто  $P(x \leq X \leq x + dx)$ . Ця імовірність пропорційна ширині інтервалу  $dx$ , а коефіцієнт пропорційності в загальному випадку залежить від  $x$ , тобто

$$P(x \leq X \leq x + dx) = f(x)dx. \quad (1.4)$$

З (1.4)

$$f(x) = \frac{P(x \leq X \leq x + dx)}{dx}. \quad (1.5)$$

Функція  $f(x)$  називається функцією розподілу густини імовірності.

Очевидно,  $f(x)$  повинна задовольняти умові

$$P(-\infty < X < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \quad (1.6)$$

причому (1.6) має такий зміст, що і (1.3).

Вигляд функції  $f(x)$  залежить від характеру випадкової величини, і є законом, який повністю описує неперервну випадкову величину. Аналітичний вигляд функції (1.5) залежить від одного або декількох параметрів, які є числовими характеристиками випадкових величин.

Основними характеристиками випадкових величин є:

1)  $\mu$  – математичне очікування (яке на практиці оцінюється середнім арифметичним значенням випадкової величини), навколо якого групуються всі можливі її значення;

2)  $\sigma^2$  – дисперсія, рівна середньому значенню квадрата різниці між окремим значенням випадкової величини та її математичним очікуванням  $\mu$ .

Дисперсія дає представлення про те, як в середньому, розміщені (розсіяні) окремі значення по відношенню до середнього. Корінь квадратний із дисперсії, тобто  $\sqrt{\sigma^2}$ , називається середнім квадратичним відхиленням або середньою квадратичною похибкою. Величини  $\mu$  і  $\sigma^2$  вираховуються за формулами:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx; \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx.$$

Із різних функцій розподілу особливо важливе значення має “нормальний” розподіл (розподіл Гауса), для якого

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (1.7)$$

Графік цієї функції наведено на рис.1.1.

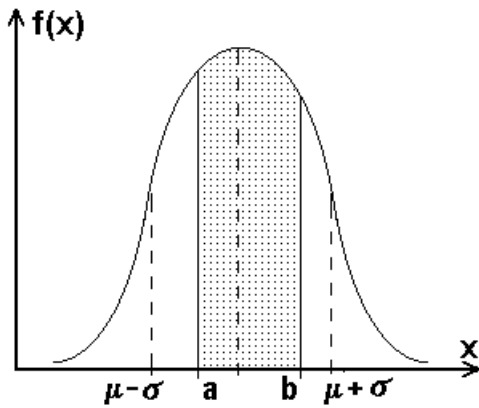


рис.1.1

Площа заштрихована на графіку густини імовірності  $f(x)$  чисельно рівна імовірності того, що випадкова величина  $X$  знаходиться в інтервалі  $(a, b)$ . Загальна площа під кривою згідно (1.3) і (1.6) рівна одиниці.

Результат будь-якого виміру завжди є випадкова величина  $X$ , яка описується якоюсь функцією розподілу. Якби функція розподілу була

відома, то значення вимірюваної величини було б рівним  $\mu$ , а дисперсія  $\sigma^2$  служила б мірою відтворення виміряного значення даним методом вимірювання.

У реальних умовах функція розподілу, як правило, невідома. Спеціально поставлені досліди та практика великої кількості вимірювань показали, що при відсутності промахів результати прямих вимірювань описуються нормальним розподілом. Проте параметри функції розподілу залишаються невідомими і повинні визначатись із досліду. Практично число вимірів обмежене, тому, вираховуються не  $\mu$  і  $\sigma^2$ , а їх наближені значення за формулами

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}; \quad (1.8)$$

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}, \quad (1.9)$$

де  $n$  – число вимірів,  $x_i$  – результати вимірів,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Досліди і теорія показують, що при малих  $n$  в знаменнику формули (1.9) повинно бути саме  $n-1$ , а не  $n$ , так як в останньому випадку  $S_n^2$  буде заниженим.

Вирахувані за (1.8) та (1.9) значення співпадають з  $\mu$  і  $\sigma^2$  лише при  $n \rightarrow \infty$  і служать лише оцінками останніх. Оскільки  $\bar{x}$  і  $S_n^2$

обчислюються не на основі всієї множини можливих значень випадкової величини, а лише по окремих значеннях цієї множини, які випадковим чином вибрані із неї, то їх прийнято називати “вибіркове середнє” і “вибіркова дисперсія”. Вибіркове середнє  $\bar{x}$ , як оцінка вимірюваної величини, теж є випадкова величина з середнім квадратичним відхиленням

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \quad (1.10)$$

Питання про те, наскільки  $\bar{x}$  відрізняється від істинного значення вимірюваної величини  $\mu$ , зводиться до обчислення

$$\alpha = P(\bar{x} - tS_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + tS_{\bar{x}}) = \int_{\bar{x}-tS_{\bar{x}}}^{\bar{x}+tS_{\bar{x}}} f(x) dx = \Phi(t),$$

тобто до обчислення імовірності того, що дійсне значення  $X = \mu$  лежить в інтервалі  $(\bar{x} - tS_{\bar{x}}, \bar{x} + tS_{\bar{x}})$ . Цю імовірність позначають буквою  $\alpha$  і називають коефіцієнтом надійності, або просто надійністю.

Для найбільш поширених функцій розподілу складені таблиці: для нормального розподілу значення функції  $\Phi(t)$  при різних  $t$ ; для розподілу Стюдента, який використовується при малому числі вимірів  $t_{n\alpha} = \Phi(\alpha, n - 1)$ . (Додаток, таблиця №1).

## V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Для визначення нормального розподілу використовується генератор синусоїдальних коливань електричного струму звукових частот. До генератора під'єднується частотомір-хронометр, який дозволяє відрахувати число імпульсів, що поступають на його вхід.

На передній панелі частотоміра є кнопки з написами “СБРОС”, “ПУСК”, “СТОП”. Вмикається частотомір в такому порядку.

1. Після ввімкнення приладу в електричну мережу (вмикається лаборантом) необхідно, не змінюючи положень ручок і кнопок перемикачів, які є на передній панелі приладу, натиснути кнопку “СБРОС”, при цьому покази індикаторів встановлюються на нуль. Прилад готовий до роботи.

2. Якщо натиснути кнопку “ПУСК”, прилад буде відраховувати кількість імпульсів, які поступають на його вхід від генератора.

Зупиняється прилад шляхом натискування на кнопку “СТОП”. При цьому на цифровому табло висвічується число підрахованих імпульсів. Натискуванням на кнопку “СБРОС” з цифрового табло “стирається” результат виміру і покази індикаторів встановлюються на нуль, після цього прилад готовий до наступного підрахунку.

## VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Ввімкнути генератор і частотомір за 20 хвилин до початку роботи (вмикається лаборантом).

2. За допомогою частотоміра і секундоміра зробити  $n=50$  відліків числа імпульсів  $\eta$ , які поступили на вхід приладу за 10 секунд (частота генератора в діапазоні 25-100 Гц встановлюється керівником заняття). Результати вимірювань занести в таблицю 1.1.

Таблиця 1.1.

| № п/п | $\eta_i$ | $v_i, c^{-1}$ | $\Delta v_i, c^{-1}$ | $(\Delta v_i)^2$ | № п/п | $\eta_i$ | $v_i, c^{-1}$ | $\Delta v_i, c^{-1}$ | $(\Delta v_i)^2$ | $\bar{v}, c^{-1}$ | $S_n^2$ | $S_{\bar{v}}$ | $\Delta v$ | $\alpha$ | $t_\alpha$ |
|-------|----------|---------------|----------------------|------------------|-------|----------|---------------|----------------------|------------------|-------------------|---------|---------------|------------|----------|------------|
| 1     |          |               |                      |                  | 26    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 2     |          |               |                      |                  | 27    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 3     |          |               |                      |                  | 28    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 4     |          |               |                      |                  | 29    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 5     |          |               |                      |                  | 30    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 6     |          |               |                      |                  | 31    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 7     |          |               |                      |                  | 32    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 8     |          |               |                      |                  | 33    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 9     |          |               |                      |                  | 34    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 10    |          |               |                      |                  | 35    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 11    |          |               |                      |                  | 36    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 12    |          |               |                      |                  | 37    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 13    |          |               |                      |                  | 38    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 14    |          |               |                      |                  | 39    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 15    |          |               |                      |                  | 40    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 16    |          |               |                      |                  | 41    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 17    |          |               |                      |                  | 42    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 18    |          |               |                      |                  | 43    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 19    |          |               |                      |                  | 44    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 20    |          |               |                      |                  | 45    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 21    |          |               |                      |                  | 46    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 22    |          |               |                      |                  | 47    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 23    |          |               |                      |                  | 48    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 24    |          |               |                      |                  | 49    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |
| 25    |          |               |                      |                  | 50    |          |               |                      |                  |                   |         |               |            |          |            |

3. Вираховують з точністю до 0.1 для кожного відліку  $v_i$  – число імпульсів за 1 с, а також середнє значення  $\bar{v}$ , дисперсію  $S_n^2$  та

середню квадратичну похибку середнього арифметичного  $S_{\bar{v}}$  за формулами (1.8), (1.9), (1.10) і межі надійного інтервалу  $\Delta v$  для коефіцієнта надійності  $\alpha=0.95$ , користуючись таблицею 1 (Додаток). Обчислення повторити за програмою №1 (Додаток).

4. Для визначення вигляду розподілу розбивають весь діапазон із значень  $v$  на інтервали  $\Delta v_0$  (в даній роботі  $\Delta v_0=0,5 \text{ с}^{-1}$ ) і підраховують, яка кількість  $\Delta n$  значень попадає в кожен інтервал. Обчислюють відносну частоту, яка приходить на одиничний інтервал. Для цього складають таблицю 1.2.

5. Побудувати на міліметровому папері діаграму розподілу  $p_i$  в залежності від  $v$ , відклавши по осі абсцис значення (початки інтервалів), а по осі ординат  $h$  (див. табл.1.2). Діаграма буде представляти собою систему прямокутників, висоти яких  $h_i$ , а основа –  $\Delta v_0$ .

6. На тому ж графіку в тому ж самому масштабі побудувати криву густини імовірності за формулою (1.7), замінивши  $\mu$  та  $\sigma^2$  їх наближеними значеннями  $\bar{v}$  та  $S_n^2$ . Для обчислень використовують програмовані калькулятори.

7. Вирахувати середні значення, середні квадратичні похибки і межі надійних (довірчих) інтервалів  $\Delta v$  для  $\alpha=0,95$  кожних п'яти значень. Skorистатися програмованими калькуляторами.

8. Нанести на графік для порівняння всі середні значення і надійні інтервали для п'яти значень, зберігаючи масштаб, який був вибраний при побудові гістограми.

9. Оформлені результати повинні бути представлені у вигляді, даному на рис.1.2.

10. Зробити висновки.

*Взірець таблиці 1.2.*

| Частота від-до, Гц | Кількість значень в інтервалі (риски) | $\Delta n_i$ | $p_i = \frac{\Delta n_i}{n}$ | $h = \frac{\Delta n_i}{n * \Delta v_0}$ |
|--------------------|---------------------------------------|--------------|------------------------------|---|
| 47-47.5            | ///                                   | 3            | $p_1 = \frac{3}{50}$         | $h_1 = \frac{3}{50 * 0.5}$              |
| 47.51-48           | ////                                  | 5            | $p_2 = \frac{5}{50}$         | $h_2 = \frac{5}{50 * 0.5}$              |
| 48.01-48.5         | /////                                 | 6            | $p_3 = \frac{6}{50}$         | $h_3 = \frac{6}{50 * 0.5}$              |

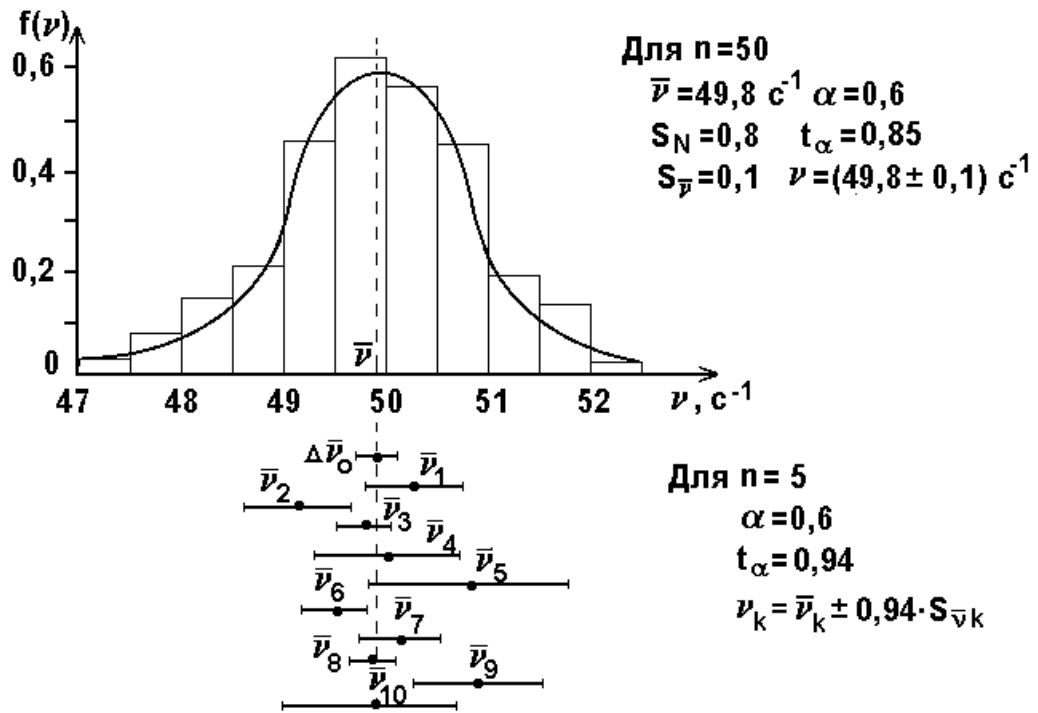


Рис. 1.2

*Примітка:* На основі результатів нижньої частини рис.1.2 викладач акцентує увагу студентів, що для окремих вибірок одержані значення вимірюваних величин з відповідними довірчими інтервалами можуть не перекриватись. А це означає, що середнє значення вимірюваної величини окремої вибірки є також випадкова величина, яка може значно відрізнятись від середнього значення для великої вибірки.

## Лабораторна робота №2 ВИМІРЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ РОЗМІРІВ І ВИЗНАЧЕННЯ ОБ'ЄМІВ ТВЕРДИХ ТІЛ

**I. МЕТА РОБОТИ:** навчити студентів користуватися штангенциркулем і мікрометром.

**II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ:** штангенциркуль, мікрометр, тіла правильної геометричної форми (циліндри або паралелепіпеди).

**III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ,** знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

1. Лінійні та кутові ноніуси, їх точність.
2. Похибка, яка виникає при вимірюванні за допомогою ноніуса.
3. Систематична похибка. Об'єднання систематичної та випадкової похибок.
4. Непрямі вимірювання. Обчислення похибки при непрямих вимірюваннях.

### IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

При вимірюванні лінійних розмірів тіл використовують міліметрові лінійки (ціна найменшої поділки яких складає 1 мм). Точність, з якою можна виміряти лінійні розміри тіл з допомогою такої лінійки, буде становити половину ціни поділки. Для підвищення точності вимірювання лінійних розмірів тіл використовують ноніуси.

Ноніусом називається допоміжна шкала, яка доповнює звичайну міліметрову лінійку і дозволяє підвищити точність вимірювань в 10-20 разів. Ноніуси бувають лінійними або кутовими. Використовуються вони в штангенциркулях, мікрометрах, теодолітах і т.д.

Лінійний ноніус – це коротка лінійка, яка переміщується плавно вздовж основної шкали. Ноніуси виготовляють таким чином, щоб при ціні поділки верхньої основної шкали  $l_m$ , а нижньої  $l_n$  існувало таке ціле число  $k$ , при якому

$$kl_m = (k \pm 1)l_n, \quad (2.1)$$

або

$$(2k - 1)l_m = kl_n. \quad (2.1')$$

Ноніуси, для яких в формулі буде знак “плюс”, характеризуються тим, що  $l_m > l_n$  (тобто довжина поділки верхньої

шкали більша поділки нижньої шкали). Для  $l_m < l_n$  знак в формулі (2.1) буде “мінус”.

Нехай маємо справу з ноніусом, для якого  $l_m > l_n$ . Величину, яка визначається за формулою

$$\delta = l_m - l_n = \frac{l_m}{k+1} = \frac{l_n}{k}, \quad (2.2)$$

називають ціною поділки ноніуса, причому  $k+1=N$  відповідає кількості поділок на нижній шкалі (шкалі ноніуса).

Якщо нульові поділки верхньої та нижньої шкал співпадають, то співпадають, крім того,  $k$ -ва поділка верхньої шкали з поділкою нижньої шкали, що видно з рис.2.1.

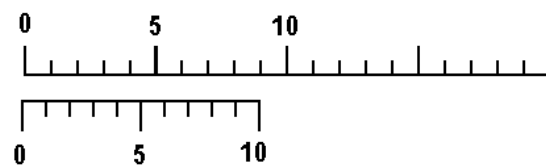


Рис. 2.1

## V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Штангенциркуль (рис.2.2) складається з розділеної на міліметри масштабної лінійки **М**, вздовж якої може переміщуватися перпендикулярно до неї ніжка **FB** з гвинтом **С**, який служить для її закріплення; у ніжці **FB** зроблено виріз, на скошеному краї якого, що прилягає до масштабу, нанесено ноніус. Нерухома ніжка **LA**, що також перпендикулярна до масштабної лінійки, служить стопором для вимірюваного тіла. Якщо ніжки притиснуті тісно одна до одної, то нуль ноніуса співпадає з нулем масштабної лінійки.

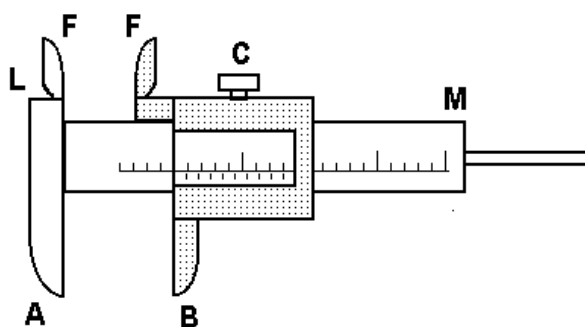


Рис. 2.2

Вимірювання лінійних розмірів виконують в такий спосіб. Розвівши достатньо ніжки штангенциркуля, розміщують між ними вимірюване тіло, ніжку **FB** підводять так, щоб тіло було злегка затиснуте, і після цього роблять відлік. Відраховують на масштабі ціле

число міліметрів  $m$  до нуля ноніуса і дивляться, яка поділка ноніуса співпадає з якоюсь поділкою масштабу. Довжина відрізків, виміряна за допомогою штангенциркуля, рівна числу цілих поділок масштабу  $m$  плюс ціна поділки ноніуса, помножена на номер його поділки  $n$ , яка співпадає з певною поділкою масштабу:

$$L = ml_m + n\delta. \quad (2.3)$$

Для вимірювання внутрішнього діаметра трубок використовуються частини **FF** ніжок штангенциркуля, які вставляються в трубку і розводяться так, щоб щільно приставали до внутрішніх стінок трубки. Відлік вимірюваної величини проводиться точно так, як і в попередньому випадку.

Для точного вимірювання діаметра дротинки, товщини пластинок і т.д. використовується мікрометр (рис.2.3). Він має вигляд тисків, в яких вимірювана деталь затискується за допомогою гвинта. Крок гвинта, як правило, вибирається рівним 1 або 0.5 мм. На стержні гвинта **A** закріплений барабан **C** з шкалою, яка має 50 поділок. Коли стержень **A** притиснутий до підп'ятника **F**, нуль барабана встановлюється напроти нуля лінійної шкали **D**. Вимірювана деталь розміщується між гвинтом **A** і протилежним йому підп'ятником **F**. Обертаючи гвинт за головку **B**, доводять його до дотику з деталлю. По лінійній шкалі відраховують міліметри, а по шкалі барабана його соті долі. Ціна поділки лінійної шкали 0,5 мм, тобто повний оберт барабана зміщує стержень **A** на 0,5 мм. Для зручності відліку штрихи півміліметрових поділок нанесені нижче осьової розмітки лінійної шкали. Ціна поділки на барабані 0,01 мм.

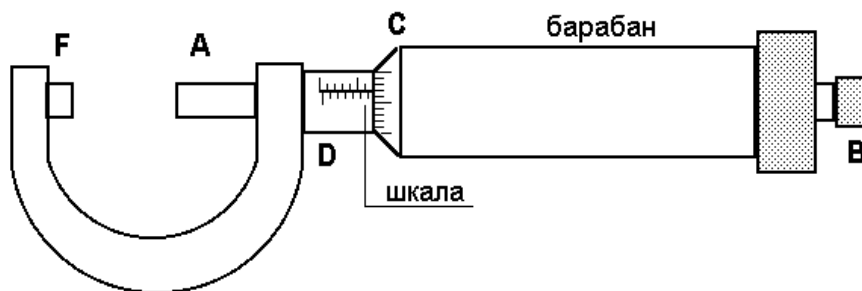


Рис. 2.3

Головним джерелом похибок при вимірюванні штангенциркулем і мікрометром є нерівномірний натиск ніжок або гвинта на вимірювану деталь. Це у першу чергу відноситься до мікрометра. По-перше, гвинт з малим кроком перетворює незначні зусилля руки, що обертає барабан мікрометра, у великі сили, що діють на предмет; по-друге, точність мікрометра, як правило, на порядок вища за точність штангенциркуля і навіть невеликі деформації вимірюваного предмета стають помітними. Щоб зменшити похибки, пов'язані з деформаціями вимірюваних предметів, барабан мікрометра має спеціальну головку **B**, яка дозволяє створювати невеликі, постійні в різних дослідах зусилля на вимірювану деталь, що фіксується за допомогою тріскачки. Після того, як почувся слабкий тріск, обертання головки **B** припинити.

**УВАГА.** Барабан мікрометра при вимірюваннях обертати лише за головку **B** (рис.2.3).

## VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Ознайомитися з будовою штангенциркуля та мікрометра. Визначити ціну поділки ноніуса штангенциркуля та ціну поділки ноніуса мікрометра.

2. Навчитись вимірювати штангенциркулем та мікрометром, для чого провести декілька попередніх вимірювань якого-небудь тіла.

3. Виміряти лінійні розміри тіла, визначеного керівником заняття (висоту  $h$  і діаметр  $d$  циліндра; довжину  $a$ , ширину  $b$  і висоту  $c$  паралелепіпеда). Вимірювання кожного параметру провести на 10 різних ділянках тіла.

## 7. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЯ

1. Результати кожного виміру всіх лінійних розмірів записують в таблицю і обробляють згідно схеми №1:

а) обчислюють середнє значення із 10 вимірювань кожної величини (для  $h$  і  $d$  або  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ):

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i;$$

б) знаходять похибки окремих вимірювань  $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$ ;

в) визначають квадрати похибок окремих вимірювань  $\Delta x_i^2$ ;

г) якщо один або кілька вимірів значно відрізняються по своєму значенню від решти, то слід перевірити, чи вони не належать до промахів;

д) визначають середню квадратичну похибку середньоарифметичного серії вимірювань ( $n=10$ ):

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (\Delta x_i)^2}{9 \cdot 10}};$$

е) задають значення коефіцієнта надійності  $\alpha=0,95$ ;

є) знаходять коефіцієнт Стюдента  $t_{\alpha n}$  для заданої надійності і числа зроблених вимірів (додаток, табл.1);

ж) знаходять похибку результату вимірювань (межі надійного інтервалу)

$$\Delta x = 2,26 \cdot S_{\bar{x}};$$

з) якщо величина похибки результату вимірювань  $\Delta x$  приблизно співпадає з величиною похибки приладу  $\delta$ , то за межу надійного інтервалу приймають величину

$$\Delta x = \sqrt{(2,26)^2 (S_{\bar{x}})^2 + (t_{\alpha n} / 3)^2 \delta^2},$$

для  $\alpha=0,95$   $t_{\alpha n} = 1,96$ ;

к) обчислюють відносну похибку результату серії вимірювань

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%.$$

2. За знайденими середніми значеннями лінійних розмірів обчислюють середнє значення об'єму тіла за формулою

$$\bar{V} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}, \quad (\bar{V} = [\pi \bar{d}^2 / 4] \cdot \bar{h}).$$

3. Знаходять значення абсолютної та відносної похибок об'єму

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial b} \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial c} \Delta c\right)^2}; \quad (\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial d} \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h} \Delta h\right)^2}$$

)

$$\varepsilon = \frac{\Delta V}{\bar{V}} \quad (\text{або } \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{\bar{c}}\right)^2}; \quad \varepsilon = \sqrt{4\left(\frac{\Delta d}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{\bar{h}}\right)^2})$$

Звідси:

$$\Delta V = \varepsilon \bar{V}.$$

4. Кінцевий результат записують у вигляді  $V = \bar{V} \pm \Delta V$ .

5. Роблять короткі висновки.

**ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3**  
**ВИВЧЕННЯ СИСТЕМАТИЧНИХ І ВИПАДКОВИХ ПОХИБОК**  
**НА ПРИКЛАДІ ВИМІРЮВАННЯ ПИТОМОГО ОПОРУ**  
**НІХРОМОВОЇ ДРОТИНИ**

**I. МЕТА РОБОТИ:** *ознайомлення з методами обробки результатів непрямих вимірів шляхом врахування систематичних і випадкових похибок.*

**II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ:** *мікрометр, лінійка, дротина, амперметр, вольтметр, джерело струму.*

**III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ,** знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

- 1. Фізичні величини та їх вимірювання.**
- 2. Основи теорії випадкових похибок вимірювань.**
- 3. Функції розподілу випадкових похибок вимірювань.**
- 4. Систематичні похибки вимірювань – методи їх виявлення та усунення.**
- 5. Схеми обробки прямих і опосередкованих вимірювань.**
- 6. Форми зображення результатів вимірювань.**

**IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ**

Питомий опір дротини  $\rho$ , виготовленої з однорідного матеріалу однакової товщини, може бути визначений за формулою

$$\rho = R \frac{S}{\ell}, \quad (3.1)$$

де  $R$  – опір дротини,  $\ell$  – її довжина,  $S$  – площа поперечного перерізу дротини.

Таким чином, для визначення питомого опору необхідно виміряти довжину дротини, площу її поперечного перерізу і величину електричного опору.

Для вимірювання лінійних розмірів служать лінійки, штангенциркулі, мікрометри, будова і принцип роботи яких детально описані в технологічній карті роботи № 2.

Для вимірювання сили струму в колі служать амперметри, які вмикають у коло послідовно, а для вимірювання різниці потенціалів (напруги) користуються вольтметрами, які вмикають паралельно до вимірюваної ділянки кола.

Незважаючи на те, що амперметри і вольтметри вимірюють різні величини і по-різному вмикаються в коло, принципової різниці в їх будові нема: в більшості приладів відхилення рухомої частини зумовлене проходженням електричного струму. Однак відмінність в

способах вмикання амперметрів і вольтметрів в електричне коло приводить до різних вимог, яким повинні задовольняти опори цих приладів.

Основними характеристиками електровимірювальних приладів є система, клас точності, границя вимірювання і чутливість. Ці характеристики звичайно позначають на шкалі приладу умовними знаками. В залежності від того, яке фізичне явище покладено в основу дії приладу, розрізняють системи: магнітоелектричну, електромагнітну, електродинамічну, електростатичну, теплову та деякі інші. Розглянемо перші дві системи.

Дія приладів магнітоелектричної системи заснована на взаємодії постійного магніту і вимірюваного струму, що проходить по обмотці рухомої рамки, котра рухається між полюсами магніту. При проходженні по рамці постійного струму на її витки діють сили, перпендикулярні вектору індукції. Ці сили створюють обертовий момент  $M = B \cdot S \cdot N \cdot J$ , де  $B$  – індукція магнітного поля,  $S$  – площа рамки,  $N$  – число витків у рамці,  $J$  – сила струму через рамку. Протидіючий момент створюється пружинними розтяжками і визначається за формулою  $M_n = k\alpha$ , де  $k$  – коефіцієнт пружності,  $\alpha$  – кут повороту рамки або відхилення стрілки показчика. В положенні рівноваги  $M_n = M$ , тому кут повороту рамки зв'язаний з величиною струму співвідношенням

$$\alpha = \frac{BSN}{k} J. \quad (3.2)$$

Зв'язок кута повороту  $\alpha$  і сили струму  $J$  є лінійним, так що магнітоелектричні прилади мають рівномірну шкалу.

Дія приладів електромагнітної системи заснована на взаємодії магнітного поля струму з рухомим феромагнітним сердечником. Феромагнетик втягується в магнітне поле незалежно від того, куди воно напрямлене. Тому напрямок обертового моменту не залежить від напрямку струму і прилади електромагнітної системи можуть використовуватися для вимірювання як змінних, так і постійних струмів. Величина вимірюваного струму і кут відхилення стрілки в приладах електромагнітної системи зв'язані квадратичною залежністю  $\alpha \sim J^2$ , що зумовлює нерівномірність їх шкал.

Границею вимірювання приладу називають те значення вимірюваної величини, при якому стрілка приладу відхиляється до кінця шкали.

Ціна поділки приладу дорівнює значенню вимірюваної величини, яка викликає відхилення показчика приладу на одну поділку. Нехай, наприклад, вольтметр має границю вимірювання 30 В. Шкала має 100 поділок. Тоді ціна поділки складає 0,3 В/под.

Чутливістю електровимірювального приладу називається відношення лінійного або кутового переміщення покажчика (стрілки) приладу до вимірюваної величини, що викликає це переміщення:

$$S = \frac{\Delta}{x}, \quad (3.3)$$

де  $\Delta$  – лінійне або кутове переміщення,  $x$  – вимірювана величина. Нехай при струмі  $J = 3\text{A}$  стрілка відхилилася на 36 поділок.

$$S = \frac{\Delta}{J} = 12 \text{ (под/А)}.$$

Електровимірювальні прилади характеризуються класом точності 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0 та ін. Число, що позначає клас точності, дорівнює відношенню, вираженому в процентах, граничного значення похибки приладу до значення діапазону величини (який є різницею між кінцевим, максимальним,  $x_k$  і початковим  $x_n$  значеннями фізичної величини, які може виміряти даний прилад), згідно формули:






$$\gamma = \pm \frac{\Delta x_m}{x_k - x_n} \cdot 100\%, \text{ якщо } x_n = 0, \text{ то } \gamma = \pm \frac{\Delta x_m}{x_k} \cdot 100\% \quad (3.4)$$

де  $\gamma$  – клас точності приладу,  $\Delta x_m$  – максимальна похибка приладу. Необхідно відрізнити клас точності приладу від його відносної похибки, котра обчислюється за формулою

$$\varepsilon = \pm \frac{\Delta x_m}{x} \cdot 100\%, \quad (3.5)$$

де  $x$  – „біжуче” значення вимірюваної величини.

#### Позначення на шкалах приладів

|  |   |
|--|---|
| Магнітоелектричний прилад  |  |
| Електромагнітний прилад  |  |
| Електродинамічний прилад   |  |
| Електростатичний прилад  |  |
| Прилад працює в горизонтальному положенні                                    |  |
| Клас точності  | 0.5   |
| Прилад для вимірювання постійного струму (напруги)                           | –   |
| Прилад для вимірювання змінного струму (напруги)                             | ~   |
| Випробувана напруга ізоляції між електричним колом приладу і корпусом (в КВ) |  |

## V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

У даній роботі величину опору  $R$  пропонується вимірювати за допомогою двох схем, зображених на рис. 3.1. Тут  $R_A$  – опір амперметра,  $R_V$  – опір вольтметра,  $R$  – опір досліджуваної дротини.

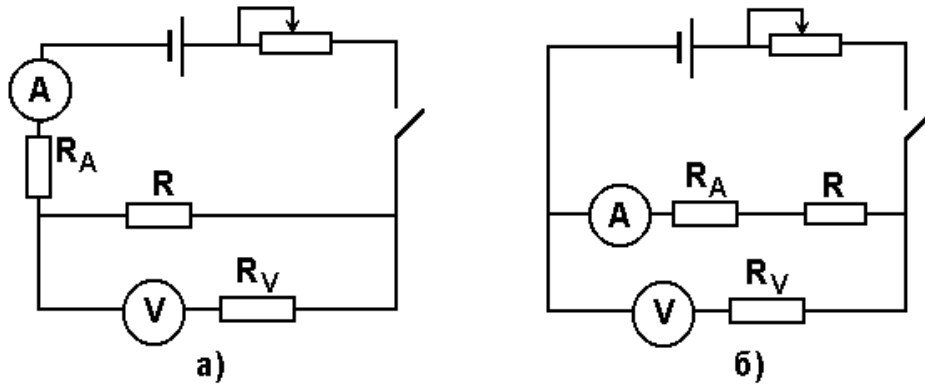


Рис. 3.1

Нехай  $U_i$  і  $J_i$  – покази вольтметра і амперметра. Розраховані за цими показниками величини опору дротини  $R_i = U_i / J_i$  для кожної з схем будуть відрізнятися один від одного і від шуканого  $R$  через вплив внутрішніх опорів приладів. Однак з допомогою рис. 3.1 неважко знайти зв'язок між шуканим опором дротини  $R$  і одержаним значенням  $R_i$ . В першому випадку (рис.3.1а) вольтметр правильно вимірює спад напруги на кінцях дротини, а амперметр вимірює не величину струму, що пройшов через дротину, а суму струмів, що проходять через дротину і вольтметр, тому:

$$R_1 = \frac{U_1}{J_1} = R \frac{R_V}{(R + R_V)}. \quad (3.6)$$

У другому випадку (рис.3.1б) амперметр вимірює силу струму, що проходить через дротину, але вольтметр вимірює сумарний спад напруги на дротині і амперметрі. В цьому випадку

$$R_2 = \frac{U_2}{J_2} = R + R_A. \quad (3.7)$$

Формули (3.6) і (3.7) можна перетворити. Для схеми з точним вимірюванням напруги:

$$\begin{aligned} R &= R_1 \frac{R_V}{(R_V - R_1)} = R_1 \frac{1}{1 - (R_1 / R_V)} \approx R_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_V}\right) = \\ &= \frac{U}{J} \left(1 + \frac{U}{JR_V}\right) = \frac{U}{J} + \frac{U^2}{J^2 R_V}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для схеми з точним вимірюванням струму:

$$R = R_2 \left(1 - \frac{R_A}{R_2}\right) = \frac{U}{J} \left(1 - \frac{R_A J}{U}\right) = \frac{U}{J} - R_A. \quad (3.9)$$

Загальний вигляд приладу для вимірювання опору дротини зображений на рис. 3.2. Основа 1 має регулюючі гвинти, які дозволяють провести вирівнювання приладу. До основи прикріплена колона 2 з нанесеною метричною шкалою 3. До колони прикріплені два нерухомі кронштейни 4 і один рухомий кронштейн 5, котрий може пересуватися вздовж колони і фіксуватися в будь-якому положенні. Між верхнім і нижнім кронштейном натягнута резистивна дротина 6, що прикріплена до кубиків 7 за допомогою гвинтів. Через контактний затискач на рухомому кронштейні забезпечується хороше гальванічне з'єднання з резистивною дротиною. На рухомому кронштейні 5 знаходиться риска, яка полегшує визначення на шкалі довжини відрізка резистивної дротини. Нижній, верхній і центральні контакти резистивної дротини підведені при допомозі провідників низького опору до вимірювальної частини приладу 8, що розміщена в центральному корпусі приладу. Постійна напруга від випрямляючого пристрою через потенціометр живить резистивну дротину  $R$ . Міліамперметр  $mA$ , ввімкнутий в коло дротини, служить для вимірювання струму, а вольтметр  $V$  - для вимірювання напруги на досліджуваній довжині резистивної дротини. Перемикач  $s_1$  служить для вибору роду роботи, а перемикач  $s_2$  - для вибору точності вимірювання струму і напруги.

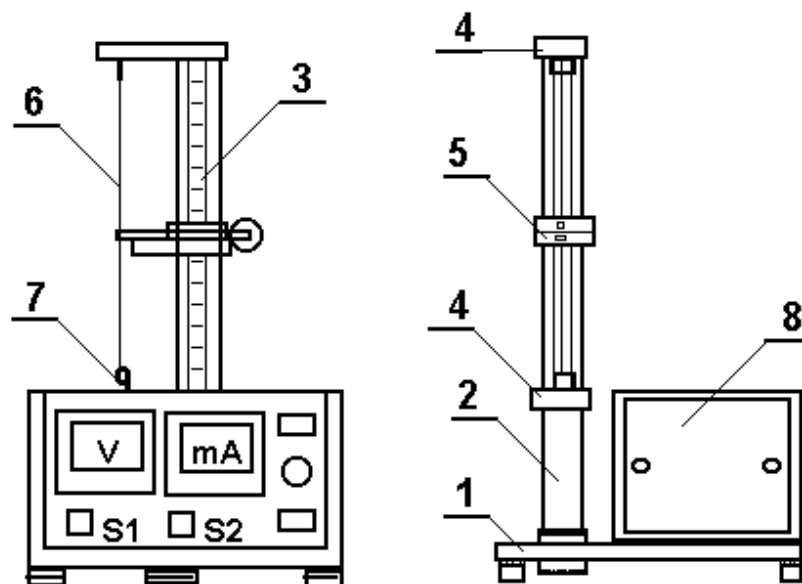


Рис. 3.2

Експлуатація приладу дозволена тільки при наявності заземлення.

Функціональне призначення маніпуляційних елементів:

"СЕТЬ" – вмикач напруги. Натискування кнопки мережі викликає вмикання напруги живлення. Засвічується неорова лампочка.

"МОСТИК" – перемикач виду роботи. Відпущена кнопка забезпечує взаємодію приладу з мостиком постійного струму. Натиснута кнопка дозволяє проводити вимірювання опору дротини по технічному методу. Перемикач, керуючий схемами: відпущений – точне вимірювання струму, натиснутий – точне вимірювання напруги.

"РЕГУЛИРОВКА ТОКА" – потенціометр регулювання струму.

Прилад готовий до вимірювань безпосередньо після вмикання його в електромережу і не вимагає часу для стабілізації умов роботи.

## VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. За допомогою мікрометра провести вимірювання діаметру досліджуваної дротини в 10-ти місцях. Результати занести в таблицю і обробити за схемою №1.

2. Визначити площу поперечного перерізу дротини за формулою

$$S = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \quad (3.10)$$

і оцінити її похибку

$$\Delta S = \frac{2\Delta D}{D} \cdot \bar{S} = \frac{\pi D \Delta D}{2} \quad (3.11)$$

3. За допомогою перемикача виду роботи виберіть вид режиму роботи (натиснути кнопку).

4. За допомогою перемикача, що керує схемами, вибрати схему точного вимірювання струму і точного вимірювання напруги.

5. За допомогою потенціометра ("РЕГУЛИРОВКА ТОКА") встановити таке значення напруги, щоб вольтметр показував 2/3 вимірювального діапазону.

6. Пересунути рухомий кронштейн на максимальну довжину резистивної дротини (0,5 м) по відношенню до основи.

7. Прочитати покази амперметра і вольтметра, а довжину досліджуваної дротини визначити за допомогою шкали на колонці. Результати записати в таблицю. Обчислити опір за відповідною формулою (3.3) або (3.9) в залежності від схеми вимірювань (робочі формули).

8. Пересунути рухомий кронштейн на 0,4; 0,3; 0,2; 0,1 м і для кожної довжини провести відповідні виміри сили струму і напруги. Результати вимірювань занести в таблицю. Обчислити опір за відповідною формулою та за графіком  $J(U)$ .

9. За допомогою перемикача, що керує схемами, змінити схему вимірювання і провести вимірювання для п'яти довжин відповідно. Результати вимірювань занести в таблицю. Обчислити опір за відповідною формулою та за графіком  $J(U)$ .

10. Враховуючи класи точності амперметра і вольтметра, а також ціну поділки шкали на колонці, визначити абсолютні похибки вимірювання напруги  $\Delta U$ , струму  $\Delta J$ , довжини  $\Delta \ell$ .

11. Виходячи з теорії непрямих вимірювань, визначити надійний інтервал  $\Delta R$  для кожної довжини за схемою № 4.

12. Провести обчислення питомого опору за формулою (3.1) для обох схем вимірювання (робоча формула).

13. Оцінити похибки визначення питомого опору згідно схеми № 4.

14. Результати представити у вигляді :

$$\rho = \bar{\rho} \pm \Delta\rho.$$

15. Представити графік залежності опору дротини  $R$  від її довжини  $\ell$ . Вказати на графіку похибки вимірювань  $R$  та  $\ell$ .

16. За нахилом графічної залежності  $R(\ell)$  визначити  $\rho$  і порівняти з одержаним значенням  $\rho$  (пункт 14).

17. Зробити відповідні висновки.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4 ВИВЧЕННЯ ЗАКОНІВ ПРЯМОЛІНІЙНОГО РУХУ НА МАШИНІ АТВУДА

**I. МЕТА РОБОТИ:** експериментальна перевірка законів рівномірного, рівноприскореного рухів, визначення прискорення вільного падіння та перевірка 2-го закону Ньютона.

**II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ ТА МАТЕРІАЛИ:** прилад Атвуда РМ-02, тягарці різної маси, секундомір.

**III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ,** знання яких необхідне для виконання роботи.

1. *Матеріальна точка як макроскопічний об'єкт. Елементарне переміщення.*
2. *Рівняння руху матеріальної точки. Записати і пояснити на прикладі прямолінійного руху матеріальної точки.*
3. *Швидкість і прискорення при криволінійному русі. Напрямок вектора швидкості. Годограф швидкостей.*
4. *Принцип відносності Галілея. Різні формулювання і доведення їх еквівалентності.*
5. *Інерціальні системи відліку. Система відліку Коперніка. Земля як інерціальна система відліку.*
6. *Що ми називаємо силою? Дати визначення та пояснити принцип незалежної дії сил.*
7. *Фізичний зміст другого закону Ньютона. Рівняння руху.*

### IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Механіка вивчає рух матеріальних тіл, тобто визначення положення тіл в просторі в будь-який момент часу, та причини, які приводять до цього положення тіл. *Поступальний рух* твердих тіл повністю описується рухом однієї матеріальної точки, якою може бути центр мас. Положення центра мас описується радіусом-вектором [4]:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad (4.1)$$

де  $m$  – маса всієї системи.

Зміна положення центра мас з часом при поступальному русі описується рівнянням руху:

$$\vec{r}_c(t) = \vec{r}_c(0) + \vec{v} \cdot t \quad (4.2)$$

Прямолінійний поступальний рух може бути рівномірним, коли швидкість стала, і прискореним. Для прямолінійного прискореного руху швидкість змінюється за формулою

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \quad (4.3)$$

де миттєве прискорення

$$\vec{a}_m = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (4.4)$$

При рівноприскореному прямолінійному русі

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0}. \quad (4.5)$$

Шлях, пройдений тілом в цьому випадку

$$s = v_0t + \frac{at^2}{2}. \quad (4.6)$$

Динаміка матеріальної точки описується трьома законами Ньютона. Основні закони кінематики та динаміки поступального руху дослідним шляхом можна перевірити на машині Атвуда.

## V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Загальний вигляд машини Атвуда показаний на рис.4.1. На вертикальній колонці 1, закріпленій на основі 2, розміщені три кронштейни: нерухомий нижній кронштейн 3 і два рухомих – середній 4 і верхній 5, а також верхня втулка 6. Основа встановлена на ніжках 7, регулюючи які проводять вирівнювання положення приладу. На верхній втулці за допомогою верхнього диска 8 закріплений вузол підшипника ролика 9, шків 10 і електромагніт (11). Через шків проходить нитка (12) з прив'язаними на її кінцях тягарцями 13 та 14. Електромагніт після підведення до нього напруги живлення, при допомозі фрикційної муфти, утримує систему шківів з тягарцями в стані спокою.

Верхній і середній кронштейни можна переміщувати вздовж колонки і фіксувати в будь-якому положенні, встановлюючи таким чином довжину шляху рівноприскореного і рівномірного руху. Для вимірювання величини шляху на колонці є міліметрова шкала 15, всі кронштейни мають показники положення, а верхній кронштейн додаткову риску, яка дає точне узгодження нижньої межі верхнього великого тягарця з визначеним початком шляху.

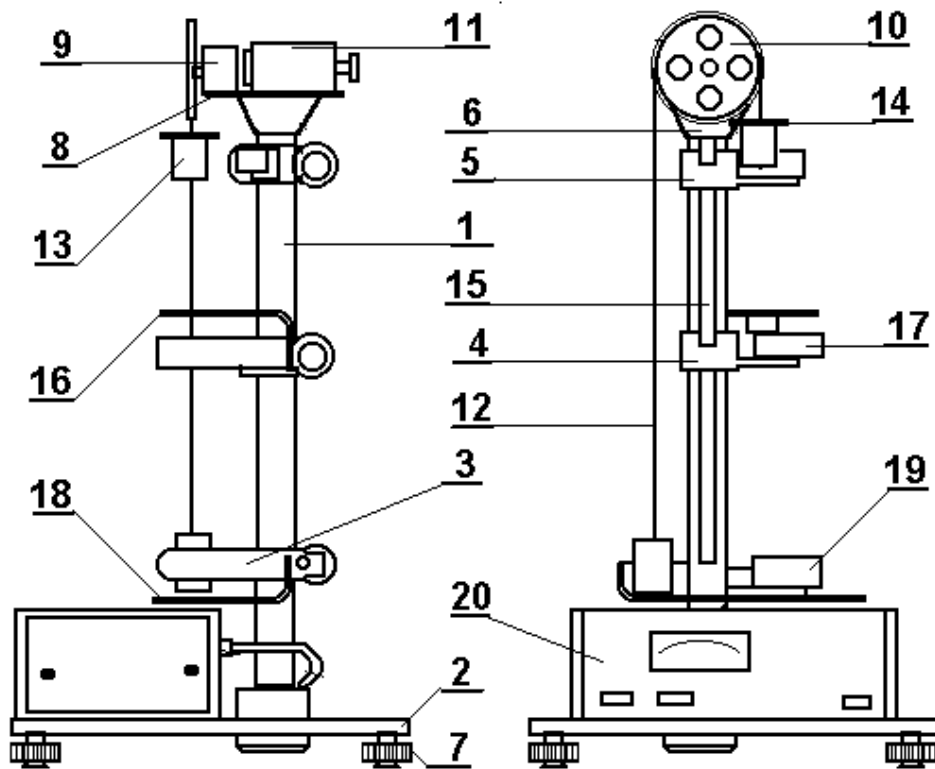


Рис. 4.1.

На середньому кронштейні закріплений кронштейн з кільцем 16 і фотоелектричний датчик №1 17. Цей кронштейн знімає з падаючого вниз великого тягарця додатковий тягарець 13, а фотоелектричний датчик в цей час створює електричний імпульс, який сигналізує початок рівномірного руху великих тягарців. Оптична вісь фотоелектричного датчика (риска на його корпусі) знаходиться на рівні покажчика положення середнього кронштейна. Нижній кронштейн обладнаний двома кронштейнами 18 з гумовими амортизаторами, на які опускаються тягарці з фотоелектричним датчиком №2 19 з оптичною віссю на рівні покажчика положення кронштейна, після перетину якої нижньою гранню падаючого тягарця, створюється електричний сигнал що сигналізує проходження тягарцями вибраного значення. На основі приладу знаходиться жорстко з ним зв'язаний мілісекундомір РМ-15 (20), до гнізд якого підведені відповідні фотоелектричні датчики №1 і №2.

Принцип роботи приладу розглянемо, виходячи з рис. 4.1. Через шків, який змонтований на підшипнику для зменшення сил тертя, проходить нитка з двома однаковими тягарцями масою  $M$ . Система в цьому випадку знаходиться в рівновазі.

Якщо на одну сторону блока додамо невеликий тягарець масою  $m$ , то система одержить прискорення, з яким вона буде

рухатися на шляху  $s$ . На кільці 16 додатковий тягарець буде знятий, і тягарці пройдуть шлях  $S$  рівномірно.

Конструкція приладу дозволяє перевірити закон швидкості

$$v = a \cdot t \quad (4.7)$$

для рівноприскореного руху без початкової швидкості. Для цього треба переконатися, що

$$\frac{v_1}{t_1} = \frac{v_2}{t_2} = a, \quad (4.8)$$

а це можливо зробити, якщо знайти метод визначення кінцевих швидкостей  $v_1$  і  $v_2$  рівноприскореного руху за час  $t_1$  і  $t_2$ .

Поділивши шлях  $S$ , пройдений тягарцем при рівномірному русі, на час цього руху  $t$  та вимірявши шлях рівноприскореного руху  $s$ , який тягарець проходить за час  $t_1$ , можемо записати

$$a = \frac{v}{t_1}, \quad (4.9)$$

де  $v = \frac{S}{t}$  швидкість на ділянці  $S$  рівномірного руху, яка дорівнює кінцевій швидкості рівноприскореного руху. Враховуючи, що у випадку рівноприскореного руху  $v^2 = 2as$ , одержимо кінцеву робочу формулу у вигляді

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{S^2}{2st^2}. \quad (4.10)$$

Змінюючи  $S$ , ми, тим самим, змінюємо  $t$ . Закон швидкості виконується, якщо з урахуванням похибки виконується рівність:

$$a = \frac{S_1^2}{2st_1^2} = \frac{S_2^2}{2st_2^2}. \quad (4.11)$$

Використовуючи прилад, можна також перевірити другий закон Ньютона:  $F = ma$ . При цьому необхідно, щоб забезпечувалась постійність рухомої маси

$$m = m_1 + m_2 + 2M \quad (4.12)$$

де  $m_1$ ,  $m_2$  – додаткові тягарці,  $M$  – маса кожного з двох великих підвішених тягарців. Зміна величини діючої сили досягається перекладанням додаткових тягарців  $m_1$  та  $m_2$  з одного великого тягарця на другий. Сила, яка приводить систему в рух, рівна різниці ваг правого та лівого тягарців.

У випадку, коли обидва додаткові тягарці знаходяться на правому великому тягарці, сила, яка приводить у рух систему, рівна

$$F_1 = (m_1 + m_2)g . \quad (4.13)$$

Переклавши менший додатковий тягарець  $m_2$  на лівий великий тягарець, знайдемо, що тоді

$$F_2 = (m_1 - m_2)g . \quad (4.14)$$

За другим законом Ньютона

$$\begin{aligned} F_1 &= (2M + m_1 + m_2) \cdot a_1 = (m_1 + m_2)g \\ F_2 &= (2M + m_1 + m_2) \cdot a_2 = (m_1 - m_2)g \end{aligned} \quad (4.15)$$

Отже,

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{(m_1 + m_2)}{(m_1 - m_2)} . \quad (4.16)$$

Оскільки  $a = \frac{2s}{t^2}$ , то при  $s_1 = s_2 = s$  одержують:

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} = \frac{t_2^2}{t_1^2} \quad (4.17)$$

Ця формула є другою робочою формулою для перевірки другого закону Ньютона.

Якщо масою блока і силами тертя в ньому знехтувати, а нитку вважати невагомою і нерозтяжною, то на основі другого закону Ньютона можна записати рівняння руху:

$$\begin{cases} (M + m)a = (M + m)g - F_H \\ Ma = F_H - Mg \end{cases} , \quad (4.18)$$

де  $a$  – прискорення, з яким рухаються тягарці,  $g$  – прискорення сили тяжіння,  $F_H$  – сила натягу нитки,  $m$  – маса одного із додаткових тягарців  $m_1$  або  $m_2$ .

Розв'язуючи рівняння (4.18), одержимо формулу для  $a$ :

$$a = g \frac{m}{2M + m} . \quad (4.19)$$

Звідси

$$g = \frac{2M + m}{m} \cdot \frac{S^2}{2st^2} , \quad (4.20)$$

де  $S$  – шлях рівномірного руху,  $s$  – шлях рівноприскореного руху,  $t$  – час, протягом якого тягарці пройдуть шлях  $S$ . У рівнянні (4.20) використано співвідношення (4.10). Формула (4.20) є третьою робочою формулою.

## VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

ПЕРЕД ВИКОНАННЯМ РОБОТИ ПЕРЕВІРИТИ ЗАЗЕМЛЕННЯ ПРИЛАДУ. Покласти на ролик нитку з великими тягарцями і перевірити, чи знаходиться система в стані рівноваги. За допомогою регулюючих ніжок основи привести в разі необхідності колонку до вертикального положення. Пересунути середній кронштейн на вибрану висоту над нижнім кронштейном і встановити їх так, щоб великий правий тягарець, падаючи проходив через середину робочого віконця фотоелектричних датчиків (завдяки чому буде визначений шлях  $S$ ). Пересунути верхній кронштейн на задану висоту над середнім кронштейном і встановити його в одній площині з іншими кронштейнами (таким чином буде визначений шлях  $s$ ). Натиснути кнопку “СЕТЬ” і пересвідчитися, що всі індикатори вимірювачів показують нуль, лампочки обох фотоелектричних датчиків світяться. Перемістити правий тягарець в верхнє положення, покласти на нього додатковий тягарець і перевірити, чи знаходиться система в стані спокою. Натиснути кнопку “ПУСК” і перевірити: чи рухається система, чи кронштейн 16 затримав додатковий тягарець, чи виміряв мілісекундомір час проходження шляху  $S$  правим тягарцем і чи була система загальмованою. Натиснути кнопку “СБРОС” і перевірити, чи зняте електромагнітом блокування ролика. Після цього можна приступати до вимірювань.

### **Завдання 1. Вимірювання прискорення сили земного тяжіння та перевірка закону швидкості.**

1. На правий великий тягарець (його маса  $M$ ) покласти один із додаткових тягарців (маса  $m_1$  або  $m_2$ ). Нижню грань правого тягарця встановити на рівні риски, нанесеної на верхньому кронштейні. За допомогою шкали на колонці виміряти значення встановлених шляхів рівноприскореного  $s$  та рівномірного  $S$  рухів тягарця.

2. Натиснути кнопку “ПУСК” . Прочитати вимірне значення часу  $t_1$  руху великого тягарця на шляху  $S_1$ . Виміри повторити не менше 5 разів. Провести 5 таких вимірів для значення шляху  $S_2$ , яке встановлюється переміщенням кронштейна в інше положення.

3. За цими даними перевіряють виконання формули (4.11).

4. Зняти тягарці разом з ниткою, що їх з'єднує і зважити на шалькових терезах для визначення їх маси ( $2M$ ). Зважування достатньо провести один раз. Маса  $m$  малих тягарців вказана на них.

5. За формулою (4.20) визначити прискорення сили земного тяжіння  $g$ .

6. Результати вимірів занести в раціонально вибрану таблицю. Обробити результати прямих вимірювань за схемою №1, непрямих – за схемою №4.

## Завдання 2. Перевірка другого закону Ньютона.

1. Встановлюють певне значення шляху  $s$  і вимірюють його значення за допомогою шкали на колонці.
2. Обидва додаткові тягарці масами  $m_1$  та  $m_2$  встановлюють на правому великому тягарці. Натискають клавішу "ПУСК" і визначають час падіння  $t_1$ . Виміри проводять не менше 5 разів.
3. Менший тягарець  $m_2$  перекладають на лівий великий тягарець і вимірюють час падіння  $t_2$  аналогічно п.2.
4. Дані заносять в таблицю. Перевіряють співвідношення (4.17).
5. Обробку результатів прямих вимірів проводять за схемою №1, непрямих – за схемою № 4.
6. Аналізують одержані результати та роблять короткі висновки.

## VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте та запишіть другий закон Ньютона:
  - а) для випадку малих швидкостей;
  - б) для випадку великих швидкостей.
2. Дайте визначення лінійного та кутового прискорення.
3. Виведіть зв'язок між лінійним та кутовим прискоренням.
4. Тіло рухається в полі тяжіння під кутом до горизонту. Чи змінюється при цьому вектор швидкості, модуль швидкості, проекції швидкості на координатні осі?
5. Як зв'язані між собою повне  $\vec{a}_n$ , нормальне  $\vec{a}_n$  та тангенціальне  $\vec{a}_\tau$  прискорення:
  - 1)  $\vec{a}_n = [\vec{a}_i \cdot \vec{a}_\tau]$ ;
  - 2)  $\vec{a}_n = \vec{a}_i - \vec{a}_\tau$ ;
  - 3)  $|\vec{a}_n| = \sqrt{a_i^2 + a_\tau^2}$ ;
  - 4)  $\vec{a}_n = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_\tau$
6. Як зміниться прискорення системи, якщо збільшити масу  $2M$  великих тягарців (залишивши без зміни масу додаткового важка і при незмінній силі тертя)?
7. Що може внести найбільшу похибку при визначенні значення  $g$ .
8. При рівноприскореному русі тягарців прискорення вираховується по формулі  $a = \frac{2s}{t^2}$ . По якій формулі вираховується абсолютна похибка  $\Delta a$ ?
  - 1)  $\Delta a = \frac{2\Delta s}{t^2} + \frac{4s}{t^2} \cdot \frac{\Delta t}{t}$ ;
  - 2)  $\Delta a = \frac{s \cdot 2t \cdot \Delta t + t^2 \cdot \Delta s}{t^4}$ ;
  - 3)  $\Delta a = \frac{\Delta s}{t^2} + \frac{s \cdot \Delta t}{t^3}$ ;
  - 4)  $\Delta a = \frac{8s\Delta t + t^2\Delta s}{t^4}$
9. Вкажіть на машині Атвуда ділянку рівномірного  $S$  та рівноприскореного руху  $s$ .
10. Прокоментуйте систему рівнянь 4.18 та розв'яжіть її для знаходження формули 4.19 і 4.20.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5 ВИЗНАЧЕННЯ ГУСТИНИ ТВЕРДИХ ТІЛ

**I. МЕТА РОБОТИ:** ознайомлення з основними методами визначення густини твердих тіл

**II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ ТА МАТЕРІАЛИ:** лабораторні терези, гирки, пікнометр, хімічна склянка, тверді тіла, густина яких визначається, тонка дротина, дистильована вода, фільтрувальний папір.

**III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ,** знання яких необхідне для виконання роботи.

1. Густина твердих тіл, рідин, газів. Одиниці вимірювання густини.
2. Питома вага. Її зв'язок з густиною.
3. Що таке маса, вага тіла, сила тяжіння.
4. Тиск. Тиск у рідині на глибині  $h$ . Одиниці вимірювання тиску. Закон Паскаля.
5. Вивід закону Архімеда.

### IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.

Густиною називається фізична величина, яка рівна відношенню маси тіла до його об'єму (іншими словами – це маса тіла в одиниці об'єму):

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (5.1)$$

Якщо тіло неоднорідне, то густина визначається за формулою:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}, \quad (5.2)$$

де  $\Delta V$  - елементарний об'єм, в якому маса може розподілятися рівномірно.

Крім густини у фізиці використовується термін питома вага. *Питомою вагою* називається фізична величина, яка дорівнює відношенню ваги тіла до його об'єму, або – це вага одиниці об'єму тіла:

$$d = \frac{p}{V}. \quad (5.3)$$

Якщо тіло знаходиться у стані спокою (або рівномірного прямолінійного руху), то його вага, яка по величині рівна силі реакції

опори (зв'язку), стає також рівною по величині сили тяжіння. В цьому випадку можна одержати зв'язок між питомою вагою і густиною

$$d = \frac{m \cdot g}{V} = \rho \cdot g . \quad (5.4)$$

Поняття густини часто зустрічається у фізиці, якщо є потреба задати фізичну величину в одиниці об'єму, одиниці інтервалу і т.д. В цьому практикумі ми зустрічаємося з поняттям густини імовірності:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x_1 < x < \Delta x_2)}{\Delta x} . \quad (5.5)$$

Далі в курсі фізики ми зустрінемося з поняттями: електронна густина, густина станів і іншими.

## V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Вимірювання густини зводиться до вимірювання маси і об'єму. Маса досліджуваного тіла визначається шляхом зважування, тобто порівняння маси тіла з відомою масою гирок. Об'єм тіл неправильної геометричної форми знаходиться за допомогою пікнометра або гідростатичним зважуванням. У останньому випадку тіло зважують у рідині (як правило, у воді, густина якої при даній температурі береться з таблиць). Користуючись законом Архімеда, обчислюють об'єм тіла. Для цього складають рівність:

$$m_1 g = m_2 g + m_{\text{втисненої}} g , \quad (5.6)$$

де  $m_1$  - маса тіла,  $m_2$  - маса тіла у воді,  $m_{\text{втисненої}}$  - маса витісненої води. Із (5.1) і (5.6) одержуємо

$$V = \frac{m_1 - m_2}{\rho_{\text{втисненої}}} . \quad (5.7)$$

Тоді

$$\rho_{\text{досліджуваного}} = \frac{m_1}{V} = \frac{m_1}{m_1 - m_2} \rho_{\text{втисненої}} . \quad (5.8)$$

Проте ця формула не є кінцевою, бо тут не враховане виштовхування тіла і гирок у повітрі, а також маса дротини, при допомозі якої кріпиться тіло, яке зважується у воді.

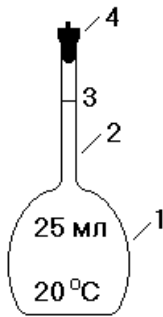


Рис. 5.1

Для знаходження об'єму тіла першим методом використовується пікнометр. Пікнометром називається посудина певного незмінного об'єму. Пікнометри у більшості випадків виготовляються із скла і мають різну форму. Найбільш простий пікнометр зображено на рис. 5.1. Він являє собою невелику колбу 1 з довгою тонкою шийкою 2, на якій є риска 3. Зверху пікнометр закривається добре пришліфованою кришкою 4. Рідина наливається у пікнометр з допомогою піпетки. Об'єм рідини, налитої у пікнометр до риски 3, вказаний на пікнометрі, там також вказана температура, якій відповідає дане значення об'єму.

Об'єм частинок твердого тіла знаходиться з рівності

$$m_{\text{аєд}} = m_n + m - m_{i\text{д}} \quad (5.9)$$

де  $m_n$  - маса пікнометра з водою,  $m$  - маса тіла,  $m_{i\text{д}}$  - маса пікнометра з водою і тілом. Тоді

$$\rho_{\text{аєд}} V = m_n + m - m_{i\text{д}}, \quad (5.10)$$

$$V = \frac{m_n + m - m_{i\text{д}}}{\rho_{\text{аєд}}}. \quad (5.11)$$

Формула для густини тіла записується

$$\rho_{\text{д}} = \frac{m}{V} = \frac{m}{m_n + m - m_{i\text{д}}}. \quad (5.12)$$

Ця формула не є кінцевою, оскільки вона не містить поправки на силу виштовхування у повітрі.

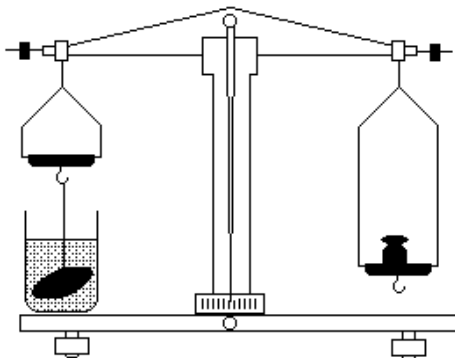


Рис. 5.2

Для зважування тіл використовуються звичайні лабораторні терези, схема будови яких показана на рис.5.2. Особливістю даних терезів є те, що їх шальки розташовані на різній висоті. Це дає змогу підвісити за допомогою тонкої дротини досліджуване тіло до лівої шальки, проводити його зважування як у повітрі, так і у воді.

Виведемо точну формулу для обчислення густини твердого тіла з врахуванням поправки на силу виштовхування у повітрі та з врахуванням маси дротини при використанні *методу гідростатичного зважування*.

На рис.5.3 (а, б, в) показані сили, які діють на досліджуване тіло і на гирки при зважуванні. Позначимо:  $M_T, V_T$  - масу і об'єм досліджуваного тіла;  $M_X, V_X$  - масу і об'єм досліджуваного тіла з дротиною,  $V_X''$  - об'єм досліджуваного тіла плюс об'єм частини дротини, зануреної у воду;  $m_1, V_1$  - маса і об'єм гирок, які зрівноважують терези при зважуванні,  $m_1', V_1'$  - маса і об'єм гирок, які зрівноважують терези, коли зважується тіло разом з дротиною, досліджуване тіло занурене у воду,  $\rho_T$  - густина тіла;  $\rho_a$  - густина води;  $\lambda$  - густина повітря;  $\rho_{\text{аєд}}$  - густина гир.

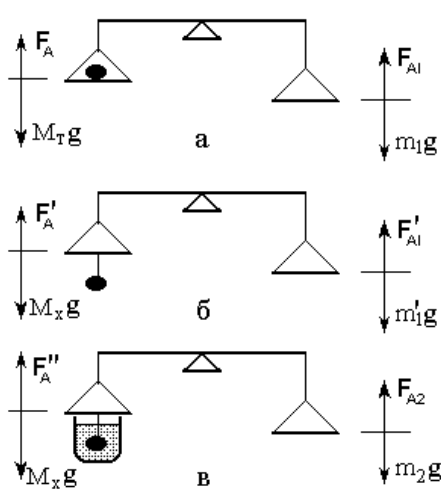


Рис. 5.3

Для першого зважування (рис.5.3, а) можна записати рівність

$$M_T g - F_A = m_1 g - F_{A_2} \quad (5.13)$$

Для другого (рис.5.3, б)

$$M_X g - F_A' = m_1' g - F_{A_1}' \quad (5.14)$$

Для третього (рис.5.3, в)

$$M_X g - F_A'' = m_2 g - F_{A_2} \quad (5.15)$$

Тут  $g$  - прискорення вільного падіння,  
 $F_A = V_T \lambda g$ ;  $F_{A_1} = V_1 \lambda g$ ;  $F_A' = V_X \lambda g$ ;  
 $F_A'' = V_1' \lambda g$ ;  $F_A'' = V_X'' \rho_a g$ ;  $F_{A_2} = V_2 \lambda g$ .

Враховуючи, що  $\frac{m_1}{V_1} = \frac{m_1'}{V_1'} = \frac{m_2}{V_2} = \rho_{\text{аєд}}$ ,  $\frac{M_T}{V_T} = \rho_T$ , нехтуючи об'ємом дротини, дякуючи чому  $V_X - V_X'' = V_T$ , одержані вище рівняння можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \rho_T - \lambda &= m_1 \frac{1}{V_T} \left( 1 - \frac{\lambda}{\rho_{\text{аєд}}} \right), \\ M_X - V_T \lambda &= m_1' \left( 1 - \frac{\lambda}{\rho_{\text{аєд}}} \right), \\ M_X - V_T \rho_a &= m_2 \left( 1 - \frac{\lambda}{\rho_{\text{аєд}}} \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

З цієї системи рівнянь одержуємо

$$\rho_T = \frac{m_1}{m_1 - m_2} (\rho_a - \lambda) + \lambda. \quad (5.17)$$

Аналогічно можна одержати формулу з врахуванням втрат на виштовхування у повітрі для густини твердого тіла, яка визначається методом пікнометра

$$\rho_{\text{д. в. в.}} = \frac{m}{m_n + m - m_{\text{т. в.}}} (\rho_{\text{в. в.}} - \lambda) + \lambda, \quad (5.18)$$

$$\lambda = 1,2 \text{ кг/м}^3.$$

Формули (5.17) і (5.18) є кінцевими робочими формулами.

## VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

### **Завдання 1. Визначення густини твердого тіла за допомогою пікнометра.**

1. Визначають масу  $m$  кусочків твердого тіла, попередньо переконавшись, що всі вони вільно проходять через шийку пікнометра.

2. Наливають у пікнометр дистильовану воду кімнатної температури. Воду наливають за допомогою піпетки до рівня, вказаного на шийці пікнометра. Надлишок води відбирають за допомогою фільтрувального паперу. Визначають масу  $m_n$  пікнометра з водою.

3. Висипають кусочки твердого тіла у пікнометр. Відбирають надлишки води за допомогою фільтрувального паперу, яка піднялася вище риски.

УВАГА! Прослідкуйте, щоб біля кусочків досліджуваного тіла не залишились бульбашки повітря.

Зважують кусочки твердого тіла з пікнометром і визначають масу  $m_{nm}$ .

4. Вимірювання (зважування) згідно пунктів 1, 2, 3 потрібно повторити 5 разів, кожний раз беручи різні маси твердого тіла  $m$ . Звертайте увагу на те, щоб кусочки твердого тіла були добре змоченими.

5. Результати вимірювань (зважувань) заносять у раціонально вибрану таблицю.

6. Для кожного вимірювання за формулою (5.18) обчислюють  $\rho_{\text{д. в. в.}}$  тіла. Результати обчислень обробляють за схемою №1 для прямих вимірювань.

**Завдання 2. Визначення густини твердого тіла гідростатичним зважуванням.**

1. Визначають масу досліджуваного тіла  $m_1$ .
2. Підвішують його на тонкій нитці (дротинці) на гачок лівої шальки терезів. Визначають масу  $m_1'$  тіла разом з дротиною.
3. Ставлять склянку з дистильованою водою під ліву шальку терезів і при аретованих терезах занурюють досліджуване тіло у воду. Потрібно слідкувати, щоб тіло повністю знаходилося у воді, не доторкалося до стінок і дна посудини, щоб через поверхню води проходила не перекручена дротина, щоб на поверхні тіла не було бульбашок повітря. Визначають масу гирок, що зрівноважують терези.
4. Досліди і вимірювання 1, 2, 3 виконують три рази.
5. Результати вимірювань (зважувань) заносять в раціонально вибрану таблицю.
6. Через те, що непрямі вимірювання густини різнотипні, обробку результатів вимірювань проводять за схемою №4 для непрямих вимірювань. Для знаходження густини  $\rho_{\delta}$  у формулу (5.17) підставляють середні значення  $\overline{m_1}$ ,  $\overline{m_2}$ ,  $\overline{m_1'}$ . Надійний інтервал  $\Delta\rho_T$  оцінюють через надійні інтервали  $\Delta m_1$ ,  $\Delta m_2$ ,  $\Delta m_1'$ , у яких враховані як систематичні, так і випадкові похибки за правилом:

$$\Delta m_1 = \sqrt{(\Delta m_{1\tilde{n}\tilde{e}\tilde{n}\tilde{o}})^2 + (t_{\alpha_n} \cdot S_{m_1})^2}. \quad (5.19)$$

$\Delta m_{1\tilde{n}\tilde{e}\tilde{n}\tilde{o}} = \Delta m_{2\tilde{n}\tilde{e}\tilde{n}\tilde{o}} = \Delta m_{1'\tilde{n}\tilde{e}\tilde{n}\tilde{o}}$  - визначається як половина найменшої гирки, яка використовується для зважування ( $\epsilon$  в наборі гирок і спричиняє зміну рівноваги терезів).

6. Окремо оцінюємо поправку на виштовхування у повітрі (для обох завдань)

$$\Delta\rho_{\tilde{n}\tilde{e}\tilde{n}\tilde{o} \cdot \tilde{i} \tilde{a}\tilde{o} \tilde{i} \tilde{a}\tilde{o}} = \frac{\rho_{\delta}^{\tilde{a}} - \rho_{\delta}^{\tilde{z}\tilde{e}\tilde{a}}}{\rho_{\delta}^{\tilde{z}\tilde{e}\tilde{a}}} = \frac{\lambda}{\rho_{\tilde{a}}} - \frac{\lambda}{\rho_T}.$$

Якщо виявиться, що  $\Delta\rho_{\tilde{n}\tilde{e}\tilde{n}\tilde{o} \cdot \tilde{i} \tilde{a}\tilde{o} \tilde{i} \tilde{a}\tilde{o}} < \Delta\rho_T$ , то обчислення густини ведеться за спрощеними формулами (5.8) і (5.12). Якщо виявиться, що  $\Delta\rho_T < \Delta\rho_{\tilde{n}\tilde{e}\tilde{n}\tilde{o} \cdot \tilde{i} \tilde{a}\tilde{o} \tilde{i} \tilde{a}\tilde{o}}$ , то  $\Delta\rho_{\tilde{n}\tilde{e}\tilde{n}\tilde{o} \cdot \tilde{i} \tilde{a}\tilde{o} \tilde{i} \tilde{a}\tilde{o}}$  можна вважати похибкою вимірювання при обчисленні густини за формулами (5.8) і (5.12).

8. Записати кінцевий результат і зробити висновки.

## VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке пікнометр? Яка його характерна особливість? Чому саме така конструкція пікнометра?
2. Чи діє закон Архімеда в повітрі? Чому?
3. Вивести формулу для виштовхувальної сили Архімеда.
4. Знайти і записати формули для обчислення похибок результатів вимірювань.
5. Як обчислюється похибка приладів (інструментальна похибка), які використовуються в цій лабораторній роботі?
6. Яка похибка аналітичних терезів?
7. Що таке поняття густини? Що таке питома вага?
8. Вивести робочі формули для визначення густини твердого тіла.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6 ВИЗНАЧЕННЯ ПРИСКОРЕННЯ СИЛИ ЗЕМНОГО ТЯЖІННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА

**I. МЕТА РОБОТИ:** вивчення коливного руху тіл в полі сил тяжіння; визначення прискорення сили земного тяжіння; вивчення законів затухаючих коливань.

**II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ ТА МАТЕРІАЛИ:** математичний маятник, секундомір, лінійка.

**III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ,** знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

1. Закон тяжіння Ньютона. Прискорення сили тяжіння.
2. Гармонічні коливання. Рівняння руху коливань осцилятора та математичного маятника. Частота і період коливань.
3. Повна енергія гармонічних коливань.
4. Рівняння руху затухаючих коливань. Формула для частоти коливань. Логарифмічний декремент затухання.
5. Рух в полі тяжіння. Основні закони руху планет і комет.

### IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Гармонічними називаються коливання, які відбуваються за законом синуса або косинуса. Найпростішою моделлю, що здійснює гармонічні коливання, є гармонічний осцилятор. Це є закріплена на пружині кулька, яка рухається без тертя, причому вважається, що вся маса осцилятора зосереджена в кульці, а вся пружність (деформаційна здатність) зосереджена в пружині. Гармонічні коливання осцилятора відбуваються під впливом пружної сили, яка лінійно залежить від зміщення

$$F = -kx. \quad (6.1)$$

Тоді, згідно другого закону Ньютона ( $ma = F$ ), рівняння руху гармонічного осцилятора вздовж напрямку  $x$  записується у вигляді:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (6.2) \quad \text{або} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (6.2a)$$

Це є диференціальне рівняння (другого порядку), розв'язок якого знаходиться у вигляді рівняння синусоїдальних або косинусоїдальних коливань, наприклад  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , де  $\omega_0$  – частота цих коливань. Після підстановки цього рівняння і його другої

похідної в рівняння (6.2a) знайдемо, що  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  – це є так звана циклічна частота власних коливань гармонічного осцилятора (або

пружинного маятника – невагомої пружини жорсткості  $k$  з кулькою, маса якої  $m$ ), тобто коефіцієнт перед  $x$  у (6.2а) дорівнює  $\omega_0^2$ . Частота коливань  $\nu$  (кількість коливань за одну секунду) зв'язана з циклічною частотою  $\omega_0$  співвідношенням:  $\omega_0 = 2\pi\nu$ .

Математичний маятник також здійснює гармонічні коливання у випадку малих кутів відхилення. Під математичним маятником розуміють невелике тіло (матеріальну точку), підвішене на довгій нерозтяжній і невагомій нитці (такій, що розмірами тіла можна знехтувати порівняно з довжиною нитки  $\ell$ ). У фізичному експерименті, для зменшення сили опору повітря при русі тіла, на нитці (або дротині) підвішують металеву кульку (рис.6.1). Покажемо, що рівняння руху математичного маятника має вигляд, аналогічний (6.2а).

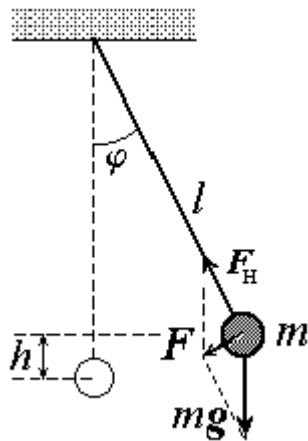


Рис. 6.1

Рух кульки відбувається під дією результуючої двох сил  $\vec{F} = \vec{F}_H + m\vec{g}$ . Вектор сили  $\vec{F}$  (також і вектор швидкості) напрямлений по дотичній до траєкторії руху, тобто до дуги кола, радіус якого  $\ell$ , а отже є перпендикулярним до нього. Тому момент сили  $\vec{M} = \vec{\ell} \times \vec{F}$  відносно осі, що проходить через точку підвісу, дорівнює

$$M = \ell F \sin 90^\circ = \ell F = \ell mg \sin \alpha. \quad (6.3)$$

Використаємо рівняння обертового руху (рівняння моментів), згідно якого

$$M = \frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt}(J\omega) = J \frac{d\omega}{dt}, \quad (6.4)$$

де  $N$  – момент імпульсу,  $J$  – момент інерції маятника відносно осі обертання, який для точкового тіла дорівнює  $J = m\ell^2$ . Кутова швидкість  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ , прирівнюючи вирази (6.4) і (6.3) одержуємо рівняння

$$m\ell^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\ell mg \sin \varphi, \quad (6.5)$$

яке при малих кутах відхилення маятника, коли  $\sin \varphi \approx \varphi$ , набирає вигляду

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \varphi \quad \text{або} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \varphi = 0, \quad (6.6)$$

тобто аналогічно рівнянням (6.2). Знак “мінус” взятий через те, що момент сили тяжіння надає маятнику кутового прискорення, зворотного кутовому відхиленню. Це рівняння показує, що  $\varphi$  (або  $x$ )

повинні бути такою функцією часу  $t$ , щоб друга похідна від цієї функції в будь-який момент дорівнювала самій функції, помноженій на величину  $g/\ell$  (або  $k/m$ ), тобто на  $\omega_0^2$ . Отже, якщо зміна якоїсь фізичної величини описується рівнянням, аналогічним (6.2), значить вона здійснює гармонічні коливання з циклічною частотою  $\omega_0$ . В даному випадку зміна кута з часом описується рівнянням  $\varphi = \varphi_0 \cos(2\pi\nu t)$ , де частота коливань  $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ , а період коливань

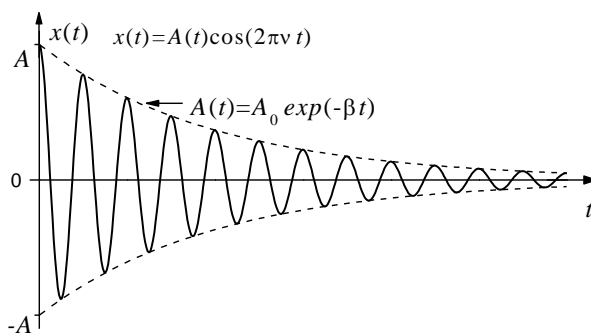
$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (6.7)$$

Наявність сили тертя опору повітря при русі кульки приводить до зменшення амплітуди коливання: енергія маятника витрачається на роботу сили тертя і в кінцевому випадку розсіюється як теплова енергія в навколишнє середовище, тобто зростає енергія теплового руху навколишніх молекул повітря. Коливання стають *затухаючими*.

Приймається, що сила тертя пропорційна швидкості кульки  $F_T = -\alpha v$ , ( $\alpha$  – коефіцієнт опору), тому диференціальне рівняння коливного руху вздовж напрямку  $x$  приймає вигляд (у рівнянні (6.2) з'являється сила тертя, а у рівнянні (6.5) – момент сили тертя  $M_T = \ell \cdot \alpha v = \ell^2 \alpha \omega$ ):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0, \quad \left( \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{\ell} \varphi = 0 \right). \quad (6.8)$$

Розв'язком цього рівняння є функція (дивись рис. 6.2)



$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin \omega t. \quad (6.9)$$

$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$  – амплітуда коливань, яка зменшується з часом за експоненціальним законом з показником затухання

$$\beta = \frac{\alpha}{2m}, \quad A_0 \text{ – початкова амплітуда.}$$

Циклічна частота

затухаючих коливань  $\omega$  менша за циклічну частоту власних коливань  $\omega_0$  (не затухаючих) і визначається за формулою:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4m^2}}; \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx T_0 \left( 1 + \frac{\beta^2}{2} \frac{T_0^2}{4\pi^2} \right). \quad (6.10)$$

Логарифмічним декрементом затухання  $\theta$  називається натуральний логарифм відношення двох амплітуд, взятих через період  $T$ . Він зв'язаний з величинами  $\beta$  і  $\alpha$  співвідношенням:

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{\alpha}{2m} T. \quad (6.11)$$

Якщо зробити заміну  $\beta=1/\tau$ , то формула для амплітуди затухаючих коливань запишеться у вигляді  $A(t) = A_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ , де  $\tau$  – так званий “характеристичний час” або *час релаксації* – час за який амплітуда коливань зменшиться в  $e \approx 2,718$  раз (це видно, якщо прирівняти  $t = \tau$ ). Отже, добуток  $\beta\tau = 1$ , і тоді  $\theta = T/\tau = 1/N_e$ , де  $N_e$  – кількість коливань, через які амплітуда зменшиться в  $e$  раз.

## V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Лабораторна робота виконується на установці, яка устаткована автоматичним фіксуванням часу коливань і числа повних коливань за допомогою універсального секундоміра РМ-14 і фотоелектричного датчика (див.рис.7.2). На передній стінці установки є три кнопки “СЕТЬ”, “СТОП”, “СБРОС”: “СЕТЬ” – вмикач мережі. Натиснувши на цю кнопку, вмикаємо джерело струму. Візуально це супроводжується свіченням цифрових індикаторів і лампочки фотоелектричного датчика. “СБРОС” – встановлення нуля вимірювача. Натиск цієї кнопки викликає скид показів секундоміра і генерацію сигналу дозволу на вимірювання. “СТОП” – закінчення вимірювання.

При допомозі двох кронштейнів, нижній із яких містить фотодатчик, регулюється довжина нитки маятника. При малій амплітуді коливань маятника його період визначається за формулою (6.7), де  $\ell$  – довжина маятника, яка вираховується за формулою  $\ell = L + d/2$  ( $L$  – довжина нитки,  $d$  – діаметр кульки) або вимірюється безпосередньо лінійкою від точки підвісу до центру кульки. Робоча формула для обчислення прискорення сили земного тяжіння є такою:

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2}. \quad (6.12)$$

## VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

### Визначення прискорення сили земного тяжіння

#### Завдання 1.

1. Відрегулювати за допомогою ніжок строго вертикальне положення приладу при знаходженні маятника у стані спокою.

2. Встановити певну довжину маятника, виміряти довжину нитки  $L$  та діаметр кулі  $d$ . Вимірювання цих величин досить зробити один раз, а похибку результату оцінити як інструментальну (систематичну) похибку.

3. Підготувати прилад для вимірювання, для цього ввімкнути його у мережу, натиснути кнопку “СЕТЬ”, перевіряючи, чи всі індикатори показують нуль і чи горить лампа фотоелектричного датчика.

4. Відхилити маятник на  $4-5^{\circ}$  від положення рівноваги і відпустити.

5. Натиснути кнопку “СБРОС”.

6. Після підрахунку часу  $t$  50-ти повних коливань натиснути кнопку “СТОП”. Дослід повторюють не менше 5 разів.

7. Обчислити, користуючись схемою №1, середнє значення часу п'ятдесяти повних коливань  $\bar{t}$  і довірчий (надійний) інтервал  $\Delta t$  для коефіцієнта надійності (для ймовірності)  $\alpha=0,95$ .

8. Обчислити середній період коливань  $\bar{T} = \bar{t}/50$  та довірчий інтервал  $\Delta T = \Delta t/50$  для вибраного значення коефіцієнта надійності  $\alpha$ .

Знайти і записати значення відносної похибки  $\varepsilon = \frac{\Delta T}{\bar{T}}$ .

9. Обчислити довжину маятника  $\ell$  та її абсолютну похибку:

$$\Delta \ell = \sqrt{(\Delta L)^2 + \left(\frac{1}{2}\Delta d\right)^2},$$

де  $\Delta L$  і  $\Delta d$  – довірчі інтервали, в які входять випадкові і систематичні похибки (у випадку однократних вимірювань – тільки систематичні).

10. За формулою (6.12) знайти прискорення сили земного тяжіння  $g$ .

11. Оскільки вимірювання вважаються рівноточними, відносну похибку визначення  $g$  обчислити за формулою:

$$\frac{\Delta g}{\bar{g}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta \ell}{\bar{\ell}}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{\bar{T}}\right)^2}.$$

12. Кінцевий результат записати у вигляді:  $g = \bar{g} \pm \Delta g$ .

## Завдання 2.

1. Встановити іншу довжину нитки  $L_1$ . Виміряти довжину маятника  $\ell_1 = L_1 + d/2$  і час  $t_1$  50-ти повних коливань маятника.

2. Повторити аналогічні виміри ще для чотирьох або п'яти довжин маятника  $\ell$ , змінюючи її від максимально можливої довжини до мінімальної. Результати вимірювань занести у відповідну таблицю.

3. За формулою  $\bar{T} = \bar{t}/50$  знайти значення періоду коливань, яке відповідає вибраній довжині маятника. Похибку визначення цих всіх періодів обчислити, використовуючи значення  $\varepsilon$  із попереднього завдання, оскільки похибка визначення часу в цих дослідах не змінилася:  $\Delta T = \varepsilon \cdot \bar{T}$ .

4. Побудувати графік залежності періоду  $T$  від довжини маятника  $\ell$ :  $T = f(\ell)$ . На графіку для кожної точки  $T_i$  графічно, у вигляді відрізка вертикальної прямої (“вусів”), зобразити похибку визначення кожного значення періоду: відкласти в одну та іншу сторону від точки  $T_i$  значення  $\Delta T$  у масштабі графіка. Як видно з формули (6.7), залежність  $T$  від  $\ell$  має відповідати кореневому закону:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\ell} = B\sqrt{\ell}. \quad (6.13)$$

5. На тому ж графіку паралельно осі  $\ell$  (наприклад зразу під нею або у верхній частині поля рисунка) накреслити вісь  $\sqrt{\ell}$  і відповідно з нею відкласти точки  $(T_i, \sqrt{\ell_i})$  і їх “вуси”. Як видно із залежності (6.13), в такому представленні ці точки повинні “лягти” на пряму лінію, тобто створити лінійну залежність з коефіцієнтом нахилу прямої до осі абсцис (з тангенсом кута нахилу) рівним  $B$  (дивись рис. 6.3).

6. Проаналізувати, з врахуванням похибки, відповідність накладання експериментальних точок на цю теоретичну пряму, прийнявши до уваги те, що формула (6.7) або (6.13) справджується при умові  $d \ll L$  (при малих довжинах нитки можливе відхилення експериментальних точок періоду від теоретичної прямої).

7. Провести через експериментальні точки (для “правильних” точок – див. рис.6.3) пряму лінію так, щоб вона приблизно порівну поділила собою сумарну довжину їх “вусів”.

8. За нахилом прямої знайти коефіцієнт  $B$ : вибрати дві довільні точки на прямій і знайти відношення

$$B = \frac{T_2 - T_1}{\sqrt{\ell_2} - \sqrt{\ell_1}}. \quad (6.14)$$

9. Як видно з формули (6.13),  $B = 2\pi/\sqrt{g}$ , тому можна обчислити прискорення сили земного тяжіння:

$$g = \left(\frac{2\pi}{B}\right)^2. \quad (6.15)$$

Знайдені за графіком значення  $B$  і  $g$  записати на полі рисунка.

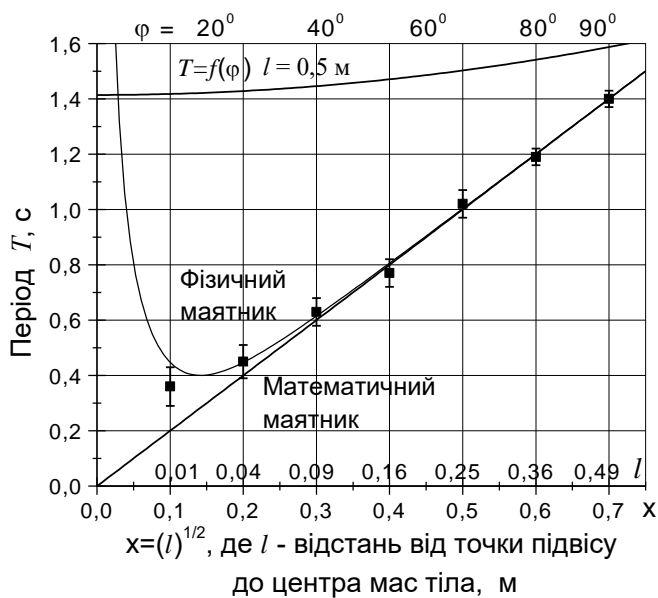
10. За попередньо виміряними даними значення прискорення знайти також за формулою

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{t^2} (50)^2, \quad (6.16)$$

підставляючи значення  $\ell$  і  $t$  всіх “правильних” дослідів окремо.

11. Вважаючи, що одержані значення прискорення  $g_1, g_2, g_3$  і т.д. підлягають нормальному закону розподілу випадкових величин, вирахувати середнє значення прискорення  $\bar{g}$  і результуючу похибку (довірчий інтервал)  $\Delta g$  згідно схеми №1 обробки результатів прямих вимірювань.

12. Порівняти знайдені за різними методиками значення прискорення сили земного тяжіння та їх  $\Delta g$  між собою і з відомим значенням  $g$  для даної широти (табличним), зробити висновки.



**Рис.6.3.**

Типові залежності періоду коливань  $T$  математичного маятника від його довжини та деякого макроскопічного тіла від відстані між точкою підвісу тіла та його центром мас; розмір тіла – декілька сантиметрів. Верхня крива – залежність  $T$  від кута відхилення нитки маятника довжиною  $\ell = 0,5$  м від вертикалі згідно

формули (6.20).

## Дослідження затухаючих коливань.

### Визначення логарифмічного декременту затухання

#### **Завдання 3.**

1. Відхилити маятник на кут значно більший за  $4^{\circ}$ - $5^{\circ}$  (наприклад, на  $50^{\circ}$ - $70^{\circ}$ ), заміряти значення початкової висоти  $h_0$  піднімання кульки і початкової амплітуди  $A_0$ , відпустити маятник, одночасно увімкнувши секундомір.

2. Відзначати час та значення амплітуди через кожні 10-15 повних коливань, заповнюючи відповідну таблицю даних.

3. Після відліку 100 повних коливань вимкнути секундомір, зафіксувати час і амплітуду.

4. Для більшої точності результатів бажано повторити пункти 1-3 ще хоча б 1-2 рази, записуючи значення часу та амплітуди через ту саму кількість коливань, а дані цих повторів усереднити.

5. Результати вимірювань обробити наступним чином:

5.1. За першими 10-20 великими коливаннями знайти частоти  $\omega$  і  $\nu$  та значення періоду  $T$ . Порівняти їх із власною експериментальною частотою  $\omega_0$  ( $\nu_0$ ) і періодом  $T_0$  математичного маятника, одержаних у випадку малих коливань.

5.2. Накреслити графік затухаючих коливань, подібний до рис.6.2, відкладаючи на ньому час перших 30-50 коливань.

5.3. Накреслити графік залежності амплітуди коливань від часу для всіх 100 коливань. Переконайтеся, що залежність  $A(t)$  має експоненціальний характер: для цього накреслити цей графік у напівлогарифмічних координатах, тобто вісь  $A$  (вісь ординат  $y$ ) відкладати як  $\ln A$ , залишаючи вісь  $t$  (вісь абсцис  $x$ ) без змін. У таких координатах графік повинен бути лінійним.

5.4. За тангенсом кута нахилу прямої  $\ln A = \ln A_0 - \beta t$  знайти значення  $\beta$  – показник затухання: для двох довільних точок на цій прямій обчислити відношення

$$\frac{\ln A_1 - \ln A_2}{t_2 - t_1} = \beta. \quad (6.17)$$

5.5. Знайти час релаксації  $\tau = 1/\beta$  і, при відомій масі кульки маятника, коефіцієнт опору  $\alpha = 2m\beta$ .

5.6. Перевірити співвідношення між експериментальними значеннями  $\omega$  і  $\omega_0$  ( $T$  і  $T_0$ ) згідно формул (6.10). Зробити висновки.

5.7. Вважаючи, що втрата повної енергії маятника на подолання опору повітря за першу чверть періоду ( $t=T/4$ ) дуже мала, знайти швидкість кульки при проходженні нею вперше положення рівноваги (використовуючи закон збереження і перетворення механічної енергії):

$$v = \sqrt{2gh_0}. \quad (6.18)$$

Знайти також цю швидкість за “точною” формулою:

$$v = \left( \frac{dx}{dt} \right)_{t=\frac{T}{4}} = -A_0\omega e^{-\beta t} \sin \omega t - A_0\beta e^{-\beta t} \cos \omega t = -A_0 \frac{2\pi}{T} e^{-\beta \frac{T}{4}}. \quad (6.19)$$

Результати порівняти і зробити висновки.

5.8. Знайти максимальну силу опору повітря  $F_{\text{оп}} = \alpha v$ , та середнє значення сили опору в процесі коливного руху кульки  $F_{\text{сеп}} = \alpha v_{\text{сеп}}$ .

5.8.1. Вважаючи, що сила опору обумовлена *силою в'язкого тертя* і описується формулою Стокса  $F_{\text{оп}} = 6\pi\eta r v$ , перевірити правильність оцінок вище знайдених фізичних величин ( $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $v$ ), обчисливши в'язкість повітря  $\eta = \alpha / (6\pi r)$  та порівнявши її з табличним значенням ( $\eta = 18,1 \cdot 10^{-6}$  Па·с).

5.8.2. Вважаючи, що сила опору обумовлена *лобовим опором*  $F_{\text{оп}} = 0,06 S \rho v^2$  ( $S$  – площа перерізу кульки), перевірити правильність оцінок вище знайдених фізичних величин ( $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $v$ ), обчисливши густину повітря  $\rho = \alpha / (0,06 S v_{\text{сеп}})$  та порівняти її з табличним значенням ( $\rho = 1,29$  кг/м<sup>3</sup>).

5.9. Знайти логарифмічний декремент затухання  $\theta$ :  
а) за формулою  $\theta = \beta T$  або  $\theta = T/\tau$ ;  
б) за формулою  $\theta = 1/N_e$ .

6. Зробити висновки за результатами роботи.

## VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

1. Дати визначення математичного маятника.
2. Що таке період, частота, амплітуда і фаза коливань?
3. Поясніть від яких факторів залежить значення прискорення сили земного тяжіння.
4. Рівняння гармонічних коливань матеріальної точки дано у вигляді  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ . Поясніть зміст кожної фізичної величини.
5. Запишіть диференціальне рівняння гармонічного осцилятора і виведіть формули для частоти і періоду коливань осцилятора.
5. Які фактори впливають на період коливань маятника? Як він залежить від маси маятника?
6. Що зміниться в коливному процесі маятника, якщо нитка не буде “нерозтяжною” (наприклад, гумовою)?
7. Період коливань математичного маятника для великих кутів відхилення  $\varphi$  з достатньою точністю дається виразом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right). \quad (6.20)$$

Оцініть відносну похибку  $\Delta T/T_0$ , яка виникає коли період обраховується за формулою

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

8. Металева кулька висить на тонкій сталій дротині довжиною один метр. Чи залежить період коливань такого математичного маятника від температури?

9. Поясніть, як залежить період коливань математичного маятника від його висоти над поверхнею Землі.

10. Сформулюйте і поясніть закони Кеплера для руху планет.

11. Вкажіть рівняння для визначення другої космічної швидкості:

$$1) \frac{mv^2}{2} = mg; \quad 2) \frac{mv^2}{2} = mgh; \quad 3) \frac{mv^2}{R_3} = mgh; \quad 4) \frac{mv^2}{2} = G \frac{mM_3}{R_3};$$

$$5) \frac{mv^2}{2} = G \frac{mM_3}{R_3^2},$$

де  $G$  – гравітаційна стала;  $M_3$  і  $R_3$  – маса і радіус Землі;  $m$  – маса тіла;  $h$  – висота над Землею.

12. Що таке логарифмічний декремент згасання? час релаксації?

13. Чому і за яким законом змінюється амплітуда коливань з часом.

14. Як зв'язані між собою частоти (періоди) власних коливань і згасаючих?

15. Чому формула для періоду коливань математичного маятника справедлива тільки при малих амплітудах коливань?

16. Пружинний маятник із горизонтального положення перевели у вертикальне. Чи зміниться при цьому частота коливань? Як залежить період коливань пружинного маятника від висоти над поверхнею Землі?

## Лабораторна робота № 7 ВИЗНАЧЕННЯ ПРИСКОРЕННЯ СИЛИ ЗЕМНОГО ТЯЖІННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА

**1. МЕТА РОБОТИ:** *вимірювання прискорення сили тяжіння оборотним маятником.*

**II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ:** *фізичний оборотний маятник, секундомір, лінійка.*

**III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ,** знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

- 1. Вивести формулу для частоти коливань фізичного маятника.*
- 2. Додавання гармонічних коливань. Метод векторних діаграм.*
- 3. Повна енергія гармонічних коливань.*
- 4. Вимушені коливання. Записати рівняння руху і вивести формулу для амплітуди згасання.*
- 5. Визначення маси Землі та інших планет на основі закону всесвітнього тяжіння.*
- 6. Гравітаційна та інерційна маси. Експериментальні докази їх рівності. Досліди Етвеша.*

### IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.

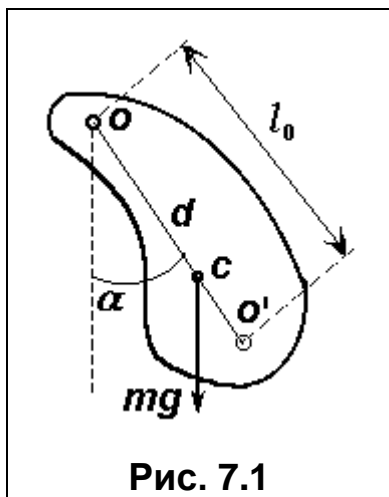


Рис. 7.1

Розглянемо випадок руху твердого тіла навколо закріпленої осі (рис. 7.1), коли момент зовнішніх сил зумовлений силою тяжіння. Якщо центр мас тіла знаходиться у точці  $C$ , то момент сили тяжіння відносно горизонтальної осі обертання, що проходить через точку  $O$ , запишеться

$$M = mgd \sin \alpha, \quad (7.1)$$

де  $d$  – відстань від осі обертання до центра мас (ваги)  $C$ , а  $\alpha$  – кут між прямою  $OC$  і вертикаллю. Якщо тіло закріплене на осі,

що не проходить через центр мас, то при  $\alpha \neq 0$  на нього діє момент сили тяжіння. Таке тіло називається фізичним маятником (на відміну від математичного маятника, для якого розмірами тіла можна знехтувати, порівняно з відстанню до осі обертання). Оскільки

рівняння моментів при обертанні тіла навколо закріпленої осі записується

$$M = \frac{dN}{dt} = J\varepsilon, \quad (7.2)$$

де  $J$  – момент інерції тіла відносно закріпленої осі, а  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$  – кутове прискорення, то з врахуванням (7.1) маємо

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{md}{J} g \sin \alpha. \quad (7.3)$$

Порівнюючи це рівняння з аналогічними рівняннями для математичного маятника (див. лаб. роботу №6), бачимо, що ці рівняння різняться тільки сталим множником  $\frac{md}{J}$ . Тому фізичний маятник коливатиметься за таким же законом, як математичний маятник, довжина якого  $l_0 = \frac{J}{md}$ . Ця довжина називається *зведеною довжиною* даного фізичного маятника. Точка  $O'$ , що лежить на відстані зведеної довжини від осі обертання, називається *центром коливань* фізичного маятника. Зведена довжина завжди більша за  $d$ , тобто центр коливань лежить нижче центра мас.

Якщо амплітуди коливань малі, то по аналогії з математичним маятником період

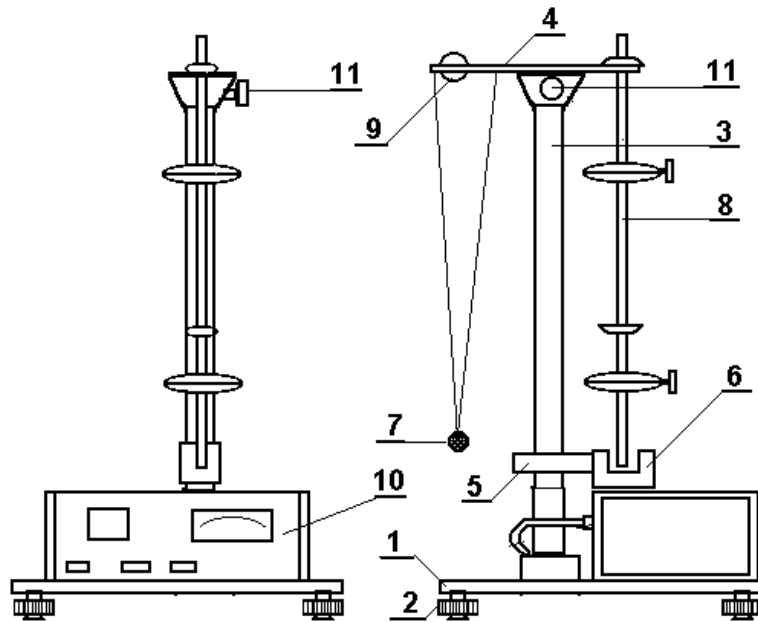
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{gmd}}. \quad (7.4)$$

## V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Оскільки період маятника залежить від  $g$ , то цим можна скористатися для визначення величини  $g$ . Якщо ми перенесемо точку підвісу фізичного маятника у центр коливань, то попередня точка підвісу буде новим центром коливань. Точка підвісу і центр коливань оборотні. Скориставшись оборотністю точки підвісу і центра коливань, можна на досліді знайти положення центра коливань. Це – точка, в якій треба закріпити вісь маятника, щоб “перевернутий” він колювався з тим самим періодом, що і раніше.

У даній лабораторній роботі для визначення  $g$  використовується оборотний маятник, загальний вигляд якого зображений на рис. 7.2.

В основу (1) вмонтовані регулюючі ніжки (2), які дозволяють провести вирівнювання приладу, а також колонка (3), на якій зафіксовано верхній кронштейн (4) і нижній кронштейн (5) з фотоелектричним датчиком (6).



**Рис. 7.2**

Після відпуску гвинта (11) верхній кронштейн можна повертати навкруги колонки. Затискач гвинта фіксує кронштейн в будь-якому, довільно вибраному положенні. З однієї сторони кронштейна знаходиться математичний маятник (7), а з протилежної, на вмонтованих вкладах – оборотний маятник. Довжину математичного маятника можна регулювати за допомогою воротка (9), а її величину можна визначити за допомогою шкали на колонці (3).

Оборотний маятник виконано у вигляді стержня, на якому фіксуються два повернені один до одного леза ножі і два тягарці у вигляді дисків. На стержні через 10 мм зроблені кільцеві нарізки, що служать для точного визначення довжини оборотного маятника (віддалі між ножами). Ножі і тягарці можна зміщувати вздовж осі стержня і фіксувати в будь-якому положенні. Їх зміщення вздовж стержня, завдяки кільцевим нарізкам, є кратним 10 мм, а фіксуючі гвинти за допомогою тих же кільцевих нарізок дають можливість їх надійного закріплення.

Момент інерції  $J$  за теоремою Гюйгенса-Штейнера можна записати у вигляді

$$J = J_0 + md^2, \quad (7.5)$$

де  $J_0$  – момент інерції маятника відносно осі, що проходить через центр ваги і паралельна до осі обертання. Тоді (7.4) запишеться так

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + md^2}{mgd}}. \quad (7.6)$$

Залежність періоду  $T$  від  $d$  графічно зображена на рис. 7.3.

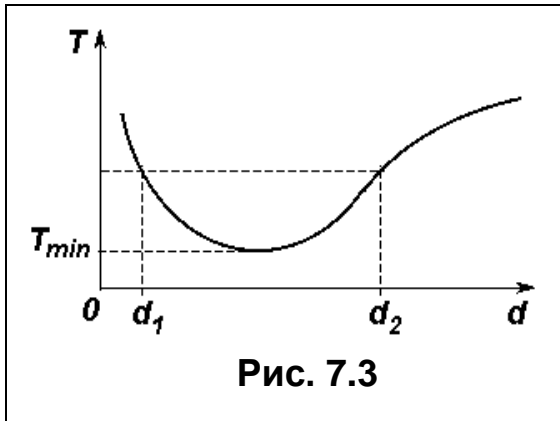


Рис. 7.3

Із графіка видно, що період коливань  $T$  фізичного маятника, прямує до нескінченності при  $d \rightarrow 0$  ( $T \rightarrow \infty$  як  $d^{1/2}$ ) і при  $d \rightarrow \infty$  ( $T \rightarrow \infty$  як  $d^{1/2}$ ). При  $T > T_{\min}$  одне і те ж значення періоду може бути при двох різних значеннях  $d$ . Причому, як це видно з графіка, при різних значеннях  $T$  значення  $d_1$  і  $d_2$  можуть зближуватись, або,

навпаки, віддалятися один від одного. Ці різні значення  $d_1$  і  $d_2$ , при яких періоди коливань фізичного маятника однакові, знаходяться з досліду і використовуються для обчислення прискорення сили земного тяжіння. Якщо маятник опирається спочатку на ніж 1, а потім на ніж 2, то періоди коливань, згідно (7.6), визначаються, відповідно, за формулами:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + md_1^2}{mgd_1}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + md_2^2}{mgd_2}}$$

Виключаючи з цих двох виразів  $4\pi^2 J_0$ , одержимо

$$T_1^2 g d_1 - T_2^2 g d_2 = 4\pi^2 (d_1^2 - d_2^2). \quad (7.7)$$

Якщо  $T_1 = T_2 = T$ , формула (7.7) для визначення  $g$  набуде вигляду:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} (d_1 + d_2). \quad (7.8)$$

Тут  $d_1 + d_2 = l_0$  – віддаль між ножами, яка рівна зведеній довжині, тому

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} l_0 \quad (7.9)$$

– кінцева робоча формула.

Нижній кронштейн разом з фотоелектричним датчиком можна переміщати вздовж колонки і фіксувати в довільно вибраному положенні. Фотоелектричний датчик з'єднано з універсальним секундоміром РМ-14 (10). На фронтальній панелі універсального секундоміра знаходяться такі управляючі елементи:

СЕТЬ – вмикач мережі. Натиснувши на цю кнопку, вмикаємо джерело струму. Візуально це супроводжуватиметься свіченням цифрових індикаторів і лампочки фотоелектричного датчика;

СБРОС – встановлення нуля вимірювача. Натиск цієї кнопки переводить схеми секундоміра в початкове положення і викликає генерацію сигналу дозволу на вимірювання;

СТОП – закінчення вимірювання. Натиснення цієї кнопки викликає сигнал закінчення процесу підрахунку.

## VI. ЗАВДАННЯ ТА ПОРЯДОК ВИКОННЯ РОБОТИ

1. Підготувати прилад для вимірювання, для цього перевірити вирівнювання приладу, увімкнути шнур живлення приладу в мережу, натиснути перемикач “СЕТЬ”, перевіряючи, чи всі індикатори показують нуль і чи горить лампа фотоелектричного датчика.

2. Зафіксувати тягарці на стержні несиметрично, таким чином, щоб один із них знаходився поблизу кінця стержня, а другий поблизу його середини.

3. Ножі маятника закріпити по обидва боки центра ваги системи таким чином, щоб вони були звернені один до одного лезами. Один із них розмістити поблизу вільного кінця стержня, а інший на половині віддалі між тягарцями.

4. Перевірити, чи відповідають грані лез ножів нарізкам на стержні.

5. Закріпити маятник на вкладці верхнього кронштейну на ножі, що знаходиться поблизу кінця стержня.

6. Нижній кронштейн разом з фотоелектричним датчиком перемістити таким чином, щоб маятник перетинав світловий промінь.

7. Відхилити маятник на  $4-5^{\circ}$  від положення рівноваги і відпустити.

8. Натиснути кнопку “СБРОС”.

9. Після підрахунку вимірювачем 10 повних коливань, натиснути кнопку “СТОП”.

10. Результати занести в таблицю. Обчислити період коливань за формулою  $T_1 = t/n$ , де  $n$  – кількість повних коливань,  $t$  – тривалість коливань.

11. Зняти маятник і закріпити його на другому ножі. При цьому нижній кронштейн з фотоелектричним датчиком перемістити так, щоб маятник перетинав світловий пучок.

12. Відхилити маятник на  $4-5^{\circ}$  від положення рівноваги, визначити  $T_2$  і порівняти з результатом  $T_1$ , одержаним вище.

13. Якщо  $T_2 > T_1$ , то другий ніж перемістити в напрямку тягарця, що знаходиться в кінці стержня, якщо  $T_2 < T_1$  – то в напрямку середини стержня.

14. Повторно виміряти період  $T_2$  і порівняти із значенням  $T_1$ .

15. Змінювати положення другого ножа до моменту одержання рівності  $T_2 = T_1$  з максимально можливою величиною точності.

16. Визначити зведену довжину  $l_0$  оборотного маятника, підраховуючи кількість нарізів, які нанесені через кожні 10 мм, на стержні між ножами.

17. На математичному маятнику довжиною  $l_0$  перевірити, чи співпадає його період з отриманим періодом фізичного маятника.

18. За формулою (7.9) обчислити величину прискорення сили земного тяжіння. Результати занести в таблицю.

19. Перевести ножі і тягарці в інше положення і знову провести вимірювання та обчислення згідно пунктів 3-17. Дослід провести при різних положеннях ножів і тягарців не менше 5-ти раз. Одержані значення величин  $g$  обробити за схемою № 1.

19. Кінцевий результат представити у вигляді  $g = \bar{g} \pm \Delta g$ .

20. Зробити короткі висновки.

## VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке період, частота, амплітуда і фаза коливань?

2. Дати визначення фізичного маятника.

3. Вивести формулу  $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}}$ .

4. На які складові можна розбити величину  $J$  у попередній формулі?

5. Що називається зведеною довжиною фізичного маятника?

6. Покажіть, що зведена довжина фізичного маятника  $l_0$  завжди більша за  $d$ .

7. Поясніть властивість оборотності точки підвісу і центра коливань фізичного маятника.

8. Як впливає на точність експерименту коливання температури, сила тертя, амплітуда коливань маятника?

9. Поясніть, чому сочевиці мають різну масу. Чому їм надана така форма?

10. Оцініть час, необхідний для проведення досліду, якщо потрібно виміряти період коливань з точністю  $\frac{\Delta T}{T} = 0.0001$ . Систематична похибка секундоміра  $0,2$  с. Середнє значення періоду  $T = 1$  с.

11. Записати формулу для визначення похибки  $\Delta T$  за схемою непрямих вимірювань.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 8 ВИЗНАЧЕННЯ МОДУЛЯ ЮНГА ЗА РОЗТЯГОМ ДРОТИНИ ТА ПРОГИНОМ СТЕРЖНЯ

**I. МЕТА РОБОТИ:** експериментальна перевірка закону Гука та ознайомлення з методами визначення модуля Юнга.

**II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ ТА МАТЕРІАЛИ:** прилад Лермантова, прилад для визначення модуля Юнга за прогином стержня, мікрометр, масштабна лінійка, досліджувана дротина, стержні з різних матеріалів.

**III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ,** знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

1. *Різні види деформацій, їх характеристики.*
2. *Закон Гука. Модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона, модуль зсуву.*
3. *Пружність, крихкість і пластичність. Межа міцності, межа пружності.*
4. *Енергія пружно деформованого тіла.*

### IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Всі реальні тверді тіла під дією зовнішніх сил змінюють свої лінійні розміри і об'єм. Такі зміни називають деформацією твердого тіла. Пружними називають деформації, що зникають в тілі після припинення дії зовнішніх сил, а пластичними – деформації, що зберігаються після припинення дії зовнішніх сил. Сили взаємодії між частинками твердого тіла, що виникають в результаті зміщення атомів з їх рівноважних положень і перешкоджають деформації тіла, називаються силами пружності.

Пружні деформації характеризуються напругою  $\vec{\sigma}$ . Якщо на деяку поверхню  $s$  діє зовнішня сила, перпендикулярна до площини поверхні  $s$ , то *механічна напруга*  $\vec{\sigma}$  визначається формулою

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{F}_\perp}{s}, \quad (8.1)$$

де  $\vec{F}_\perp$  – сила пружності, перпендикулярна до цієї поверхні.

Для однозначного визначення напруги  $\vec{\sigma}$  в твердому тілі на довільно орієнтованій поверхні  $s$ , в довільній точці  $O$ , необхідно задати напруги  $\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z$  вздовж трьох взаємно перпендикулярних напрямках, що проходять через точку  $O$ , і є перпендикулярні до відповідних координатних площин:

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_x n_x + \vec{\sigma}_y n_y + \vec{\sigma}_z n_z, \quad (8.2)$$

де  $n_x, n_y, n_z$  – проекції нормалі  $\vec{n}$  (до поверхні  $s$ ) на осі декартової системи координат з центром в точці  $O$ .

Деформації називаються малими або *пружними*, якщо для них справедливий закон Гука: *механічна напруга  $\vec{\sigma}$ , яка виникає в тілі при пружній деформації тіла, пропорційна відносній деформації тіла  $\vec{\varepsilon}$ :*

$$\vec{\sigma} = E\vec{\varepsilon}, \quad (8.3)$$

для одновісної деформації – 
$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (8.4)$$

де  $E$  – модуль пружності, котрий у випадку лінійного видовження називається *модулем Юнга*.

Якщо цей закон не виконується, то деформація не є пружною, вона називається *пластичною* – після припинення дії сили форма тіла не відновлюється.

У загальному випадку залежність механічної напруги  $\sigma$  від деформації  $\varepsilon$  зображується графіком, приведеним на рисунку 8.1.

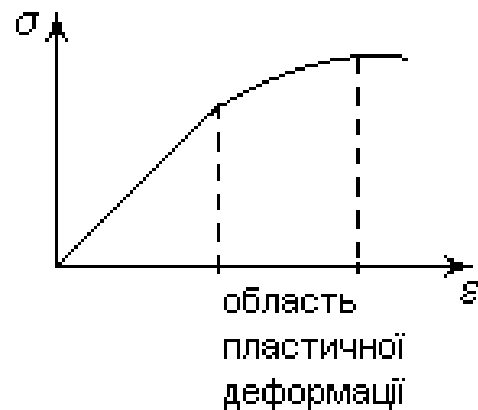


Рис. 8.1

## V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Для визначення модуля Юнга із розтягу дротини використовується прилад Лермантова (рис. 8.2). Він складається з кронштейна 1, на якому закріплена досліджувана дротина 2. В одній площині з дротиною до кронштейна 1 причеплені ще дві вертикальні дротини 3, що закінчуються знизу перекладиною 4 з гачком. Коли дослід не проводиться, гачок тримає важки, якими користуються для навантаження досліджуваної дротини. Відразу ж після розвантаження дротини важки перекладають на гачок. Цим досягають сталого навантаження кронштейна 1, а отже і його сталого прогину і уникають похибки при вимірюванні видовження навантаженої дротини. Така похибка могла б виникнути внаслідок того, що до видовження дротини додавалася би деформація кронштейна.

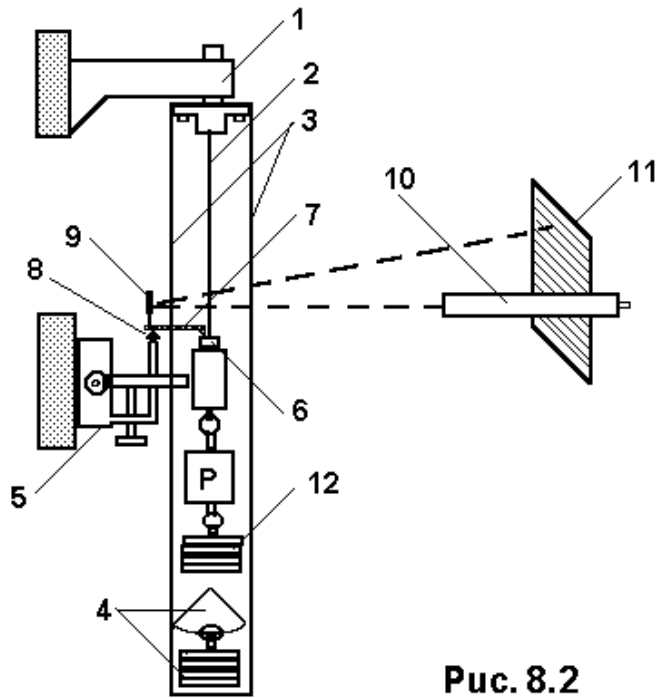


Рис. 8.2

Нехай дротина завдовжки  $\ell$  і площею поперечного перерізу  $S$  під дією сили  $P$  видовжилася на  $\Delta\ell$ , тоді із закону Гука (8.4) з врахуванням (8.1) можна одержати:

$$E = \frac{P \cdot \ell}{S \cdot \Delta\ell}. \quad (8.5)$$

Коли видовження  $\Delta\ell$  дорівнює початковій довжині  $\ell$ , то  $E = \frac{P}{S}$ , тобто модуль Юнга визначає собою силу, розраховану на одиницю площі, яка змінює довжину тіла вдвоє.

Тільки гуму можна розтягти у два рази, для інших же тіл, перш ніж їх довжина збільшиться вдвоє, буде перейдена межа міцності і тіло розірветься.

Для визначення видовження дротини  $\Delta\ell$  служить нижній кронштейн 5 з пристроями. На циліндр 6 спирається колінчатий важіль 7, що може вільно повертатися навколо своєї осі 8. Над цією віссю важеля перпендикулярно до нього закріплене дзеркальце 9, яке освітлюється спеціальним освітлювачем 10. Відбиті від дзеркальця промені попадають на міліметрову шкалу 11.

При видовженні дротини на  $\Delta\ell$  циліндр 6 опускається і дзеркальце повертається на кут  $\alpha$ , при цьому має місце співвідношення

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta\ell}{b}, \quad (8.6)$$

де  $b$  – довжина важеля 7. Зміна положення дзеркальця приводить до переміщення світлового зайчика вздовж шкали. Якщо зайчик перемістився з поділки  $n_1$  на поділку  $n_2$  шкали при повороті дзеркальця на кут  $\alpha$ , а  $D$  – відстань від дзеркальця до шкали, то можна написати

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{n_2 - n_1}{D} = \frac{\Delta n}{D}. \quad (8.7)$$

Оскільки величина  $\Delta \ell$  мала, то кут  $\alpha$  теж малий, тому можна замінити тангенси кутів значеннями самих кутів. Співставлення написаних вище формул дає

$$\Delta \ell = \frac{\Delta n}{2D} b. \quad (8.8)$$

На нижньому кронштейні 5 є аретир, користуючись яким, шляхом повертання гвинта 13, можна здійснити розтягування дротини без ривків, або звільнити дротину від дії навантаження. Якщо дротина, діаметр якої  $d$ , будучи навантажена тягарем маси  $m$ , видовжилась на  $\Delta \ell$ , тоді згідно (8.6) модуль Юнга

$$E = \frac{8mg\ell D}{\pi d^2 b \Delta n}. \quad (8.9)$$

Ця формула є робочою.

Визначити модуль Юнга за розтягом (стиском) не завжди можливо і зручно, наприклад, коли досліджуємо товстий стержень. В цьому разі модуль Юнга можна визначити за деформацією прогину стержня.

В теорії про опір матеріалів [5] докладно розглядається деформація прогину і виводиться така формула для визначення модуля Юнга

$$h = \frac{kP\ell^3}{Eac^3}, \quad (8.10)$$

$h$  – стріла прогину (див. рис. 8.3),  $k$  – коефіцієнт, що залежить від способу закріплення стержня,  $P$  – прикладена сила (навантаження),  $\ell$  – довжина,  $a$  – ширина,  $c$  – товщина стержня. Коефіцієнт  $k$  має різне значення залежно від способу закріплення стержня. У випадку, коли один кінець стержня закріплено нерухомо,  $k = 4$ .

Прилад для визначення модуля Юнга за прогином стержня (рис.8.2) складається з масивної станини, на якій одним кінцем закріплений нерухомо прямокутний стержень. Важки поміщаються на шальку, скріплену з обоймою, яка вільно пересувається вздовж стержня. Зверху на обойму спирається вимірний стержень мікрометра. Мікрометром визначають стрілу прогину  $h$  досліджуваного стержня. Якщо обойма знаходиться на відстані  $\ell$  від

точки закріплення стержня, то модуль Юнга визначається за формулою:

$$E = \frac{4mgl^3}{hac^3}, \quad (8.11)$$

де  $m$  – маса важка, поставленого на шальку. Вираз (8.11) є робочою формулою.

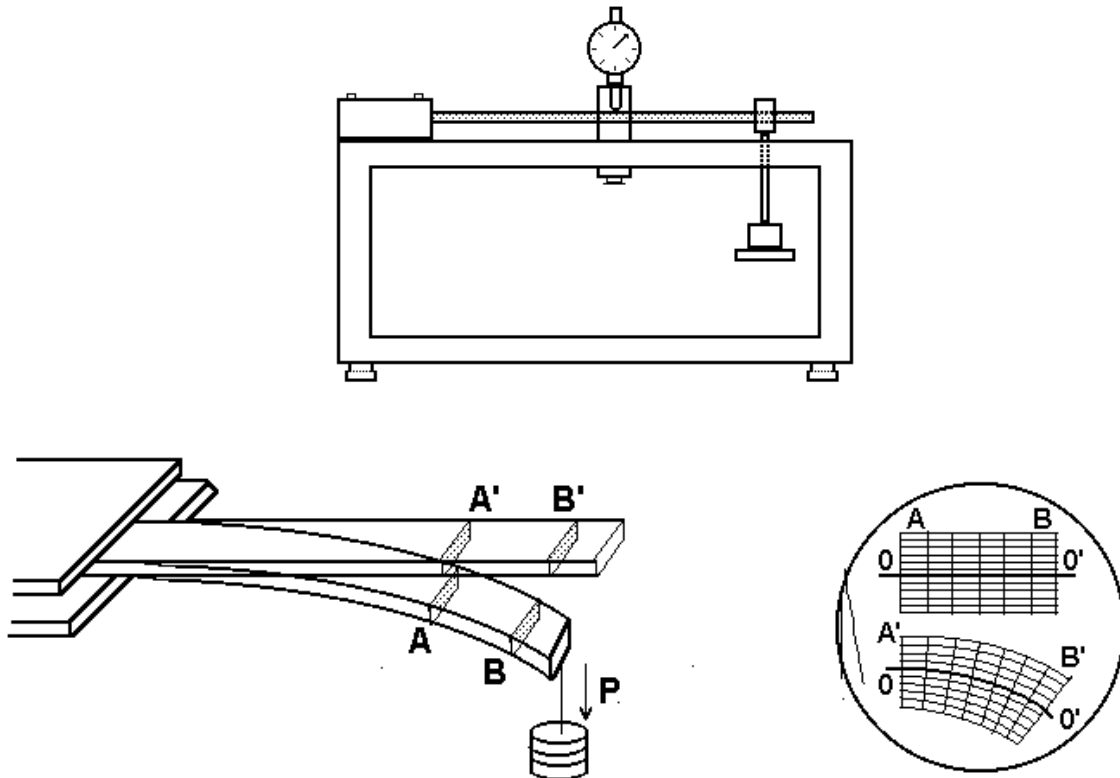


Рис. 8.2

## VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

### **Завдання 1. Визначення модуля Юнга із розтягу дротини.**

1. Промінь світла від освітлювача направляють на дзеркальце так, щоб відбитий від нього промінь дав на шкалі різкий зайчик.

2. Знявши всі важки (крім так званих постійних, які завжди повинні діяти на дріт, щоб він був випрямлений) з платформи 12 (рис.8.2) і переклавши їх на платформу 4, вимірюють міліметровою лінійкою довжину дроту  $l$  з точністю до 0,5 см. Визначають відстань  $D$  від шкали до дзеркальця (з точністю до 0,5 см. Довжина важіля  $b$  дається як постійна приладу). Записують нульову поділку шкали  $n_1$ , на якій зупинився світловий зайчик.

3. Вимірюють діаметр дротини  $d$  мікрометром. Вимірювання проводять у різних місцях дротини. Всього необхідно зробити 5 вимірювань.

4. Послідовно навантажуючи дротину важками один за другим (на кожному з них вказана його маса) роблять відлік поділок за шкалою. Так роблять для всіх важків, знімаючи їх з платформи 4.

5. Результати вимірювань за пунктами 2-4 заносять у таблицю.

4. Будують графік залежності видовження дротини від величини навантаження і переконуються, що має місце лінійна залежність (виконується закон Гука). Для цього по осі ординат відкладають у відповідному масштабі різницю поділок  $\Delta n$ , по осі абсцис – величину маси тягара  $m$ , яка викликала переміщення зайчика з поділки  $n_1$  на поділку  $n_2$ .

7. Обчислюють результати вимірювань:

а) знаходять середнє значення діаметра дротини  $d$  і похибки  $\Delta d$ ;

б) за формулою (8.10) для всіх навантажень вираховують модуль Юнга ( $E$  виражається в  $\text{Н} / \text{м}^2$ );

УВАГА. Різниця  $\Delta n$  у формулі (8.10) повинна бути виражена у метрах.

в) вважаючи, що значення модуля Юнга  $E_i$  одержані для різних навантажень, підлягають нормальному розподілу випадкових величин, вираховують середнє значення  $E$  та границю надійного інтервалу (похибку результату вимірювання)  $\Delta E$  для коефіцієнта надійності  $\alpha = 0,95$  за схемою № 1 (методом приведення).

## **Завдання 2. Визначення модуля Юнга за прогином стержня.**

1. Пересувають обойму з шалькою (без важків) на вільний кінець стержня. Встановлюють мікрометр так, щоб його вимірний стержень торкався середини обойми. Опускаючи, або піднімаючи мікрометр добиваються, щоб стрілка малої шкали, яка відраховує одиниці міліметра, встановилась на нуль основної шкали мікрометра напроти великої стрілки.

2. Масштабною лінійкою вимірюють віддаль  $\ell$  від місця закріплення стержня до середини обойми.

3. Мікрометром вимірюють в п'яти місцях стержня його ширину  $a$  і висоту  $c$ .

4. Послідовно навантажуючи шальку важками (на кожному з них вказана його маса), роблять відліки по шкалі мікрометра (спочатку одиниць міліметра, потім десятих і сотих долей міліметра). Різниця між попередніми показами мікрометра і одержаними дає стрілу прогину стержня  $h$ . Так роблять для всіх важків.

5. Пересувають обойму з шалькою на середину стержня. Встановлюють мікрометр згідно п.1 даного завдання. Повторюють виміри  $h$  і  $\ell$  згідно п.2 і 4.

6. Будують графік залежності стріли прогину стержня від величини навантаження.

7. Результати вимірювань обробляють за схемою № 1, як це вказано в завданні № 1.

8. Кінцевий результат представляють у вигляді  $E = \bar{E} \pm \Delta E$ .

9. Роблять короткі висновки.

## **VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ**

1. Сформулювати закон Гука. Що таке відносна деформація?
2. Пояснити фізичний зміст модуля Юнга та модуля зсуву.
3. Намалювати схематично графік залежності механічної напруги в твердоту тілі від деформації тіла.
4. Які види деформацій ви знаєте?
5. Яка деформація твердого тіла не приводить до зміни об'єму?
6. Який фізичний зміст коефіцієнта Пуассона? Чи може пружна деформація розтягу приводити до збільшення (зменшення) об'єму твердого тіла?
7. Як можна представити деформацію прогину?
8. Від чого залежить міцність твердих тіл?
9. Чому теоретична міцність кристалів на порядки більша за реальну?
10. Які точкові дефекти можливі в кристалах.
11. Запишіть робочу формулу для визначення похибки модуля Юнга при непрямих вимірюваннях.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 9 ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА СИЛИ СУХОГО ТЕРТЯ (ТЕРТЯ КОЧЕННЯ)

**I. МЕТА РОБОТИ:** експериментальне вивчення руху тіла при наявності сил опору (тертя) та визначення коефіцієнтів тертя спокою, кочення і коефіцієнта моменту сил тертя кочення.

**II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ:** експериментальна установка, міліметровий папір.

**III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ,** знання яких необхідне для виконання роботи.

1. Сухе і рідке тертя.
2. Тертя спокою та ковзання. Тертя кочення. Рівняння руху при наявності тертя.
3. Кочення тіл. Момент сили. Рівняння обертового руху при наявності сил тертя.

### IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

При коченні колеса по похилій площині виникають сили тертя. Якщо колесо котиться без ковзання, то виникає сила тертя спокою. Величина цієї сили  $F$  визначається законом Кулона

$$F \leq kN, \quad (9.1)$$

де  $k$  – коефіцієнт тертя спокою,  $N$  – сила нормального тиску. Сила тертя  $F$  завжди паралельна площині стикання взаємодіючих тіл. Якщо при коченні колеса виникає ковзання, то з'являється сила тертя ковзання, величина якої визначається рівністю

$$F_1 = k_1 N. \quad (9.2)$$

Коефіцієнт тертя  $k_1$  залежить не лише від властивостей поверхонь, між якими виникає тертя, але і від їх відносної швидкості. Якщо швидкості малі, то його можна вважати постійним і рівним коефіцієнту  $k$  ( $k_1 = k$ ).

При коченні циліндра по площині слід враховувати деформацію площини і циліндра. Сила реакції опори не проходить через центр ваги циліндра, а дещо зміщена вперед в напрямку руху. Це веде до появи моменту сили реакції опори відносно осі обертання циліндра, який перешкоджає його обертанню. Цей

момент носить назву моменту сил тертя кочення і може бути записаний у вигляді:

$$M = k_2 N, \quad (9.3)$$

де  $k_2$  – коефіцієнт моменту сил тертя кочення. Він суттєво відрізняється від коефіцієнтів  $k$  і  $k_1$ , оскільки є розмірною величиною і, власне кажучи, характеризує плече сили тиску опори відносно осі циліндра.

### а) КОЧЕННЯ КУЛЬКИ ПО ЖОЛОБУ

## V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Коефіцієнт тертя  $k$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  можна визначити із вимірювання руху кульки по жолобу.

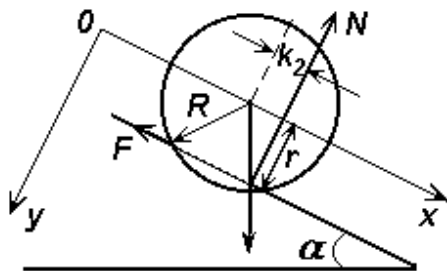


Рис. 9.1а

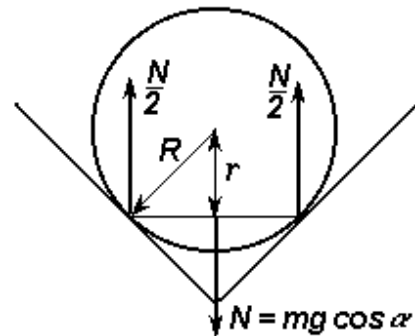


Рис.9. 1б

При незначних кутах нахилу жолоба до горизонту кулька, що знаходиться в жолобі, буде в стані спокою. Найбільший кут, при якому кулька ще не починає котитися, одержимо з умови рівноваги (рис. 9.1а).

$$\begin{cases} mg \sin \alpha_1 - F = 0 \\ Fr - k_2 mg \cos \alpha_1 = 0 \end{cases} \quad (9.4)$$

де  $m$  – маса кульки,  $F$  – паралельна площині скочування сила тертя спокою,  $g$  – прискорення сили тяжіння,  $r$  – плече сили  $F$  відносно осі обертання. Ці рівності дають одну із робочих формул

$$k_2 = r \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 \quad (9.5)$$

Якщо значення кута  $\alpha_1$  відоме (див. нижче), то із (9.5) можна вирахувати коефіцієнт  $k_2$ .

При збільшенні кута нахилу жолоба, починаючи з кута  $\alpha=\alpha_1$ , кулька котиться без ковзання. Для жолоба прямокутного перерізу рівняння руху кульки (рис. 9.1б) запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F \\ mg \cos \alpha - N = 0 \\ J\ddot{\varphi} = Fr - k_2 N \\ \ddot{x} = r\ddot{\varphi} \end{cases}, \quad (9.6)$$

де  $J$  – момент інерції кульки,  $J = \frac{2}{5}mR^2$  ( $R$  – радіус кульки),  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$  – прискорення руху центра мас кульки,  $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$ ,  $\ddot{\varphi}$  – кутове прискорення кульки. Із цих рівнянь одержуємо:

$$F = \frac{1}{9}mg \left( 4 \sin \alpha + 5 \frac{k_2}{r} \cos \alpha \right), \quad (9.7)$$

$$\ddot{x} = \frac{5}{9}g \left( \sin \alpha - \frac{k_2}{r} \cos \alpha \right). \quad (9.8)$$

Так як згідно закону Кулона  $F \leq kmg \cos \alpha$ , то рівняння

$$kmg \cos \alpha_2 = \frac{1}{9}mg \left( 4 \sin \alpha_2 + 5 \frac{k_2}{r} \cos \alpha_2 \right) \quad (9.9)$$

визначає найбільше значення кута  $\alpha=\alpha_2$ , при якому кулька ще рухається без ковзання. З рівності (9.9) одержуємо

$$k = \frac{4}{9} \operatorname{tg} \alpha_2 + \frac{5}{9} \frac{k_2}{r}. \quad (9.10)$$

Якщо  $\alpha_2$  і  $k_2$  відомі (див. нижче), рівність (9.10) дозволяє вирахувати коефіцієнт  $k$ .

З рівняння (9.6) видно, що центр мас кульки рухається рівноприскорено. Якщо її початкова швидкість була рівна нулю, то для віддалі  $x$ , яку вона проходить за час  $t$ , маємо

$$x = \frac{1}{2} \ddot{x} t^2. \quad (9.11)$$

Звідси

$$\ddot{x} = \frac{2x}{t^2}. \quad (9.12)$$

Рівності (9.9) і (9.11) дають другу робочу формулу:

$$k_2 = \frac{9r}{5g} \left( \frac{5}{9} g \sin \alpha - \frac{2x}{t^2} \right) \frac{1}{\cos \alpha}, \quad (9.13)$$

де  $\frac{5}{9} g \sin \alpha = a$  – прискорення руху центра мас кульки без врахування тертя кочення. В граничному випадку, коли  $x=0$ , а кут  $\alpha=\alpha_1$ , рівняння (9.13) приводить до (9.5). Рівність (9.13) дозволяє визначити  $k_2$ , вимірюючи час руху кульки по жолобу при різних кутах нахилу жолоба.

При кутах нахилу жолоба  $\alpha > \alpha_2$  можна (наближено) вважати, що кулька при своєму русі не обертається, а лише ковзає по жолобу. Рівняння руху центра мас кульки тоді може бути записане у вигляді

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - k_1 mg \cos \alpha, \quad (9.14)$$

де  $k_1$  – коефіцієнт тертя ковзання.

Враховуючи (9.11) з рівняння (9.14) одержуємо третю робочу формулу

$$k_1 = \left( g \sin \alpha - \frac{2x}{t^2} \right). \quad (9.15)$$

Рівність (9.15) дозволяє визначити  $k_1$  для різних кутів нахилу жолоба.

### Опис установки.

Основна частина установки – металевий жолоб прямокутного перерізу. Внутрішня поверхня жолоба покрита тканиною, яка легко деформується при русі сталевий кульки. Один кінець жолоба закріплений шарнірно, а другий – переміщається по направляючих.

На верхньому краю жолоба розміщений електромагніт, який утримує кульку. Внизу – приймальний столик. Коли кулька вдаряється об нього, розмикається електричний контакт і електричний секундомір зупиняється.

## **VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ**

1. Для всіх, вказаних на установці, кутів нахилу жолоба вимірюють час  $t$  руху кульки. Для кожного положення жолоба час руху кульки потрібно виміряти 5 разів і взяти із них середнє

арифметичне. За формулою (9.12) вираховують для всіх кутів нахилу величину прискорення кульки  $\ddot{x}$  і швидкість  $\dot{x} = \ddot{x}t$ .

2. Одержані результати представляють у вигляді графіка, відкладаючи по осі абсцис кути нахилу, а по осі ординат величину прискорення кульки. Вибрати масштаб: 1 см –  $2^0$  і 1 см –  $20 \text{ см/с}^2$ . На цьому ж листку наносять графік функції  $a = \frac{5}{9} g \sin \alpha$ , тобто прискорення руху центра мас кульки без врахування тертя кочення.

Точка перетину графіків  $\ddot{x} = f(\alpha)$  і  $a = \frac{5}{9} g \sin \alpha$  визначає кут  $\alpha'_2$ , близький до кута  $\alpha_2$ , при якому виникає ковзання. На графіку вказати надійні інтервали.

3. З рівняння (9.10), припустивши що  $k_2=0$ , одержимо формулу,  $k = \frac{4}{9} \text{tg} \alpha_2$ , з якої вирахуємо коефіцієнт тертя спокою.

4. Екстраполяцією графіка  $\ddot{x} = f(\alpha)$  до перетину з віссю абсцис визначають величину кута  $\alpha_1$ .

5. Вираховують  $k_2$ : для кутів, більших  $\alpha_1$ , але менших  $\alpha_2$ , за формулою (9.13), для кута  $\alpha_1$  – за формулою (9.5).

6. Коефіцієнт  $k_1$  вираховують за формулою (9.15) для кутів більших  $\alpha_2$ . Визначають залежність  $k_1$  від швидкості.

7. Результати вимірювань і обчислень заносять у раціонально вибрану таблицю.

8. Будують графік залежності  $k_1$  від швидкості.

9. Порівнюють між собою одержані результати коефіцієнтів тертя.

10. Оцінюють похибки.

**ПРИМІТКА:** Оскільки для одного і того ж кута виконується 5 вимірювань часу і шляху, і ці вимірювання рівноточні, то для знаходження середнього значення прискорення  $\ddot{x}$ , швидкості  $\dot{x}$  та їх надійних інтервалів  $\Delta\ddot{x}$  та  $\Delta\dot{x}$  використовується схема №4 обробки непрямих вимірювань. Надійний інтервал  $\Delta\ddot{x}$  знаходиться, використовуючи формулу

$$\left(\frac{\Delta\ddot{x}}{\bar{\ddot{x}}}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x}{\bar{x}}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta t}{\bar{t}}\right)^2, \quad (9.17)$$

де  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  – надійні інтервали шляху і часу,  $\bar{x}$  і  $\bar{t}$  – середні значення цих величин, знайдені за схемою №1 обробки результатів прямих вимірювань.

Надійні інтервали  $\Delta x$  і  $\Delta t$  включають в себе не лише випадкові похибки, але і систематичні і знаходяться за формулами:

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{сист}})^2 + (t_{\text{на}} S_{\bar{x}})^2}, \quad \Delta t = \sqrt{(\Delta t_{\text{сист}})^2 + (t_{\text{на}} S_{\bar{t}})^2}. \quad (9.18)$$

Для знаходження похибки для величин  $k$ ,  $k_1$  і  $k_2$ , які є результатами непрямих вимірювань, використовують формулу

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots}, \quad (9.19)$$

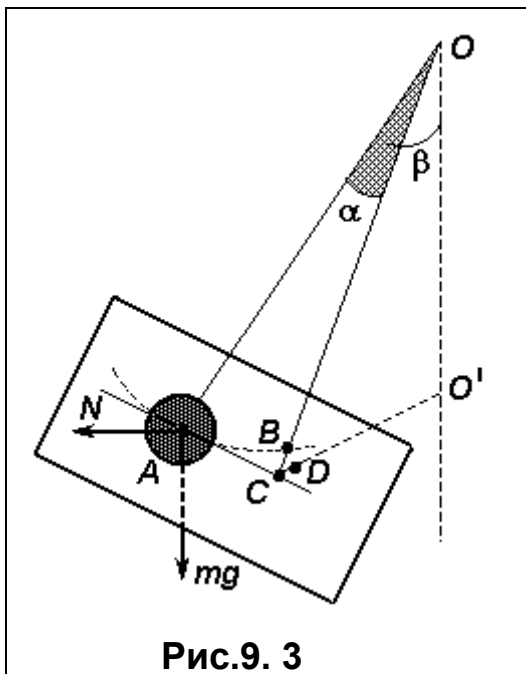
де  $y = f(x_1, x_2, \dots)$  – функція, а  $x_1, x_2, \dots$  – її незалежні змінні. Змінними величинами тут будуть кут  $\alpha$ , шлях  $x$  і час  $t$ , а функціями  $k, k_1, k_2$ . Похибка кута  $\alpha$  оцінюється як систематична похибка  $\Delta\alpha_{\text{сист}}$ .

11. Записати кінцеві результати і зробити висновки.

## **б). КОЧЕННЯ КУЛЬКИ ПО ПЛАСТИНЦІ**

### **V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ**

Схематичне зображення експериментальної установки приведене на рис.9.3. Тут зображена площина кочення – пластинка,



**Рис.9.3**

вздовж якої котиться кулька, підвішена за нитку в точці підвісу  $O$  (подібно математичному маятнику). Точка  $A$  визначає положення рівноваги кульки, точка  $B$  відповідає положенню кульки при відхиленні її на кут  $\alpha$  від точки  $A$ ,  $OO'$  – вертикаль,  $\beta$  – кут нахилу площини по відношенню до вертикалі.

При коливальному русі кульки по площині  $\sigma$ , нахиленої під кутом  $\beta$  до вертикалі, під час її кочення виникає момент сили тертя кочення, який визначається за формулою

$$M = FR = k_2 N, \quad (9.20)$$

де  $M$  – момент сили тертя кочення,  $F$  – сила тертя кочення,  $R$  – радіус кулі,  $N$  – реакція площини  $\sigma$ ,  $k_2$  – коефіцієнт моменту сили тертя кочення.

Дія тертя кочення приводить до зменшення механічної енергії коливального процесу  $W$  і, відповідно, до зменшення амплітуди коливань. Знаючи цю зміну енергії, можна знайти коефіцієнт моменту сили тертя кочення.

Розглянемо рис. 9.3. Точки  $C$  і  $D$  вибрано таким чином, щоб виконувалися умови:  $AC \perp OA$ ;  $BC \perp OA$ ;  $BD \perp OO'$ ;  $CD$  – горизонталь. У трикутнику  $AOB$  сторони  $AO$  та  $BO$  є довжинами  $l$  маятника, отже  $\triangle AOB$  – рівнобедрений:  $\angle OAB = \pi/2 - \alpha/2$ , а  $\angle BAC = \alpha/2$ . В трикутнику  $CBD$  за побудовою  $\angle CBD = \beta$ . Розглянемо потенціальну енергію кульки в точці  $B$ , відносно рівня, заданого прямою  $CD$ . Положення точки  $B$  визначається кутом  $\alpha$ , тому

$$BD = h \cdot \cos \beta = \left( AB \sin \frac{\alpha}{2} \right) \cos \beta \approx l \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta$$

(при малих кутах  $\alpha$  хорда  $AB$  прямує до дуги  $l \cdot \alpha$ ). Потенціальна енергія в цьому випадку

$$W_{\alpha} = mgh = mgl \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta. \quad (9.21)$$

З рис.9.3 видно, що сила нормальної реакції з боку пластини в точці  $A$

$$N = mg \cos \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) = mg \sin \beta. \quad (9.22)$$

Тому

$$F = \frac{k_2}{R} N = \frac{k_2}{R} mg \sin \beta. \quad (9.23)$$

При затуханні коливань протягом  $n$  періодів амплітуда  $x_0$  зменшиться до  $x_n$  і роботу сили тертя можна визначити за формулою

$$A = F \cdot 4x_{cep}n = 4nF \frac{x_0 + x_n}{2} = 4nFl \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2} = 4nl \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2} \frac{k_2}{R} mg \sin \beta, \quad (9.24)$$

де початкова амплітуда  $x_0 = l\alpha_0$ ; а кінцева –  $x_n = l\alpha_n$ . Прирівнявши зміну енергії до роботи сил тертя, одержимо (див. 9.21):

$$W_{\alpha_0} - W_{\alpha_n} \approx mgl \cos \beta \left( \alpha_0 \sin \frac{\alpha_0}{2} - \alpha_n \sin \frac{\alpha_n}{2} \right), \quad (9.25)$$

що при малих кутах  $\alpha$  ( $\sin \alpha \approx \alpha$ ) перепишеться в такому вигляді:

$$mgl \frac{\alpha_0^2 - \alpha_n^2}{2} \cos \beta = A = 4nl \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2} \cdot \frac{k_2}{R} mg \sin \beta. \quad (9.26)$$

З цієї рівності одержуємо кінцеву робочу формулу

$$k_2 = R \frac{\alpha_0 - \alpha_n}{4n} \cdot \operatorname{ctg} \beta. \quad (9.27)$$

## Опис установки.

Установка складається з маятника, нахил площини коливань якого змінюється від 0 до  $\pi/2$  і електричної схеми, яка дозволяє вимірювати час і відраховувати кількість коливань. На передній панелі установки знаходяться два цифрових табло і кнопки “ВКЛ”, “СТОП”, “СБРОС”. Натисканням кнопки “ВКЛ” установка приводиться в робочий стан, не потребуючи часу на розігрів. Кнопка “СБРОС” дозволяє “обнулити” покази на обох табло і приводить установку в робочу готовність. Для одержання показів часу, за який здійснюється  $n$  коливань, одразу ж після  $(n-1)$ -го коливання слід натиснути на кнопку “СТОП”.

## **VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ**

1. Встановити пластинку та підвісити кульку з однакового матеріалу. Зо допомогою штангенциркуля виміряти діаметр кульки не менше 5-ти разів.

2. За допомогою ручки регулювання кута нахилу площини коливань встановити певне значення кута  $\beta$ . (Зміну кута  $\beta$  провести в межах від 0 до  $\pi/2$ ).

3. При  $\beta=0$  провести визначення періодів коливань для кульок з усіх заданих матеріалів.

4. Відхилити маятник на малий кут  $\alpha$  ( $\alpha \approx 3-6^\circ$ ) і переконатися, що відсутнє проковзування. Натиснути на кнопку “СБРОС” і відпустити кульку. Кількість періодів  $n$  доцільно вибрати так, щоб  $\alpha_0$  і  $\alpha_n$  приймали значення, зручні для спостереження.

5. На  $(n-1)$ -му періоді натиснути кнопку “СТОП”. Результати вимірів  $\alpha_0$ ,  $\alpha_n$ ,  $t$ ,  $n$ ,  $\beta$  занести в раціонально вибрану таблицю. Виміри провести не менше 5-ти разів при однакових умовах.

6. За формулою (9.27) обчислити коефіцієнт моменту сили тертя кочення, а також період коливань ( $T = t/n$ ). Для кожної серії вимірів при  $\beta = \text{const}$  обробку результатів провести за схемою №1.

7. За результатами дослідів складають таблиці залежностей  $k_2$  та  $T$  від матеріалу та кута  $\beta$  і представляють їх у вигляді графіків. З'ясовують аналітичні залежності  $k_2(\beta)$ ;  $k_2$  (матеріалу);  $T(\beta)$  та  $T$  (матеріалу). Залежності від кута  $\beta$  будують, виконавши 6-10 вимірювань. Для кожного значення (точки) на графіку наносять довірчий інтервал похибки (“вуси”).

8. Роблять аналіз та висновки.

## VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

1. Яка розмірність коефіцієнту тертя кочення? (тертя ковзання?).
2. Намалюйте схематично залежність сили тертя спокою від прикладеної до тіла сили.
3. Чи залежить сила тертя ковзання від швидкості тіла?
4. Як обчислюється найбільше значення кута нахилу площини до горизонту, при якому тіло ще не буде рухатися (ковзати, котитися)?
5. Що таке момент сили, момент імпульсу, момент інерції тіла?
6. Запишіть формулу для обчислення моменту інерції кульки.
7. Що є причиною виникнення моменту сили тертя кочення?
8. Від чого залежать коефіцієнти тертя спокою, ковзання, кочення?
9. Який фізичний зміст коефіцієнта моменту сил тертя кочення?
10. З яким прискоренням буде рухатися кулька по жолобу, якщо коефіцієнт тертя ковзання рівний нулеві:  
а)  $a=g$ ; б)  $a=g\sin\alpha$ ; в)  $a=g\cos\alpha$ ; г)  $a = \frac{5}{9} g \sin\alpha$ .
11. Чому з часом амплітуда коливань кульки зменшується і чи залежить період коливань від амплітуди?
12. Як визначити похибки проведених вимірювань і результату вимірювання?

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 10 ВИВЧЕННЯ ЗАКОНІВ ОБЕРТОВОГО РУХУ ЗА ДОПОМОГОЮ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

**I. МЕТА РОБОТИ:** експериментальна перевірка основного рівняння обертового руху – рівняння моментів  $\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$ .

**II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ:** Прилад РМ-06, маятник Обербека, секундомір, фотоелемент, набір тягарців, штангенциркуль.

**III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ,** знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

1. Дати визначення та пояснити, що таке ступені вільності. Число ступенів вільності при русі твердого тіла.
2. Кутова швидкість як вектор. Зв'язок вектора кутової швидкості з вектором лінійної швидкості.
3. Основний закон динаміки твердого тіла.
4. Шість рівнянь руху твердого тіла.
5. Рівняння руху твердого тіла навколо закріпленої осі. Момент інерції.
6. Поняття центра мас і визначення його координат.
7. Сформулювати і довести теорему Гюйгенса-Штейнера.

### IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.

Рух твердого тіла в загальному випадку визначається двома векторними рівняннями: рівнянням, що характеризує поступальний рух,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (10.1)$$

та рівнянням обертового руху відносно нерухомої осі:

$$J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}. \quad (10.2)$$

Як видно із цих рівнянь, вони аналогічні, лише в рівнянні обертового руху роль маси  $m$  відіграє момент інерції  $J$ , роль лінійного прискорення  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  – кутове прискорення  $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ , а роль результуючої сумарної сили  $\vec{F}$  – сумарний момент сили  $\vec{M}$ .

Момент інерції матеріальної точки дорівнює добутку маси матеріальної точки на квадрат відстані її від осі обертання:

$$J = mr^2. \quad (10.3)$$

Момент сили відносно деякої точки обертання – це векторний добуток радіус-вектора  $\vec{r}$ , проведеного від точки обертання до точки, на яку діє сила  $\vec{F}$ , на цю силу

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (10.4)$$

Момент імпульсу – векторний добуток радіус-вектора, що характеризує положення матеріальної точки відносно т. 0 вибраної системи відліку, на її імпульс

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{P}. \quad (10.5)$$

## V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Маятник Обербека в даному приладі РМ-06 – це інерційна обертова система у вигляді хрестовини із стержнів. На чотирьох взаємно перпендикулярних стержнях можуть вільно переміщатися вантажі. На горизонтальній осі обертання хрестовини є диск з двома різними радіусами, на який намотується нитка. Один кінець нитки закріплюється на диск, а на другий кінець нитки підвішується тягарець. Під впливом падаючого тягарця нитка розмотується з диска і викликає обертовий рух хрестовини. При обертанні твердого тіла момент інерції не залежить від часу і основне рівняння динаміки твердого тіла відносно нерухомої осі має вигляд:

$$J \cdot \varepsilon = M \quad (10.6)$$

де  $M$  – сума проєкцій на вісь обертання всіх моментів сил, що діють на тіло,  $J$  – момент інерції тіла відносно осі обертання,  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$  – його кутове прискорення.

На рис.10.1 зображений загальний вигляд приладу РМ-06. На вертикальній колоні 1, встановленій на основі 2, закріплені два кронштейни: нижній нерухомий 3 та верхній рухомий 4 і дві нерухомі втулки: нижня 5 і верхня 6. Вирівнювання положення приладу встановлюється за допомогою регулюючих ніжок. На верхній втулці 6 з допомогою основи 8 закріплений підшипниковий вузол диска 9 і диск 10. Через диск перекидається нитка 11. Один її кінець прикріплюється до одного з радіусів диска 12, а на другому кінці закріплюються тягарці 13. На задній нижній втулці 5 на основі 14 закріплений гальмуючий електромагніт 15, який після підведення до

нього напруги живлення, за допомогою фрикційної муфти, утримує хрестовини разом з вантажами в стані спокою. Рухомий кронштейн 4 можна переміщувати вздовж колони і фіксувати його в будь-якому положенні, визначаючи таким чином довжину шляху падіння тягарців. Для підрахунку довжини шляху на колоні нанесена міліметрова шкала. Похибка визначення довжини шляху складає  $\pm 1$  мм. На рухомому кронштейні 4 закріплений фотоелектричний датчик №1 17, на нерухомому кронштейні 3 закріплений фотоелектричний датчик №2 18, який виробляє електричний імпульс кінця вимірювання часу і вмикає гальмуючий електромагніт. До кронштейна 3 прикріплена платформа 19 з гумовими амортизаторами, які відіграють роль обмежувачів руху тягарців. На основі приладу знаходиться мілісекундомір, до гнізд якого підведені фотоелектричні датчики № 1 і № 2.

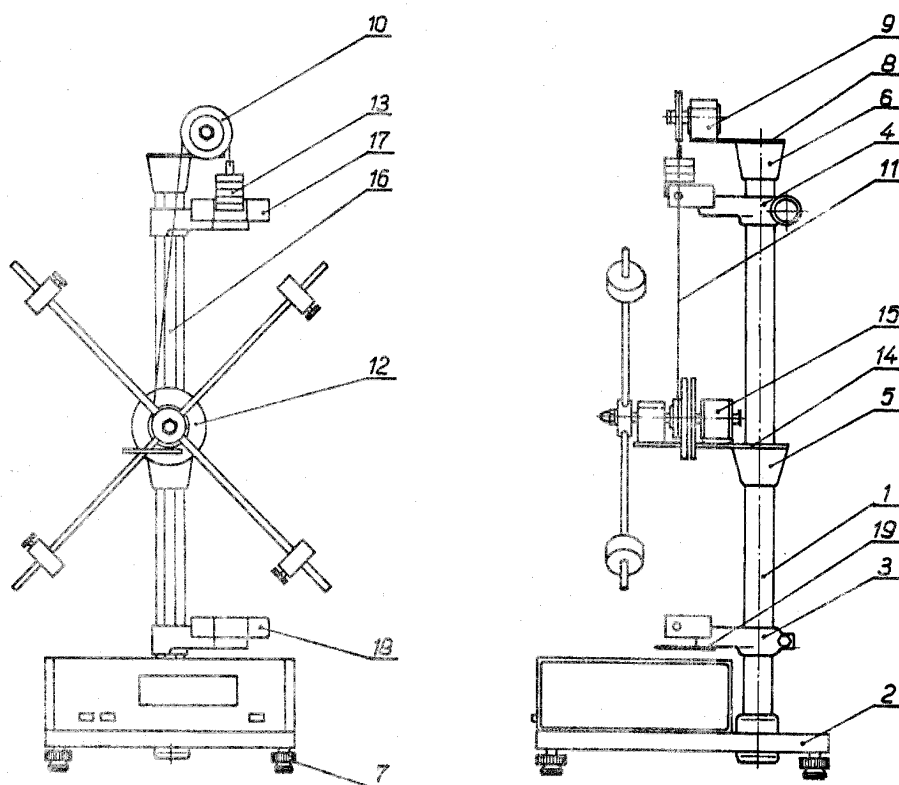


Рис.10. 1

Обертний момент сили  $M$ , створений силою натягу нитки  $F_H$ , визначається формулою

$$M = r \cdot F_H, \quad (10.7)$$

де,  $r$  – радіус диска. Силу натягу нитки  $F_H$  визначають із рівняння поступального руху тягарців

$$ma = mg - F_H, \quad (10.8)$$

де  $m$  – маса тягарців,  $a$  – їх прискорення, яке визначається за відомими часом  $t$  та шляхом  $h$  падіння:

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (10.9)$$

Використовуючи зв'язок між лінійним  $a$  та кутовим  $\varepsilon$  прискореннями

$$a = r \cdot \varepsilon, \quad (10.10)$$

( $r$  – радіус диска), вираз (10.6) перепишемо у вигляді

$$J = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{m(g - 2h/t^2)r^2t^2}{2h}. \quad (10.11)$$

Формула (10.11) одержана при нехтуванні моментом сил тертя, прикладеним до осі маятника. В реальних умовах момент сил тертя  $M_T$  може виявитися досить значним і його необхідно врахувати в рівнянні (10.6), яке в цьому випадку набуде вигляду:

$$M - M_T = J \cdot \varepsilon. \quad (10.6a)$$

Момент сил тертя визначається як добуток мінімальної ваги тягарця, що приведе до обертання маятника, на радіус диска за формулою

$$M_T = m_{\min} g \cdot r \quad (10.12)$$

Змінюючи масу тягарця та радіус шківів, ми створюємо інший момент сили, при цьому момент інерції маятника Обербека залишається без змін. В цьому випадку відношення  $M/\varepsilon = J = \text{const}$ , що відповідає рівності (з врахуванням (10.11)):

$$J = \frac{M_1}{\varepsilon_1} = \frac{M_2}{\varepsilon_2} \Rightarrow \frac{r_1^2 m_1 (gt_1^2 - 2h)}{2h} = \frac{r_2^2 m_2 (gt_2^2 - 2h)}{2h}. \quad (10.13)$$

Ця формула є кінцевою робочою формулою.

Насадження циліндриків на стержні хрестовини та зміна їх відстані від осі обертання приводить до зміни моменту інерції.

Позначимо через  $J_0$  – момент інерції маятника без циліндриків,  $J_{0ц}$  – сумарний момент інерції 4-х циліндриків відносно їх осей, що проходять через їх центр мас,  $J_{1ц}$  – момент інерції 4-х циліндриків відносно осі, паралельної до осей, що проходять через центр мас кожного з циліндриків (для кожного своя вісь), відстані між якими  $l_i$ . Якщо відстані  $l_i$  однакові, тобто  $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$ , то за теоремою Гюйгенса-Штейнера

$$J_{1ц} = J_{0ц} + 4m_{ц}l^2,$$

де  $m_{ц}$  – маса одного циліндрика.

У випадку, коли 4 циліндрики насаджені на краях стержнів на однаковій відстані  $l_1$  від осі обертання маятника до центра циліндрика, момент інерції маятника Обербека визначається за формулою:

$$J_1 = J_0 + J_{1ц} = J_0 + J_{0ц} + 4m_{ц}l_1^2, \quad (10.14)$$

Коли циліндрики перемістити найближче до осі маятника, момент інерції стане:

$$J_2 = J_0 + J_{2ц} = J_0 + J_{0ц} + 4m_{ц}l_2^2, \quad (10.15)$$

де  $l_2$  – відстань між центром циліндрика і віссю обертання. Оскільки  $l_1 > l_2$ , то

$$J_1 - J_2 = 4m_{ц}(l_1^2 - l_2^2). \quad (10.16)$$

Враховуючи те, що момент інерції можна визначити за формулою (10.11), вираз (10.16) перепишемо у вигляді

$$J_1 - J_2 = \frac{M_1}{\varepsilon_1} - \frac{M_2}{\varepsilon_2} = 4m_{ц}(l_1^2 - l_2^2) \quad . \quad (10.17)$$

Використавши вирази (10.11) і (10.13), одержують кінцеву робочу формулу

$$t_1^2 - t_2^2 = 8h \frac{l_1^2 - l_2^2}{r_1^2 g}. \quad (10.18)$$

Виконання рівностей (10.13) і (10.18) з урахуванням похибок вимірювань свідчать про справедливість рівняння обертового руху (10.6).

## VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

***Експлуатація приладу допускається лише при наявності заземлення !***

Необхідно пересвідчитися в вертикальному положення колони приладу Встановити рухомий кронштейн на вибрану висоту і таким чином, щоб тягарці, рухаючись вниз, проходять через середину робочого віконця фотоелектричних датчиків. Натиснути кнопку “СЕТЬ” і перевірити, чи горять індикатори фотоелектричних датчиків і чи всі індикатори показують нуль. Перемістити тягарці в верхнє положення, дочекатися поки система опиниться в стані спокою. Натиснути кнопку “ПУСК” і перевірити наявність руху системи і

фіксації часу падіння мілісекундоміром. Натиснути кнопку “СБРОС” і перевірити, чи встановилися покази вимірювача на нуль і чи зняте блокування електромагнітом.

Після такої попередньої перевірки готовності приладу, вимірювання провести в такій послідовності:

1. За допомогою штангенциркуля виміряти діаметри шківів (дисків), на які намотується нитка, та визначити їх радіуси  $r_1$  та  $r_2$ . Виміри провести 5 разів.

2. Намотати нитку на один із дисків. Встановити нижній край тягарця масою  $m_1=200$  г точно за рисою на корпусі верхнього фотоелектричного датчика і по шкалі на колоні відрахувати довжину шляху його руху (падіння)  $h$ .

3. Натиснути кнопку “ПУСК” і виміряти час падіння тягарців на шляху  $h$ . Повторити виміри не менше 5 разів.

4. Проробити аналогічні виміри у випадку намотування нитки з іншим тягарцем ( $m_2 = 300$  г) на шків другого діаметру.

5. Насадити на стержні 4 циліндрики строго симетрично як найближче до осі маятника. Виміряти відстань  $l_2$  від осі обертання маятника до центра кожного циліндра не менше 5 разів. Усереднити значення відстані спочатку для кожного циліндрика, а потім для 4-х.

6. Повторити п.2-3, вимірюючи час падіння для цього випадку.

7. Всі циліндрики перемістити на край стержнів строго симетрично і виміряти нову відстань  $l_1$  між серединами кожного циліндра та віссю маятника, аналогічно як в п.5.

8. Вимірювання і для цього випадку провести згідно п.2, п.3 і п.4.

9. Дані занести в таблицю.

10. Оцінити величину моменту сил тертя в осі маятника. До кінця нитки прикріплюють тягарці, поступово збільшуючи їх до тих пір, доки маятник не почне обертатися. Найменше значення ваги такого тягарця знаходять не менше 5-ти разів. За формулою (10.12) визначають момент сил тертя. На основі оцінки відносної похибки, яка допускається, якщо нехтувати силою тертя, роблять висновок про доцільність використання рівняння (10.6) або (10.6а). Відносна похибка визначається як відношення величини моменту сил тертя до величини найменшого моменту сили натягу нитки.

11. Перевіряють постійність моменту інерції системи при різних моментах сил за формулою (10.13) за даними пп.2,4,5,6,7,8.

12. При постійних масах тягарців  $m_1$  і радіусах диска  $r_1$  при різних моментах інерції системи в залежності від відстані циліндриків по відношенню до осі маятника (п.5 та п.7) перевірити рівність (10.18).

13. Оцінити похибки вимірювань, користуючись схемою №1 та схемою №4.

14. Аналізуючи кінцеві результати вимірів, зробити короткі висновки.

## VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте та запишіть, що називається моментом сили, моментом інерції, моментом імпульсу матеріальної точки і тіла?
2. За яким правилом визначається напрям кутової швидкості?
3. Вкажіть розмірність моменту кількості руху:  
1)  $ML^2T^{-1}$ ; 2)  $MLT^{-2}$ ; 3)  $MLT^2$ ; 4)  $ML^2T$  ?
4. Яка формула виражає закон збереження кількості руху:  
1)  $J\omega = const$ ; 2)  $mvR = const$ ; 3)  $mv = const$ ; 4)  $\frac{mv^2}{2} = const$
5. Вкажіть розмірність моменту інерції:  
1)  $MLT^{-2}$ ; 2)  $ML^2T^{-1}$ ; 3)  $ML^2$ ; 4)  $M^{1/2}L$ .
6. Укажіть формулу, по якій визначається кінетична енергія тіла, що обертається:  
1)  $W = \frac{mv^2}{2}$ ; 2)  $W = \frac{J\omega^2}{2}$ ; 3)  $W = \frac{Jv^2}{2}$ ; 4)  $W = \frac{J^2\omega}{2}$ .
7. Чи залежить натяг нитки або момент інерції від радіуса шківа?
8. Як вплине зміна радіуса шківа на момент сили, що діє на маятник?
9. Яким чином можна змінити момент інерції маятника?
10. Як визначити момент сили тертя, що виникає в осі маятника Обербека.

# ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 11

## ВИЗНАЧЕННЯ ЕЛІПСОЇДА ІНЕРЦІЇ ТВЕРДИХ ТІЛ ЗА ДОПОМОГОЮ КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ

**1. МЕТА РОБОТИ:** визначення моментів інерції та еліпсоїдів інерції твердих тіл з допомогою крутильних коливань.

**II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ ТА МАТЕРІАЛИ:** установка РМ-05, штангенциркуль, набір досліджуваних тіл.

**III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ,** знання яких необхідне для виконання роботи.

1. Основний закон динаміки твердого тіла.
2. Рівняння руху твердого тіла навколо закріпленої осі. Момент інерції.
3. Поняття про тензор інерції. Головні осі і головні моменти інерції та їх фізичний зміст.
4. Обчислення моментів інерції тіл різної форми відносно симетричних осей.
5. Рух твердого тіла, закріпленого в точці. Рівняння Ейлера. Вільні осі.

### IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

У випадку обертового руху роль маси, що виступає в рівняннях поступального руху, відіграє момент інерції.

Моментом інерції тіла відносно деякої осі називається сума моментів інерції всіх точок ( $m_i r_i^2$ ) цього тіла відносно цієї осі:

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 . \quad (11.1)$$

Якщо розподіл густини однорідний, то  $dm = \rho \cdot dV$  і момент інерції можна обчислити за формулою:

$$J = \int_V r^2 \rho dV . \quad (11.2)$$

При обертанні тіла навколо закріпленої точки виконується рівняння (моментів)

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M} , \quad (11.3)$$

де  $\vec{N} = J\vec{\omega}$  – сумарний момент імпульсу твердого тіла відносно точки закріплення, а  $\vec{M}$  – сумарний момент сили відносно цієї ж точки. В цьому випадку  $J$  є тензором інерції:

$$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}. \quad (11.4)$$

У випадку, коли головні осі тіла співпадають з осями координат тензор інерції приводиться до діагонального вигляду:

$$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix}. \quad (11.5)$$

## V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Механічна конструкція приладу РМ-05 показана на рис. 11.1. На основі 2 закріплений мілісекундомір РМ-14 1 і колона 3, на якій з допомогою притискних гвинтів закріплені кронштейни (4, 5, 6). Кронштейни (4, 6) мають гвинтові затискувачі, що закріплюють стальний дріт, на якому підвішена рамка 7. На кронштейні 5 закріплена стальна плита 8, яка є основою фотоелектричного датчика 9, електромагніта 10 та кругової кутової шкали 11. Електромагніт 10 може змінювати своє положення на плиті, а його положення відносно фотоелектричного датчика вказує на кутовій шкалі стрілка, прикріплена до електромагніту.

Конструкція рамки 7 дозволяє закріплення в ній досліджуваних тіл 12, які можуть значно відрізнятися один від одного зовнішніми розмірами. Тіла закріплюються за допомогою рухомої горизонтальної балки, яка переміщується вздовж нерухомих вертикальних направляючих рамки. Балка фіксується шляхом закручування гайок на затискних втулках, розташованих на ній. Фотоелектричний датчик і електромагніт з'єднані з мілісекундоміром. За допомогою даної установки визначають моменти інерції та еліпсоїди інерції твердих тіл за методом крутильних коливань.

Встановимо залежність між величинами моментів інерції тіла для осей обертання, які пересікаються в одній точці, визначимо момент інерції тіла відносно деякої осі обертання  $OA$  (рис. 11.2). За початок координат вибрана довільна точка, яка знаходиться в тілі на цій осі. З осями координат вісь обертання  $OA$  складає кути  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Тоді момент інерції тіла відносно цієї осі  $OA$  буде

$$J = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (\rho_i^2 - OB_i^2) \quad (11.6)$$

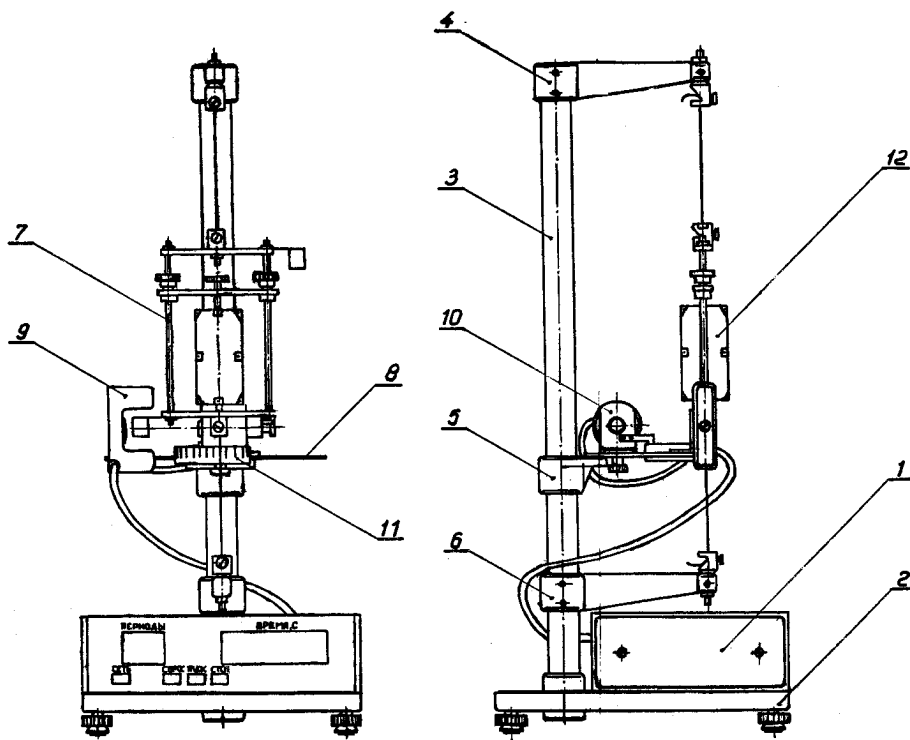


Рис. 11.1

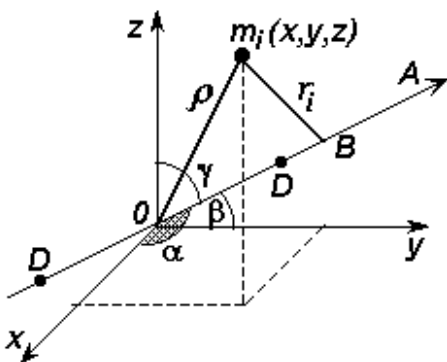


рис. 11.2

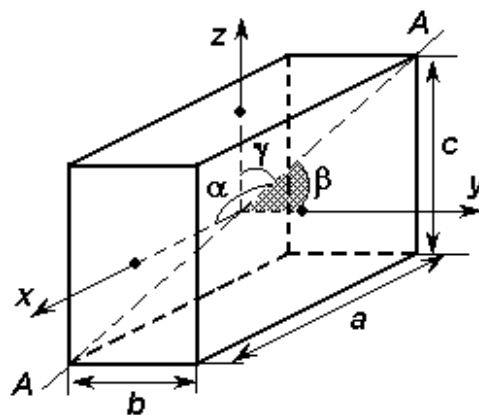


рис. 11.3

Оскільки  $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $OB = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma$  і врахувавши, що  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , одержимо після відповідних перетворень:

$$J = \cos^2 \alpha \sum m_i (z^2 + y^2) + \cos^2 \beta \sum m_i (x^2 + z^2) + \cos^2 \gamma \sum m_i (x^2 + y^2) - 2 \cos \gamma \cos \beta \sum m_i yz - 2 \cos \alpha \cos \gamma \sum m_i xz - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum m_i xy$$

Вирази при квадратах косинусів кутів – це моменти інерції тіла відносно осей координат  $x, y, z$  (завжди додатні):

$$J_x = \sum m_i (y^2 + z^2); J_y = \sum m_i (z^2 + x^2); J_z = \sum m_i (x^2 + y^2),$$

а інші:

$$J_{yx} = \sum m_i y_i x_i; \quad J_{yz} = \sum m_i y_i z_i; \quad J_{xz} = \sum m_i x_i z_i$$

називають відцентровими моментами інерції (вони можуть бути додатними, від'ємними або рівними нулеві). В загальному випадку момент інерції визначається не однією величиною, а шістьма величинами. Для різних осей (кути  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – різні) величини моментів інерції будуть різними.

Розглянемо геометричну інтерпретацію зміни величини моменту інерції тіла в залежності від положення вибраних осей обертання тіла. Для цього відкладаємо від початку координат  $O$  вздовж осей в довільному, але однаковому масштабі, відрізки  $(OD)_i = 1/\sqrt{J_i}$ , де  $J_i$  – момент інерції тіла відносно  $i$ -ої вибраної осі. Кінці всіх відрізків  $(OD)_i$  створюють деяку поверхню. Яке рівняння цієї поверхні? Запишемо координати кінця будь-якого відрізка  $OD$ :  $x=OD\cos\alpha$ ,  $y=OD\cos\beta$ ,  $z=OD\cos\gamma$ , звідси  $\cos\alpha = x \cdot \sqrt{J_x}$ ,  $\cos\beta = y \cdot \sqrt{J_y}$ ,  $\cos\gamma = z \cdot \sqrt{J_z}$ . Підставивши позначення  $J_x=A$ ,  $J_y=B$ ,  $J_z=C$ ,  $J_{yz}=D$ ,  $J_{zx}=E$ ,  $J_{xy}=F$ , одержимо шукане рівняння поверхні

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy - 1 = 0. \quad (11.9)$$

Така поверхня називається еліпсоїдом інерції відносно точки  $O$ . Осі еліпсоїда інерції називаються головними осями інерції тіла відносно вибраної точки  $O$ . Рівняння еліпсоїда відносно системи координат, осі якої співпадають з головними осями не містить членів з добутками різних координат:

$$J_x \cdot x^2 + J_y \cdot y^2 + J_z \cdot z^2. \quad (11.10)$$

Еліпсоїд інерції відносно центра тяжіння тіла називають центральним, а його головні осі називають головними центральними осями інерції. Для однорідних симетричних тіл головні центральні осі інерції є також і осями симетрії тіла.

Знаючи поверхню (еліпсоїд інерції), можна завжди визначити момент інерції тіла відносно будь-якої іншої, не головної осі, що проходить через початок координат (вибрану точку  $O$ ), оскільки

$$J = 1/(OD)^2 = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma. \quad (11.11)$$

Для крутильних коливань момент інерції визначається за формулою

$$J = \frac{k}{4\pi^2} T^2, \quad (11.12)$$

де  $T$  – період коливань,  $k$  – модуль кручення,

$$k = \frac{\pi r^4 G}{2l}, \quad (11.13)$$

$l$  – довжина дротини,  $r$  – її радіус,  $G$  – модуль зсуву.

За формулами (11.12) та (11.13) можна визначити момент інерції пустої рамки  $J_0$  та рамки з досліджуваним тілом  $J'_i$  відносно вибраних осей обертання. Момент інерції тіла  $J_i$  відносно  $i$ -ої осі визначається за допомогою виразу:

$$J_i = J'_i - J_0 = \frac{k}{4\pi^2} (T_i^2 - T_0^2). \quad (11.14)$$

У цій формулі  $T_i$  – період крутильних коливань рамки з тілом відносно  $i$ -ої осі,  $T_0$  – період коливань пустої рамки відносно цієї ж осі.

Модуль кручення  $k$  можна відшукати, не тільки використовуючи формулу (11.13), але також опираючись на експериментальне і теоретичне дослідження моменту інерції куба в даній роботі.

Відомо, що момент інерції куба відносно будь-якої осі, що проходить через центр мас, визначається за формулою:

$$J_{\text{куба}} = ma^2/6, \quad (11.15)$$

де  $m$  – маса куба,  $a$  – довжина ребра куба. Еліпсоїд інерції у цьому випадку перетворюється у сферу. До речі, випадок з кубом добре ілюструє принцип симетрії Неймана: симетрія властивості, у даному випадку тензора (моменту інерції), може бути вищою, ніж симетрія твердого тіла. І справді, симетрія сфери інерції вища за симетрію куба.

Експериментальна формула для знаходження моменту інерції куба записується:

$$J_{\text{куба}} = J'_{\text{куба}} - J_0 = \frac{k}{4\pi^2} (T_{\text{куба}}^2 - T_0^2). \quad (11.16)$$

Із формул (11.15) і (11.16) одержуємо вираз для знаходження  $k$ :

$$\frac{k}{4\pi^2} = \frac{ma^2}{6(T_{\text{куба}}^2 - T_0^2)}. \quad (11.17)$$

Підставляючи (11.17) в (11.14), одержуємо:

$$J_i = \frac{ma^2}{6} \frac{T_i^2 - T_0^2}{T_{\text{куба}}^2 - T_0^2}. \quad (11.18)$$

Ця формула справедлива для тіла будь-якої форми. Якщо тіло має форму паралелепіпеда (рис.11.3), сторони якого рівні  $a$  (вздовж осі  $OX$ ),  $b$  (вздовж осі  $OY$ ) і  $c$  (вздовж осі  $OZ$ ), то у формулі (11.11), якщо вісь обертання вибрана вздовж діагоналі ( $i = d$ ), косинуси відповідних кутів обчислюються за формулами:

$$\cos^2 \alpha = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad \cos^2 \beta = \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad \cos^2 \gamma = \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (11.19)$$

Тоді, підставивши у формулу (11.11) вирази (11.19) і (11.16), одержуємо:

$$T_d^2 = \frac{a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (11.20)$$

При виводі формули (11.20) враховано, що індекс  $i$  у формулі (11.18) приймає значення  $d, x, y, z$ ;  $T_x, T_y, T_z, T_d$  – період крутильних коливань відносно осей  $OX, OY, OZ$  і  $AA$  (діагоналі, див. рис.11.3) відповідно, які знаходяться експериментально.

Рівняння (11.20) перевіряється експериментально у даній лабораторній роботі. Формули (11.18) і (11.20) є робочі формули.

## VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Вимірюють розміри досліджуваних тіл  $a, b, c$  в різних місцях з допомогою штангенциркуля не менше 5 разів. Результати обробляють за схемою № 1.

2. Рамку приладу повертають, наблизивши її стрілку до електромагніту таким чином, щоб електромагнітна сила фіксувала положення рамки. Натиснути кнопку “ПУСК” і, відрахувавши не менше  $n=10$  крутильних коливань, натиснути кнопку “СТОП” фіксуючи час коливань  $t$ . За формулою  $T = t/n$  знайти період коливань рамки  $T_0$ .

3. Закріплюють в рамці сталевий куб. В середині кожної грані зроблені невеликі заглиблення, які дозволяють закріплювати куб (так само і паралелепіпед – див. нижче) при обертанні навколо осей  $OX, OY, OZ$ . Крім того заглиблення зроблені в місцях, які дозволяють закріплювати тіло так, щоб воно могло обертатися відносно діагоналей куба (паралелепіпеда,  $AA$  на рис. 11.3). Почергово змінюючи положення куба відносно осей, провести вимірювання, як описано в попередньому пункті, визначивши періоди коливань  $T_x, T_y, T_z, T_d$ . Переконаються, що  $T_{куба}=T_x=T_y=T_z$ . Результати обробляють за схемою № 1.

4. Для знаходження маси куба  $m$  достатньо провести одне зважування на технічних терезах.

5. Використовуючи формулу (11.17), знайти модуль кручення. За формулою (11.13) обчислити значення модуля кручення і порівняти одержані результати.

6. Замінують куб паралелепіпедом. Визначають для різних його положень (так як в п.2) періоди коливань  $T_x, T_y, T_z, T_d$ . Обробку результатів вимірювань проводять за схемою №1.

7. Перевіряють правильність рівності (11.20): порівнюють значення періодів  $T_d$ , одержані з досліду і за формулою (11.20), враховуючи похибки вимірювань. В цьому випадку використовують схему №4.

8. За формулою (11.18) обчислюють моменти інерції досліджуваних тіл відносно осей  $OX, OY, OZ$  та діагоналі, вираховуючи похибки за схемою №4.

9. За відомими моментами інерції будують еліпсоїди інерції для досліджуваних тіл.

10. Проводять аналіз одержаних результатів і роблять короткі висновки.

## VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

1. Момент інерції тіла відносно осі рівний:

$$1) J=mr^2; 2) J = \sum m_i r_i^2; 3) J = \sum r_i m_i^2; 4) J=m\varepsilon; 5) J = \sum r_i m_i.$$

2. Момент інерції тіла є фізичною величиною, яка характеризує:

- 1) подібно до маси інертність тіла при поступальних рухах;
- 2) інертність тіла до зміни ним кутової швидкості під дією обертового моменту;
- 3) імпульс тіла;
- 4) момент кількості руху тіла.

3. Момент кількості руху частинки, або тіла можна записати у

$$\text{вигляді: } \vec{N} = J \cdot \vec{\omega}, \quad \text{де } J = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

є тензор моменту інерції. Поясніть цю форму запису моменту кількості руху.

4. Еліпсоїд інерції тіла це:

- 1) поверхня, яка описується тілом при обертанні;
- 2) величина, яка характеризує момент інерції тіла;
- 3) поверхня, утворена кінцями відрізків  $OD = 1/\sqrt{J}$ ,  $J$  – момент інерції тіла відносно осі, яка направлена по відрізку  $OD$  і проходить через нерухому точку;
- 4) поверхня, утворена вектором  $\vec{N} = J\vec{\omega}$ .

5. Які осі обертання називаються вільними?
6. Сформулюйте основний закон динаміки твердого тіла.
7. Поясніть експериментальну формулу знаходження модуля кручення  $k$ .
8. Яке із перерахованих співвідношень перевіряється у роботі:

$$1) T_d^2 = \frac{a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad 2) J = J_0 + md^2;$$

$$3) J = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma, \quad 4) J_i = \frac{ma^2}{6(T_{\text{куба}}^2 - T_0^2)} (T_i^2 - T_0^2)$$

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 12 ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ МЕТАЛЕВИХ КІЛЕЦЬ ЗА ДОПОМОГОЮ МАЯТНИКА МАКСВЕЛА

**I. МЕТА РОБОТИ:** ознайомлення з складним рухом твердого тіла і визначення моменту інерції металевих кілець на основі закону збереження енергії.

**II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ:** металеві кільця різної маси, маятник Максвела, секундомір, фотоелемент (вмонтовані в уніфілярну установку).

**III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ,** знання яких необхідне для виконання роботи.

1. Вивести і пояснити закон збереження і перетворення енергії в механіці.
2. Кінетична енергія твердого тіла, що обертається довкола закріпленої осі.
3. Кінетична енергія твердого тіла при плоскому русі. Вивести формулу і проаналізувати її.
4. Рівняння моментів для плоского руху. Вивести рівняння і проаналізувати його.
5. Приклади плоского руху: скочування циліндра з похилої площини, рух маятника Максвела.

### IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Повна енергія ізольованої системи, в якій діють тільки пружні сили, сила всесвітнього тяжіння і сили електростатичного поля, створеного нерухомих електричним зарядом, є величина стала. Це – закон збереження енергії в механіці, який для розглядуваного випадку (сила тертя відсутні) безпосередньо впливає з другого і третього законів Ньютона:

$$E = E_k + E_n = \text{const.} \quad (12.1)$$

При переході системи із стану 1 в який-небудь інший стан 2

$$\int_1^2 d(E_k + E_n) = A_{1,2}, \quad (12.2)$$

тобто зміна повної енергії системи при переході з одного стану в інший дорівнює роботі, що виконується при цьому зовнішніми силами. Це більш загальне формулювання закону збереження енергії в механіці.

Розглянемо рух тіла, закріпленого на нерухомій осі, навколо якої воно може вільно обертатися. Як і для системи матеріальних точок, в цьому випадку справедливе рівняння моментів

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M}, \quad (12.3)$$

де  $\vec{N}$  – момент імпульсу тіла, а  $\vec{M}$  – момент зовнішньої сили  $\vec{F}$  відносно осі обертання. У розглянутому випадку обертання навколо нерухомої осі момент імпульсу записується:

$$N = \sum \Delta m_i v_i r_i = \sum \Delta m_i r_i^2 \omega = \left( \sum \Delta m_i r_i^2 \right) \omega = J\omega, \quad (12.4)$$

де  $J = \sum \Delta m_i r_i^2$  – величина, яка є мірою інертності твердого тіла при обертанні, залежить від розподілу маси відносно осі і називається моментом інерції тіла відносно вибраної осі.

Кінетичну енергію тіла, що обертається навколо закріпленої осі, також зручно подати за допомогою моменту інерції:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i v_i^2 = \left( \sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \frac{\omega^2}{2} = \frac{J\omega^2}{2}, \quad (12.5)$$

$v_i$  – лінійна швидкість елемента тіла масою  $\Delta m_i$ .

Найпростішим випадком руху тіла, яке не має закріплених точок, є випадок плоского руху: це такий рух, при якому траєкторії всіх точок тіла лежать в паралельних площинах. Прикладами плоского руху може бути кочення циліндра по похилій площині або рух маятника Максвелла.

У загальному випадку рух центра мас твердого тіла визначається за формулою:

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (12.6)$$

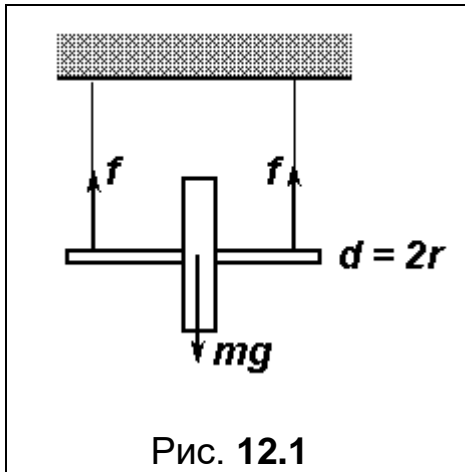
де  $\vec{v}_c$  - швидкість центра мас тіла,  $\vec{F}_i$  – зовнішні сили, що діють на тіло. Щоб повністю визначити рух тіла, треба, крім рівняння (12.6), написати рівняння моментів відносно осі, що проходить через центр мас. Для випадку плоского руху за вісь обертання треба вибрати вісь, що проходить через центр мас тіла і перпендикулярна до площини, в якій рухаються точки тіла. Оскільки вона нерухома відносно тіла, то можна записати вираз для моменту імпульсу відносно цієї осі у вигляді  $\vec{N} = J\vec{\omega}$ . Тоді рівняння моментів (12.3) записується у вигляді:

$$J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}.$$

## V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Застосуємо знайдене рівняння до руху маятника Максвелла (рис.12.1). На диск, що опускається і має масу  $m$ , діють сили тяжіння  $m\bar{g}$  і натяг ниток  $2f$ . Тому прискорення  $a$  центра мас диску визначається рівнянням:

$$ma = mg - 2f. \quad (12.7)$$



Як було домовлено, вісь моментів виберемо так, щоб вона проходила через центр мас диска. Момент сили тяжіння відносно цієї осі дорівнює нулю, а момент сил натягу ниток  $M = 2f \cdot r$  і рівняння моментів має вигляд:

$$J \frac{d\omega}{dt} = 2f \cdot r. \quad (12.8)$$

З кінематичних міркувань легко знайти зв'язок між  $a$  і кутовим прискоренням

$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ . Оскільки центр мас опускається саме на стільки, на скільки розкручується нитка, то його переміщенні  $h$  і кут повороту диска  $\alpha$  зв'язані співвідношенням  $h = \alpha r$ . Диференціюючи це співвідношення двічі, дістанемо

$$\frac{d^2h}{dt^2} = a = \frac{d\omega}{dt} r. \quad (12.9)$$

Прискорення  $a$  можна визначити, вимірюючи час руху  $t$  та відстань  $h$  (висоту), пройдені маятником, за допомогою співвідношення:

$$h = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2h}{t^2}. \quad (12.10)$$

Підставивши (12.9) у (12.8) з урахуванням (12.10) і (12.7), приходимо до виразу:

$$J = \frac{m(g-a)r^2}{a} = mr^2 \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right), \quad (12.11)$$

який практичніше переписати так:

$$J = \frac{1}{4} md^2 \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right), \quad (12.12)$$

де  $J$  – момент інерції маятника,  $d = 2r$  – зовнішній діаметр осі маятника з намотаною на неї ниткою підвісу ( $d = D_o + 2d_n$  тут  $D_o$  – діаметр осі маятника,  $d_n$  – діаметр нитки підвісу),  $t$  – час падіння маятника,  $g$  – прискорення сили земного тяжіння,  $h$  – довжина маятника, що дорівнює висоті падіння,  $m$  – маса маятника разом з кільцем, яка визначається за формулою:

$$m = m_o + m_p + m_k, \quad (12.12a)$$

де  $m_o$  – маса осі маятника,  $m_p$  – маса ролика,  $m_k$  – маса кільця, акуратно накладеного на ролик.

Формула (12.11) – це робоча формула для розрахунку моменту інерції маятника Максвелла як без кільця, так і з кільцем.

Як відомо, момент інерції – адитивна величина:

$$J = J_o + J_p + J_k, \quad (12.14)$$

де  $J_o$  – момент інерції осі маятника,  $J_p$  – момент інерції ролика,  $J_k$  – момент інерції кільця. Враховуючи це, із сумарного моменту маятника  $J$  можна визначити момент інерції кільця за формулою:

$$J_k = J - (J_p + J_o), \quad (12.15)$$

де  $J_o + J_p$  – момент інерції маятника Максвелла без кільця,  $J$  – момент інерції маятника з кільцем.

Теоретичні формули для обчислення моментів інерції осі маятника, ролика та кільця задаються такими виразами відповідно:

$$\begin{aligned} J_o &= \frac{1}{8} m_o D_o^2, \\ J_p &= \frac{1}{8} m_p (D_p^2 + D_o^2), \\ J_k &= \frac{1}{8} m_k (D_k^2 + D_p^2) \end{aligned} \quad (12.16)$$

У цих виразах  $D_o$ ,  $D_p$ ,  $D_k$  – зовнішні діаметри осі маятника, ролика та кільця відповідно.

Загальний вигляд лабораторної установки маятника Максвелла приведено на рис.12.2. Основа 2 оснащена регулюючими ніжками 1, які дозволяють проводити вирівнювання приладу. В основі закріплена колонка 3 з нерухомим верхнім кронштейном 4 і рухомим нижнім кронштейном 5. На верхньому кронштейні знаходяться електромагніт 6, фотоелектричний датчик №1 7 і гвинт 8 для закріплення і регулювання довжини біфілярної (подвійної) підвіски маятника.

Нижній кронштейн разом з прикріпленим до нього фотоелектричним датчиком №2 9 можна переміщувати вздовж колонки і фіксувати в довільному положенні.

Маятник 10 приладу – це ролик, закріплений на осі і підвішений біфілярним способом, на який накладаються замінні кільця 11, зміною яких змінюють момент інерції системи.

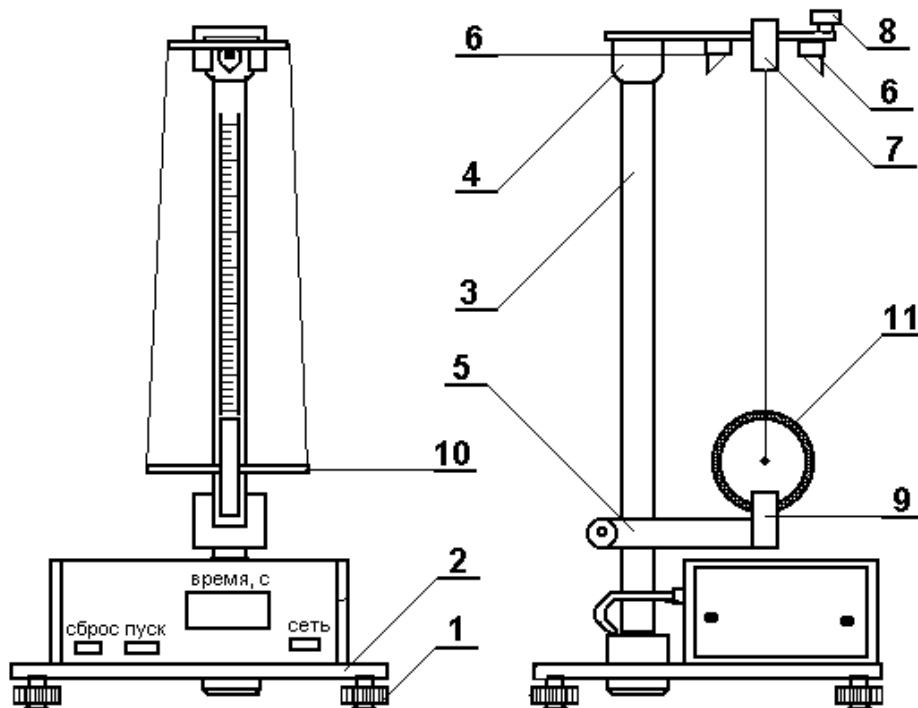


Рис. 12.2

Маятник з накладеним кільцем утримується в верхньому положенні електромагнітом. Довжина маятника визначається по міліметровій шкалі на колонці приладу. З метою полегшення цього виміру нижній кронштейн оснащено червоним покажчиком, розміщеним на висоті оптичної осі нижнього фотоелектричного датчика. Фотоелектричний датчик №1 закріплено на верхньому кронштейні і з'єднано з секундоміром. На передній панелі секундоміра знаходяться такі маніпуляційні елементи:

“СЕТЬ” – вимикач електромережі. Натиск цієї кнопки вмикає напругу живлення. Візуально це видно по загоранню цифрових індикаторів (висвічується цифра нуль) і свіченням лампочок фотоелектричних датчиків.

“СБРОС” – встановлення нуля вимірника. Натиснення цієї кнопки викликає повернення схем секундоміра в початковий стан.

“ПУСК” – управління електромагнітом. Натиск цієї кнопки означає генерування в схемі секундоміра імпульсу дозволу на вимірювання.

## VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Приготувати прилад до роботи. Для цього необхідно:
  - перевірити заземлення приладу;
  - перевірити вирівнювання приладу;
  - ввімкнути шнур вимірника в електромережу;
  - натиснути кнопку “СЕТЬ”, перевіряючи, чи засвітились лампочки обох фотоелектричних датчиків.
2. Нижній кронштейн приладу пересунути і зафіксувати в крайньому нижньому положенні.
3. На ролик маятника накласти довільно вибране кільце, притискуючи його до упору.
4. На вісь маятника акуратно намотати нитку підвісу, накладаючи послідовно один біля одного її витки, і зафіксувати вісь. Перевірити, чи співпадає нижня точка кільця з нулем шкали на колонці. Якщо ні, то звільнити верхній кронштейн і відрегулювати його висоту. Закріпити верхній кронштейн.
5. Натиснути кнопку “ПУСК” секундоміра.
6. Деблокувати гвинт для регулювання довжини біфілярного підвісу. Визначити довжину нитки таким чином, щоб край сталюого кільця після спускання маятника знаходився приблизно на 2 мм нижче оптичної осі нижнього фотоелектричного датчика. Одночасно провести коректування установки маятника, звертаючи увагу на те, щоб його вісь була паралельна основі приладу. Блокувати гвинт 8.
7. Відпустити кнопку “ПУСК”.
8. Намотати на вісь маятника нитку підвісу, звертаючи увагу на те, щоб вона намотувалася рівномірно, один виток за другим.
9. Зафіксувати маятник за допомогою електромагніту, звертаючи увагу на те, щоб нитка в цьому положенні не була надто скручена.
10. Повернути маятник в напрямку його руху на кут  $\sim 5^\circ$ .
11. Натиснути кнопку “СБРОС”.
12. Натиснути кнопку “ПУСК”.
13. Після падіння маятника прочитати виміряне значення часу падіння маятника. Дослід повторити 5 разів.
14. Визначити середнє значення  $\bar{t}$  часу падіння маятника, а також довірчий інтервал  $\Delta t$  за схемою №1.
15. По шкалі на вертикальній колонці приладу визначити довжину маятника  $h$ , оцінити похибку вимірювання довжини  $\Delta h$ .
16. За допомогою мікрометра або штангенциркуля виміряти діаметр осі разом з намотаною на неї ниткою. Оцінити похибку вимірювання.

17. Визначити масу маятника разом з кільцем. Значення мас окремих елементів нанесені на них.

18. За формулою (12.14) обчислити момент інерції маятника. Оцінити похибку визначення моменту інерції маятника за схемою №4.

19. Згідно п.п.8-18 провести визначення моменту інерції маятника з різними заданими кільцями і без них. Обробку результатів прямих вимірювань проводять за схемою №1, а непрямих – за схемою №4.

20. Враховуючи визначений момент інерції маятника та ролика з віссю, визначити момент інерції кожного з кілець за формулою (12.15) і оцінити похибку.

21. Порівняти одержані експериментальні результати з теоретичними значеннями моментів інерції, які задані виразами (12.16).

22. Кінцеві теоретичні і експериментальні результати подати у вигляді таблиці:

| $J$   | $J_o, \text{кг}\cdot\text{м}^2$ | $J_p, \text{кг}\cdot\text{м}^2$ | $J_k, \text{кг}\cdot\text{м}^2$ | $\Delta J_o, \text{кг}\cdot\text{м}^2$ | $\Delta J_p, \text{кг}\cdot\text{м}^2$ | $\Delta J_k, \text{кг}\cdot\text{м}^2$ |
|-------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--|--|--|
| теор. |                                 |                                 |                                 |  |  |  |
| експ. |                                 |                                 |                                 |  |  |  |

23. Зробити висновки.

## VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

1. Який рух називається плоским рухом твердого тіла?
2. Дати визначення моменту інерції, моменту імпульсу і моменту сили.
3. Сформулювати закони збереження механічної енергії і імпульсу. Яким чином вони проявляються при русі маятника Максвелла?
4. Записати формулу для кінетичної енергії тіла при плоскому русі.
5. Пояснити виникнення обертового моменту при русі маятника Максвелла.
6. В якому випадку дія сили приводить також і до обертання тіла?
7. Записати рівняння моментів для обертового руху. Показати, що  $\vec{N} = J\vec{\omega}$ .
8. Записати рівняння руху центра мас маятника Максвелла.
9. Вивести формули (12.11) і (12.16).
10. За якими формулами обчислюються довірчі інтервали вимірюваних величин  $D$ ,  $h$  і  $t$ , а також моментів інерції?

**ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 13**  
**ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ ЦИЛІНДРІВ**  
**ТА ПЕРЕВІРКА ТЕОРЕМИ ГЮЙГЕНСА-ШТЕЙНЕРА**  
**МЕТОДОМ КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ**

**I. МЕТА РОБОТИ:** *ознайомлення з методом експериментального визначення моментів інерції твердих тіл за допомогою трифілярного підвісу, перевірка теореми Гюйгенса-Штейнера.*

**II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ ТА МАТЕРІАЛИ:** *платформа на трифілярному підвісі, секундомір, штангенциркуль, досліджувані тверді тіла (циліндри).*

**III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ,** знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

- 1.** *Момент імпульсу, момент сили. Зв'язок між ними.*
- 2.** *Основний закон динаміки твердого тіла.*
- 3.** *Рівняння руху твердого тіла навколо закріпленої осі. Момент інерції.*
- 4.** *Кінетична енергія твердого тіла, яке обертається навколо осі.*
- 5.** *Сформулювати і довести теорему Гюйгенса-Штейнера.*
- 6.** *Гармонічні коливання. Рівняння руху коливань осцилятора. Вивести формулу для частоти коливань.*

**IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ**

Момент інерції твердих тіл відносно деякої осі в загальному випадку визначається за формулою:

$$J = \int r^2 dm, \quad (13.1)$$

де  $dm$  – елемент маси досліджуваного тіла,  $r$  – відстань цього елемента маси від осі обертання.

Для тіл правильної геометричної форми величину моменту інерції можна розрахувати теоретично. В складних випадках момент інерції знаходять експериментально. Одним з можливих методів є метод крутильних коливань з допомогою трифілярного підвісу.

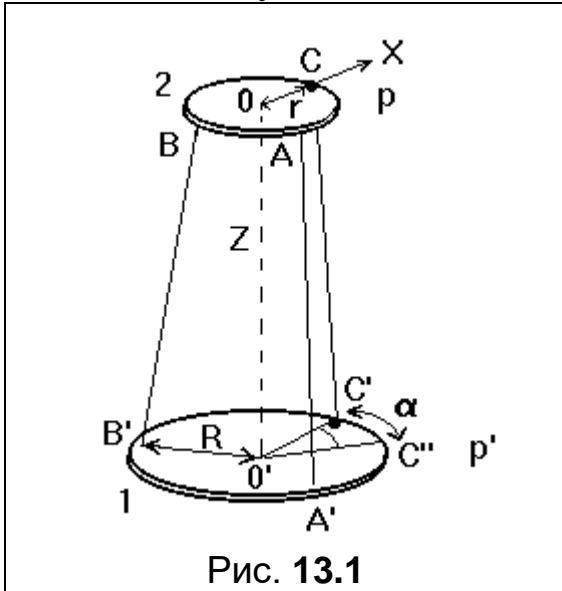
**V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ**

Гармонічним крутильним коливанням тіла називається періодичний рух навколо осі, що проходить через центр тяжіння

цього тіла, коли кут відхилення від положення рівноваги змінюється за законом синуса або косинуса:

$$\alpha = \alpha_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \quad \text{або} \quad \alpha = \alpha_0 \sin(\omega t), \quad (13.2)$$

де  $\alpha_0$  – амплітуда коливань.



Трифілярний підвіс, будова якого показана на рис.13.1, складається із тонкого диска (платформи) масою  $m$  радіусом  $R$ , підвішеного на трьох симетрично розташованих нитках. Вгорі ці нитки симетрично закріплені до країв диска меншого радіуса  $r$ , який в свою чергу закріплений на кронштейні. З ним зв'язана ручка, за допомогою якої системі надаються крутильні коливання. При цьому нижня платформа повертається навколо вертикальної

осі на деякий кут  $\alpha$  відносно верхньої і виникає момент сил, який прагне повернути платформу в попереднє положення рівноваги. Так виникають крутильні коливання, період яких залежить від моменту інерції платформи. При її навантаженні відбудеться зміна моменту інерції, а отже і періоду коливань.

При обертовому коливанні самої платформи або разом з досліджуваним тілом всі три нитки будуть знаходитись в нахиленому положенні, а центр тяжіння системи дещо піднімається вздовж осі обертання. Закон збереження енергії при нехтуванні тертям для загального випадку можна записати в такому вигляді:

$$\frac{1}{2}J\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + Mg(z_0 - z) = E, \quad (13.3)$$

де  $J$  – момент інерції,  $M$  – маса платформи з досліджуваним тілом,  $E$  – повна енергія системи,  $z_0$  – початкова координата точки  $O'$  (при  $\alpha=0$ ),  $z$  – координата т. $O'$  після повороту платформи на кут  $\alpha$ . З рис.13.1 видно, що точка  $C$  має координати  $(r,0,0)$ , а точка  $C'$  –  $(R\cos\alpha, R\sin\alpha, z)$ . Відстань  $CC'=l$  (довжині нитки), тому

$l^2 = (R\cos\alpha - r)^2 + R^2\sin^2\alpha + z^2$ . При малих кутах,  $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ , тоді

$$z^2 = l^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\alpha = z_0^2 - 2Rr(1 - \cos\alpha) \approx z_0^2 - Rr\alpha^2.$$

Звідси

$$z = \sqrt{z_o^2 - Rr\alpha^2} = z_o \sqrt{1 - \frac{Rr\alpha^2}{z_o^2}} \approx z_o - \frac{Rr\alpha^2}{2z_o}. \quad (13.4)$$

Підставивши (13.4) в (13.3), одержимо:

$$\frac{1}{2} J \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + Mg \frac{Rr}{2z_o} \alpha^2 = E. \quad (13.5)$$

Після диференціювання цього виразу по часу одержимо рівняння руху системи:

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + Mg \frac{Rr}{z_o} \alpha = 0, \quad (13.6)$$

розв'язком якого є вираз

$$\alpha = \alpha_o \sin \sqrt{\frac{MgRr}{Jz_o}} t. \quad (13.7)$$

Отже, така система має період коливань

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Jz_o}{MgRr}}. \quad (13.8)$$

Звідси момент інерції системи

$$J = \frac{MgRr}{4\pi^2 z_o} \cdot T^2, \quad \text{або} \quad J = kMT^2, \quad (13.9)$$

де

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_o} \quad (13.10)$$

і для даного приладу є стала величина.

Для пустої платформи момент інерції позначимо через  $J_0$ , а період коливання через  $T_0$ .

Навантаження платформи проводять двома способами: перший – два циліндри розміщують в центрі платформи, кладучи їх один на другий, і другий спосіб – два циліндри розміщують на лінії діаметру платформи, симетрично відносно її центра і на певній відстані  $d$  від центра.

Для першого способу навантаження момент інерції позначимо  $J_1$ , період коливання  $T_1$ , для другого способу відповідно –  $J_2$  та  $T_2$ . В обох випадках  $M = m + 2M_{\text{ц}}$ ,  $M_{\text{ц}}$  – маса циліндра. Отже, згідно (13.9):

$$J_1 = k(m + 2M_{\text{ц}})T_1^2, \quad (13.11)$$

$$J_2 = k(m + 2M_{\text{ц}})T_2^2. \quad (13.12)$$

Тоді момент інерції одного циліндра відносно осі, що проходить через його центр мас, визначається за формулою:

$$J_{\text{ц.о.}} = \frac{1}{2}(J_1 - J_0). \quad (13.13)$$

Момент інерції циліндра відносно осі, яка знаходиться на відстані  $d$  від осі, що проходить через центр мас циліндра і паралельна їй, визначається за формулою:

$$J_{\text{ц.т.}} = \frac{1}{2}(J_2 - J_0). \quad (13.14)$$

Формули (13.13) і (13.14) є кінцевими робочими формулами.

Зв'язок між моментами інерції  $J_{\text{ц.о.}}$  і  $J_{\text{ц.т.}}$  задається формулою Гюйгенса-Штейнера.

Значення величин моментів інерції циліндрів для обох цих випадків можна розрахувати теоретично за відповідними формулами:

$$J_{\text{ц.о.т.}} = \frac{1}{2}M_{\text{ц.}}R_{\text{ц.}}^2, \quad (13.15)$$

$$J_{\text{ц.т.}} = \frac{1}{2}M_{\text{ц.}}R_{\text{ц.}}^2 + M_{\text{ц.}}d^2. \quad (13.16)$$

Формула (13.9) справедлива при відсутності втрат енергії на тертя. Поправки на тертя виявляються незначними у випадку, коли сумарна енергія коливань системи значно перевищує енергію одного коливання, що відповідає умові:

$$\tau \gg T \quad (13.17)$$

де  $\tau$  – час, протягом якого амплітуда коливань платформи зменшується в 2-3 рази (час релаксації),  $T$  – період коливань.

## VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Ознайомитися з установкою, вимірювальними приладами. За допомогою ручки, зв'язаної з малим диском, надають платформі коливого обертового руху. Перевіряють, чи виконується умова (13.17).

2. Перевіряють умову малості кутової амплітуди ( $\alpha \approx 5^0-6^0$ ) по незалежності періоду коливань від  $\alpha_0$ . Для цього вимірюють час ( $t_1$ ) 20 повних коливань, визначають період  $T_1 = t_1/20$  для деякого  $\alpha_1$ . Далі амплітуду зменшують приблизно в 2 рази ( $\alpha_2$ ) і знаходять період  $T_2$ . Якщо  $T_1 = T_2$ , можна проводити вимірювання при кутах  $\alpha \leq \alpha_1$ . У випадку  $T_1 \neq T_2$ , амплітуду необхідно знову зменшити вдвоє і повторити вимірювання до тих пір, доки значення попереднього і наступного періодів не співпадатимуть в межах точності експерименту.

3. Вимірюють висоту  $z_0$ , радіуси  $R$  і  $r$ . Розраховують за формулою (13.9) константу  $k$ .

4. Вимірюють час 50 повних коливань пустої платформи 5 разів. Визначають період  $T_0=t/50$

5. В центрі платформи один на другий кладуть два однакові циліндри, маси яких знаходять з допомогою терезів на початку експерименту. Знаходять час 50 повних коливань навантаженої платформи, повторивши виміри 5 разів. Визначають період  $T_1$ .

6. Симетрично по відношенню до центра платформи розміщують циліндри на певній відстані. Відстань між центрами циліндрів вимірюють штангенциркулем. Визначають період  $T_2$  аналогічно п.4 і п.5. Результати вимірювань заносять в таблицю.

7. Результати прямих вимірів часів  $t_0, t_1, t_2$  обробити за схемою №1. Оцінити похибку вимірювань маси циліндрів.

8. За формулами (13.13) та (13.14) визначити моменти інерції циліндрів.

9. Обчислити похибки величин  $T_0, T_1, T_2$  та  $J_{ц.о.}, J_{ц.}$  за схемами №1 і №4 відповідно; оцінити малість втрат коливної енергії, перевібивши виконання умови (13.17).

10. Перевірити справедливість теореми Гюйгенса-Штейнера.

11. Одержані з експерименту значення  $J_{ц.о.}$  та  $J_{ц.}$  зіставити з розрахованими за формулами (13.15) та (13.16) значеннями.

12. Результати вимірювань і обчислень звести в таблицю. Кінцевий результат представити у вигляді:

$$J_{ц.} = \bar{J}_{ц.} \pm \Delta J_{ц.};$$
$$J_{ц.т.} = \bar{J}_{ц.т.} \pm \Delta J_{ц.т.}$$

13. Провести аналіз одержаних результатів, зробити висновки про узгодженість експериментальних даних з теоретичними розрахунками, про виконання теореми Гюйгенса-Штейнера.

## VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

1. Дати означення моменту імпульсу та моменту сили. Який фізичний зміст цих величин?
2. Показати зв'язок моменту імпульсу з моментом сили.
3. Чому при проведенні експерименту коливання підвісу повинні відбуватися з малими кутами відхилення від рівноваги?
4. Які сили виникають, як вони змінюються і як направлені в процесі коливання трифілярного підвісу?

5. Дати означення моменту інерції твердого тіла відносно деякої осі. Чи зміниться момент інерції того самого тіла, якщо змінити положення осі обертання у просторі?
6. Чи зміниться період коливань, якщо два важки перемістити з центру на краї платформи по діаметру? Якщо покласти їх один на одний на краю платформи?
7. При якій умові можна знехтувати втратами на тертя у коливній системі?
8. Як експериментально визначити (оцінити) повну енергію коливної системи?; трифілярного підвісу?
9. Вивести формулу для обчислення похибки вимірювання моментів інерції за схемою №4 (для непрямих вимірювань).

**ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 14**  
**ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ КУЛЬ ЗА ДОПОМОГОЮ**  
**БАЛІСТИЧНОГО КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА**

**I. МЕТА РОБОТИ:** експериментальна перевірка законів збереження енергії та імпульсу на прикладі визначення швидкості кулі з допомогою крутильного балістичного маятника.

**II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ ТА МАТЕРІАЛИ:** крутильний балістичний маятник, вмонтований в уніфіковану установку, пружинна гармата, лінійка, секундомір.

**III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ,** знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

- 1. Поняття замкненої системи. Виведення закону збереження імпульсу.**
- 2. Вивести та пояснити закон збереження руху центра мас (центра інерції) твердого тіла.**
- 3. Вивести і пояснити закон збереження і перетворення енергії в механіці.**
- 4. Залежність кількості руху твердого тіла від діючих на нього зовнішніх сил.**
- 5. Проаналізувати удар двох тіл. Абсолютно непружне зіткнення. Вивести та проаналізувати основні формули, що його характеризують. Поглинання та випускання фонона як результат непружного зіткнення.**
- 6. Пружне зіткнення двох тіл. Центральний та нецентральний удар. Зображення та аналіз зіткнень за допомогою діаграм. Сповільнення нейтронів як результат пружного зіткнення.**

**IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ**

Система, яка включає в себе всі взаємодіючі тіла (так що на жодне з тіл системи не діють інші тіла, крім тих, що входять до системи), називається замкнутою системою. Сили, що діють між тілами, які утворюють замкнуту систему, називаються внутрішніми силами (для цієї системи тіл). Можна показати, що оскільки система

замкнута, то сума всіх сил у ній дорівнює нулю, бо за третім законом Ньютона

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Тому повна сума сил у замкнутій системі завжди дорівнює нулю. Отже, в замкнутій системі

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i = 0, \quad \text{тобто} \quad \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

повний імпульс замкнутої системи є величина стала. З другого боку, для системи матеріальних точок справедливе рівняння моментів, таке ж як і для матеріальної точки

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M},$$

де  $\vec{M}$  – момент тільки зовнішніх сил. Похідна сумарного моменту імпульсу системи матеріальних точок відносно якої-небудь нерухомої осі дорівнює моменту зовнішніх сил, що діють на систему відносно цієї осі. Зокрема, якщо відносно якої-небудь осі  $M = 0$ , то відносно неї  $N = \text{const}$ .

Звідси випливає висновок, що момент імпульсу замкнутої системи є величина стала, оскільки для неї не існує зовнішніх сил і, отже, момент зовнішніх сил дорівнюють нулю.

При розгляді руху системи матеріальних точок або твердого тіла виникає поняття центра мас. Центр мас є точкою прикладання рівнодійної масових сил, тобто сил, пропорційних масам елементів тіла, на які ці сили діють, при умові, що сили, які діють на елементи тіла, паралельні одна одній, наприклад, сил інерції в неінерціальній системі координат, яка рухається поступально. Тому центр мас називають також центром інерції. Тверде тіло має такий самий імпульс, який мала б матеріальна точка масою, що дорівнює масі тіла і рухається так само, як рухається центр мас тіла. Абсолютно непружним називають такий удар, після якого швидкості обох тіл, що стикаються, однакові. Це явище використовується в даній лабораторній роботі.



“СЕТЬ” – вимикач мережі. Натиск кнопки викликає вмикання приладу в електромережу. Супроводжується це свіченням індикаторів і лампочки фотоелектричного датчика.

“СБРОС” – скид показів вимірника. Натиск цієї кнопки викликає “занулення” показів секундоміра і генерує сигнал дозволу на вимірювання.

“СТОП” – закінчення вимірювання.

Після попадання кулі в маятник він починає коливатись навколо вертикальної осі. Якщо знехтувати силами тертя, то можна використати два закони збереження:

а) закон збереження моменту імпульсу ( $N=J\omega$ ) для повністю непружного удару

$$mv \cdot l = (J_1 + ml^2) \cdot \omega, \quad (14.1)$$

де  $m$  – маса кулі,  $v$  – її швидкість,  $l$  – віддаль від осі обертання маятника до точки удару ( $ml^2$  – момент інерції кулі, як точкового тіла, відносно вертикальної осі маятника),  $\omega$  – кутова швидкість маятника,  $J_1$  – момент інерції маятника без кулі;

б) закон збереження механічної енергії, який для обертового коливного руху можна записати так:

$$\frac{(J_1 + ml^2)\omega^2}{2} = \frac{D\varphi^2}{2}, \quad (14.2)$$

де  $\varphi$  – найбільший кут повороту маятника,  $D$  – постійна моменту пружних сил.

З цих рівнянь одержуємо:

$$v^2 = \frac{D\varphi^2(J_1 + ml^2)}{m^2l^2} = \frac{D\varphi^2J}{m^2l^2}, \quad (14.3)$$

де  $J$  – момент інерції маятника разом з кулею.

Для визначення швидкості кулі за цією формулою необхідно знати  $D$  і  $J$ .

Будемо вважати, що 1)  $\tau \ll T$ , тобто час дії кулі на маятник значно менший періоду коливань маятника; 2) кут відхилення маятника – малий.

Тоді рівняння руху може бути записано, по аналогії з пружинним маятником ( $ma = -kx$ ), у вигляді:

$$J_1\ddot{\varphi} = -D\varphi, \quad (14.4)$$

де  $\varphi$  – кут повороту,  $\ddot{\varphi}$  – кутове прискорення. По цій же аналогії (або розв'язавши диференціальне рівняння) отримуємо формулу для періоду коливань

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_1}{D}}. \quad (14.5)$$

Стала пружних сил нам невідома. Для її виключення поступають таким чином. Якщо змінити віддаль між важками, змінивши тим самим момент інерції, то одержимо систему:

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{J_1}{D}} \\ T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{J_2}{D}} \\ J_1 - J_2 &= \Delta J \end{aligned} \quad (14.6)$$

Тут  $T_2$  – період коливань при іншому певному значенні моменту інерції маятника  $J_2$ ,  $\Delta J$  – різниця моментів інерції для цих двох положень важків.

Розділимо  $T_1$  на  $T_2$ , піднісши їх до квадрату, одержимо

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2}. \quad (14.7)$$

Звідки, враховуючи (14.6), знайдемо

$$J_1 = \frac{T_1^2}{T_1^2 - T_2^2} \Delta J. \quad (14.8)$$

Підставляючи цей вираз в (14.3), одержимо

$$v = \frac{2\pi\varphi}{ml} \frac{T_1}{T_1^2 - T_2^2} \Delta J. \quad (14.9)$$

Лишилась невідомою різниця  $\Delta J$ . З теореми Гюйгенса-Штейнера випливає, що

$$J_1 = J_0 + 2MR_1^2, \quad (14.10)$$

$$J_2 = J_0 + 2MR_2^2, \quad (14.11)$$

де  $J_0$  – момент інерції маятника, коли центри мас важків співпадають з віссю обертання,  $J_1$  – момент інерції системи, коли обидва важки знаходяться на віддалі  $R_1$  від осі обертання,  $J_2$  – коли важки на віддалі  $R_2$ ,  $M$  – маса кожного важка.

Тепер стало можливим обчислити  $\Delta J$ . Якщо  $R_1 > R_2$ , то

$$J_1 - J_2 = \Delta J = 2M(R_1^2 - R_2^2). \quad (14.12)$$

Рівняння (14.9). (14.12) дають вираз для знаходження швидкості кулі. Отже, кінцево одержимо робочу формулу у вигляді:

$$v = \frac{4\pi\varphi}{ml} \frac{T_1}{T_1^2 - T_2^2} (R_1^2 - R_2^2). \quad (14.13)$$

## VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Підготувати прилад до роботи. Для цього провести вирівнювання приладу і ввімкнути шнур в електричну мережу. Натиснути вимикач "СЕТЬ", перевіряючи, чи всі індикатори висвічують цифру нуль, а також, чи світиться лампочка фотоелектричного датчика. Прилад готовий до роботи зразу ж після вмикання в електромережу і не потребує прогріву.
2. Максимально наблизити важки один до одного ( $R_{2min}$ ).
3. Встановити маятник в такому положенні, щоб риска на мисочці з пластиліном була напроти кута  $\varphi = 0$ .
4. Вистрелити кулю з гарматного пристрою.
5. Виміряти максимальний кут відхилення маятника  $\varphi$ .
6. Ввімкнути секундомір і занулити покази часу.
7. Відхилити маятник на кут  $\varphi$ , деблокувати вимірник часу і пустити маятник.
8. Виміряти час десяти коливань, результати занести в наперед підготовлену таблицю, обчислити період коливань  $T_2$ .
9. Максимально віддалити один від одного важки маятника ( $R_{1max}$ ); встановити покази вимірників у нульове положення, натиснувши кнопку СБРОС.
10. Відхилити маятник на той же кут  $\varphi$ , що і при попередніх вимірюваннях, деблокувати вимірник часу (ПУСК) і відпустити маятник.
11. Виміряти час десяти коливань і вирахувати період  $T_1 (max)$ . Результати вимірювань і обрахунків занести в таблицю.
12. Провести ті ж досліді для інших трьох-п'яти проміжних положень важків ( $R_1$ ), вимірюючи час коливань та визначаючи період ( $T_1$ ). Результати занести в таблицю.
13. За формулою (14.13) обчислити швидкість польоту кулі.
14. Обчислити похибку визначання швидкості  $v$ , користуючись методом приведення.
15. Зробити висновки.

## VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

1. Які зіткнення називаються пружними (непружними)?
2. Дати визначення імпульсу тіла та моменту імпульсу.
3. Сформулювати закон збереження енергії і закон збереження імпульсу та моменту імпульсу.
4. Чи виконуються ці закони збереження при непружних зіткненнях?
5. Які перетворення енергії відбуваються в балістичному маятнику в процесі його роботи?

6. Дати визначення моменту інерції (для точкового тіла і для твердого тіла). Сформулювати теорему Гюйгенса-Штейнера.
7. Записати рівняння моментів (рівняння обертового руху).
8. На якому рівнянні ґрунтується теорія балістичного маятника?
9. Чому в лабораторній роботі необхідно визначати два різних періоди коливань балістичного маятника?
10. При яких умовах виведена робоча формула 14.13?
11. Записати рівняння гармонічного осцилятора та його розв'язок.
12. Записати формулу для обчислення похибки визначення швидкості при непрямих вимірюваннях.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 15 ВИВЧЕННЯ ЗАКОНІВ ЗБЕРЕЖЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗІТКНЕННЯ ТІЛ

**I. МЕТА РОБОТИ:** експериментальне вивчення законів зіткнення тіл на прикладі пружних та непружних ударів тіл.

**II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ ТА МАТЕРІАЛИ:** прилад УРМ-08 з відповідним набором куль.

**III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ,** знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

1. **Поняття замкненої системи. Виведення закону збереження імпульсу.**
2. **Вивести та пояснити закон збереження та перетворення енергії в механіці.**
3. **Поняття потенціальних сил та полів, консервативних систем. Умови рівноваги в них.**
4. **Проаналізувати удар двох тіл. Абсолютно непружне зіткнення. Вивести та проаналізувати основні формули, що його характеризують. Поглинання та випускання фонона як результат непружного зіткнення.**
5. **Пружне зіткнення двох тіл. Зображення та аналіз зіткнень за допомогою діаграм. Словильнення нейтронів.**

### IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Під зіткненням розуміють взаємодію двох або декількох матеріальних тіл в відносно малій області простору протягом відносно малого проміжку часу. Одним із видів зіткнення є удар двох куль (пружний або непружний). Удар буде пружним, коли коефіцієнт відновлення близький до одиниці, або непружним, для якого коефіцієнт відновлення близький до нуля. Дослідження законів збереження, що виконуються для цих ударів, проводяться в даній роботі.

### V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Загальний вигляд приладу для дослідження удару куль **УРМ-08** показаний на рис. 15.1. Основа 1 стоїть на регулюючих ніжках 2, з допомогою яких проводиться вирівнювання приладу. На основі закріплена колонка 3, на якій закріплені нижній 4 та верхній 5 кронштейни.

У верхній частині колонки закріплені кронштейни із стержнями 6 і гвинт 7, який використовується для встановлення відстані між

кулями. На стержнях 6 розміщені тримачі 8 з втулками 9, які фіксуються з допомогою болта 10 і пристосовані для закріплення підвісів 11. Через підвіси протягнуті дротини 12, які підводять напругу до гвинтів 13, підвісів 11, а через них до куль 14. Після відкручування гвинтів в підвісах можна встановити довжину підвіски куль. На нижньому кронштейні закріплені кутники з шкалами 15, 16, а також електромагніт 17. Після відкручування болтів 18, 19 електромагніт можна пересувати вздовж правої шкали і фіксувати висоту його положення.

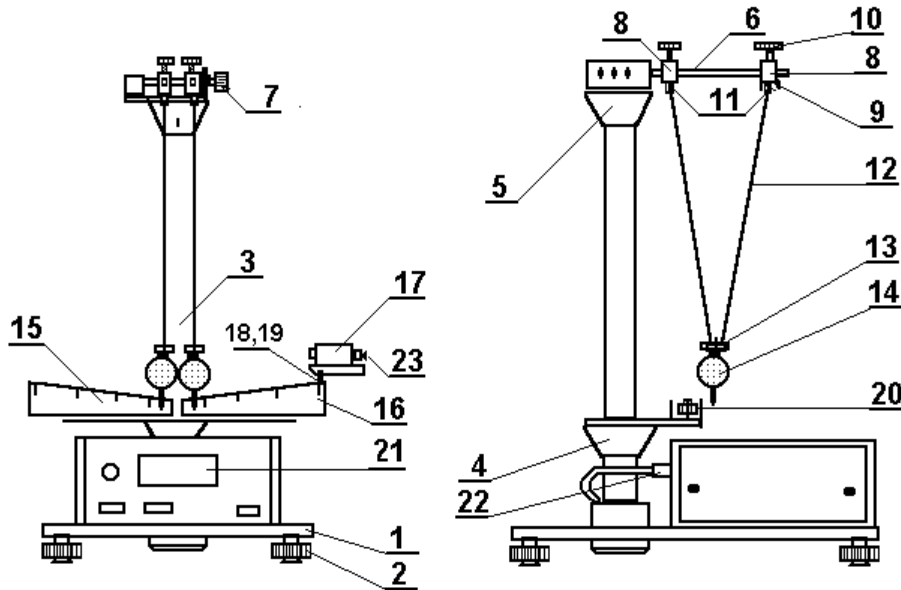


Рис. 7.1

Силу електромагніта можна регулювати гвинтом 23. Кутники з шкалами також можна пересувати вздовж нижнього кронштейна. Для зміни їх положення треба відпустити гайки 20, підібрати необхідне положення кутників, а потім догвинтити гайки. На основі закріплений мікросекундомір РМ-16 (21) та блок живлення, який передає напругу через з'єднання 22 до куль і електромагніта.

Закон збереження енергії: повна механічна енергія ізолюваної консервативної системи під час руху системи не змінюється.

У процесі експерименту досліджується закон збереження імпульсу. Імпульс куль до удару визначається за формулою:

$$p = p_1 = m_1 v_1 \quad (15.1)$$

де  $m_1$  – маса куль разом з підвіскою, яка рухається і ударяється в нерухому кулю;  $v_1$  – швидкість цієї куль, яка визначається за формулою:

$$v_1 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_1}{2}, \quad (15.2)$$

де  $g$  – прискорення сили земного тяжіння,  $\ell$  – довжина підвіски кулі,  $\alpha$  – кут, з якого була відпущена куля. Сумарний імпульс куль після пружного центрального удару

$$p' = m_1 v_1' + m_2 v_2', \quad (15.3)$$

де  $m_2$  – маса другої кулі разом з підвіскою, в яку ударяє перша куля масою  $m_1$ ,  $v_1'$  і  $v_2'$  – відповідні швидкості куль після удару, які визначаються за такими формулами:

$$v_1' = 2\sqrt{g\ell} \sin \frac{\alpha_1'}{2}, \quad (15.4)$$

$$v_2' = 2\sqrt{g\ell} \sin \frac{\alpha_2'}{2}, \quad (15.5)$$

де  $\alpha_1'$  – кут, на який відскочила куля, яка ударяла,  $\alpha_2'$  – кут, на який відскочила після зіткнення куля, яку ударила куля масою  $m_1$ .

Після ідеально непружного зіткнення сумарний імпульс буде визначатися формулою:

$$p'' = (m_1 + m_2)v_2'', \quad (15.6)$$

де  $v_2''$  – спільна швидкість куль після зіткнення, яка визначається за формулою:

$$v_2'' = 2\sqrt{g\ell} \sin \frac{\alpha_2''}{2}, \quad (15.7)$$

де  $\alpha_2''$  – кут, на який відхиляться обидві кулі після удару.

Пружні та непружні удари можна характеризувати коефіцієнтом відновлення:

$$k = \frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}, \quad (15.8)$$

де  $v_1' - v_2'$  – відносна швидкість куль після удару, а  $v_1 - v_2$  – відносна швидкість куль до удару.

Формули (15.1), (15.3), (15.6), (15.8) є робочими формулами.

## VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ.

Експлуатація приладу допускається лише при його заземленні. Перевірити горизонтальність положення основи приладу. Натиснути кнопку "СЕТЬ" і перевірити, чи всі індикатори вимірювача показують цифру "нуль". Прилад готовий до роботи одразу після вмикання його в електричну мережу.

Для дослідження непружних зіткнень кулі виготовляють із пластиліну.

### **Завдання. Перевірка закону збереження імпульсу та енергії.**

1. Гайки підвісів перемістити максимально вгору, на підвіси нагвинтити дві вибрані кулі. З допомогою гвинта 7, що знаходиться на верхньому кронштейні відстань між стержнями 6 встановлюють такою, щоб кулі дотикалися одна до другої.

2. Відпустити болти 10 і перемістити тримачі 8 в положення, в яких леза підвісів будуть знаходитися в одній площині з кутниками із шкалами 15,16. Болти після цього треба затягнути.

3. Відпустити гвинти підвісів і встановити таку довжину дротів 12, щоб на висоті кутових шкал знаходилися лише леза підвісів, а риски на кулях знаходилися на одному рівні. Після цього гвинти підвісів треба затягнути.

4. Провести корекцію основної установки куль. Для цього кулю, яка займає вище положення, легко вивертаючи, довести до рівності рівнів рисок на кулях і затягнути гайку підвісів. Діапазон можливого коректування 0-4 мм.

5. Відпустити гайки 20 і встановити кутники 15,16 так, щоб леза підвісів показували нуль для моменту, коли кулі знаходяться в спокої. Затягнути гайки 20. Відпустити болти 18,19. Встановити електромагніт на вибраній відстані від початку шкали і на такій висоті, щоб його вісь була продовженням риски на кулі. Болти 18,19 затягнути.

6. Натиснути кнопку "СЕТЬ", потім "ПУСК". Гвинтом 23 відрегулювати силу електромагніта, щоб він утримував кулю.

7. Праву кулю відвести в бік електромагніта і заблокувати в цьому положенні, ліву кулю встановити нерухомо в положенні рівноваги. Прочитати значення кута  $\alpha_1$ .

8. Натиснути кнопку "СБРОС", далі "ПУСК". Після зіткнення куль відмітити, на які кути  $\alpha_1'$  і  $\alpha_2'$  або  $\alpha_2''$  відійдуть кулі. Записати їх значення та тривалості  $t$  зіткнення куль. Вимірювання провести не менше 10 разів.

9. Виміряти за допомогою масштабної лінійки довжину підвісок (між стержнем верхнього кронштейна і центром кулі). Виміри повторити 10 разів.

10. На терезах, які забезпечують точність вимірювання  $\pm 0.1$  г, зважити кулі разом з підвісками і знайти  $m_1$  і  $m_2$ . Всі дані занести в таблицю.

11. За формулами (15.1), (15.3) або (15.6) визначити імпульс куль до і після удару. За формулою (15.8) оцінити коефіцієнт відновлення.

12. Перевірити виконання закону збереження енергії при непружному і при пружному зіткненні куль.

13. Обробку результатів прямих вимірювань провести за схемою №1, непрямих за схемою № 4. Представити кінцеві результати, проаналізувати їх та зробити висновки.

## **VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ**

1. Дати визначення імпульсу та кінетичній і потенціальній енергіям.
2. Що ми називаємо замкнутою (ізолюваною) системою? Що таке консервативні сили?
3. Сформулювати відомі вам закони збереження в механіці.
4. Пояснити (прокоментувати) процес перетворення енергії при дослідженні зіткнення куль на лабораторній установці.
5. Чи завжди виконується закон збереження механічної енергії?
6. Чи завжди виконується закон збереження імпульсу? Чому?
7. Яку інформацію несе коефіцієнт відновлення?
8. Які зіткнення називаються пружними? Які сили обумовлюють наявність пружних зіткнень?
9. Які зіткнення характеризуються як удар? Наведіть приклади. Що називають центральним і нецентральним ударом?
10. Вивести формулу 15.4 для визначення швидкості кулі у момент зіткнення.
11. Які сили зумовлюють рух куль в цій лабораторній установці?
12. Записати формулу для обчислення похибки непрямих вимірювань (для імпульсу, коефіцієнту відновлення).

## Лабораторна робота № 16 ВИВЧЕННЯ КОЛИВАНЬ ЗВ'ЯЗАНИХ СИСТЕМ

**I. МЕТА РОБОТИ:** ознайомлення студентів із зв'язаними системами, нормальними коливаннями, явищем резонансу у зв'язаних системах.

**II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ:** установка РМ-10, важки, штатив з масштабною лінійкою.

**III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ,** знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

1. Гармонічні коливання. Рівняння руху для гармонічних коливань пружинного маятника та математичного маятника. Формули для частот цих коливань.
2. Складання гармонічних коливань однакової частоти. Метод векторних діаграм. Биття.
3. Поняття про ступені вільності. Коливання систем з багатьма ступенями вільності. Нормальні коливання.
4. Загасаючі коливання.
5. Вимушені коливання. Резонанс.

### IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Найпростіші коливання – це гармонічні коливання. Гармонічними коливаннями називають коливання, що відбуваються за законом синуса або косинуса. Рівняння руху для таких коливань записується:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \text{ або } y = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (16.1)$$

де  $A$  – амплітуда коливань,  $\omega$  – частота,  $\varphi$  – фаза. Гармонічні коливання здійснюють пружинний маятник і математичний маятник. Але це відбувається лише при невеликих амплітудах відхилення, при яких можна вважати, що повертаючі сили пропорційні величині відхилення  $x$  коливної точки від положення рівноваги. Тіло, яке здійснює гармонічні коливання, називають лінійним або гармонічним осцилятором.

Рівняння руху (II закон Ньютона) записується для пружинного маятника так:

$$m\ddot{x} = -kx \text{ або } \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0; \quad (16.2)$$

для математичного маятника:

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{\ell}x \text{ або } \ddot{x} + \frac{g}{\ell}x = 0. \quad (16.3)$$

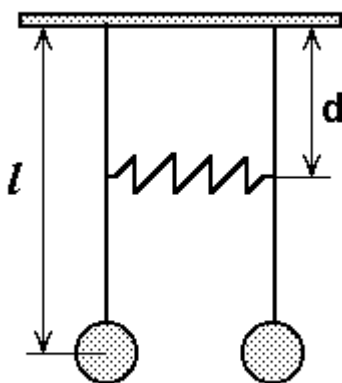
Власні частоти гармонічних коливань відповідно мають вигляд :

$$\omega_{\text{ПМ}} = \sqrt{k/m}, \quad (16.4)$$

$$\omega_{\text{ММ}} = \sqrt{g/\ell}. \quad (16.5)$$

Якщо система має декілька ступенів вільності, то при малих відхиленнях від положення рівноваги можливі одночасно коливання по усіх ступенях вільності.

Якщо коливання, що відповідають кожному ступеню вільності, незалежні один від одного, тобто не можуть обмінюватися один з другим енергією, то розгляд руху системи з декількома ступенями вільності є чисто кінематична задача: знаючи рух по кожному ступеню вільності, треба провести кінематичне складання рухів. В результаті цього тіло описує траєкторію, яка називається фігурою Ліссажу.



**Рис. 16.1**

Зв'язаною системою називається система з багатьма ступенями вільності, між якими є зв'язки, що забезпечують можливість обміну енергією між різними ступенями вільності. Прикладом такої системи є два ідентичні маятники, зв'язані пружиною (рис. 16.1). Для цих маятників можлива перекачка енергії від одного маятника до другого і досить складний рух. Якщо маятники закріплені так, що вони можуть коливатись лише у площині маятників,

то ця система має два ступені вільності. Незважаючи на складність руху двох зв'язаних маятників, він завжди може бути поданий як суперпозиція двох гармонічних коливань, частоти яких називаються нормальними частотами зв'язаної системи. Число нормальних частот рівне числу ступенів вільності. Нормальними коливаннями для розглядуваної системи є однофазні і протифазні коливання. Однофазними коливаннями називають такі коливання зв'язаної системи, коли маятники у початковий момент відхилені в одну сторону і на однаковий кут. При протифазних коливаннях маятники відхилені в протилежні сторони, але на однаковий кут.

## **V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ**

Лабораторна установка (рис.16.2) складається з двох зв'язаних пружинами 10, 11 маятників 8, 9, кожен з яких коливається у своїй

вертикальній площині. Для підтримки незгасаючих коливань використовується важіль зовнішньої сили 7, зв'язаний з електричним двигуном. Установка має індикатор часу 17 та індикатор кількості коливань 18. На передній панелі є кнопка вимикача струму "ПУСК" і кнопка стирання показів шкали 19, кнопка "СТОП", вмикач двигуна 15, регулятор числа обертів двигуна 16, індикатор роботи двигуна.

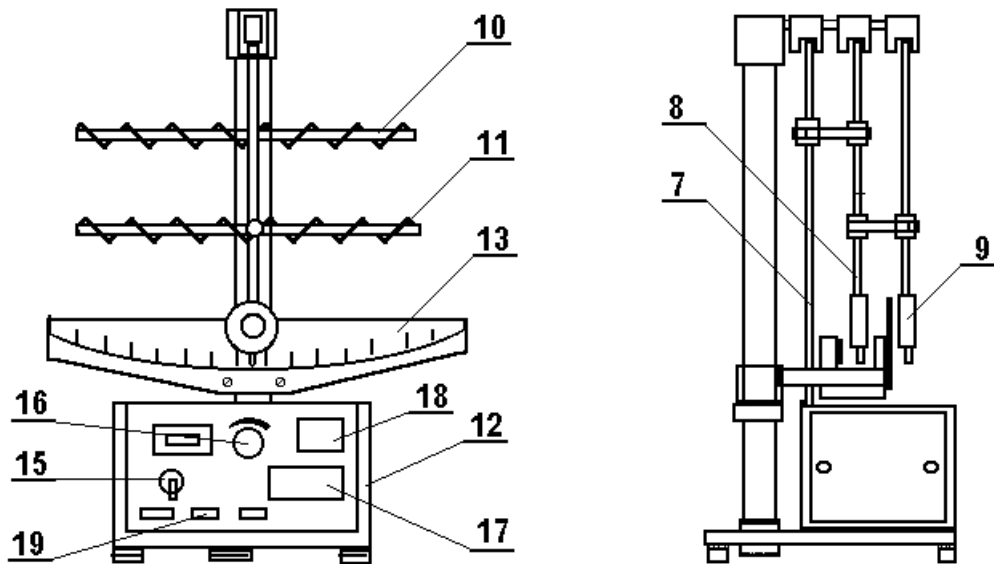


Рис. 6.2

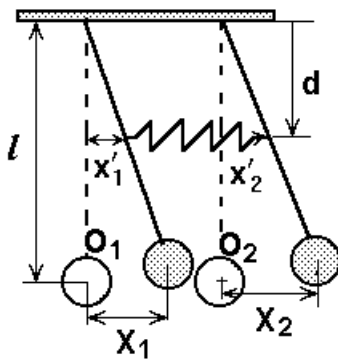


Рис. 6.3

Система маятників установки має два ступені вільності. При малих коливаннях можна знехтувати вертикальними зміщеннями точок маятників і розглядати їх рух вздовж однієї горизонтальної прямої. Положення точок, що коливаються (центри мас маятників) характеризуються зміщеннями  $x_1$  та  $x_2$  від своїх положень рівноваги, позначених буквами  $O_1$  та  $O_2$  на рис.16.3. Коли точки знаходяться одночасно в положенні рівноваги, пружина, що їх з'єднує, не деформується і тому не

діє на точки з якимись силами.

Рівняння руху маятників, без врахування їх зв'язку через пружину або у випадку, коли пружина не деформується, мають вигляд:

$$\ddot{x}_1 + \frac{g}{\ell} x_1 = 0; \quad \ddot{x}_2 + \frac{g}{\ell} x_2 = 0. \quad (16.6)$$

При деформації пружини виникають сили  $F$ , пропорційні її видовженню або стиску (закон Гука), і тому рівняння (16.6) вже не дорівнюють 0, а прирівнюються до цієї зовнішньої пружної сили. У випадку, якщо б пружина була прикріплена до центра мас маятників, то видовження пружини було б  $\Delta x = x_2 - x_1$  (див. рис.16.3) і тому сили, що діють на маятники, рівні:

$$F_1 = -F_2 = k(x_1 - x_2), \quad (16.7)$$

де  $k$  – коефіцієнт жорсткості пружини. Тому рівняння руху з врахуванням сил зв'язку через деформацію пружини мають вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{g}{\ell} x_1 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2) = 0, \\ \ddot{x}_2 + \frac{g}{\ell} x_2 - \frac{k}{m}(x_1 - x_2) = 0, \end{cases} \quad (16.8)$$

де  $m$  однакова маса маятників, зосереджена в центрі мас. Складаючи і віднімаючи рівняння системи (16.8), одержуємо два нових рівняння, що описують нормальні гармонічні коливання:

$$\frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} + \frac{g}{\ell}(x_1 + x_2) = 0; \quad (16.9)$$

$$\frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} + \frac{g}{\ell}(x_1 - x_2) + \frac{2k}{m}(x_1 - x_2) = 0.$$

Як видно із системи рівнянь (16.9), частоти однофазних і протифазних нормальних коливань задаються відповідно виразами:

$$\omega_1 = \sqrt{g/\ell}, \quad (16.10)$$

$$\omega_2 = \sqrt{g/\ell + 2k/m}. \quad (16.11)$$

У виводі, приведені вище, допускалося, що пружина з'єднує центри мас маятників. Якщо вона розмішена на віддалі  $d < \ell$  від точки підвісу (тобто так, як і зображено на рис. 16.3), то частота протифазних коливань  $\omega_2$  задається виразом:

$$\omega_2 = \left( \frac{g}{\ell} + \frac{2k d}{m \ell} \right)^{1/2}. \quad (16.12)$$

Це зумовлено тим, що видовження пружини стає іншим, а саме  $\Delta x' = (x'_1 - x'_2)$  (рис.16.3). Рівняння нормальних коливань (16.9) тоді перепишуться так:

$$\frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} + \frac{g}{\ell}(x_1 + x_2) = 0;$$

$$\frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} + \frac{g}{\ell}(x_1 - x_2) + \frac{2k}{m}(x_1' - x_2') = 0; \quad (16.13)$$

Через те, що  $x_1'/x_1 = d/\ell$ ,  $x_2'/x_2 = d/\ell$  (із подібності трикутників (рис.16.3)), то

$$x_1' - x_2' = \frac{d}{\ell}(x_1 - x_2). \quad (16.14)$$

Підставляючи (16.14) у друге рівняння системи (16.13) і порівнюючи одержане рівняння з диференціальним рівнянням для гармонічних коливань, одержуємо рівність (16.12). Формули (16.10) і (16.12) є кінцеві робочі формули. За цими формулами можуть бути розраховані однофазні і протифазні коливання, які, у свою чергу, можуть бути одержані експериментально.

## VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

### **Завдання 1. Визначення коефіцієнта пружності пружини.**

1. Підвісити зняту пружину на штативі. Зафіксувати на шкалі нижній кінець пружини. Підвісити за нього заданий вантаж і виміряти видовження пружини  $\Delta x$ .

2. На лабораторних терезах зважити вантаж і знайти його масу.

3. Пункт 1 і 2 повторити ще для двох вантажів.

4. Для кожного досліду обчислити  $k$  за формулою

$$k = \frac{mg}{\Delta x}. \quad (16.15)$$

5. Методом приведення до прямих вимірювань знайти  $k$  і довірчий інтервал  $\Delta k$  за схемою № 1 обробки результатів вимірювань.

Можна користуватись і одним вантажем, повторюючи дослід 3-5 разів. Так як вимірювання у цьому випадку рівноточні, то середнє значення коефіцієнта пружності і довірчий інтервал знаходиться за схемою № 4 обробки непрямих вимірювань.

6. Результати вимірювань і обчислень занести у раціонально вибрану таблицю.

### **Завдання 2. Визначення частоти однофазних коливань.**

1. Зняти пружини 10, 11, які з'єднують тягу зовнішньої сили з маятниками, маятники з'єднати пружиною, з відомою жорсткістю  $k$ .

2. Обидва маятники відхилити на кут  $\alpha=15^\circ$  і відпустити. Коливання при цьому відбуваються без деформації пружини. Зафіксувати час десяти коливань ( $n=10$ ).

3. Дослід повторити не менше 5 разів.
4. За формулою

$$\bar{\omega}'_1 = \frac{2\pi n}{\bar{t}} \quad (16.16)$$

знайти середнє значення частоти однофазних коливань. Довірчий інтервал  $\Delta\omega'_1$  оцінити за схемою № 4 для непрямих вимірювань, бо ці вимірювання є рівноточними.

5. Виміряти довжину маятника  $\ell$ , при цьому врахувати, що віддаль між нарізами на спицях становить 5 мм з похибкою 0,1 мм.

6. Результати вимірювань і обчислень занести в таблицю.

7. За формулою (16.10) обчислити “теоретичне” значення частоти  $\omega_1$ , оцінити похибку  $\Delta\omega_1$  за схемою № 4. Порівняти значення частот однофазних коливань, обчислених за формулами (16.10) і (16.16).

8. Зробити висновки про гармонічність цих коливань.

### **Завдання 3. Визначення частоти протифазних коливань.**

1. Пункт 1 завдання 2 залишити без змін.

2. Відхилити маятники (спиці з вантажами) у протилежні сторони так, щоб кут між ними дорівнював  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \approx 15^\circ + 15^\circ$ , де  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  – кути між спицями і вертикаллю. Відпустити їх і зафіксувати час  $n=10$  коливань.

3. Дослід повторити 5 разів.

4. За формулою  $\bar{\omega}'_2 = \frac{2\pi n}{\bar{t}_2}$  знайти середню частоту  $\bar{\omega}'_2$ .

Довірчий інтервал оцінити за схемою № 4 для непрямих вимірювань. Результати вимірювань і обчислень занести в таблицю.

5. Виміряти довжину  $d$ , при цьому врахувати, що віддаль між нарізами на спицях становить 5 мм з похибкою 0,1 мм.

6. За формулою (16.12) обчислити  $\omega_2$ . Довірчий інтервал оцінити за схемою № 4. Порівняти одержані значення частот протифазних коливань, одержаних за формулою (16.12) і експериментально.

7. Зробити висновки про гармонічність цих коливань.

### **Завдання 4. Визначення частоти биття.**

1. Визначити частоту биття за формулою

$$\omega = \omega_1 - \omega_2. \quad (16.17)$$

2. Для того, щоб спостерігати биття, потрібно один з маятників вивести з положення рівноваги, а другий придержати у положенні рівноваги. Далі надати маятникам можливість вільно коливатись.

3. Безпосередньо виміряти період биття, зафіксувавши секундоміром час між двома послідовними максимальними відхиленнями одного із маятників або тривалість декількох таких періодів, обчислити циклічну частоту  $\omega_e$  та порівняти її з попередньо одержаним значенням  $\omega$  за формулою (16.17).

#### **Завдання 5. Спостереження резонансу.**

1. Приєднати до маятників пружини 10, 11.
2. Ввімкнути вмикач двигуна 15.
3. Регулятором 16 збільшувати частоту зовнішньої сили. При різкому зростанні амплітуди в системі спостерігайте резонанс.
4. Записати кінцевий результат і зробити висновки.

### **VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ**

1. Як зв'язані між собою частота, період і циклічна частота коливання?
2. Запишіть формули для обчислення періодів коливань пружинного, математичного і фізичного маятників.
3. Що називають зв'язаними коливними системами?
4. Що таке нормальні частоти коливань?
5. Що розуміють під терміном „биття”?
6. Нарисуйте схематично залежність від часу відхилення коливної точки при наявності биття.
7. Як експериментально і теоретично знаходиться період коливання маятника, частота однофазних і протифазних коливань та биття?
8. Дайте визначення резонансу. Поясніть амплітудно-частотну залежність. Як на неї впливає наявність тертя в коливній системі?
9. Що розуміють під добротністю коливної системи?
10. Записати формули для обчислення похибки частоти однофазних і протифазних коливань.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 17 РУХ ТІЛ ПРИ НАЯВНОСТІ АЕРОДИНАМІЧНИХ СИЛ ОПОРУ

**I. МЕТА РОБОТИ:** вивчення руху тіл при наявності лобового опору; експериментальне визначення коефіцієнта моменту сили лобового опору пластинки та максимального значення моменту цієї сили.

**II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ І МАТЕРІАЛИ:** установка, секундомір, міліметровий папір.

**III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ,** знання яких необхідне для виконання роботи.

1. Шість рівнянь руху твердого тіла (для поступального і обертового руху).
2. Плоский рух. Два рівняння плоского руху твердого тіла: рівняння руху центру мас і рівняння моментів.
3. Зв'язок між кутковими і лінійними характеристиками обертового руху. Таблиця аналогій.
4. Лобовий опір тіл у потоці газу або рідини.
5. Число Рейнольдса. Принцип подібності.
6. Обтікання тіл. Підймальна сила. Ефект Магнуса.

### IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

При русі тіл у повітрі і у рідині на них діє сила опору. Складова сили опору вздовж напрямку потоку називається лобовим опором і задається формулою

$$F_{\text{опор}} = \Psi \frac{\rho v^2}{2} S \quad (17.1)$$

де  $\Psi$  – безрозмірний коефіцієнт лобового опору,  $S$  – площа перерізу тіла,  $v$  – швидкість потоку,  $\rho$  – густина. При великих швидкостях  $F_{\text{опору}} \sim v^2$  і  $\Psi$  від швидкості не залежить. При малих швидкостях сила опору, як і сила “рідкого” тертя, пропорційна швидкості ( $F_{\text{опору}} \sim v$ ), тоді  $\Psi = b/v$  (тут коефіцієнт пропорційності  $b$  має розмірність швидкості). При малих швидкостях потоку має місце ламінарна течія. При ламінарній течії вектор швидкості у довільній точці трубки не має складових у напрямку, перпендикулярному до осі трубки. Трубною течією називається циліндрична поверхня, утворена лініями течії як твірними. Лінії течії – це траєкторії рухомих частинок рідини чи газу.

Відомо, що для ламінарної течії коефіцієнт опору  $\Psi$  зв'язаний з числом Рейнольдса  $R_e$  співвідношенням:

$$\Psi = \frac{16}{R_e}, \quad \text{де} \quad R_e = \frac{\rho r v}{\eta}, \quad (17.2)$$

$\rho$  – густина рідини або газу,  $r$  – радіус трубки, по якій тече рідина або газ, або певний розмір тіла, що омивається потоком,  $v$  – швидкість потоку,  $\eta$  – коефіцієнт в'язкості рідини чи газу. З формули (17.2) видно, що  $\Psi \sim 1/v$ .

При обертovому русі, як відомо, лінійним характеристикам руху (переміщенню, швидкості, прискоренню) зіставляють кутові характеристики, масі зіставляється момент інерції, силі – момент сили. Продовжуючи аналогії, можна вважати, що так як сила лобового опору при малих швидкостях пропорційна швидкості, то момент цієї сили пропорційний кутовій швидкості:

$$M_{\text{лоб.опору}} = C\omega. \quad (17.3)$$

## V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТУ

Схема установки для дослідження лобового опору приведена на рис.17.1. На горизонтальній осі може обертатися стержень 1 з закріпленими на ньому пластинкою 2 і регулюючими циліндриками 3.

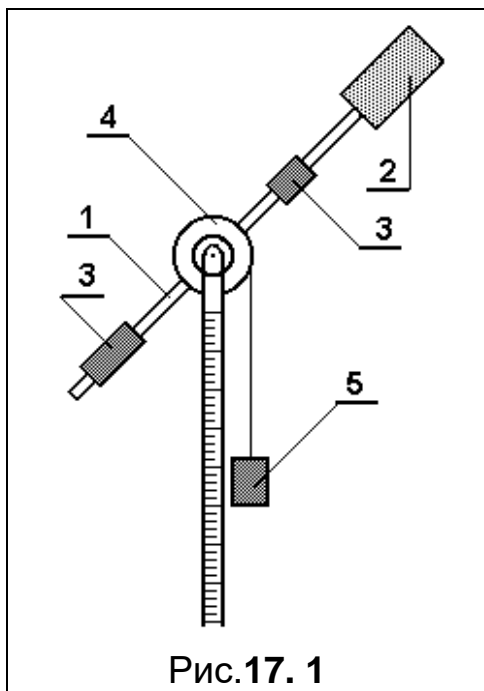


Рис.17. 1

За допомогою циліндриків 3 стержень врівноважується на осі. На тій же осі закріплено шків (диск) 4, на який намотана нитка, до вільного кінця якої підвішений важок 5. Падаючи, важок обертає шків і стержень з пластинкою. Крім диска 4, на осі закріплений також другий диск (на малюнку не показаний), радіус якого менший за радіус першого. Це дозволяє міняти швидкість обертання пластинки, користуючись лише одним важком.

Повертаючи стержень 1 навколо його поперечної осі, пластинка 2 може бути встановлена і закріплена так, що вектор лінійної швидкості її точок при русі пластинки під дією важка 5 буде нормальний або паралельний до площини пластини. В першому випадку лобовий опір буде великий, а в другому положенні

він значно менший. Нехтуючи силами тертя у підшипниках, силами тертя важка і стержня об повітря, рівняння руху системи можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} ma &= mg - F_H, \\ J \frac{d\omega}{dt} &= F_H r - C\omega \\ a &= \frac{d\omega}{dt} r \end{aligned} \quad (17.4)$$

де  $m$  – маса важка,  $J$  – момент інерції стержня з закріпленими на ньому циліндриками і пластинкою,  $F_H$  – сила натягу нитки,  $r$  – радіус диска 4,  $a$  – прискорення, з яким падає важок 5,  $g$  – прискорення сили тяжіння,  $\frac{d\omega}{dt}$  – кутове прискорення,  $\omega$  – кутова швидкість,  $C$  – коефіцієнт моменту сили лобового опору пластинки.

З рівняння (17.4) для кутового прискорення одержуємо:

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon_0 - B\omega, \quad (17.5)$$

де

$$\varepsilon_0 = \frac{mgr}{mr^2 + J}, \quad B = \frac{C}{mr^2 + J}. \quad (17.6)$$

З рівняння (17.5) слідує, що прискорення (як кутове, так і важка 5) залежить від швидкості. Якщо поверхня пластинки паралельна площині обертання, то припускаючи  $C=0$ , із рівнянь (17.6) і (17.5) слідує, що обертання пластинки відбувається з постійним кутовим прискоренням

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon_0 = \text{const.} \quad (17.7)$$

Знаючи віддаль  $h_0$ , яку проходить важок 5 за час  $t_0$ , можна вирахувати кутове прискорення

$$\varepsilon_0 = \frac{2h_0}{rt_0^2}. \quad (17.8)$$

У загальному випадку (тобто коли  $C \neq 0$ ) кутова швидкість системи з часом збільшується, наближаючись до деякої найбільшої, постійної в часі величини  $\omega_{\text{max}}$ . Величина цієї швидкості може бути одержана із умови, що при досягненні цієї швидкості кутове прискорення стане рівне нулю.

Тоді з рівняння (17.5) маємо:

$$\omega_{\max} = \frac{\varepsilon_0}{B}. \quad (17.9)$$

Максимальна швидкість, з якою опускається важок 5, буде рівна

$$v_{\max} = \omega \cdot r = \frac{\varepsilon_0}{B} r \quad (17.10)$$

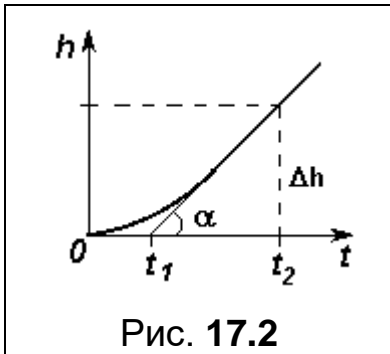


Рис. 17.2

Припустимо, що експериментально одержана залежність віддалі  $h$ , яку проходить важок, від часу  $t$  має вигляд, представлений на рис. 17.2. Тангенс кута нахилу  $h(t)$  лінійної ділянки кривої дає приблизне значення максимальної швидкості опускання важка

$$v_{\max} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta h}{t_2 - t_1}. \quad (17.11)$$

Згідно графіка  $h_2 - h_1 = \Delta h = h$ . Із рівняння (17.11) та (17.10) визначимо

$$B = r \frac{\varepsilon_0}{v_{\max}} = r \frac{\varepsilon_0}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{r \varepsilon_0 (t_2 - t_1)}{h}. \quad (17.12)$$

Коефіцієнт опору  $C$  тоді записується (див. 17.6)

$$C = B(mr^2 + J) = r \frac{\varepsilon_0}{v_{\max}} (mr^2 + J). \quad (17.13)$$

Використовуючи формулу (17.6) для  $\varepsilon_0$ , формулу (17.13) перепишемо так:

$$C = \frac{mgr^2}{v_{\max}}. \quad (17.14)$$

Формула (17.14) – кінцева робоча формула. Крім коефіцієнта моменту лобового опору  $C$ , в роботі обчислюється кутове прискорення  $\varepsilon_0$  для початкового руху пластини за формулою (17.8), максимальний момент сили лобового опору  $M_{\max} = C\omega_{\max}$  та момент інерції  $J$  за формулою:

$$J = \frac{mgr - \varepsilon_0 mr^2}{\varepsilon_0}. \quad (17.15)$$

## VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Встановлюють пластинку 2 (див. рис.17.1) так, щоб її лобовий опір був максимальним. Перевіряють, чи зрівноважений стержень на осі обертання. Старанно, виток до витка, намотують нитку на диск малого радіуса  $r_1$ . Нижня частина важка 5 повинна бути на одному рівні з нульовою поділкою шкали на штативі.

2. За допомогою секундоміра визначають час  $t$  опускання важка з висоти  $h$ . Для кожної висоти  $h$  вимірювання проводяться 5 разів.

3. Пластинку встановлюють так, щоб її лобовий опір був мінімальним. Аналогічно, як в п.2 вимірюють час  $t_0$ , протягом якого важок проходить задані відстані  $h_0$  (для кожної висоти вимірювання повторюються 5 разів).

4. Всі вказані в п.2 і п.3 виміри повторюють, намотуючи нитку на диск великого радіуса  $r_2$ .

5. Результати вимірювань за п.2-4 заносять у таблицю.

6. На міліметровому папері, в одному масштабі будують графіки кривих  $h=f(t)$ , відкладаючи по осі абсцис час  $t$ , а по осі ординат – віддаль  $h$  ( $t$  – середній час проходження даної висоти). Графіки будують для випадку максимального лобового опору як при розкручуванні диска великого радіуса так і при опусканні важка з малого диска. На графіках проставляють довірчі інтервали  $\Delta t$  (схема №1).

7. Обчислюють параметри рівнянь (17.4):

а) перевіряють наскільки мінімальний лобовий опір близький до нуля (тобто умову виконання формул (17.7) і (17.8)). Для цього будують графік залежності  $h_0$  від  $t_0$  – це має бути квадратична залежність, а також за тими ж даними будують графік в координатах  $\sqrt{h_0}$  від  $t_0$  – це має бути лінійна залежність. Графіки будують для обох дисків з відповідними похибками  $\Delta h$  і  $\Delta t$  визначення висоти і часу (“вусами”). Роблять висновки про можливість використання всіх або лише частини даних в подальших обчисленнях.

б) використовуючи значення  $h_0$  і середнє  $t_0$  (п'яти або більше вимірювань), за формулою (17.8) обчислюють для кожної висоти  $h_{0i}$  величину  $\varepsilon_0$  (кутове прискорення). Набір  $\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}, \dots$ , одержаних для різних висот  $h_{01}, h_{02}, \dots$ , використовують, як прямі вимірювання для знаходження кінцевого значення  $\varepsilon_0$  і його довірчого інтервалу  $\Delta\varepsilon_0$  за схемою №1 обробки результатів прямих вимірювань;

в) із графіка  $h = f(t)$  визначають  $v_{\max} = \operatorname{tg}\alpha$  (рис. 17.2 і формула 17.11); знаходять значення  $B$ .

8. За формулами (17.14) і (17.15) обчислюють  $C$  та  $J$ .

9. Знаходять максимальну кутову швидкість  $\omega_{\max}$  (для обох радіусів шківів) та обчислюють момент сили лобового опору.

**УВАГА.** Величини  $\bar{\varepsilon}_0$ ,  $v_{\max}$ ,  $C$ ,  $J$ ,  $M_{\max}$  вираховують для обох випадків, а саме: при опусканні важка з диска малого радіуса  $r_1$  і при опусканні важка з диска радіуса  $r_2$ . Одержані моменти інерції  $J_1$  та  $J_2$  повинні бути (у межах похибки) рівними.

10. Результати обчислень заносять у раціонально вибрану таблицю.

11. Оцінюють похибки. (Як оцінити похибку  $\varepsilon_0$  сказано в п.7).

Для того, щоб знайти похибку у визначенні  $C$ , перепишемо його вираз (17.14) так:

$$C = \frac{mgr^2(t_2 - t_1)}{h}, \quad (17.16)$$

де  $h$ ,  $t_2 - t_1$  – це катети трикутника (рис.17.2). Довірчий інтервал  $\Delta C$  знаходиться через довірчі інтервали величин  $r$ ,  $t$ ,  $h$ , одержаних за допомогою прямих вимірювань:

$$\left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 = \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \frac{(\Delta t_2)^2 + (\Delta t_1)^2}{(t_2 - t_1)^2}. \quad (17.17)$$

Довірчі інтервали:  $\Delta h = \Delta h_{\text{сист}} = t_{\infty\alpha} \delta / 3$  – визначається точністю  $\delta$  шкали лінійки,  $\Delta m$  – аналогічно визначається точністю визначення маси важка,  $\Delta r = \sqrt{(\Delta r_{\text{сист}})^2 + (t_{\text{на}} S_r)^2}$ ,  $\Delta t = \sqrt{(\Delta t_{\text{сист}})^2 + (t_{\text{на}} S_t)^2}$ , де  $\Delta r_{\text{сист}}$  і  $\Delta t_{\text{сист}}$  – визначаються відповідно точністю штангенциркуля і секундоміра,  $t_{\text{на}}$  – коефіцієнт Стьюдента.

Похибка визначення моменту інерції  $J$  знаходиться за формулою:

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \Delta x_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \Delta x_2^2 + \dots},$$

де функція  $y = J$ , а аргументи  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  рівні відповідно  $m$ ,  $r$ ,  $\varepsilon_0$ : тобто  $J = f(m, r, \varepsilon_0)$  – формула (17.15).

12. Записати кінцеві результати і зробити висновки.

## VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке лобовий опір? Чи залежить він від швидкості тіла? Запишіть формулу і поясніть її.
2. Які сили та моменти сил діють при роботі дослідної установки?
3. Як зв'язані між собою лінійні і кутові характеристики руху?
4. Який фізичний зміст має величина  $\varepsilon_0$  в рівнянні (17.6) ?
5. Запишіть формулу, за якою в даній роботі визначається кутове прискорення. Чи залежить воно від радіуса диска? Чому?
6. Яка розмірність коефіцієнта  $C$  в рівнянні (17.5)?
7. Поясніть ефект Магнуса.
8. Чи залежить значення лобового опору від форми тіла?
9. Вказати формулу для обчислення лобового опору:  
а)  $F = J\varepsilon C_x$ ; б)  $F = C_x \rho v S$ ; в)  $F = C_x m v^2 S$ ; г)  $F = C_x \rho v^2 S$ .  
Яка із величин в цій формулі характеризує форму тіла?
10. Яке із тіл – площина, циліндр, куля, тіло у формі краплі – має найменший лобовий опір при однаковому поперечному перерізі? Чому?
10. Яку силу називають підіймальною? Поясніть як вона виникає.
11. Число Рейнольдса рівне:  
а)  $R_e = \frac{vl\rho}{\eta}$ ; б)  $R_e = \frac{vS\rho}{\eta}$ ; в)  $R_e = \frac{vl\eta}{\rho}$ ; г)  $R_e = \frac{vS\eta}{\rho}$ ;  
 $\rho$  і  $\eta$  – відповідно густина і в'язкість газу або рідини,  $l$  – характерний розмір тіла. Який фізичний зміст числа  $R_e$ .
12. Поясніть суть закону механічної подібності при обтіканні тіл.
13. Що називають ламінарною (турбулентною) течією?

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №18 ВИВЧЕННЯ ПРЕЦЕСІЇ ВІЛЬНОГО ГІРОСКОПА

**I. МЕТА РОБОТИ:** ознайомитися з особливостями руху гіроскопа, дослідити закон збереження моменту імпульсу та визначити кутову швидкість прецесії.

**II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ ТА МАТЕРІАЛИ:** гіроскоп РМ-10.

**III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ,** знання яких необхідне для виконання роботи.

1. Момент сили та момент імпульсу. Основне рівняння обертового руху твердого тіла.
2. Рух твердого тіла, закріпленого в точці. Вільні осі. Кути Ейлера. Рівняння Ейлера.
3. Гіроскоп. Прецесія і нутація гіроскопа.
4. Гіроскопічні сили. Застосування гіроскопа.

### IV. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.

Гіроскопом називають будь-яке тверде тіло обертання, яке швидко обертається навколо своєї осі симетрії. Розглянемо коротко елементарну теорію гіроскопа, який складається із диска, що може обертатися навколо осі  $O_1O_2$ , та протизваги  $K$ , як показано на рис. 18.1. Вісь  $O_1O_2$  шарнірно закріплена в точці  $O_1$ , а протизвага може переміщуватися вздовж цієї осі. Розташуємо протизвагу  $K$  так, щоб т. $O_1$  була центром ваги, а гіроскоп знаходився в стані байдужої рівноваги. Для цього випадку  $P_1 \cdot l_1 = P_2 \cdot l_2$ , а отже результуючий момент сили  $M=0$ .

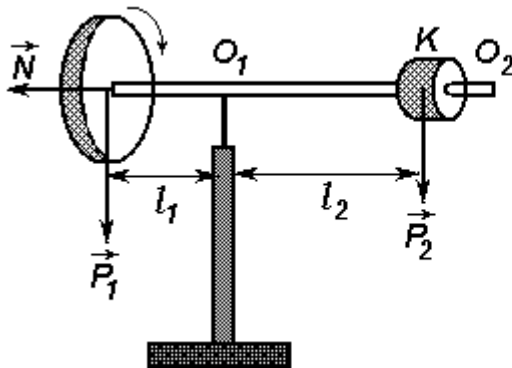


Рис. 18.1

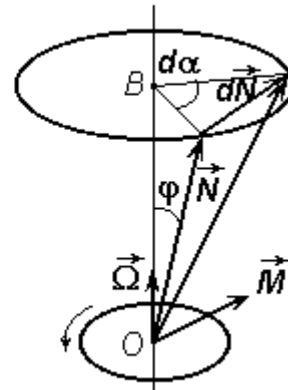


Рис. 18.2

Приведемо диск в швидке обертання навколо горизонтальної осі з кутовою швидкістю  $\omega$ . Згідно закону динаміки обертового руху для цього випадку

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = 0; \quad \vec{N} = \text{const}, \quad (18.1)$$

де  $\vec{N} = J\vec{\omega}$  момент імпульсу диска.  $J$  – момент інерції диска – постійна величина, отже гіроскоп обертається з  $\omega = \text{const}$ . Напрямок  $\vec{N}$  та  $J\vec{\omega}$  співпадають і гіроскоп зберігає в цьому випадку положення своєї осі в просторі.

Перемістимо противагу вправо. При цьому центр ваги зміститься і до осі гіроскопа буде прикладена сила

$$\vec{F} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2, \quad (18.2)$$

яка викличе вже не рівний нулю момент сили

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (18.3)$$

де  $\vec{r}$  – радіус-вектор, проведений в т.  $O_1$  від точки прикладання сили  $\vec{F}$ . Вектор  $\vec{M}$ , з числовим значенням моменту сили (модулем)  $M = (P_1 + P_2) \cdot r \sin \varphi$ , ортогональний (перпендикулярний) вектору  $\vec{N}$ , де  $\varphi$  – кут відхилення осі гіроскопа, що виникає під дією сили  $\vec{F}$  (див. рис.18.2). В цьому випадку закон динаміки обертового руху запишеться у вигляді:

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M} \quad \text{або} \quad d\vec{N} = \vec{M} \cdot dt \quad (18.4)$$

Отже, виникає зміна моменту імпульсу  $d\vec{N}$ , яка співпадає за напрямом з моментом сили  $\vec{M}$ . Результуючий момент імпульсу стане рівний:

$$\vec{N}_1 = \vec{N} + d\vec{N}. \quad (18.5)$$

Це означає, що вісь гіроскопа за час  $dt$  повернеться на кут  $d\alpha$  і змінить своє положення, при цьому зміниться і положення  $d\vec{N}$ . Отже, вісь гіроскопа буде обертатися з деякою кутовою швидкістю  $\vec{\Omega}$ , описуючи в просторі конус. Кінець вектора  $\vec{N}$  описує в горизонтальній площині уявне коло деякого радіусу  $R$  (рис.18.2). Такий рух називається прецесією, з кутовою швидкістю прецесії  $\vec{\Omega}$ , яка визначається формулою:

$$\vec{\Omega} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt}. \quad (18.6)$$

## V. МЕТОДИКА ЕКСПЕРИМЕНТА

Визначимо кут  $d\alpha$  (або зміну кута за дуже малий час  $dt$ ), виходячи з рис.18.2, та враховуючи (18.4) і вираз для модуля  $\vec{M}$  ( $d\alpha$  малий кут, тому  $\sin d\alpha \approx d\alpha$ ):

$$d\alpha = \frac{dN}{R} = \frac{dN}{N \sin \varphi} = \frac{M dt}{N \sin \varphi} = \frac{(P_1 + P_2) \cdot r \sin \varphi \cdot dt}{N \sin \varphi}. \quad (18.7)$$

Тоді

$$\Omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{(P_1 + P_2) \cdot r}{N} = \frac{(P_1 + P_2) \cdot r}{J\omega}. \quad (18.6a)$$

У векторній формі між  $\vec{N}$ ,  $\vec{M}$  та  $\vec{\Omega}$  існує такий зв'язок:

$$\vec{\Omega} \times \vec{N} = \vec{M}. \quad (18.8)$$

При незмінній кутовій швидкості диска ( $\omega = \text{const}$ ), відношення

$$\frac{(P_1 + P_2) \cdot r_1}{\Omega_1} = \frac{(P_1 + P_2) \cdot r_2}{\Omega_2} = \frac{(P_1 + P_2) \cdot r_i}{\Omega_i} = \text{const}, \quad (18.9)$$

де  $r_i$  та  $\Omega_i$  можуть змінювати свої значення в досліді, причому  $r_i$  визначається із умови рівноваги (рівності моментів сил) за формулою

$$r_i = \frac{P_2(l'_2 - l_2)}{P_1 + P_2} = \frac{P_2 \Delta l_i}{P_1 + P_2}, \quad (18.10)$$

де  $\Delta l_i$  – зміна положення протизваги  $K$  по відношенню до т.О<sub>1</sub> (рис.18.1). Підставивши (18.10) у (18.9), одержується рівність, яка перевіряється при виконанні даної роботи

$$N = J\omega = \frac{P_2 \Delta l_1}{\Omega_1} = \frac{P_2 \Delta l_2}{\Omega_2} = \frac{P_2 \Delta l_3}{\Omega_3}, \quad (18.11)$$

Так як  $M=P\Delta l$ , враховуючи (18.8), при відомій частоті  $\omega$  обертання гіроскопа, знаходять момент інерції гіроскопа  $J$ :

$$N = \frac{P_2 \Delta l_i}{\Omega_i} = J\omega \Rightarrow J = \frac{N}{\omega}. \quad (18.12)$$

Принцип роботи гіроскопа ґрунтується на законах обертового руху твердих тіл навколо їх вільних осей. Гіроскоп РМ-10 показаний на рис.18.3. Основа 1 стоїть на ніжках, висоту яких можна регулювати. На основі закріплена колона 2, на ній – кронштейн 3, на якому закріплений фотоелектричний датчик №1 (4) і зовнішня втулка обертового з'єднувача 5, який, крім того, дозволяє гіроскопу обертатися навколо вертикальної осі і забезпечує живлення електричним струмом фотоелектричного датчик №2 (6) та електричного двигуна 7.

Електричний двигун вмонтований на кронштейні 8, що обмежує обертання в вертикальній площині. На валі двигуна закріплений диск 9, захищений екраном 10. Важіль 11, закріплений на корпусі двигуна, на нього нанесена метрична шкала. На важелі закріплений тягарець 12. Переміщенням тягарця вздовж важеля можна зрівноважити гіроскоп, зміщувати центр маси системи.

Оберти гіроскопа навколо вертикальної осі можна відрахувати на кутовій шкалі диска 13 з допомогою покажчика 14. На диску 14 через кожні  $5^\circ$  по колу нанесені отвори, сигнали які проходять через них, підраховуються фотоелектричним датчиком №1, передаються в блок керування та вимірювань РМ-10 (15), звідки зчитується інформація про кут обертання гіроскопа.

Диск 9 має отвори по колу, через які сигнали підраховуються фотоелектричним датчиком №2, передаються в блок керування та вимірювань, звідки одержується інформація про швидкість обертання електричного двигуна.

За допомогою гіроскопа перевіряють по спрощеному методу рівняння руху гіроскопа в просторовій системі координат без врахування нутації. Приймаються наступні напрями координат: вісь  $OX$  проходить через підшипник підвіски двигуна 8, вісь  $OY$  проходить перпендикулярно до осі  $OX$  і проходить через центр двигуна, вісь  $OZ$  проходить вздовж важеля 11, вісь двигуна та центр диска 9.

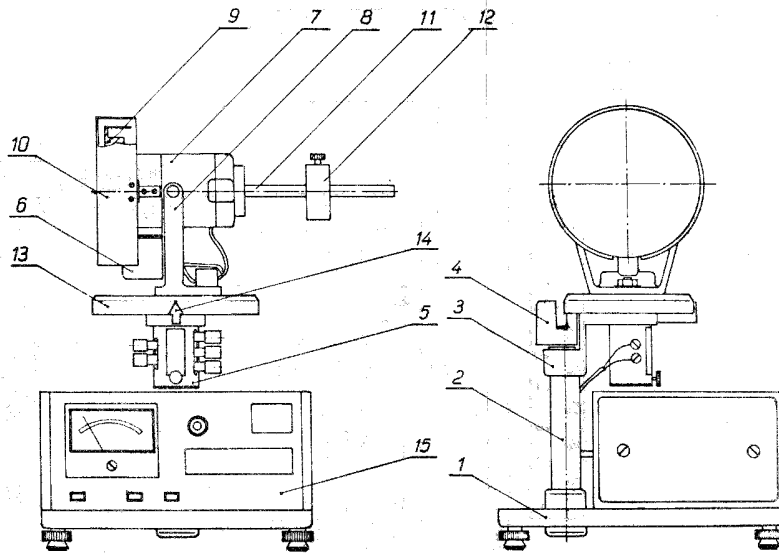


Рис. 18.3

## VI. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Прилад готовий для використання безпосередньо після ввімкнення в електричну мережу. Перед ввімкненням приладу необхідно перевірити чи зроблене заземлення, чи вирівняний прилад.

Ввімкнути прилад в електричну мережу. Натиснути кнопку “СЕТЬ” і пересвідчитися, що індикатори показують нуль і світяться лампочки фотоелектричних датчиків №1, №2. Ввімкнути живлення двигуна, плавно регулюючи потенціометром “РЕГ.СКОРОСТИ” перевірити, чи працює двигун, чи відхиляється стрілка покажчика швидкості обертів двигуна. Після цього приступають до вимірювань, необхідних для виконання лабораторної роботи в такій послідовності:

1. За допомогою тягарця, який переміщується вздовж важеля, встановлюють важіль гіроскопа перпендикулярно вертикальній осі.

2. Вмикають живлення двигуна та встановлюють оберти двигуна біля 3000 об/хв.

3. Переміщують тягарець на 2 см вліво або вправо, натискають кнопку “СБРОС” і після оберту гіроскопа на кут не менший  $30^\circ$  натискають “СТОП”. Записують покази кута та часу прецесії. За формулою (18.6а) вираховують кутову швидкість прецесії  $\Omega$ . В процесі вимірювання необхідно слідкувати, щоб важіль не нахилився. Проводять не менше 5-ти дослідів.

4. Знову зміщують тягарець на 2 см в тому ж напрямку, що і в першому випадку. Визначають  $\Omega$ , як описано в п.3. Користуючись формулою (18.11), знаходять кінетичний момент гіроскопа (момент імпульсу  $M$ ), а за формулою (18.12) знаходять момент інерції  $J$  диска гіроскопа.

5. Знову встановлюють важіль гіроскопа перпендикулярно вертикальній осі. Вмикають живлення двигуна та встановлюють оберти двигуна біля 4000 об/хв. Переміщують тягарець спочатку на 2 см вліво, натискають кнопку “СБРОС” і після обертання гіроскопа на кут  $30^\circ$  натискають кнопку “СТОП”. Обчислюють кутову швидкість прецесії як в п.3. Далі вимірювання проводять за п.4.

6. Дані заносять в таблицю. Проводять обробку результатів вимірювань за схемою № 1 для прямих вимірів та за схемою № 4 для непрямих вимірів.

7. Аналізують одержані результати, порівнюють значення величин  $\Omega$ ,  $N$  і  $J$ , одержаних при різних положеннях тягарця  $\Delta l$  і швидкостях обертання гіроскопа  $\omega$ ; по можливості роблять також графічне представлення результатів.

8. Роблять короткі висновки.

## VII. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ТА САМОКОНТРОЛЮ

1. Вкажіть напрям моменту імпульсу по відношенню до напрямку моменту сили.
2. Яку роль в даному експериментальному гіроскопі відіграє тягарець, що переміщується вздовж важеля?
3. В якому напрямку буде рухатися вісь експериментального гіроскопа (важіль з тягарцем), якщо сила буде прикладена в горизонтальному напрямку?
4. Яка властивість гіроскопа знайшла широке використання в техніці? Коли виникають і як проявляють себе гіроскопічні сили?
5. Чи зміниться момент інерції гіроскопа, якщо змінити частоту його обертання навколо осі симетрії?
6. Чи зміниться момент імпульсу гіроскопа, якщо змінити: а) частоту його обертання навколо осі симетрії; б) змістити важок вздовж осі?
7. Що називають прецесією гіроскопа і від чого залежить кутова швидкість прецесії?
8. Намалюйте схематично в декартовій системі координат тіло закріплене в точці (в початку координат) та вкажіть кути Ейлера.
9. Використовуючи другий закон Ньютона, виведіть основний закон обертального руху (рівняння моментів).
10. Похибки яких величин обчислюються по схемі №1, а яких по схемі №4 ?

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №19 ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗВУКУ АКУСТИЧНИМ МЕТОДОМ

**I. МЕТА РОБОТИ:** *ознайомлення студентів з методом визначення швидкості поширення звуку в газі.*

**II. НЕОБХІДНІ ПРИЛАДИ ТА МАТЕРІАЛИ:** *звуковий генератор ГЗ-36, електричний осцилограф СІ-73, частотомір ЧЗ-32, мікрофон, телефон, телескопічна (розсувна) трубка.*

**III. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ,** знання яких необхідне для виконання лабораторної роботи.

- 1. Гармонічні коливання. Амплітуда, фаза, довжина хвилі, швидкість розповсюдження хвилі. Поперечні та повздовжні хвилі.*
- 2. Фізичні (об'єктивні та суб'єктивні) характеристики звуку.*
- 3. Швидкість поширення звуку в газах, рідинах і твердих тілах.*
- 4. Зв'язок швидкості хвилі з пружними властивостями середовища.*
- 5. Звукові коливання в замкнутих об'ємах. Резонатори.*
- 6. Стоячі хвилі. Рух енергії в хвилі.*
- 7. Ефект Доплера.*

### **IV. МЕТОДИКА ВИМІРЮВАНЬ І ОПИС ПРИЛАДІВ**

Пружні хвилі в повітрі, частоти яких лежать у межах від 20 до 20000 коливань в секунду, називають *звуковими хвилями*. Вони являють собою послідовні стискання і розрідження повітря, що поширюються з швидкістю, яка залежить від властивостей повітря. Звукова хвиля, як і всяка пружна хвиля, є хвилею зміщень, швидкостей і деформацій, які пов'язані між собою і поширюються разом у середовищі. У гармонічній звуковій хвилі в кожній точці зміщення, швидкості і деформації (стиски) змінюються за синусоїдальним законом. Звукова хвиля несе з собою потенціальну енергію – енергію пружної деформації газу – і кінетичну енергію рухомих частинок газу, які однакові по величині і кожна з яких становить половину повної енергії хвилі.

Основними характеристиками звукових хвиль є їх *інтенсивність* (потік звукової енергії, який падає за одиницю часу на одиницю площі, нормальної до напрямку поширення хвилі), *звуковий тиск, модуль стиску*.

Визначення швидкості звуку  $v$  в повітрі проводиться акустичним способом за допомогою установки, зображеної на рис.19.1.

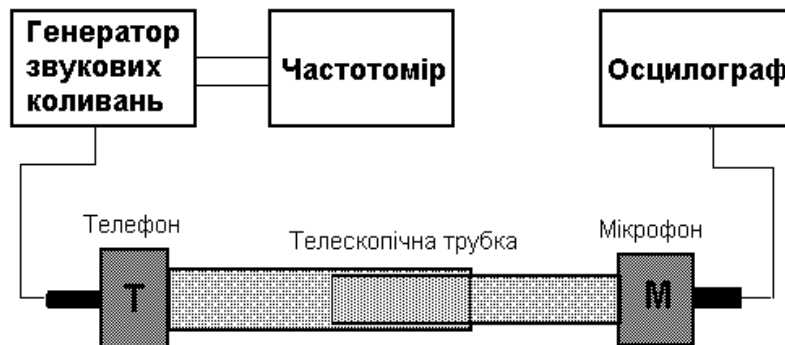


Рис. 19.1

Звукові коливання в трубі збуджуються мембраною телефону **Т**. Коливання вловлюються мікрофоном **М**. Мембрана телефону приводиться у рух змінним струмом звукової частоти. За джерело змінної е.р.с. використовується звуковий генератор ГЗ-36, а частота струму визначається за допомогою частотоміра ЧЗ-32. Сигнал, що виникає в мікрофоні, спостерігається на осцилографі СІ-73. Довжина труби може змінюватися в результаті телескопічного з'єднання двох трубок.

Звукова хвиля, яка поширюється вздовж труби, зазнає багаторазове відбивання від торців. Звукові коливання в середині труби є результатом накладання усіх відбитих хвиль і є, взагалі кажучи, дуже складними. Картина різко спрощується, якщо довжина труби стає рівною цілому числу півхвиль, тобто тоді, коли виконується умова

$$L = \frac{\lambda}{2} n, \quad (19.1)$$

де  $\lambda$  – довжина хвилі звуку в трубі,  $n$  – кількість половин хвиль, що вкладаються в довжину труби  $L$ . Якщо умова (19.1) виконана, то хвиля, яка відбилася від протилежного торця труби і повернулася до початку труби і знову відбилася тепер вже від переднього торця труби, співпадає по фазі з хвилею, що в даний момент генерується телефоном.

Аналогічним чином співпадають по фазі і хвилі, які рухаються від заднього торця до переднього після першого, другого і всіх наступних відбивань від заднього торця. Хвилі, що співпадають по фазі, посилюють одна одну. Амплітуда звукових коливань при цьому

різко зростає, тобто настає резонанс. Крім того, для випадку накладання двох однакових хвиль, що рухаються назустріч одна одній, формула (19.1) є умовою утворення стоячих хвиль, коли гребні хвилі не переміщуються у просторі, а їх амплітуда змінюється з часом по гармонічному закону.

Швидкість звуку  $v$  зв'язана з його частотою  $f$  і довжиною хвилі  $\lambda$  відношенням

$$v = f \cdot \lambda \quad (19.2)$$

Підбір умов, при яких виникає резонанс, можна проводити двома шляхами.

**1.** При незмінній частоті звукового генератора (отже і довжини звукової хвилі) можна змінювати довжину труби  $L$ . Для цього у роботі застосовується телескопічна (розсувна) труба. Довжина її поступово збільшується (труба повільно розсувається) і фіксується ряд послідовних резонансів. Виникнення резонансу легко спостерігати на осцилографі по різкому збільшенні амплітуди коливань. Для послідовних резонансів маємо:

$$L_n = n \frac{\lambda}{2}; \quad L_{n+1} = (n+1) \frac{\lambda}{2}; \quad \text{і так далі} \quad L_{n+k} = (n+k) \frac{\lambda}{2}; \quad (19.3)$$

$k$  – номер по порядку спостережуваного резонансу.

Із (19.2) і (19.3) для швидкості звуку одержуємо вираз:

$$v = f \cdot \lambda = 2f \frac{\lambda}{2} = 2f(L_{n+1} - L_n) = 2f \frac{L_{n+2} - L_n}{2} = 2f \frac{L_{n+k} - L_n}{k}. \quad (19.4)$$

Таким чином, вимірявши довжину труби  $L$ , при якій спостерігається резонанс, можна визначити швидкість звуку.

**2.** З формули (19.1) слідує, що умова резонансу буде періодично наставати, якщо плавно змінювати не довжину труби  $L$ , а довжину звукової хвилі  $\lambda$ . Тоді при сталій довжині труби необхідно вимірювати частоту звукових коливань, при яких настає резонанс. Для послідовних резонансів маємо:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad \text{або} \quad \frac{v}{f_n} = \frac{2L}{n}$$

$$\lambda_{n+1} = \frac{2L}{n+1} \quad \text{або} \quad v(n+1) = 2L \cdot f_{n+1} \quad (19.5)$$

$$\text{і так далі...} \quad \lambda_{n+k} = \frac{2L}{n+k}$$

Із формул (19.5) отримаємо:

$$v = 2L(f_{n+1} - f_n) = 2L \frac{f_{n+2} - f_n}{2} = 2L \frac{f_{n+k} - f_n}{k}. \quad (19.6)$$

## V. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОБОТИ

1. Ознайомитися з приладами, що використовуються при вимірюваннях, і електричною схемою їх підключення. Вивчити функціональне призначення перемикачів і засобів керування приладами на їх панелях.
2. Увімкнути в мережу осцилограф СІ-73, звуковий генератор ГЗ-36 і частотомір, дати їм прогрітися на протязі 4-5 хвилин. Після цього увімкнути тумблер “Промінь” на панелі осцилографа і повернути тумблер “яскравість”. На екрані осцилографа має бути видно світну лінію, накреслену електронним променем.
3. Тумблером “регулювання вихідної напруги” на звуковому генераторі підібрати напругу на його виході так, щоб на осцилографі спостерігати коливання достатньої амплітуди. Зупинити біжучу картину на екрані осцилографа, змінюючи частоту розгортки. Переконайтеся в тому, що коливання мають неспотворену синусоїдальну форму. Якщо форма коливань спотворена, то зменшити амплітуду сигналу, який поступає з генератора.
4. Виходячи з приблизного значення швидкості звуку 300 м/с, розрахувати в якому діапазоні частот слід вести виміри, щоб при видовженні труби можна було спостерігати 2-3 резонанси.
5. Визначити швидкість звуку в трубі при сталій частоті. Для цього плавно змінюючи довжину труби послідовно пройти через усі доступні для спостережень точки резонансу. Повторити виміри при інших частотах (для 3-5 значень частоти). Для кожного резонансу виміряти відповідне видовження трубки. Провести виміри спочатку збільшуючи довжину трубки, а потім зменшуючи її. Отримані значення підставити у формулу (19.4) і визначити швидкість звуку.
6. Визначити температуру повітря  $T$ .
7. Визначити швидкість звуку в трубі незмінної довжини. Для цього плавно збільшуючи частоту генератора, отримати ряд послідовних резонансних значень частоти, відмічаючи момент резонансу по збільшенню амплітуди коливань на екрані осцилографа. Відповідне резонансу значення частоти визначити за допомогою частотоміра. Переконатися у повторюваності результатів, провівши вимірювання при зменшенні частоти.
8. Отримані результати підставити у формулу (19.5) і обчислити значення швидкості звуку.
9. Всі результати вимірів і обчислень занести у відповідні таблиці.
10. Визначити абсолютну і відносну похибки експерименту.

11. Зробити короткі висновки, що впливають з отриманих результатів. Порівняти результати з табличними даними, пояснити можливі причини розходження.
12. Дати пропозиції по можливому вдосконаленню установки, проведенню експерименту.

## VI. ПИТАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЮ І САМОКОНТРОЛЮ

1. Яка умова виникнення стоячої хвилі в замкнутій трубі?
2. Що таке резонанс? Наведіть приклади механічного резонансу.
3. При якій довжині труби звукові коливання в ній отримуються з максимальною амплітудою? Як це пояснити?
4. Як зв'язана швидкість поширення коливань з пружністю середовища  $E$ ? а)  $v \sim E$ ; б)  $v \sim E^2$ ; в)  $v \sim E^{1/2}$ ; г)  $E \sim 1/E$
5. Як залежить швидкість поширення звуку від його частоти  $\nu$ ? а)  $v \sim \nu$ ; б) не залежить; в)  $v \sim 1/\nu$ ; г)  $v = \lambda \nu$
6. Які особливості акустичних коливань в замкнутих об'ємах?
7. Що таке стоячі хвилі? Умова виникнення стоячих хвиль у замкнутому об'ємі. Яка характерна особливість таких хвиль?
8. Дайте визначення поперечних і поздовжніх хвиль. Назвіть приклади.
9. Напишіть рівняння плоскої хвилі.
10. Дайте визначення поняттю „довжина хвилі”. Як довжина хвилі зв'язана з частотою коливань або періодом коливань?
11. Чи залежить частота хвилі від руху джерела хвиль?
12. Чи залежить частота хвилі від руху приймача хвиль?
13. Який рух енергії у біжучій і стоячій хвилі?

## ДОДАТОК

Таблиця 1. Коефіцієнти Стюдента  $t_{\alpha n}$  (n- число вимірювань,  $\alpha$ - довірна імовірність)

| n  | $\alpha = 0.90$ | $\alpha = 0.95$ | $\alpha = 0.98$ | $\alpha = 0.99$ | n        | $\alpha = 0.90$ | $\alpha = 0.95$ | $\alpha = 0.98$ | $\alpha = 0.99$ |
|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3  | 2.920           | 4.303           | 6.965           | 9.920           | 19       | 1.734           | 2.101           | 2.552           | 2.878           |
| 4  | 2.353           | 3.182           | 4.541           | 5.841           | 21       | 1.725           | 2.086           | 2.528           | 2.845           |
| 5  | 2.132           | 2.776           | 3.747           | 4.604           | 23       | 1.717           | 2.074           | 2.508           | 2.819           |
| 6  | 2.015           | 2.571           | 3.365           | 4.032           | 25       | 1.711           | 2.064           | 2.492           | 2.797           |
| 7  | 1.943           | 2.447           | 3.143           | 3.707           | 27       | 1.706           | 2.056           | 2.479           | 2.779           |
| 8  | 1.895           | 2.365           | 2.998           | 3.499           | 29       | 1.701           | 2.048           | 2.467           | 2.763           |
| 9  | 1.860           | 2.306           | 2.896           | 3.355           | 31       | 1.697           | 2.043           | 2.457           | 2.750           |
| 10 | 1.833           | 2.262           | 2.821           | 3.250           | 40       | 1.680           | 2.020           |                 | 2.700           |
| 11 | 1.812           | 2.228           | 2.764           | 3.169           | 60       | 1.670           | 2.000           |                 | 2.660           |
| 13 | 1.782           | 2.179           | 2.681           | 3.055           | 80       | 1.665           | 1.990           |                 | 2.640           |
| 15 | 1.761           | 2.145           | 2.624           | 2.977           | 120      | 1.660           | 1.980           |                 | 2.620           |
| 17 | 1.746           | 2.120           | 2.583           | 2.921           | $\infty$ | 1.645           | 1.960           | 2.326           | 2.576           |

Таблиця 2. Густина речовин при кімнатній температурі

| Тверді тіла    | $\rho, 10^3 \text{ кг/м}^3$ | Рідини         | $\rho, 10^3 \text{ кг/м}^3$ |
|----------------|-----------------------------|----------------|-----------------------------|
| Алюміній       | 2.69                        | Вода           | 1,00                        |
| Латунь         | 8.3-8.7                     | Гліцерин       | 1.26                        |
| Мідь           | 8.92                        | Гас            | 0.80                        |
| Сталь (залізо) | 7.86                        | Ртуть          | 13.60                       |
| Скло звичайне  | 2.6                         | Спирт етиловий | 0.79                        |

Таблиця 3. Деякі властивості твердих тіл.

| Матеріал | Модуль Юнга E, ГПа | Модуль зсуву G, ГПа | Коефіцієнт Пуассона, $\mu$ | Межа міцності на розрив $\sigma_m$ | Стисненість $\beta, \text{ ГПа}^{-1}$ |
|----------|--------------------|---------------------|----------------------------|------------------------------------|---------------------------------------|
| Алюміній | 70                 | 26                  | 0.34                       | 0.10                               | 0.014                                 |
| Мідь     | 130                | 40                  | 0.34                       | 0.30                               | 0.007                                 |
| Свинець  | 16                 | 5.6                 | 0.44                       | 0.015                              | 0.022                                 |
| Сталь    | 200                | 81                  | 0.29                       | 0.60                               | 0.006                                 |
| Скло     | 60                 | 30                  | 0.25                       | 0.05                               | 0.025                                 |

## ОСНОВНА НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. – М., 1989. – 576 с.
2. Берча Д.М., Ковач Є.Т., Хархалис М.Р. Фізичний практикум із механіки. Методичні вказівки. – Ужгород, 1993. – 206 с.
3. Попик Ю.В., Туряница И.Д., Бенца В.М. Обработка результатов измерений с применением программируемых калькуляторов.- Ужгород, 1986. – с.165.
4. Жихарев В.М., Попик Ю.В. Методичні вказівки до розв'язку задач з курсу "Основи метрології". – Ужгород, 1998. – 76 с.
5. Физический практикум. Механика и молекулярная физика. Под ред. В.И.Ивероновой. – М.: "Наука", 1967. – 352 с.
6. Фізичний практикум. Ч.1. Під ред. В.П. Дущенко. – Київ: "Вища школа", 1981. – 248 с.
7. Матвеев О.М. Механіка і теорія відносності. – Київ: "Вища школа", 1993. – 288 с.
8. Стрелков С.П. Механика. – М.: "Наука", 1975. – 560 с.
9. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. – М.: "Наука", 1982. – 432 с.
10. Хайкін С.Е. Фізичні основи механіки. – Київ: "Радянська школа", 1966. – 744 с.
11. Дущенко В.П., Кучерук І.М. Загальна фізика. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка. – Київ: "Вища школа". – 1987. – с.432.
12. Жихарев В.М., Ковач Є.Т., Різак В.М., Різак І.М. Механіка у прикладах і задачах.- Ужгород: "Мистецька лінія", 2004.- 271 с.

## Зміст

|  |     |
|--|-----|
| Вступ .....  | 3   |
| Основи теорії похибок .....  | 6   |
| Лабораторна робота №1 ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ<br>ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН.....   | 23  |
| Лабораторна робота №2 ВИМІРЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ РОЗМІРІВ І<br>ВИЗНАЧЕННЯ ОБ'ЄМІВ ТВЕРДИХ ТІЛ .....  | 30  |
| ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3 ВИВЧЕННЯ СИСТЕМАТИЧНИХ І<br>ВИПАДКОВИХ ПОХИБОК НА ПРИКЛАДІ ВИМІРЮВАННЯ<br>ПИТОМОГО ОПОРУ НІХРОМОВОЇ ДРОТИНИ. ....     | 35  |
| ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4 ВИВЧЕННЯ ЗАКОНІВ ПРЯМОЛІНІЙНОГО<br>РУХУ НА МАШИНІ АТВУДА .....  | 42  |
| ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5 ВИЗНАЧЕННЯ ГУСТИНИ ТВЕРДИХ ТІЛ.....   | 49  |
| ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6 ВИЗНАЧЕННЯ ПРИСКОРЕННЯ СИЛИ<br>ЗЕМНОГО ТЯЖІННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТЕМАТИЧНОГО<br>МАЯТНИКА.....                            | 56  |
| Лабораторна робота № 7 ВИЗНАЧЕННЯ ПРИСКОРЕННЯ СИЛИ<br>ЗЕМНОГО ТЯЖІННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА ....                                  | 66  |
| ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 8. ВИЗНАЧЕННЯ МОДУЛЯ ЮНГА ЗА<br>РОЗТЯГОМ ДРОТИНИ ТА ПРОГИНОМ СТЕРЖНЯ.....   | 72  |
| ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 9 ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА СИЛИ<br>СУХОГО ТЕРТЯ (ТЕРТЯ КОЧЕННЯ) .....   | 79  |
| ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 10 ВИВЧЕННЯ ЗАКОНІВ ОБЕРТОВОГО<br>РУХУ ЗА ДОПОМОГОЮ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА.....  | 88  |
| ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 11 ВИЗНАЧЕННЯ ЕЛІПСОЇДА ІНЕРЦІЇ<br>ТВЕРДИХ ТІЛ ЗА ДОПОМОГОЮ КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ .....                                   | 95  |
| ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 12 ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ<br>МЕТАЛЕВИХ КІЛЕЦЬ ЗА ДОПОМОГОЮ МАЯТНИКА МАКСВЕЛА .....                                  | 103 |
| ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 13 ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ<br>ЦИЛІНДРІВ ТА ПЕРЕВІРКА ТЕОРЕМИ ГЮЙГЕНСА-ШТЕЙНЕРА<br>МЕТОДОМ КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ..... | 110 |
| ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 14 ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ КУЛЬ ЗА<br>ДОПОМОГОЮ БАЛІСТИЧНОГО КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА .....                                    | 116 |
| ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 15 ВИВЧЕННЯ ЗАКОНІВ ЗБЕРЕЖЕННЯ ЗА<br>ДОПОМОГОЮ ЗІТКНЕННЯ ТІЛ.....   | 123 |
| Лабораторна робота № 16 ВИВЧЕННЯ КОЛИВАНЬ ЗВ'ЯЗАНИХ<br>СИСТЕМ .....  | 128 |
| ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 17 РУХ ТІЛ ПРИ НАЯВНОСТІ<br>АЕРОДИНАМІЧНИХ СИЛ ОПОРУ .....  | 135 |
| ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №18 ВИВЧЕННЯ ПРЕЦЕСІЇ ВІЛЬНОГО<br>ГІРОСКОПА .....   | 142 |
| ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №19 ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗВУКУ<br>АКУСТИЧНИМ МЕТОДОМ .....  | 148 |
| ДОДАТОК.....   | 153 |
| ОСНОВНА НАВЧАЛЬНА ЛІТЕРАТУРА .....   | 154 |

*Навчальне видання*

ЖИХАРЄВ В.М., КОВАЧ Є.Т.,  
ХАРХАЛІС Л.Ю., БЕРЧА Д.М.

## **МЕХАНІКА**

**ФІЗИЧНИЙ ПРАКТИКУМ**

Автори висловлюють глибоку вдячність рецензенту  
**проф. Попику Юрію Васильовичу** за цінні поради і вказівки  
по написанню навчального посібника

Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 9,07.. Зам. № 53. . Наклад 100 прим.  
Видавництво УжНУ «Говерла». м. Ужгород, вул. Капітульна, 18.  
Тел.: 3-32-48. E-mail: hoverla@i.ua

*Свідоцтво про внесення до державного реєстру видавців, виготівників  
і розповсюджувачів видавничої продукції – Серія 3т №32*