МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
“УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”
ФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

М.І. Карбованець, В.Ю. Лазур, Є.А. Нодь

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. ЧАСТИНА І. МЕТОД ЛАГРАНЖА

Навчальний посібник

Ужгород
2019

М.І. Карбованець, В.Ю. Лазур, Є.А. Нодь. Теоретична механіка. Частина І. Метод Лагранжа: навчальний посібник. – Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2019. – 82 с.

Рецензент:

доктор фізико-математичних наук, професор, старший науковий співробітник відділу електронних процесів і елементарних взаємодій ІЕФ НАН України
Гайсак М.І.

Відповідальний за випуск:
доктор фізико-математичних наук, професор,
декан фізичного факультету
Лазур В.Ю.

Посібник створено на базі частини лекційного курсу „Теоретична механіка" і „Прикладна механіка та мехатроніка", що читається студентам спеціальностей „Середня освіта. Фізика", „Фізика та астрономія", „Прикладна фізика і наноматеріали" та „Телекомункації та радіотехніка" фізичного факультету УжНУ. Він містить ряд основних ідей і методів аналітичної механіки в обсязі, достатньому для їх подальшого застосування в курсах та спецкурсах із загальної та теоретичної фізики. Наводиться велика кількість завдань різного рівня складності, частину з яких можна використати в якості змістовних доповнень до курсів із теоретичної механіки, електродинаміки, квантової механіки, теорії коливань тощо.

Посібник розраховано на студентів фізико-математичних та інженерно-технічних спеціальностей університетів.

Рекомендована до друку методичною комісією фізичного факультету (протокол №7 від 19 березня 2019 року)

ЗМІСТ

1. Диференціальні рівняння руху довільної системи матеріальних точок

1.1 Вільні і невільні механічні системи. В'язи та їх класифікація. Основна задача динаміки невільної системи

Реальний рух тіл, зазвичай, настільки складний, що для його математичного описання необхідно абстрагуватися від деталей, які несуттєві для даного руху. З цією метою в механіці запроваджують певні поняття, застосовність яких залежить від конкретного виду (характеру) руху тіл. Серед інших, вельми важливими є поняття про *матеріальну точку* та *систему матеріальних точок*. Нагадаємо, що в задачах механіки про рух реальних тіл матеріальною точкою називається тіло зникаюче малих розмірів, якими можна знехтувати у порівнянні з розмірами, що характеризують рух цього тіла. Сукупність декількох тіл, кожне з яких в даній задачі можна вважати матеріальною точкою, називають системою матеріальних точок. Важливим є також поняття про *абсолютно тверде тіло* (або просто *тверде тіло*) як особливий вид системи матеріальних точок, відстані між якими не змінюються при довільних переміщеннях цієї системи.

Важливу роль в механіці відіграє поняття про *ізольовану матеріальну точку*. Так називають матеріальну точку, яка знаходиться на дуже великих відстанях r від усіх інших тіл. При цьому, як випливає з досліду, прискорення $\vec{w}$ ізольованої точки, які викликані іншими тілами, будуть зникаюче малими, тобто $\vec{w} \to 0$, якщо $r \to \infty$.

З поняттям ізольованої матеріальної точки тісно пов'язане фундаментальне поняття про *інерціальну систему відліку* (ІСВ). Як відомо, інерціальною системою відліку називається система відліку, відносно якої ізольована матеріальна точка перебуває в стані спокою, або рухається рівномірно і прямолінійно із будь-якого початкового положення при будь-якому напрямі початкової швидкості.

Розглянемо рух механічної системи, що складається з N матеріальних точок, відносно деякої ІСВ. Позначимо через m_i, $\vec{r}_i$ та $\vec{v}_i$ $(i = 1, 2, ..., N)$ відповідно масу, радіус-вектор та швидкість i-ої точки системи. Нехай $\vec{F}_i$ – сила, що діє на i-ову точку системи. Якщо на положення $\vec{r}_i$ і швидкості $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$[1]

[1] Тут і надалі ми використовуємо стандартні позначення, коли крапка над радіус-вектором $\dot{\vec{r}}_i$ означає диференціювання $\vec{r}_i$ за часом, тобто $\dot{\vec{r}}_i \equiv \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$. Аналогічно вводиться позначення і для прискорення точки $\vec{w}_i$: $\ddot{\vec{r}}_i \equiv \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{w}_i$.

точок системи не накладено жодних обмежень геометричного або кінематичного характеру, то таку систему матеріальних точок називають *вільною* механічною системою. Добре відомо (див., напр., праці [1–6]), що задачі механіки для вільних систем зводяться до розв'язання диференціальних рівнянь руху (рівнянь другого закону Ньютона) виду

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i(t) = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_N, t). \qquad (1.1)$$

із заданими початковими умовами – положеннями $\vec{r}_{i0}$ і швидкостями $\vec{v}_{i0}$ у початковий момент часу t_0:

$$\vec{r}_{i0} = \vec{r}_i(t_0), \quad \vec{v}_{i0} = \vec{v}_i(t_0) \quad (i = 1, 2, ..., N). \qquad (1.2)$$

Всі сили $\vec{F}_i$ в рівняннях (1.1) вважаються *відомими функціями положень і швидкостей точок, а також часу.* Такі сили будемо називати *заданими.* При цьому, на початкові умови (1.2) не накладається жодних обмежень, тому їх можна задавати довільно.

Таким чином, другий закон Ньютона дозволяє знайти положення $\vec{r}_i(t)$ і швидкості $\vec{v}_i(t)$ матеріальних точок *вільної* механічної системи, якщо відомі:

1) маси m_i точок та сили $\vec{F}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_N, t)$ як функції положення точок і їх швидкостей, а також часу;

2) початкові умови (1.2), тобто положення $\vec{r}_{i0}$ і швидкості $\vec{v}_{i0}$ у початковий момент часу t_0;

3) рівняння руху системи виду (1.1).

Сформульована задача має назву *основної задачі динаміки вільної механічної системи.*

Поряд із сформульованою нижче задачею динаміки вільних систем, у механіці існує й інший клас задач, в яких поряд із заданими силами розглядаються сили, заздалегідь невідомі нам як функції положень, швидкостей і часу. В таких задачах положення точок та їх швидкості задовольняють певним умовам, які не випливають із рівнянь руху. У цьому випадку кажуть, що система матеріальних точок невільна, на неї накладено *в'язі.* Забігаючи наперед, зазначимо, що метод розв'язання задач про рух невільних механічних систем був розроблений у працях д'Аламбера та Лагранжа [4, 7, 8] і має назву метода невизначених множників Лагранжа.

У загальному випадку під *в'язями* розуміють обмеження геометричного або кінематичного характеру, що накладаються на положення, швидкості та прискорення точок механічної системи, і які не випливають із рівнянь руху.

На практиці в'язі реалізуються за допомогою поверхонь різних тіл, стержнів, ниток, тощо. Сили, з якими тіла, що здійснюють в'язі, діють на точки системи, називаються *реакціями в'язів*. Реакції в'язів напрямлені по нормалі до дотичних поверхонь, а якщо в'язі реалізуються через стержні або нитки, то вздовж них. У випадку, коли на систему з N точок накладено k в'язів, то, позначивши через $\vec{R}_{\alpha i}$ реакцію в'язів з номером α на i-ову точку, для реакції всіх k в'язів, прикладених до i-вої точки, одержимо:

$$\vec{R}_i = \sum_{\alpha=1}^{k} \vec{R}_{\alpha i}. \tag{1.3}$$

Аналітично в'язі виражаються *рівняннями в'язів*, тобто співвідношеннями між радіус-векторами точок, їх швидкостями і прискореннями.

В'язі можна класифікувати за різними ознаками. Так, в'язі поділяються на *голономні* і *неголомні*, *утримуючі* і *неутримуючі*, *стаціонарні* і *нестаціонарні*.

Голономними[2] в'язами називають в'язі, рівняння яких завжди можна звести до вигляду, що не містить швидкості $\vec{v}_i(t)$ точок, тобто

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) = 0. \tag{1.4}$$

Таким чином, у випадку голономних в'язів (1.4) f є функцією тільки координат точок і часу. Попри це, голономні в'язі накладають обмеження не тільки на положення, але і на швидкості та прискорення точок системи, що легко встановлюється диференціюванням (1.4) за часом. Так, диференціюючи (1.4) за часом, одержимо обмеження на швидкості:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (\nabla_i f)\vec{v}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{1.5}$$

а продиференціювавши (1.5) за часом, знайдемо обмеження на прискорення точок:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N} (\nabla_i f)\vec{w}_i + \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{d}{dt}(\nabla_i f)\right] \vec{v}_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0. \tag{1.6}$$

Однак характерним для голономних в'язів є те, що обмеження на прискорення і швидкості зводяться до обмеження тільки на положення точок, тому

[2] Термін „голономний" походить від двох грецьких слів: $\ddot{o}\lambda o\zeta$ (цілий, інтегрований) і $\nu o\mu o\zeta$ (закон).

рівняння в'язів, задані у вигляді (1.5) або (1.6), можуть бути проінтегровані. З цієї причини голономні в'язі ще називають *інтегрованими в'язами.*

Неголономними (або неінтегрованими) в'язами називають такі в'язкі, рівняння яких не можна звести до рівнянь, що містять тільки координати точок і час. Найбільш повно вивченими є неголономні в'язі першого порядку, які лінійні відносно швидкостей, тобто неінтегровані в'язі виду

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{a}_i \vec{v}_i + b = 0, \tag{1.7}$$

де $\vec{a}_i$ і b можуть залежати від положень точок і часу. При цьому вважається, що вектори $\vec{a}_i$ не можуть всі одночасно дорівнювати нулю.

При наявності голономної в'язі (1.4) система не може в кожний заданий момент часу займати довільне положення в просторі. Голономна в'язь накладає обмеження на можливі положення система в момент часу t. У свою чергу, при наявності лише неголономної в'язі (1.5) система у будь-який момент часу t може займати довільне положення у просторі. Однак у цьому положенні швидкості точок системи вже не можуть бути довільними: неголономна в'язь накладає умови на ці швидкості.

Надалі ми будемо розглядати лише голономні в'язі, оскільки задачі про рух систем з неголономними в'язами, як правило, дуже складні в математичному відношенні й рідко зустрічаються в сучасних фізичних застосуваннях механіки.

Утримуючими в'язами називаються в'язі, що задаються рівностями. Відповідно, неутримуючі в'язи задаються нерівностями. Прикладом неутримуючої в'язі може слугувати гнучка нерозтяжна нитка, що з'єднує дві матеріальні точки. Рух системи, на яку накладено неутримуючу в'язь, можна розбити на ділянки таким чином, щоб на одних ділянках в'язь була напружена і рух відбувався так, як у випадку утримуючої в'язі, а на інших ділянках в'язь була б ненапружена і рух відбувався б так, якби цієї в'язі не було. Таким чином, на окремих ділянках неутримуючу в'язь або заміняють на утримуючу, або зовсім відкидають. Виходячи з цього, ми в подальшому будемо розглядати винятково утримуючі в'язі.

Якщо рівняння в'язів явно від часу не залежить, то в'язь називається *стаціонарною*. В протилежному випадку в'язь називається *нестаціонарною*. Система, на яку накладено лише стаціонарні в'язі, називається *склерономною*. Якщо ж накладені на систему в'язі нестаціонарні, то система називається *реонормною.*

Ввівши поняття про в'язі і їх реакції, сформулюємо основну задачу механіки невільної системи N точок з k голономними в'язями:

Задано активні сили $\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_N, t), (i = 1, 2, ..., N)$ *і сумісні з в'язями початкові положення* $\vec{r}_{io}$ *і початкові швидкості* $\vec{v}_{io}$ *точок системи. Необхідно знайти закон руху системи і реакції в'язів* $\vec{R}_i$[3].

Сформульована задача математично зводиться до сумісного розв'язання рівнянь руху і рівнянь в'язів

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \qquad (i = 1, 2, ..., N), \tag{1.8}$$

$$f_\alpha(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, t) = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, ..., k) \tag{1.9}$$

з початковими умовами, заданими відповідно до рівнянь в'язів.

Якщо відносно характеру в'язів нічого невідомо, крім їх рівнянь (1.9), а отже, нічого не відомо відносно реакцій $\vec{R}_i$, які викликані цими в'язями, то сформульована вище задача є невизначеною. Дійсно, у цьому випадку число шуканих скалярних величин $x_i, y_i, z_i, R_{ix}, R_{iy}, R_{iz}$ більше числа наявних скалярних співвідношень – рівнянь $m_i\ddot{x}_i = F_{ix} + R_{ix}$, $m_i\ddot{y}_i = F_{iy} + R_{iy}$, $m_i\ddot{z}_i = F_{iz} + R_{iz}$ та рівнянь в'язів (1.9): $6N > 3N + k$.

Для того, щоб основна задача динаміки невільних систем стала визначеною, необхідно мати деякі додаткові $6N - (3N + k) = 3N - k = s$ незалежні співвідношення між шуканими величинами. Ці співвідношення ми одержимо, якщо обмежимося важливим класом ідеальних в'язів, до визначення яких ми переходимо.

Система (1.8) – це система $3N + k$ скалярних рівнянь, що містять $6N$ невідомих функцій – проекцій векторів $\vec{r}_i(t)$ і $\vec{R}_i(t)$ на координатні осі $(i = 1, 2, ..., N)$, причому найбільш цікавим є випадок, коли число в'язів $k < 3N$. Дійсно, якщо $k = 3N$, то рівняння в'язів повністю визначають рух системи. З іншого боку, якщо $k < 3N$, то розглянута задача є визначеною тільки в тому випадку, коли відомі $6N - (3N + k) = 3N - k$ незалежних співвідношень між положеннями точок і реакціями в'язів. Забігаючи наперед, скажемо, що основна задача динаміки невільної системи є визначеною для так званих ідеальних в'язів. Однак введення цього поняття вимагає знайомства з деякими властивостями в'язів.

[3] У випадку вільної системи задача знаходження реакції відпадає і залишається лише задача знаходження закону руху системи.

1.2 Дійсні, можливі і віртуальні переміщення. Ідеальні в'язі

Для простоти розглянемо рух однієї матеріальної точки, на яку накладено одну голономну утримуючу в'язь

$$f(\vec{r}, t) = 0, \tag{1.10}$$

і визначимо дійсні, можливі і віртуальні переміщення цієї точки.

Дійсним переміщенням $d\vec{r}$ точки називається нескінченно мале переміщення цієї точки під дією як заданих сил, так і реакцій в'язів; дійсне переміщення відбувається за час dt відповідно до рівняння руху і рівняння в'язи.

Можливим переміщенням назвемо „переміщення" $d\vec{r}$ точки, що допускається в'язом; на відміну від дійсних переміщень можливі переміщення задовольняють тільки рівняння в'язі. Дійсне переміщення завжди є одним з можливих. Диференціальне рівняння, якому підпорядковані можливі переміщення точки, отримаємо, обчисливши диференціал від лівої частини рівняння в'язі (1.10) і прирівнявши його до нуля:

$$df = \nabla f d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0. \tag{1.11}$$

Нарешті, *віртуальним* переміщенням $\delta\vec{r}$ називається уявне нескінченно мале „переміщення" точки, що допускається зв'язком у даний фіксований момент часу; в цей момент часу зв'язок „застигає", тобто його зміна з часом подумки припиняється. Віртуальні переміщення не відбуваються під дією сил і не володіють тривалістю. Диференціальне рівняння, якому підпорядковані віртуальні переміщення точки, отримаємо, обчислюючи диференціал лівої частини рівняння (1.10) при фіксованому часі, тобто обчислюючи варіацію $f(\vec{r}, t)$ і прирівнюючи її до нуля:

$$\delta f = \nabla f \delta\vec{r} = 0. \tag{1.12}$$

Тут приріст $\delta\vec{r}$ радіуса-вектора точки також „відбувається" при фіксованому часі, тобто є варіацією радіуса-вектора. З (1.11) і (1.12) видно, що сукупність віртуальних переміщень збігається з можливими переміщеннями тільки у випадку стаціонарних в'язів, коли $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

Неважко узагальнити розглянуті означення на систему N точок, підпорядкованих k голономним в'язям

$$f_\alpha(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, t) = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, ..., k), \tag{1.13}$$

і отримати рівняння для механічної системи, аналогічні рівнянням (1.11) і (1.12). Справді, обчислюючи диференціали і варіації лівих частин рівнянь (1.13) і прирівнюючи їх до нуля, знайдемо

$$\sum_{i=1}^{N} \nabla_i f_\alpha \; d\vec{r}_i + \tfrac{\partial f_\alpha}{\partial t} \; dt = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, ..., k), \tag{1.14}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \nabla_i f_\alpha \; \delta\vec{r}_i = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, ..., k). \tag{1.15}$$

Поняття про віртуальні переміщення дозволяє визначити дуже важливий клас в'язів, що мають назву ідеальних в'язів. В'язі називається ідеальними, якщо сума робіт всіх реакцій в'язів на будь-яких віртуальних переміщеннях точок системи завжди дорівнює нулю, тобто якщо виконується умова

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \delta\vec{r}_i = 0, \tag{1.16}$$

де δA_R – *віртуальна робота реакцій в'язів*, N – число точок системи. Рівність (1.16) можна записати й у розгорнутому виді:

$$\sum_{i=1}^{N} (R_{ix}\delta x_i + R_{iy}\delta y_i + R_{iz}\delta z_i) = 0. \tag{1.17}$$

Уведений клас в'язів є достатньо загальним, причому фізичні причини ідеальності в'язів можуть бути різними. Так, будь-яке поєднання гладких в'язів із в'язями, що складаються з тонких стержнів зникаючої маси і заданої довжини, є ідеальною в'яззю, якщо у місцях з'єднання відсутня тертя. Також ідеальними є в'язі, що реалізуються за допомогою абсолютно шорстських поверхонь по яких відбувається кочення тіл без ковзання.

1.3 Рівняння Лагранжа з реакціями в'язів. Закони зміни імпульсу, кінетичного моменту і енергії для систем із в'язями

Нехай на систему з N точок накладено k голономних ідеальних в'язів. Число проекцій віртуальних переміщень точок на координатні осі, або, інакше кажучи, число варіацій координат точок, дорівнює $3N$. Оскільки варіації координат підпорядковані рівнянням (1.15), то k варіацій є залежними, а $3N - k$ варіацій – незалежними. Залежні варіації можуть бути єдиним чином виражені через незалежні, оскільки детермінант з коефіцієнтів при залежних варіаціях в системі (1.15) за припущенням відмінний від нуля (в іншому випадку серед в'язів будуть такі, які є наслідком інших). Врахуємо далі, що крім вимоги голономності в'язів виконується вимога їх ідеальності (див. (1.16)). У цьому умови k залежних варіацій за допомогою (1.15) можна виразити через $3N-k$ незалежних варіацій. Після такої підстановки (для того щоб задовольнити вимогу ідеальності) слід прирівняти нулю коефіцієнти при незалежних варіаціях. Тим самим можна отримати $3N-k$ співвідношень між реакціями в'язів і радіусами-векторами точок. Таким чином, основна задача динаміки невільної системи з голономними ідеальними в'язами стає визначеною, оскільки число рівнянь і число невідомих функцій в цьому випадку збігаються.

Безпосереднє виключення залежних варіацій координат можна в загальному випадку провести *методом невизначених множників Лагранжа.* Викладемо суть цього методу. В силу ідеальності і голономних в'язів з умов (1.16) і (1.15) маємо

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{R}_i\delta\vec{r}_i=0,$$

$$\sum_{i=1}^{N}(\nabla_i f_\alpha)\delta\vec{r}_i=0, \qquad (\alpha=1,2,...,k). \tag{1.18}$$

Помноживши кожне з k останніх співвідношень на відповідний невизначений скалярний множник – λ_α $(\alpha=1,2,...,k)$ і додаючи всі отримані результати з умовою ідеальності, прийдемо до співвідношення

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{\vec{R}_i-\sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\nabla_i f_\alpha\right\}\delta\vec{r}_i=0; \tag{1.19}$$

в якому k варіацій координат є залежними, а $3N-k$ – незалежними. Підберемо k множників λ_α так, щоб коефіцієнти при k залежних варіаціях в (1.19) звернулися в нуль. Цей підбір можна провести єдиним чином, так як детермінант з коефіцієнтів при залежних варіаціях в системі (1.15) відрізняється від нуля (за припущенням про в'язі). З іншого боку, коефіцієнти при незалежних варіаціях в (1.19) повинні дорівнювати нулю в силу умови ідеальності.

Отже, коефіцієнти при всіх $\delta\vec{r}_i$ повинні бути прирівняні нулю. В результаті приходимо, до висновку, що між реакціями ідеальних голономних в'язів і функціями f_α, визначальними рівняння в'язів, мають місце співвідношення

$$\vec{R}_i = \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha, \qquad (i = 1, 2, ..., N). \tag{1.20}$$

Співвідношення (1.20) є необхідною умовою рівності нулю віртуальної роботи реакцій в'язів, тобто необхідною умовою ідеальності голономних в'язів. Можна безпосередньо переконатися і в достатності цієї умови.

Отже, реакції ідеальних голономних в'язів є лінійними формами щодо градієнтів функцій $f_\alpha(\alpha = 1, 2, ..., k)$, що визначають рівняння в'язів (1.13). Підставляючи (1.20) в (1.8), отримаємо рівняння руху механічної системи з голономними ідеальними в'язями, тобто *рівняння Лагранжа з реакціями в'яків* або *рівняння Лагранжа першого роду*[4]:

$$\begin{aligned} m_i\ddot{\vec{r}}_i = F_i + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \nabla_i f_\alpha \quad (i = 1, 2, .., N), \\ f_\alpha(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, t) = 0 \ \ (\alpha = 1, 2, ..., k). \end{aligned} \tag{1.21}$$

Тут сили $\vec{F}_i$ є заданими функціями $\vec{r}_i$, $\vec{v}_i$ і t $(i = 1, ..., N)$. Невідомими в цих рівняннях є всі радіуси-вектори точок $\vec{r}_i(t)$ і множники Лагранжа $\lambda_\alpha(t)$ $(\alpha = 1, 2, ..., k)$. Число рівнянь і число невідомих функцій збігаються і дорівнюють $3N + k$.

Підкреслимо, що реакції в'язів визначаються в результаті розв'язання рівнянь (1.21) і, отже, залежать від заданих сил, тому задані сили часто називають *активними силами*, а реакції в'язів – *пасивними*. Така залежність одних сил від інших з'являється в результаті спрощення уявлень про реальний взаємодії тіл: саме накладення в'язів на систему є по суті таке спрощення (наприклад, в задачі про сферичну маятнику ми нехтуємо пружними властивостями нитки підвісу і тим самим накладаємо зв'язок).

При застосуванні рівнянь Лагранжа виникає також питання про виконання умови ідеальності в'язів. Вище ми бачили, що ця вимога пов'язана з певними фізичними припущеннями, які не завжди виконуються, наприклад наявність сил тертя на голономних в'язях робить їх неідеальними. Однак завжди можна виділити нормальні складові реакцій, які будуть задовольня-

[4] Ці рівняння були одержані французьким математиком і механіком Ж. Лагранжем в його знаменитому трактаті „Аналітична механіка", опублікованому 1788 р. В цьому трактаті вперше були викладені основи аналітичної механіки.

ти умові ідеальності (1.16); тоді інші складові реакцій повинні бути задані як функції положень, швидкостей точок і часу.

Закони зміни імпульсу, кінетичного моменту і енергії системи при наявності в'язів можуть бути отримані з рівнянь Лагранжа (1.21) так само, як аналогічні закони для вільних систем були отримані з рівнянь руху Ньютона за допомогою закону дії – протидії. Справді, враховуючи, що по відношенню до досліджуваної системи в'язі можуть бути як внутрішніми, так і зовнішніми, знайдемо

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{\mathrm{e}} + \vec{R}^{\mathrm{e}}, \tag{1.22}$$

$$\dot{\vec{M}} = \vec{L}^{\mathrm{e}} + \vec{L}^{\mathrm{e}}_{R}, \tag{1.23}$$

$$\dot{E} = \frac{\partial U^{\mathrm{e}}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{\mathrm{d}}_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \vec{v}_i, \tag{1.24}$$

де $\vec{R}_i = \vec{R}^{\mathrm{in}}_i + \vec{R}^{\mathrm{e}}_i$ – сума реакцій внутрішніх і зовнішніх зв'язків на i-тую точку; $\vec{R}^{e} = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{R}^{\mathrm{e}}_i$ – сума реакцій зовнішніх в'язів: $\vec{L}^{\mathrm{e}}_R = \sum\limits_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \vec{R}^{\mathrm{e}}_i]$ – сума моментів реакцій зовнішніх в'язів. Порівняно із законами зміни імпульсу, кінетичного моменту і енергії для вільних систем (див. [1]) тут з'явилися додаткові члени: сума зовнішніх реакцій і їх моменти, а також потужність як внутрішніх, так і зовнішніх реакцій.

Потужність реакцій можна зобразити і в іншому вигляді, використовуючи ідеальність і голономних в'язів. Дійсно, маючи на увазі (1.20) і (1.14), одержимо

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \vec{v}_i = \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \left(\sum_{i=1}^{N} (\nabla_i f_\alpha) \vec{v}_i \right) = -\sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}. \tag{1.25}$$

Цей вираз дозволяє записати рівняння (1.24) у вигляді

$$\dot{E} = \frac{\partial U^{\mathrm{e}}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{\mathrm{d}}_i \vec{v}_i - \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}. \tag{1.26}$$

Закони збереження імпульса і моменту при наявності в'язів повинні бути сформульовані відповідно до законів для вільних систем (див. [1]), тільки до вимог на задані зовнішні сили додадуться аналогічні вимоги до реакцій зовнішніх в'язів. Що стосується закону збереження енергії при наявності в'язів, то він має місце для стаціонарних ідеальних голономних в'язів, коли

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, ..., k). \tag{1.27}$$

У багатьох випадках застосування законів збереження спрощує вирішення завдань про рух невільних систем. У свою чергу, закони збереження можуть бути пов'язані з симетрією заданих силових полів і в'язів. Тому вибір координат доцільно здійснювати з урахуванням цієї симетрії.

У якості ілюстрації застосування рівнянь Лагранжа 1-го роду (1.21) до розв'язання задач про невільні системи, розв'яжемо таку задачу ([3], с. 29, № 5.2).

Задача

Точка рухається в однорідному полі тяжіння (рис. 1.1) по гладкій нерухомій параболі $y^2 = ax$, яка розташована у вертикальній площині (вісь параболи горизонтальна). Відоме початкове положення точки y_0, а її початкова швидкість $v_0 = 0$. На якій висоті y_C точка відірветься від параболи?

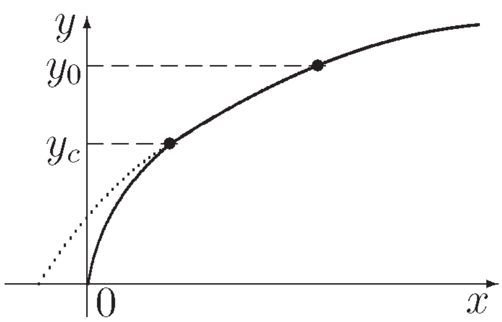

Рис. 1.1. Рух точки по параболі

Розв'язання. Нехай $x(t), y(t)$ – координати рухомої точки. Рух точки до моменту відриву від параболи підпорядкований в'язі, рівняння якого має вигляд:

$$f = y^2 - ax = 0. \tag{1.28}$$

Тоді рівняння Лагранжа першого роду (1.21) можна записати у вигляді

$$m\ddot{x} = -\lambda a, \tag{1.29}$$

$$m\ddot{y} = -mg + 2\lambda y, \tag{1.30}$$

де λ – невизначений множник Лагранжа.

Якщо у початковий момент часу точка перебувала на висоті y_0 і її початкова швидкість $v_0 = 0$, то із закону збереження енергії одержимо:

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = mgy_0,$$

звідки для квадрату швидкості $v^2(t)$ одержимо

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2g(y_0 - y). \tag{1.31}$$

Використовуючи рівняння в'язі (1.28) і співвідношення (1.31), зведемо диференціальні рівняння (1.29) і (1.30) до алгебраїчного рівняння.

Перш за все, продиференціюємо двічі за часом рівняння (1.28), яке запишемо у вигляді: $ax = y^2$. Одержимо:

$$a\dot{x} = 2y\dot{y} \tag{1.32}$$

і

$$a\ddot{x} = 2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y}. \tag{1.33}$$

З іншого боку, із рівняння (1.29) маємо:

$$\ddot{x} = -\frac{\lambda a}{m}. \tag{1.34}$$

Підставивши (1.34) у (1.33), одержимо:

$$-\frac{\lambda a^2}{m} = 2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y},$$

звідки

$$\dot{y}^2 + y\ddot{y} = -\frac{\lambda a^2}{2m}. \tag{1.35}$$

Виразимо з рівняння (1.30) похідну $\ddot{y}$:

$$\ddot{y} = -g + \frac{2\lambda y}{m},$$

і підставимо цей вираз для $\ddot{y}$ у вираз (1.35); отримаємо:

$$\dot{y}^2 - gy + \frac{2\lambda y^2}{m} = -\frac{\lambda a^2}{2m}. \tag{1.36}$$

Визначимо і (1.32) $\dot{x}^2$ і підставимо у співвідношення (1.31):

$$\frac{4y^2\dot{y}^2}{a^2} + \dot{y}^2 = 2g(y_0 - y),$$

або

$$\dot{y}^2\left(\frac{4y^2 + a^2}{a^2}\right) = 2g(y_0 - y),$$

звідки

$$\dot{y}^2 = \frac{2a^2 g}{4y^2 + a^2}(y_0 - y). \tag{1.37}$$

Нарешті, підставивши $\dot{y}^2$ із (1.37) у рівняння (1.36), одержимо

$$\frac{2a^2 g}{4y^2 + a^2}(y_0 - y) - gy + \frac{2\lambda y^2}{m} = -\frac{\lambda a^2}{2m}. \tag{1.38}$$

Рівняння (1.38) справедливе для руху точки від початку руху до моменту відриву точки від параболи, поки $\lambda \neq 0$. Проте у точці відриву сила реакції

$$\vec{R} = \lambda \nabla f = 0,$$

звідки одержимо $\lambda = 0$.

При цьому рівняння (1.38) набуде вигляду

$$2a^2 g(y_0 - y) = gy(4y^2 + a^2),$$

або, після нескладних перетворень остаточно одержимо:

$$4y^3 + 3a^2 y - 2a^2 y_0 = 0. \tag{1.39}$$

Щоб знайти висоту y_C, на якій точка відірветься від параболи, необхідно відшукати дійсний додатний корінь рівняння (1.39). Результат залежатиме від значень параметра a та початкової висоти y_0. Так, для $y_0 = 3,5$ м і $a = 1$ м із (1.39) одержимо

$$4y_C^3 + 3y_C = 7,$$

звідки $y_C = 1$ м.

2. Рівняння Лагранжа в незалежних координатах

Рівняння Лагранжа з реакціями в'язів дають можливість знайти і положення точок системи, і реакції в'язів як функції часу. Однак на практиці часто не потрібна настільки „докладна" інформація про механічну систему, а потрібно знайти лише закон руху точок по в'язях. Для розв'язання таких задач необхідні рівняння руху, які в якості невідомих містять тільки *незалежні координати*. З іншого боку, ці рівняння повинні повністю враховувати вплив в'язів на систему. Такі рівняння існують і називаються *рівняннями Лагранжа в незалежних координатах* (або *рівняннями Лагранжа другого роду*). Значення цих рівнянь не вичерпується застосуванням до зазначеного типу задач. Якщо потрібно визначити реакції в'язів, часто простіше за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду визначити закон руху системи, а потім за допомогою рівнянь Лагранжа першого роду знайти реакції в'язів. Рівняння Лагранжа другого роду мають велике значення і для вільних систем. У цьому випадку вони представляють собою рівняння руху в довільних криволінійних координатах. Зазначимо, що рівняння Лагранжа в незалежних координатах можна вивести як із загального рівняння динаміки, так і з принципу найменшої дії (принципу Гамільтона).

2.1 Загальне рівняння механіки. Рівняння Лагранжа другого роду.

Виведемо рівняння Лагранжа другого роду для механічної системи, що складається з N точок, на які накладено k ідеальних голономних в'язів. Рух такої системи, як зазначалося в попередньому розділі, описується рівняннями Лагранжа з реакціями в'язів (1.21). Щоб виключити з цих рівнянь реакції в'язів, помножимо кожне з них скалярно на відповідне віртуальне переміщення $\delta\vec{r}_i$ і додамо результати множення. У результаті одержимо:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\nabla_i f_\alpha\right)\delta\vec{r}_i. \tag{2.1}$$

Подвійна сума в цьому рівнянні є визначає віртуальну роботу всіх реакцій в'язів і внаслідок ідеальності в'язів дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\nabla_i f_\alpha\delta\vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\left(\sum_{i=1}^{N}\nabla_i f_\alpha\delta\vec{r}_i\right) = 0. \tag{2.2}$$

Із врахуванням умови (2.2) рівняння (2.1) набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^{N}\{m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i\}\delta\vec{r}_i = 0. \tag{2.3}$$

Одержане рівняння (2.3) називається *загальним рівнянням механіки* або *рівнянням д'Аламбера – Лагранжа.*

Зауважимо, що рівняння Лагранжа з реакціями в'язів можуть бути отримані із загального рівняння механіки спільно з рівняннями в'язів

$$f_\alpha(\vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) = 0 \ \ (\alpha = 1, 2, ..., k).$$

Дійсно, використовуючи рівняння в'язів у вигляді

$$\sum_{i=1}^{N}\nabla_i f_\alpha \delta\vec{r}_i = 0 \quad (\alpha = 1, 2, ..., k),$$

помножимо ліву частину кожного з цих рівнянь на відповідний невизначений множник – $\lambda_\alpha(\alpha = 1, 2, ..., k)$, а всі результати множення додамо до лівої частини (2.3); одержимо:

$$\sum_{i=1}^{N}\{m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i - \sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\nabla_i f_\alpha\}\delta\vec{r}_i = 0.$$

Далі, застосовуючи до цього рівняння подальшу процедуру методу невизначених множників, прийдемо до рівнянь Лагранжа з реакціями в'язів. Таким чином, система, що складається з рівняння (2.3) і рівнянь в'язів, еквівалентна системі (1.21). Більш того, можна стверджувати, що загальне рівняння механіки і рівняння руху з реакціями будь-яких ідеальних в'язів еквівалентні.

Перш ніж продовжити виведення рівнянь Лагранжа другого роду, зупинимося на понятті *незалежних узагальнених координат.* Такими координатами за означенням є будь-які $3N - k$ величини, що однозначно визначають положення системи (N і k – числа точок системи і голономних в'язів відповідно). Число s незалежних узагальнених координат, що рівне $s = 3N - k$, у випадку систем з голономними в'язями називається числом степеней вільності. Незалежні узагальнені координати будемо позначати через $q_1, q_2, ..., q_s$, а всю їх сукупність для стислості будемо надалі позначати символом q: $q \equiv \{q_1, q_2, ..., q_s\}$.

З визначення незалежних координат слідує, що вони повинні відповідати двом вимогам.

По-перше, радіуси-вектори точок системи повинні бути однозначними функціями q:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1(t), q_2(t), ..., q_s(t), t) \quad (i = 1, 2, ..., N), \tag{2.4}$$

причому з $3N$ функцій – проекцій радіусів-векторів – s будь-яких функцій повинні бути незалежними. Для виконання цієї умови необхідно щоб ранг $r(X)$ матриці

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & ... & \frac{\partial x_1}{\partial q_s} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial x_{3N}}{\partial q_1} & ... & \frac{\partial x_{3N}}{\partial q_s} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

був рівний s: $r(X) = s$. У виразі (2.5) проекції радіусів-векторів точок позначено символами x_i із загальною для всіх точок нумерацією (наприклад, проекції вектора $\vec{r}_1$ позначаються x_1, x_2, x_3, проекції вектора $\vec{r}_2$ позначаються x_4, x_5, x_6 і т. д.).

По-друге, координати q повинні бути вибрані відповідно до рівнянь в'язів, тобто функції (2.4) повинні звертати в тотожність рівняння в'язів (1.13):

$$f_\alpha(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, t)|_{\substack{\vec{r}_1 \to \vec{r}_1(q,t), \\ ...... \\ \vec{r}_N \to \vec{r}_N(q,t)}} \equiv 0 \quad (\alpha = 1, 2, ..., k). \tag{2.6}$$

Зазначимо, що у випадку стаціонарних в'язів рівняння в'язів явно не залежать від часу; тому і функції (2.4) можна підібрати явно не залежними від часу. Надалі цю умову для стаціонарних в'язів будемо вважати виконаною.

Зважаючи на важливість понять про незалежні узагальнені координати і число степенів вільності, розглянемо декілька прикладів.

Нехай точка рухається по еліпсу з півосями a і b. В системі координат з початком в центрі еліпса і осями Ox, Oy, спрямованими по осям еліпса, рівняннями зв'язків є

$$f_1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad f_2 = z = 0.$$

Перше з цих рівнянь обертається в тотожність, якщо покласти

$$x = acos\alpha, \qquad y = bsin\alpha.$$

Таким чином, в якості незалежної координати можна вибрати параметр α, а число s ступенів вільності в цьому випадку дорівнює одиниці.

Якщо точка рухається по сфері радіуса l з центром у початку координат, то рівнянням в'язкі є рівняння

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0,$$

яке обертається в тотожність підстановкою

$$x = lsin\theta cos\varphi, \quad y = lsin\theta sin\varphi, \quad z = lcos\theta,$$

де θ і φ – кути сферичних координат. Отже, ці кути можуть служити незалежними узагальненими координатами, а число степеней вільності $s = 2$.

Нарешті, у випадку вільної точки $s = 3$, а в якості незалежних координат можна взяти будь-які криволінійні координати, наприклад циліндричні; ці координати пов'язані з декартовими координатами точки співвідношеннями:

$$x = \rho cos\varphi, \quad y = \rho sin\varphi, \quad z = z.$$

Використовуючи формули перетворення (2.4), зобразимо загальне рівняння механіки (2.3) у формі рівняння щодо незалежних координат і їх похідних за часом. Для цього, перш за все, знайдемо віртуальні переміщення $\delta\vec{r}_i$ всіх N точок системи як функції q:

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \quad (i = 1, 2, ..., N). \tag{2.7}$$

Підставляючи (2.7) в загальне рівняння механіки (2.3) і змінюючи порядок підсумовування, одержимо:

$$\sum_{j=1}^{s}\left\{\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right\}\delta q_j = 0. \tag{2.8}$$

Тут всі суми за індексом i мають розмірність енергії, поділеної на розмірність відповідної координати q_j. При цьому ті суми по i, в які входять прискорення точок, визначають кінетичну енергію як функцією узагальнених координат і їх похідних за часом. Дійсно, перетворимо 1-тий член однієї з таких сум:

$$\ddot{\vec{r}}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec{r}}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right). \tag{2.9}$$

Потім, використовуючи (2.4), знайдемо швидкості точок як функції узагальнених координат

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2, ..., N). \tag{2.10}$$

Звідси видно, що швидкості матеріальних точок є лінійними функціями величин $\dot{q}_j$ $(j = 1, ..., s)$, що називаються узагальненими швидкостями. Вираз (2.9) можна також звести до еквівалентного виду, який буде зручним для подальшого розгляду. Для цього обчислимо частинну похідну від швидкості $\dot{\vec{r}_i}$ точки за узагальненою швидкістю $\dot{q}_j$. Використовуючи співвідношення (2.10), а також незалежність радіус-вектора точки від узагальненої швидкості, одержимо:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}_i}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_{l=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\ \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right) = \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\ \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_j}. \tag{2.11}$$

Оскільки узагальнені швидкості $\dot{q}$ незалежні, то

$$\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}_j} = \delta_{jl},$$

де δ_{jl}– символ Кронекера:

$$\delta_{jl} = \begin{cases} 1, & j = l, \\ 0, & j \neq l. \end{cases} \tag{2.12}$$

У результаті із (2.11) одержимо, що має місце рівність частинної похідної від швидкості точки за узагальненою швидкістю і частинною похідною радіуса-вектора тієї ж точки за відповідною узагальненою координатою, тобто

$$\begin{gathered} \frac{\partial \dot{\vec{r}_i}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \\ i = 1, 2, ..., N; \quad j = 1, 2, ..., s. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Нарешті доведемо, що можна змінити порядок диференціювання за t і q_j у другому доданку правої частини формули (2.9), тобто покажемо, що має місце рівність

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right). \tag{2.14}$$

Дійсно, використовуючи (2.10), одержимо

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial}{\partial q_j}\ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \cdot \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial q_j}\ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \tag{2.15}$$

З іншого боку, враховуючи (2.4), маємо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial}{\partial q_l}\ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t}\ \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \tag{2.16}$$

Мішані частинні похідні в правих частинах (2.15) і (2.16) в силу теореми Шварца про рівність мішаних похідних не залежать від порядку диференціювання, тобто маємо

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}=\frac{\partial}{\partial q_l}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

і

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j},$$

що і доводить справедливість рівності (2.14).

Враховуючи (2.13) і (2.14), замість (2.9) отримаємо

$$\ddot{\vec{r}}_i\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)-\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}. \tag{2.17}$$

Використовуючи співвідношення (2.17), перший доданок у фігурних дужках в рівнянні (2.8) можна представити у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)-\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}. \tag{2.18}$$

Нарешті, врахувавши (2.10), задамо кінетичну енергію системи як функцію узагальнених швидкостей і координат:

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}(\dot{\vec{r}}_i)^2\Bigg|_{\substack{\dot{\vec{r}}_1=\dot{\vec{r}}_1(q,\dot{q},t),\\ \cdots\cdots\\ \dot{\vec{r}}_N=\dot{\vec{r}}_N(q,\dot{q},t)}}=T(q,\dot{q},t) \tag{2.19}$$

(тут і надалі під $\dot{q}$ розуміється сукупність узагальнених швидкостей, так само як під q розуміється сукупність всіх узагальнених координат). Диференціюючи цю функцію за узагальненими швидкостями і координатами, знайдемо

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j},\quad \frac{\partial T}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}\quad (j=1,2,...,s). \tag{2.20}$$

Порівнюючи (2.18) і (2.20), одержимо:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}\quad (j=1,2,...,s). \tag{2.21}$$

„Суми по точкам системи” у рівнянні (2.8), що залежать від заданих (активних) сил, позначимо символами

$$Q_j=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\qquad (j=1,2,...,s). \tag{2.22}$$

Оскільки всі задані сили $\vec{F}_i$ визначені як функції $\vec{r}_i$, $\vec{v}_i$ і t $(i = 1, 2, ..., N)$, а всі вектори $\vec{r}_i$ і $\vec{v}_i$ згідно (2.4) і (2.10) є функціями $q, \dot{q}$ і t, то величини Q_j є заданими функціями узагальнених координат, узагальнених швидкостей і часу.

З'ясуємо фізичний зміст функцій Q_j. Для цього представимо віртуальну роботу δA всіх заданих сил $\vec{F}_i$ у термінах Q_j. Використовуючи співвідношення (2.7) і (2.22), знайдемо:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right\} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j. \tag{2.23}$$

Із (2.23) видно, що у виразі для віртуальної роботи величина Q_j відіграє по відношенню до варіації δq_j узагальненої координати ту ж роль, яку сила $\vec{F}_i$ відіграє по відношенню до віртуального переміщення $\delta \vec{r}_i$. Тому величину Q_j називають *узагальненою силою*, що відповідає узагальнені координаті q_j. Зауважимо, що узагальнені координати q_j не обов'язково мають розмірність довжини, тому і узагальнені сили Q_j не обов'язково мають розмірність сили. Проте добуток $Q_j \delta q_j$ завжди має розмірність роботи. Таким чином, розмірність узагальненої сили Q_j дорівнює розмірності роботи, поділеній на розмірність відповідної узагальненої координати q_j.

Використовуючи (2.8), (2.21) і визначення узагальненої сили (2.22), прийдемо до загального рівняння механіки в узагальнених координатах:

$$\sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0, \tag{2.24}$$

де всі варіації δq_j незалежні. Тому із загального рівняння механіки (2.24) випливають диференціальні рівняння руху, а саме рівняння Лагранжа в незалежних координатах

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, ..., s). \tag{2.25}$$

Ці рівняння, як і рівняння Лагранжа з реакціями в'язів (1.21), справедливі для систем з голономними ідеальними в'язами.

Як видно із (2.25), рівняння Лагранжа в незалежних координатах не містять реакцій в'язів як невідомих функцій, хоча повністю враховують вплив в'язів на рух механічної системи. Невідомими в цих рівняннях є узагальнені незалежні координати $q_j(t)$ як функції часу. Кількість невідомих і кількість рівнянь в (2.25) дорівнює числу s степенів вільності.

Розглянемо фізично важливий випадок, коли задані сили $\vec{F}_i$ потенціальні. При цьому потенціальна енергія системи дорівнює $U(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, t)$:

$$\vec{F}_i = -\nabla_i U(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, t) \quad (i = 1, 2, ..., N)$$

і для узагальненої сили (2.22), одержимо:

$$Q_j = -\sum_{i=1}^{N} \nabla_i U \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, ..., s). \tag{2.26}$$

Таким чином, рівняння Лагранжа для випадку *потенціальних сил* набувають вигляду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, ..., s). \tag{2.27}$$

У випадку, якщо потенціальна енергія $U(\vec{r}) = U(\vec{r}(q)) = U(q)$ залежить лише від узагальнених координат і не залежить від узагальнених швидкостей, тобто:

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0,$$

то перший член рівняння (2.27) то можна зобразити у вигляді

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}T = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T - U).$$

Тоді рівняння Лагранжа (2.27) можуть бути записані у вигляді

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T - U) - \frac{\partial}{\partial q_j}T + \frac{\partial U}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T - U) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - U) = 0.$$

Вводячи позначення

$$\mathscr{L} = T - U, \tag{2.28}$$

остаточно одержимо рівняння Лагранжа другого роду для потенціальних сил:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = \overline{1, s}. \tag{2.29}$$

Функція $\mathscr{L} = T - U$, що дорівнює різниці кінетичної і потенціальної енергій, називається *лагранжіаном* або *функцією Лагранжа*. Той факт, що функція Лагранжа містить тільки координати і швидкості, є відображенням того, що механічний стан повністю визначається заданням координат і швидкостей точок системи.

2.2 Циклічні координати і симетрія силового поля і в'язів

Підкреслимо, що раціональний вибір незалежних координат може істотно спростити конкретний вид рівнянь Лагранжа і тим самим полегшити розв'язання задачі. Дійсно, нехай узагальнена координата q_j вибрана так, що кінетична енергія T явно не залежить від неї, а відповідна цій координаті узагальнена сила Q_j дорівнює нулю, тобто

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0, \quad Q_j = 0. \tag{2.30}$$

Тоді рівняння Лагранжа, відповідне координаті q_j, відразу призведе до першого інтеграла

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \equiv f(q, \dot{q}, t) = const. \tag{2.31}$$

Якщо задані сили потенціальні, то умови (2.30) набувають вигляду

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0. \tag{2.32}$$

Координати, від яких кінетична і потенціальна енергії системи явно не залежать, називаються *циклічними координатами.* Циклічність координат у багатьох випадках пов'язана з симетрією заданого силового поля і в'язів, тому раціональний вибір узагальнених координат повинен відображати цю симетрію.

Вибираючи незалежні координати так, щоб число циклічних координат було максимальним, і інтегруючи рівняння Лагранжа, можна знайти спільний розв'язок рівнянь (2.25) (або (2.27)) у вигляді

$$q_j = q_j(t, C_1, C_2, ..., C_{2s}) \quad (j = 1, 2, ..., s) \tag{2.33}$$

(тут C_α – сталі інтегрування). Цей розв'язок дозволяє визначити закон руху системи і реакції в'язів як функції часу. Дійсно, використовуючи (2.4), знайдемо $\vec{r}_i(t)$ $(i = 1, 2, ..., N)$. Потім, диференціюючи $\vec{r}_i(t)$ за часом, отримаємо вектори швидкостей і прискорень усіх точок: $\vec{v}_i(t)$, $\vec{w}_i(t)$ $(i = 1, 2, ..., N)$. І нарешті, використовуючи знайдені функції і рівняння Лагранжа (1.21), отримаємо реакції в'язів як функції часу:

$$\vec{R}_i(t) = m_i \vec{w}_i(t) - \vec{F}_i(t) \quad (i = 1, 2, ..., N), \tag{2.34}$$

де

$$\vec{F}_i(t) = \vec{F}_i(\vec{r}_1(t), ..., \vec{r}_N(t), \quad \vec{v}_1(t), ..., \vec{v}_N(t), t).$$

2.3 Принцип віртуальних переміщень

На закінчення розглянемо принцип віртуальних переміщень, що є основою статики – великого розділу механіки, в якому вивчається рівновагу механічних систем (цей принцип відіграє важливу роль у багатьох інженерних розрахунках). Нехай в початковий момент часу система знаходиться в положенні $\vec{r}_{i0}$ $(i = 1, 2, ..., N)$, а швидкості всіх її точок рівні нулю; якщо система і в будь-який інший момент часу залишається в положенні $\vec{r}_{i0}$ $(i = 1, 2, ..., N)$, то це положення називається положенням рівноваги системи. Із загального рівняння механіки (2.3) випливає, що в положенні рівноваги (коли $\vec{w}_i = 0$) віртуальна робота заданих сил повинна дорівнювати нулю, тобто

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0. \tag{2.35}$$

Це необхідна і достатня умова рівноваги системи називається *принципом віртуальних переміщень* (необхідність і достатність (2.35) випливає з еквівалентності рівнянь Лагранжа з реакціями в'язів і загального рівняння механіки). Для застосувань корисним є формулювання принципу віртуальних переміщень у координатній формі. З цією метою розкладемо задані сили і віртуальні переміщення за базисом $\vec{n}_x$, $\vec{n}_y$, $\vec{n}_z$:

$$\vec{F}_i = F_{ix}\vec{n}_x + F_{iy}\vec{n}_y + F_{iz}\vec{n}_z,$$
$$\delta\vec{r}_i = \delta x_i\vec{n}_x + \delta y_i\vec{n}_y + \delta z_i\vec{n}_z.$$

Підставивши отримані розклади у (2.35), одержимо запис принципу віртуальних переміщень у координатні формі:

$$\sum_{i=1}^{N} [F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i] = 0. \tag{2.36}$$

На завершення, запишемо принцип віртуальних переміщень в незалежних координатах. Використовуючи співвідношення (2.23), замість (2.35) одержимо:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j = 0, \tag{2.37}$$

звідки в силу незалежності всіх варіацій δq_j випливає, що необхідною і достатньою умовою рівноваги механічної системи з голономними ідеальними в'язами є рівність нулю всіх узагальнених сил в розглянутому положенні системи. Таким чином, положення рівноваги системи визначається s рівняннями:

$$Q_j = 0 \quad (j = 1, 2, ..., s). \tag{2.38}$$

2.4 Узагальнено-потенціальні сили

Розглянемо узагальнено-потенціальні сили, які можуть бути задані за допомогою скалярної функції $\mathscr{U}$, що залежить не тільки від положень точок і часу, але і від швидкостей точок (така функція називається *узагальненим потенціалом*). Добре відомим прикладом узагальнено-потенціальної сили є сила Лоренца, з якою електромагнітне поле діє на рухомий заряд. Ця сила може бути представлена у вигляді [1], [9]

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \dot{\vec{r}}}\right) - \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \vec{r}}, \tag{2.39}$$

де

$$\mathscr{U} = -\frac{e}{c}\overrightarrow{A}\dot{\vec{r}} + e\varphi, \tag{2.40}$$

а $\vec{A}$ і φ – векторний і скалярний потенціали електромагнітного поля, задані як функції точки простору і часу.

Узагальнені сили, відповідні силі виду (2.39), завжди можна представити у вигляді

$$Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial q_j}. \tag{2.41}$$

При наявності узагальнено-потенціальних (2.41) і дисипативних сил Q_j^d рівняння Лагранжа в незалежних координатах (2.25) можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial q_j} + Q_j^d,$$

або

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j} = Q_j^d \quad (j = 1, 2, ..., s), \tag{2.42}$$

де тепер функція Лагранжа $\mathscr{L}$ – є різницею кінетичної енергії і узагальненого потенціалу: $\mathscr{L} = T - \mathscr{U}$. Підкреслимо, що всі Q_j^d є функціями узагальнених координат і узагальнених швидкостей.

Підведемо основні підсумки даного розділу. Перш за все зауважимо, що в аналітичному методі Лагранжа рівняння (2.25), (2.27), (2.29), (2.42) є основними рівняннями механіки. Вони встановлюють в'язь між прискореннями, швидкостями і координатами точок, тобто є рівняннями руху системи. З математичної точки зору вказані рівняння руху утворюють систему s диференціальних рівнянь другого порядку для s невідомих функцій $q_j(t)$. Загальний розв'язок такої системи містить $2s$ довільних сталих інтегрування $C_1, C_2, ..., C_{2s}$. Таким чином, потрібно знайти функції $q_j = q_j(t, C_1, C_2, ..., C_{2s})$ (2.33). Для знаходження сталих інтегрування і, тим самим, повного опису руху системи, необхідне знання початкових умов, що характеризують стан системи в певний момент часу t, а саме початкових координат q_{j0} і швидкостей $\dot{q}_{j0}$. З цих рівнянь можна визначити сталі $C_k = C_k(q_{j0}, \dot{q}_{j0}), \quad k = 1, ..., 2s, \quad j = 1, ..., s$.

В цілому, метод Лагранжа має безсумні переваги в порівнянні з ньютонівським підходом, зокрема:

1. Рівняння Лагранжа в незалежних координатах (див. (2.25), (2.27), (2.29), (2.42)) записуються для механічної системи як ціле, і не розглядаючи окремі матеріальні точки системи.

2. В лагранжовому підході зменшується кількість необхідних обчислень, оскільки нема потреби спеціально визначати сили реакцій і зв'язки. Врахування в'язів зводиться до зменшення числа координат, залишаються лише незалежні.

3. На відмінну від рівнянь Ньютона для системи матеріальних точок, в які входить велике число векторів сил і прискорень, у методі Лагранжа ми оперуємо лише з двома скалярними функціями – кінетичною T і потенціальною U енергіями, що суттєво спрощує поставлену задачу.

4. Метод Лагранжа застосовний і для описання більш загальних (не механічних) систем, коли відсутнє поняття „маса" і т.д. (Наприклад, полів і легко узагальнюється на релятивістський випадок. Зокрема лагранжовий підхід є математичною основою сучасної релятивістської теорії поля, в тому числі і релятивістської квантової теорії поля [9–11]).

5. Загальна форма рівняння Лагранжа другого роду не залежить від вибору системи незалежних координат; іншими словами, рівняння Лагранжа в незалежних координатах коваріантні відносно точкових перетворень (нагадаємо, що точковим перетворенням називаються перетворення від однієї системи узагальнених координат до іншої системи за

допомогою довільних однозначних функцій).

2.5 Приклади одержання рівнянь Лагранжа 2-го роду

Проілюструємо одержання рівнянь Лагранжа 2-го роду для наступних найпростіших механічних систем.

1. Рух вільної матеріальної точки в декартових координатах.

Розв'язання. Для однієї вільної матеріальної точки $N = 1$, $k = 0$, тому число степеней вільності дорівнює $s = 3N - k = 3$. У якості узагальнених координат q_1, q_2, q_3 виберемо декартові координати точки x, y, z: $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$. Тоді для кінетичної енергії маємо

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Обчислимо частинні похідні від кінетичної енергії, що входять у рівняння Лагранжа (2.25):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \; \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}; \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Узагальнені сили Q_j $(j = 1, 2, 3)$ у цьому випадку дорівнюють (див. (2.22)):

$$Q_1 = \vec{F}\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = F_x,$$
$$Q_2 = \vec{F}\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = F_y,$$
$$Q_3 = \vec{F}\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = F_z,$$

де F_x, F_y, F_z – компоненти вектора заданої сили $\vec{F}$. Підставивши обчислені вище похідні від кінетичної енергії та узагальнені сили в рівняння (2.25), прийдемо до рівнянь руху вільної матеріальної точки, які в даному випадку співпадають з рівняннями Ньютона:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z.$$

2. Плоский рух вільної матеріальної точки в полярних координатах.

Розв'язання. Розглянемо вільну матеріальну точку, що рухається в площині XOY. На точку накладено один зв'язок $(k = 1)$, рівняння якого $z = 0$.

Тому число степеней вільності системи $s = 3N - k = 2$, а положення точки на площині XOY у довільний момент часу задається координатами x та y. Рівняння переходу від x та y до полярних координатах r та φ, які в даній задачі виберемо у якості узагальнених координат, має вигляд:

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$

звідки проекції швидкості $\dot{x}$, $\dot{y}$ рівні:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi,$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Виразимо кінетичну енергію $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ точки через узагальнені швидкості $\dot{r}, \dot{\varphi}$:

$$T = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2].$$

Узагальнені сили Q_r і Q_φ можна одержати, виходячи з їх визначення (2.22), згідно з яким

$$Q_r = \vec{F}\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \vec{F}\frac{\vec{r}}{r} = F_r,$$
$$Q_\varphi = \vec{F}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \vec{F}r\vec{n} = rF_\varphi.$$

Тут вектор $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}$ напрямлений вздовж одиничного вектора $\vec{n}$, що перпендикулярний радіус-вектору $\vec{r}$.

Одержимо тепер два рівняння Лагранжа за координатами r та φ. Для координати r маємо

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial\dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{r}} = m\ddot{r},$$

тому відповідне рівняння має вигляд

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = F_r.$$

Другий доданок в цьому рівнянні виник внаслідок наявності доцентрового прискорення.

Для координати φ маємо:

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi},$$

тому відповідне рівняння руху прийме вид:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} = rF_\varphi.$$

Як бачимо, ліва частина цього рівняння є похідною за часом від кінетичного моменту, а права – момент діючої сили. Таким чином, ми прийшли до відомої теореми про зміну кінетичного моменту матеріальної точки.

3. Математичний маятник.

Розв'язання. На математичний маятник ($N = 1$) накладено два зв'язки ($k = 2$), рівняння яких мають вигляд:

$$\begin{aligned} &l^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0, \\ &z = 0, \end{aligned}$$

тому число степеней вільності дорівнює $s = 3N - k = 1$. У полярній системі координат в якості єдиної незалежної координати виберемо кут φ (рис.2.1):

$$\begin{cases} x = lsin\varphi, \\ y = lcos\varphi. \end{cases}$$

Кінетична і потенціальна енергії маятника рівні:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x} + \dot{y}) = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2, \quad U = -mgy = -mglcos\varphi.$$

Тому явний вид функції Лагранжа наступний

$$\mathscr{L} = T - U = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mglcos\varphi.$$

Знайдемо частині похідні функції Лагранжа

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m\dot{\varphi}l^2,$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi} = -mglsin\varphi.$$

У результаті одержимо таке рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt}m\dot{\varphi}l^2 + mglsin\varphi = 0$$

або

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mglsin\varphi.$$

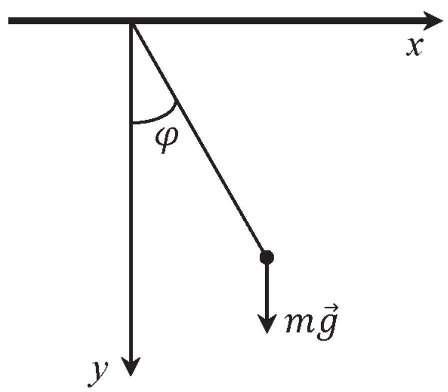

Рис. 2.1. Математичний маятник.

звідки отримуємо рівняння руху математичного маятника

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} sin\varphi,$$

яке легко інтегрується в разі малих коливань.

4. Записати функцію Лагранжа математичного маятника маси m і довжини l, точка підвісу якого рухається в горизонтальні площині по закону $x = x(t)$ [12].

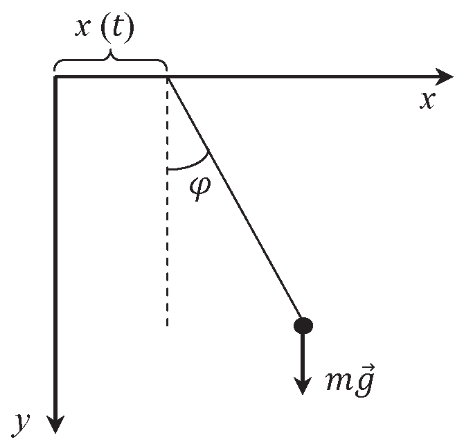

Рис. 2.2. Математичний маятник з рухомою точкою підвісу.

Розв'язання. Система має одну степінь вільності. У якості узагальненої координати візьмемо кут φ відхилення маятника від вертикалі (Рис. 2.2). Координати тіла маси m в інерціальні системі відліку запишуться у вигляді:

$$\begin{cases} X = x(t) + l\sin\varphi, \\ Y = l\cos\varphi. \end{cases}$$

Для знаходження кінетичної енергії T маятника обчислимо проекції швидкостей $\dot X$, $\dot Y$

$$\begin{cases} \dot X = \dot x(t) + \dot\varphi l \cos\varphi, \\ \dot Y = -l\dot\varphi \sin\varphi. \end{cases}$$

у результаті одержимо:

$$T = \frac{m(\dot X^2 + \dot Y^2)}{2} = \frac{m}{2}\left\{\dot x^2(t) + 2\dot x(t) l\dot\varphi\cos\varphi + l^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi + l^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi\right\},$$

або

$$T = \frac{m}{2}\left\{\dot x^2(t) + 2\dot x(t) l\dot\varphi\cos\varphi + l^2\dot\varphi^2\right\}.$$

Потенціальна енергія маятника дорівнює

$$U = -mgl\cos\varphi.$$

У результаті для шуканої функції Лагранжа остаточно одержимо:

$$\mathscr{L} = T - U = \frac{m}{2}\left\{\dot x^2(t) + 2\dot x(t) l\dot\varphi\cos\varphi + l^2\dot\varphi^2\right\} + mgl\cos\varphi.$$

5. Записати функцію Лагранжа для плоского маятника з масою m_2, точка підвісу якого (з масою m_1 в ній) може здійснювати рух вздовж горизонтальної прямої [12].

Розв'язяння. Система має дві степені вільності. У якості узагальнених координат зручно вибирати координату x точки підвісу маятника та кут φ між ниткою маятника і вертикаллю (Рис. 2.3). Тоді координати x_1, y_1 маятника маси m_2 матимуть вид:

$$x_1 = l\sin\varphi + x, \qquad y_1 = l\cos\varphi$$

Продиференціюємо x_1, y_1 за часом, одержимо

$$\dot x_1 = l\dot\varphi\cos\varphi + \dot x, \qquad \dot y_1 = -l\dot\varphi\sin\varphi$$

Для знаходження кінетичної енергії T маятника обчислимо проекцію швидкості $\dot x$

$$\dot x_1^2 = l^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi + 2l\dot\varphi\dot x\cos\varphi + \dot x^2.$$

У результаті одержимо:

$$T = \frac{m_1}{2}\dot x^2 + \frac{m_2}{2}(l^2\dot\varphi^2 + 2l\dot\varphi\dot x\cos\varphi + \dot x^2) = \frac{m_1+m_2}{2}\dot x^2 + \frac{m_2}{2}(l^2\dot\varphi^2 + 2l\dot\varphi\dot x\cos\varphi).$$

Потенціальна енергія маятника дорівнює

$$U = -m_2 gl \cos\varphi.$$

У результаті для шуканої функції Лагранжа остаточно одержимо:

$$\mathscr{L} = T - U = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi) + m_2 gl\cos\varphi.$$

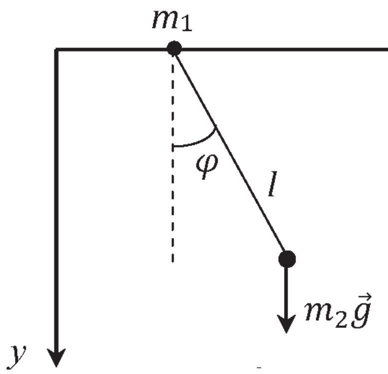

Рис. 2.3. Плоский маятник з рухомою точкою підвісу.

6. Три стержні однакової маси m з'єднані між собою шарнірами. Перший стержень може обертатися навколо нерухомого шарніра O, а до вільного кінця третього стержня прикладена горизонтальна сила $\vec{F}$, яка утримує всю систему в вертикальній площині в рівновазі. При цьому стержні утворюють з вертикаллю кути, відповідно рівні φ_1, φ_2, φ_3. Визначити ці кути, якщо $F = m\vec{g}$ [13].

Розв'язання. Для розв'язання задачі застосуємо принцип віртуальних переміщень у координатній формі (2.36). Беручи центр шарніра O за початок координат, координатні осі направляємо, як показано на рис. 2.4. На шість координат точок A, B і C даної системи накладено три зв'язки ($OA = \text{const}$, $AB = \text{const}$, $BC = \text{const}$); отже, система має $s = 2N - k = 2 \cdot 3 - 3 = 3$ степеней вільності.

Таким чином, положення даної системи визначається трьома незалежними параметрами – трьома кутами φ_1, φ_2 і φ_3 (див. рис. 2.4).

Силу тяжіння кожного стержня розкладемо на дві складові, прикладені до кінців стержня; у результаті отримаємо систему сил, показану на рис. 2.4. Використовуючи вирази елементарних робіт заданих сил, умову рівноваги (2.36) цієї (механічної) системи сил можна виразити в наступному вигляді:

$$mg\delta x_A + mg\delta x_B + \frac{mg}{2}\delta x_C + F\delta y_C = 0.$$

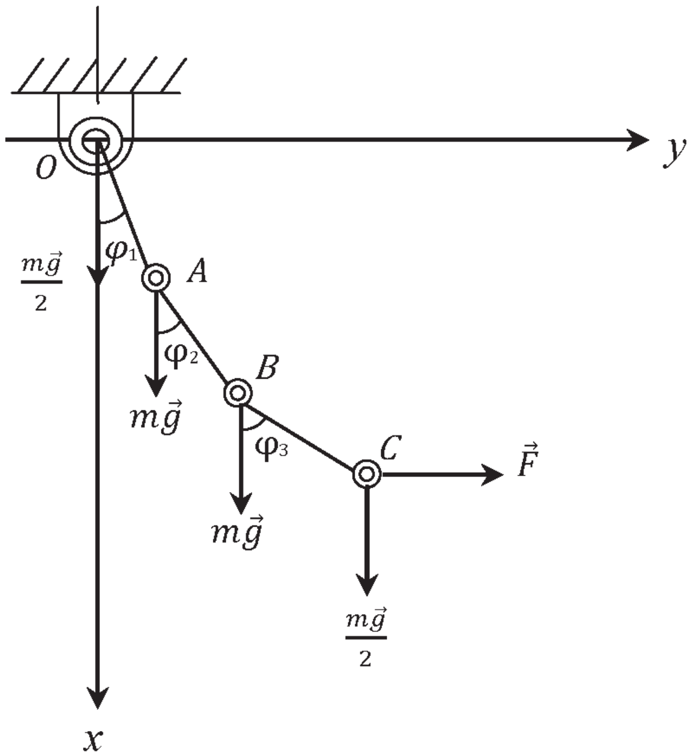

Рис. 2.4. Система трьох стержнів, зрівноважена горизонтальною силою $\vec{F}$.

Враховуючи, що за умовою задачі $F = mg$, із попереднього виразу одержимо

$$\delta x_A + \delta x_B + \frac{1}{2}\delta x_C + \delta y_C = 0. \tag{2.43}$$

Позначимо $OA = a$, $AB = b$ і $BC = c$, та виразимо координати точок A, B і C через шукані кути φ_1, φ_2, φ_3:

$$x_A = a\cos\varphi_1; \quad x_B = a\cos\varphi_1 + b\cos\varphi_2;$$
$$x_C = a\cos\varphi_1 + b\cos\varphi_2 + c\cos\varphi_3; \quad y_C = a\sin\varphi_1 + b\sin\varphi_2 + c\sin\varphi_3.$$

Запишемо варіації координат цих точок через варіації кутів φ_1, φ_2, φ_3:

$$\begin{aligned}
\delta x_A =& - a\sin\varphi_1\delta\varphi_1; \quad \delta x_B = -a\sin\varphi_1\delta\varphi_1 - b\sin\varphi_2\delta\varphi_2;\\
\delta x_C =& - a\sin\varphi_1\delta\varphi_1 - b\sin\varphi_2\delta\varphi_2 - c\sin\varphi_3\delta\varphi_3;\\
\delta y_C =& a\cos\varphi_1\delta\varphi_1 + b\cos\varphi_2\delta\varphi_2 + c\cos\varphi_3\delta\varphi_3;
\end{aligned}$$

Підставляючи ці значення варіацій координат в рівняння, що виражає умову рівноваги системи (2.43), і групуючи члени, що містять $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ і $\delta\varphi_3$, отримаємо

$$\begin{aligned}
a(\cos\varphi_1 - 2,5\sin\varphi_1)\delta\varphi_1 + b(\cos\varphi_2 - 1,5\sin\varphi_2)\delta\varphi_2 +\\
+ c(\cos\varphi_3 - 0,5\sin\varphi_3)\delta\varphi_3 = 0.
\end{aligned}$$

Ця рівність має виконуватися при будь-якому можливому переміщенні даної системи, тобто при будь-яких значеннях варіацій $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ і $\delta\varphi_3$. Оскільки ці варіації незалежні і кожна з них може мати довільне значення, то це можливо лише за умови, що коефіцієнт при кожній з цих варіацій дорівнює нулю, тобто мають місце рівності:

$$\cos\varphi_1 - 2,5\sin\varphi_1 = 0,$$
$$\cos\varphi_2 - 1,5\sin\varphi_2 = 0,$$
$$\cos\varphi_3 - 0,5\sin\varphi_3 = 0,$$

або $\mathrm{tg}\varphi_1 = 0,4$; $\mathrm{tg}\varphi_2 = 0,6667$; $\mathrm{tg}\varphi_3 = 2$. Звідси знаходимо

$$\varphi_1 = 21^\circ 48', \quad \varphi_2 = 33^\circ 40', \quad \varphi_3 = 64^\circ 25'.$$

7. Через блоки A і B з нерухомими осями перекинутий шнур, що підтримує рухомий блок C; частині шнура, що не лежать на блоках, вертикальні. Блок C навантажений гирею масою $m = 4$ кг, а до кінців шнура прикріплені вантажі вагою $m = 2$ кг і $m = 3$ кг. Визначити прискорення всіх трьох вантажів, нехтуючи масами блоків та шнура і тертям на осях (рис. 2.5) [13].

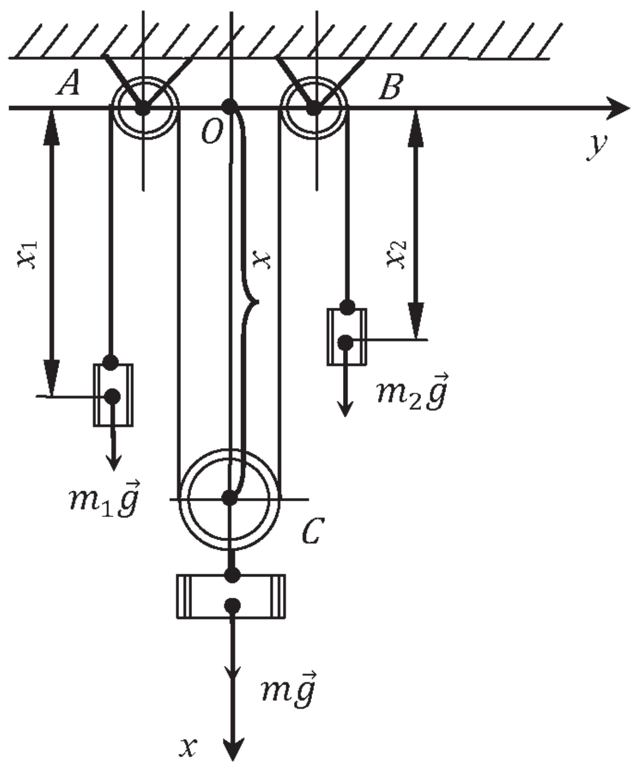

Рис. 2.5. Система блоків, з трьома рухомими вантажами.

Розв'язання. Розташовуючи координатні осі, як зазначено на рис. 2.5, застосовуємо загальне рівняння динаміки у координатні формі

$$\sum \left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2} \right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2} \right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2} \right)\delta z \right] = 0,$$

яке в даному випадку приймає вид

$$\left(mg - mw \right)\delta x + \left(m_1 g - m_1 w_1 \right)\delta x_1 + \left(m_2 g - m_2 w_2 \right)\delta x_2 = 0,$$

де w, w_1, w_2 – проекції шуканих прискорень вантажів на вісь x.

Враховуючи, що довжина шнура постійна, очевидно, маємо

$$x_1 + 2x + x_2 = \mathrm{const}.$$

Таким чином, три координати x, x_1 і x_2, що визначають положення даної системи (передбачається, що всі вантажі переміщаються прямолінійно), пов'язані однією умовою; отже, дана система має два степені вільності. Варіюючи останню рівність, знаходимо залежність між варіаціями координат трьох вантажів:

$$\delta x_1 + 2\delta x + \delta x_2 = 0,$$

звідси

$$\delta x = -\frac{1}{2}(\delta x_1 + \delta x_2).$$

Підставляючи це значення δx в рівняння Даламбера-Лагранжа і виносячи за дужки множники δx_1 і δx_2, одержимо

$$\left(m_1 g - m_1 w - \frac{mg}{2} + \frac{m}{2}w \right)\delta x_1 + \left(m_2 g - m_2 w_2 - \frac{mg}{2} + \frac{m}{2}w \right)\delta x_2 = 0.$$

Це рівняння має місце при будь-яких, незалежних один від одного значеннях варіацій δx_1, і δx_2, а це можливо лише за умови, що коефіцієнт при кожній з цих варіацій дорівнює нулю. Отже, має бути:

$$\frac{m}{2}w - m_1 w_1 = \frac{mg}{2} - m_1 g, \quad \frac{m}{2}w - m_2 w_2 = \frac{mg}{2} - m_2 g,$$

або, підставляючи дані числові значення мас,

$$w - w_1 = 0, \quad 2w - 3w_2 = -g.$$

Звідки

$$w_1 = w \quad \text{або} \quad w_2 = \frac{2}{3}w + \frac{g}{3}.$$

Щоб отримати третє рівняння для визначення трьох шуканих прискорень, продиференціюємо двічі по t рівняння $x_1 + 2x + x_2 = \mathrm{const}$. Тоді маємо

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} = 0,$$

або

$$w_1 + 2w + w_2 = 0.$$

Підставляючи сюди значення w_1 і w_2, одержуємо

$$w + 2w + \frac{2}{3}w + \frac{g}{3} = 0.$$

Звідси знаходимо

$$w = -\frac{g}{11}$$

і, отже,

$$w_1 = -\frac{g}{11}, \quad w_2 = -\frac{2}{33}g + \frac{g}{3} = \frac{3}{11}g.$$

Від'ємне значення прискорень w і w_1, вказує на те, що їх напрямок збігається з від'ємним напрямом осі x, тобто що ці прискорення спрямовані вгору.

8. Функція Лагранжа для заряду в електромагнітному полі.

Існує один особливо важливий випадок непотенціальних сил, коли, незважаючи на це, можна записати рівняння руху у вигляді (2.29). Такими силами є сили, що діють на заряджені частинки з боку електромагнітного поля.

Рівняння Ньютона для руху зарядженої частинки в електромагнітному полі має вигляд:

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\dot{\vec{r}} \times \vec{H}\right]. \tag{2.44}$$

Електромагнітне поле, що характеризується векторами $\vec{E}$ і $\vec{H}$, задовольняє рівняння Максвелла:

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}; \tag{2.45}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}; \tag{2.46}$$

$$\mathrm{div}\vec{H} = 0; \tag{2.47}$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho. \tag{2.48}$$

Розв'язок рівняння (2.47) має вигляд:

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}, \tag{2.49}$$

де $\vec{A}$ – довільний вектор, що називається векторним потенціалом. Підставляючи (2.49) у (2.46), знаходимо:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{A} = -\mathrm{rot}\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \tag{2.50}$$

або

$$\mathrm{rot}\left(\vec{E} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0. \tag{2.51}$$

Розв'язок рівняння (2.51) має вигляд

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi, \tag{2.52}$$

де φ – довільна скалярна функція.

Отже, вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ можна виразити через *векторний потенціал* $\vec{A}$ і *скалярний потенціал* φ електромагнітного поля.

Рівняння (2.45) і (2.48), що залишились, потрібні для визначення $\vec{A}$ і φ. Таким чином, є два способи опису електромагнітного поля: 1) за допомогою векторів електричної і магнітної напруженостей $\vec{E}$ і $\vec{H}$; 2) за допомогою векторного потенціалу $\vec{A}$ і скалярного потенціалу φ. Між ними існує зв'язок, що виражається формулами (2.49) і (2.52). До рівнянь Ньютона (2.44) входять вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$, а до функції Лагранжа входитимуть $\vec{A}$ і φ.

Обчислимо проекцію рівняння (2.44) на вісь x:

$$m\ddot{x} = eE_x + \frac{e}{c}\ [\dot{y}H_z - \dot{z}H_y]\,. \tag{2.53}$$

Підставляючи в (2.53) значення E_x, H_z і H_y, виражені через $\vec{A}$ і φ згідно формул (2.49) і (2.52), знайдемо:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} = &-e\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{e}{c} \cdot \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{e}{c}\left[\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right] = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}e\varphi - \frac{e}{c} \cdot \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial x}(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z) - \\ &- \frac{e}{c}\left[\dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}\right]. \end{aligned} \tag{2.54}$$

У правій частині рівності (2.54) ми додали і відняли члени $\frac{e}{c}\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}$. Вираз $\frac{\partial}{\partial x}(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z)$ є не що інше, як $\frac{\partial}{\partial x}(\vec{v} \cdot \vec{A})$; а

$$\frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\vec{v} \cdot \vec{A}).$$

Крім того, $m\ddot{x}$ запишемо у вигляді $\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \frac{mv^2}{2}$. Враховуючи все це, рівність (2.54) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{mv^2}{2}\right)\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left(e\varphi - \frac{e}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right) + \\ + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(e\varphi - \frac{e}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\frac{mv^2}{2}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

При цьому ми врахували, що скалярний потенціал φ явно не залежить від швидкостей, а кінетична енергія явно не залежить від координат. Об'єднуючи відповідним чином члени в (2.55), знайдемо:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{mv^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{mv^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right). \tag{2.56}$$

Аналогічні рівняння виконуються для двох інших проекцій.

Порівнюючи (2.56) з (2.29) бачимо, що функція Лагранжа для зарядженої частинки в електромагнітному полі має вигляд

$$\mathscr{L} = \frac{mv^2}{2} - e\varphi(x,y,z) + \frac{e}{c}(\vec{v}\cdot\vec{A}(x,y,z)). \tag{2.57}$$

Ми показали, що у дуже важливому випадку непотенціальної сили Лоренца рівнянням (2.27) можна надати форми (2.29), коли непотенціальні сили відсутні. Однак, коли на систему діють сили тертя, то записати рівняння Лагранжа для такої системи у формі (2.29) неможливо. Щоб повністю описати рух системи, потрібно, крім функції Лагранжа, задати також сили тертя. Сили тертя – це по суті непотенціальні сили взаємодії частинок, що включені до системи, з оточуючими частинками, які не включені до системи. З точки зору механіки, у замкнених системах сил тертя не повинно бути. Однак дослід показує, що при наявності багатьох частинок енергія системи може змінюватись не тільки за рахунок виконання роботи, але й за рахунок перетворення в тепло. Саме за допомогою сил тертя враховують перетворення механічної енергії в тепло. Проте поняття тепла є важливим тільки для систем з великою кількістю степеней вільності, і сили тертя описують перетворення упорядкованого макроскопічного руху в енергію хаотичного молекулярного руху, інакше кажучи, – в тепло.

Механічний рух замкненої системи з невеликим числом степеней вільності можна повністю описати за допомогою систем рівнянь Лагранжа у вигляді (2.29), яка еквівалентна рівнянням Ньютона.

3. Закони збереження узагальненого імпульсу та узагальненої енергії

3.1 Структура рівнянь руху в незалежних координатах і функція Лагранжа

Перш ніж вести поняття узагальненого імпульсу і узагальненої енергії, а також з'ясувати закони їх зміни і збереження, зауважимо наступне. Як видно з наведених в попередньому розділі прикладів, якщо для механічної системи можна скласти лагранжіан, тобто якщо система є голономною і володіє звичайним U або узагальненим $\mathscr{U}$ потенціалом, то існує вельни зручний спосіб одержання рівнянь її руху – рівнянь Лагранжа в незалежних координатах. Згідно цьому методу необхідно записати функції T і U (або $\mathscr{U}$) в узагальнених координатах, утворити з них лагранжіан $\mathscr{L}$ і, підставивши його в (2.29), одержати рівняння руху. При цьому перехід від декартових координат до узагальнених одержується для функцій T і U за допомогою рівнянь перетворення (2.4) і (2.10). Ця процедура, в силу важливості оптимального вибору незалежних узагальнених координат при складанні рівнянь руху, вимагає більш ретельного аналізу. З цією метою ми стисло розглянемо структуру рівнянь Лагранжа, розпочавши зі структури кінетичної енергії.

Кінетична енергія T є однорідною додатно-визначеною квадратичною формою від швидкостей точок. Це означає, що $T > 0$ при будь-яких значеннях проекцій швидкостей, водночас не рівних нулю, а $T = 0$ тільки в тому випадку, якщо всі швидкості $\vec{v}_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., N)$. Однак, кінетична енергія як функція узагальнених швидкостей в загальному випадку буде неоднорідною квадратичною формою. У цьому легко переконатися безпосередньо, підставляючи в кінетичну енергію швидкості точок, виражені через узагальнені координати. Використовуючи (2.10), для кінетичної енергії T одержимо:

$$T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)}, \tag{3.1}$$

де $T^{(2)}$, $T^{(1)}$ і $T^{(0)}$ є однорідними формами відповідно другої, першої і нульової степені відносно узагальнених швидкостей:

$$T^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k,$$
$$T^{(1)} = \sum_{j=1}^{s} a_j\dot{q}_j, \tag{3.2}$$
$$T^{(0)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)^2.$$

де $a_{jk} = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\ \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}$, $a_j = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\ \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}$. Як видно, всі коефіцієнти a_{jk}, a_j і форма нульової степені $T^{(0)}$ залежать тільки від узагальнених координат і часу, а неоднорідність кінетичної енергії як функції узагальнених швидкостей має місце тільки в тому випадку, якщо перетворення (2.4) явно залежить від часу (наприклад, в разі системи з нестаціонарними зв'язками). Якщо ж перетворення (2.4) підпорядковується умовам

$$\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2, ..., N), \tag{3.3}$$

то кінетична енергія буде однорідною формою узагальнених швидкостей, тобто $T = T^{(2)}$. Умови (3.3) виконуються, зокрема, для випадку стаціонарних зв'язків.

Розглядаючи властивості $T^{(2)}$, перш за все зауважимо, що всі коефіцієнти a_{jk} симетричні за індексами, тобто

$$a_{jk} = a_{kj} \quad (j, k = 1, 2, ..., s). \tag{3.4}$$

Далі, можна переконатися, що $T^{(2)}$ є додатно-визначеною формою узагальнених швидкостей. Додатна визначеність $T^{(2)}$ відносно $\dot{q}$ означає, що $T^{(2)} \geq 0$, причому $T^{(2)} = 0$ тільки в тому випадку, якщо всі $\dot{q}_j = 0$ $(j = 1, 2, ..., s)$.

Для доведення цього твердження запишемо $T^{(2)}$ у вигляді

$$T^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\ \dot{q}_j\right)^2.$$

Звідси випливає, що $T^{(2)}$ є додатно-визначеною формою відносно сум

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\ \dot{q}_j \quad (i = 1, 2, ..., N).$$

Інакше кажучи, при будь-яких значеннях цих сум $T^{(2)} \geq 0$, причому $T^{(2)} = 0$ тільки в тому випадку, якщо всі ці суми дорівнюють нулю:

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \, \dot{q}_j = 0 \quad (i = 1, 2, ..., N).$$

Із співвідношень (3.1) і (3.2) знайдемо також

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^{s} a_{jk}\dot{q}_k + a_j \quad (j = 1, 2, ..., s), \tag{3.5}$$

звідки випливає, що

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = \sum_{k=1}^{s} a_{jk}\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{s} \dot{a}_{jk}\dot{q}_k + \dot{a}_j \quad (j = 1, 2, ..., s), \tag{3.6}$$

(величини виду $\ddot{q}$ називаються узагальненими прискореннями). З іншого боку, члени $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ не залежить від узагальнених прискорень, не залежать від них й узагальнені сили, оскільки всі задані сили $\vec{F}_i$ є функції тільки положень, швидкостей точок і часу.

Розглянемо узагальнено-потенціальні сили виду (2.41). Виражаючи тут швидкості точок і їх радіуси-вектори через узагальнені координати (див. (2.4) і (2.10)), отримаємо, що

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}^{(1)} + \mathscr{U}^{(0)}, \tag{3.7}$$

де $\mathscr{U}^{(1)} = \sum\limits_{j=1}^{s} U_j\dot{q}_j$ – лінійна однорідна форма узагальнених швидкостей, $\mathscr{U}^{(0)}$ – форма нульової степені (U_j і $\mathscr{U}^{(0)}$ є функціями тільки координат і часу). Неважко переконатися, що сили Q_j, відповідні узагальненому потенціалу (3.7), рівні:

$$Q_j = -\frac{\partial \mathscr{U}^{(0)}}{\partial q_j} + \frac{\partial U_j}{\partial t} - \sum_{k=1}^{s} \gamma_{jk}\dot{q}_k, \tag{3.8}$$

де $\gamma_{jk} = \frac{\partial U_k}{\partial q_j} - \frac{\partial U_j}{\partial q_k}$ – коефіцієнти, антисиметричні за індексами.

При наявності узагальнено-потенціальних Q_j і дисипативних Q^d сил рівняння Лагранжа в незалежних координатах можна записати у вигляді (2.42). Підкреслимо, що $\mathscr{L}$ і всі Q_j^d в (2.42) є функціями узагальнених координат і узагальнених швидкостей. Функція Лагранжа $\mathscr{L}$ є неоднорідною квадратичною формою відносно узагальнених швидкостей (див. (3.1) і (3.7))

$$\mathscr{L} = T^{(2)} + (T^{(1)} - \mathscr{U}^{(1)}) + (T^{(0)} - \mathscr{U}^{(0)}). \tag{3.9}$$

3.2 Закони збереження узагальненого імпульсу

Закони збереження узагальненого імпульсу і узагальненої енергії є наслідком рівнянь Лагранжа. Запишемо рівняння Лагранжа при наявності узагальнено-потенціальних та дисипативних сил в незалежних координатах (2.42) у вигляді

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j} + Q_j^d \quad (j = 1, 2, ..., s), \tag{3.10}$$

де величина $p_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}$ називається узагальненим імпульсом, що відповідає координаті q_j. З (3.10) випливає, що узагальнений імпульс p_j зберігається, якщо функція Лагранжа явно від координати q_j не залежить і якщо відповідна цій координаті дисипативна узагальнена сила дорівнює нулю. Таким чином,

$$p_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j} = p_{j0}, \tag{3.11}$$

якщо $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j} = 0$ і $Q_j^d = 0$. Якщо ж всі дисипативні сили рівні нулю, то закон (3.11) *збереження узагальненого імпульсу* набуває вигляду

$$p_j = p_{j0}, \quad \text{якщо} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j} = 0. \tag{3.12}$$

Наведемо ряд невеликих прикладів.

1. Просторовий осцилятор.

Функція Лагранжа для просторового осцилятора в декартових координатах має вигляд

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{\kappa}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right),$$

а узагальнені імпульси

$$p_x = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

є декартовими проекціями імпульсу точки. Жодна з координат x, y, z в даному випадку не є циклічною, відповідно жоден з узагальнених імпульсів p_x, p_y, p_z не зберігається.

Тепер запишемо лагранжіан просторового осцилятора в сферичних координатах:

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2) - \frac{\kappa}{2}r^2.$$

Узагальненими імпульсами точки в цих координатах є

$$p_r = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot r} = m\dot r, \quad p_\theta = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot\theta} = mr^2\dot\theta, \quad p_\varphi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot\varphi} = mr^2 \sin^2\theta \cdot \dot\varphi,$$

причому узагальнений імпульс p_φ дорівнює M_z – проекції момента імпульсу точки на вісь Oz. Оскільки координата φ циклічна, то p_φ зберігається, тобто

$$mr^2 \sin^2\theta \cdot \dot\varphi = p_{\varphi_0}.$$

2. Циклоїдальний маятник.

Лагранжіан циклоїдального маятника має вигляд

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}\dot s^2 - \frac{mg}{8R}s^2,$$

де s є довжина дуги циклоїди від початку координат до матеріальної точки, яка вибирається у якості узагальненої координати ($s = 4R\sin(\varphi/2)$), R – радіус кола, що творить циклоїду. Тут координата s нециклічна і узагальнений імпульс

$$p_s = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot s} = m\dot s$$

не зберігається.

3.Заряд в електростатичному і постійному однорідному магнітному полі.

Візьмемо заряд, що рухається в електростатичному полі нерухомого ядра і постійному однорідному магнітному полі. В цьому випадку координати ρ і z не циклічні, а φ – циклічна. Тому закон збереження (3.12) приводить до інтеграла

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot\varphi} = m\rho^2(\dot\varphi - \omega) = p_{\varphi_0}.$$

Встановимо структуру узагальненого імпульсу в загальному випадку. Беручи до уваги визначення узагальненого імпульсу і форму лагранжіана $\mathscr{L}$, знаходимо

$$\begin{aligned} p_j =& \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot q_j} = \frac{1}{2}\sum_{l,k=1}^{s} a_{lk}\left[\frac{\partial \dot q_l}{\partial \dot q_j}\dot q_k + \dot q_l \frac{\partial \dot q_k}{\partial \dot q_j}\right] + \sum_{l=1}^{s} a_l \frac{\partial \dot q_l}{\partial \dot q_j} = \\ =& \frac{1}{2}\sum_{l,k}^{s} a_{lk}\dot q_k + \frac{1}{2}\sum_{l}^{s} a_{jk}\dot q_l - \sum_{l=1}^{s} U_l \frac{\partial \dot q_l}{\partial \dot q_j} = \sum_{k=1}^{s} a_{jk}\dot q_k + a_j - U_j. \end{aligned}$$

Отже,

$$p_j = \sum_{k=1}^{s} a_{jk}\dot{q}_k + a_j - U_j, \tag{3.13}$$

де a_{jk}, a_j – коефіцієнти однорідних форм $T^{(2)}$ і $T^{(1)}$ кінетичної енергії, U_j – коефіцієнти однорідної форми $\mathscr{U}^{(1)}$ узагальненого потенціалу. Звідси видно, що узагальнені імпульси є неоднорідними лінійними формами узагальнених швидкостей.

3.3 Закон зміни узагальненої енергії

Закон зміни узагальненої енергії отримаємо з рівнянь Лагранжа в незалежних координатах аналогічно тому, як з рівнянь Ньютона одержується закон зміни енергії. Помноживши кожне з рівнянь (2.42) на відповідну узагальнену швидкість і складаючи отримані вирази по всіх степенях вільності, знайдемо

$$\sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j} \right\}\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{s} Q_j^d \dot{q}_j. \tag{3.14}$$

Як виявляється, в цьому рівнянні можна виділити повну похідну за часом від такої функції, яка в окремому випадку буде збігатися з енергією системи. Дійсно, використовуючи очевидне співвідношення

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j, \tag{3.15}$$

представимо ліву частину рівняння (3.14) у вигляді

$$\sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j} \right\}\dot{q}_j = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right). \tag{3.16}$$

Потім, враховуючи, що функція Лагранжа є функцією узагальнених координат, швидкостей і часу і, отже, її повна похідна за часом дорівнює

$$\frac{d\mathscr{L}}{dt} = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}, \tag{3.17}$$

замість (3.14) отримаємо рівняння

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} Q_j^d \dot{q}_j, \tag{3.18}$$

де

$$H=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_j}\dot{q}_j-\mathscr{L}. \tag{3.19}$$

Цю функцію узагальнених координат, швидкостей і часу будемо називати *узагальненою енергією системи*, а рівняння (3.18) – *законом зміни узагальненої енергії.*

Функція H в окремому випадку збігається з повною енергією системи E, в чому можна переконатися, розглядаючи структуру H. Справді, використовуючи (3.13), а також (3.2) і (3.7), знайдемо, що

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_j}\dot{q}_j=2T^{(2)}+T^{(1)}-\mathscr{U}^{(1)}.$$

Підставляючи цей вираз в (3.19) і враховуючи структуру лагранжиана (див. (3.9)), отримаємо

$$H=T^{(2)}-T^{(0)}+\mathscr{U}^{(0)}. \tag{3.20}$$

Звідси видно, що узагальнена енергія не містить лінійних форм узагальнених швидкостей, в той час як повна енергія включає в себе форму $T^{(1)}$

$$E=T^{(2)}+T^{(1)}+T^{(0)}+U \tag{3.21}$$

(тут U – звичайна потенціальна енергія).

З порівняння (3.20) і (3.21) випливає, що узагальнена енергія системи і її повна енергія збігаються в тих випадках, коли радіуси-вектори точок системи як функції незалежних координат явно від часу не залежать, оскільки в цьому випадку $T=T^{(2)}$ $(T^{(1)}=T^{(0)}=0)$, а $\mathscr{U}^{(0)}=U$; зокрема, це має місце для систем зі стаціонарними зв'язками $\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}=0,\quad i=1,2,...,N\right)$.

Закон збереження узагальненої енергії безпосередньо випливає з рівняння (3.18): узагальнена енергія системи зберігається, якщо функція Лагранжа явно від часу не залежить, а дисипативні сили відсутні, тобто

$$H=T^{(2)}-T^{(0)}+\mathscr{U}^{(0)}=H_0 \tag{3.22}$$

за умови, що $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}=0$ і $Q_j^d=0$ $(j=1,2,...,s)$. Перше з цих умов не обов'язково пов'язано з умовою $\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}=0$ $(i=1,2,...,N)$. Може трапитися, що $\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\neq 0$ $(i=1,2,...,N)$, а $\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}=0$; тоді за відсутності дисипативних сил рівняння (3.18) приводить до інтеграла руху, який не збігається з інтегралом енергії. Якщо ж поряд з умовами збереження узагальненої енергії виконуються вимоги $\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}=$

$0 \ (i = 1, 2, ..., N)$, то закони збереження узагальненої і повної енергій системи збігаються, тобто $H = E = E_0$.

На закінчення відзначимо досить поширений випадок механічної системи із стаціонарними зв'язками і дисипативними силами, лінійними відносно швидкостей точок. Для такої системи потужність узагальнених дисипативних сил дорівнює

$$\sum_{j=1}^{s} Q_j^d \dot{q}_j = -2D^{(2)}. \tag{3.23}$$

Враховуючи, що кінетична енергія системи із стаціонарними зв'язками явно від часу не залежить, з рівняння (3.18) знайдемо

$$\dot{E} = \frac{\partial U}{\partial t} - 2D^{(2)}. \tag{3.24}$$

4. Властивості функції Лагранжа

1. Адитивність функції Лагранжа.

Нехай механічна система складається з двох замкнутих підсистем A та B, які мали б як функції Лагранжа відповідно функції $\mathscr{L}_A$ і $\mathscr{L}_B$. Якщо підсистеми розглядати спільно, то загальна функція Лагранжа буде дорівнює:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_A + \mathscr{L}_B. \tag{4.1}$$

Властивість адитивності функції Лагранжа висловлює той факт, що рівняння руху кожної з невзаємодіючих частин не можуть містити величини, що відносяться до інших частин системи (невзаємодіючі підсистеми не можуть впливати на рух одна одної).

2. Неоднозначність функції Лагранжа, тобто одну і ту ж систему можна характеризувати різними функціями Лагранжа.

а) Мультиплікативна неоднозначність.

Якщо функцію Лагранжа системи помножити на довільну постійну, то це не відіб'ється на рівняннях руху. Однак необхідно враховувати властивість адитивності функції Лагранжа, тобто одночасно множити функції Лагранжа підсистем, що входять в дану систему, на задану постійну.

б) Адитивна неоднозначність.

До функції Лагранжа можна додати повну похідну за часом від будь-якої функції координат і часу і це не змінить рівняння руху. Отже, функція Лагранжа визначена з точністю до додавання до неї повної похідної від функції координат і часу.

Доведемо властивість адитивної неоднозначності. Для цього поряд з функцією Лагранжа $\mathscr{L}(q, \dot{q}, t)$ візьмемо нову функцію $\mathscr{L}'(q, \dot{q}, t)$ у вигляді:

$$\mathscr{L}'(q, \dot{q}, t) = \mathscr{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}F(q, t). \tag{4.2}$$

Дія S для функції Лагранжа $\mathscr{L}$ має вигляд

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(q, \dot{q}, t)dt.$$

Тоді дія S' для функції Лагранжа $\mathscr{L}'$ матиме вигляд:

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}'(q, \dot{q}, t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(q, \dot{q}, t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}F(q, t)dt =$$
$$= S + F(q^{(2)}, t_2) - F(q^{(1)}, t_1).$$

Якщо взяти варіацію від обох частин цієї рівності, то отримаємо:

$$\delta S' = \delta S + \delta F(q^{(2)}, t_2) - \delta F(q^{(1)}, t_1) = \delta S + 0 - 0.$$

Останні два члена при варіюванні зникають, оскільки, згідно з граничним умовам, варіації координат на кінцях інтервалу дорівнюють нулю. Оскільки умова $\delta S' = 0$ збігається з умовою $\delta S = 0$, отже, вид рівняння руху залишається незмінним.

Вправа 1.

Для одновимірного руху точки прямим обчисленням довести адитивну неоднозначність функції Лагранжа $\mathscr{L} = \mathscr{L}(x, \dot{x}, t)$.

Доведення.

Функція Лагранжа $\mathscr{L} = \mathscr{L}(x, \dot{x}, t)$ задовольняє рівняння Лагранжа 2-го роду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} = 0. \tag{4.3}$$

Перейдемо до нової функції Лагранжа

$$\mathscr{L}'(x, \dot{x}, t) = \mathscr{L}(x, \dot{x}, t) + \frac{d}{dt} f(x, t). \tag{4.4}$$

Необхідно довести, що функція Лагранжа $\mathscr{L}'$ задовольняє рівняння

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial x} = 0, \tag{4.5}$$

Для цього покажемо, що рівняння (4.5) із функцією Лагранжа $\mathscr{L}'$, що визначена співвідношенням (4.4), приводить до рівняння Лагранжа (4.3) на функцію $\mathscr{L}$.

Перш за все, обчислимо повну похідну за часом від функції $F(x, t)$ в правій частині (4.4). Маємо:

$$\frac{d}{dt} f(x, t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{4.6}$$

Оскільки функція $F(x, t)$ не залежить від швидкості $\dot{x}$, то

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{d}{dt} f(x, t)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}. \tag{4.7}$$

Крім того

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right). \tag{4.8}$$

Але

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dot{x}+\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}, \tag{4.9}$$

тому замість (4.8) одержимо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dot{x}+\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}. \tag{4.10}$$

Обчислимо тепер $\frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial x}$, використовуючи представлення (4.4); одержимо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial x}&=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{d}{dt}\big(f(x,t)\big)=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}+\\&+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial t}\right\}=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dot{x}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Підставивши (4.10), (4.11) в (4.5), одержимо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dot{x}+\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dot{x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}=0, \tag{4.12}$$

або

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}=0,$$

тобто рівняння Лагранжа (4.3).

Таким чином, властивість адитивної неоднозначності функції Лагранжа доведено.

Вправа 2.

Спростити функцію Лагранжа $\mathscr{L}'=\frac{1}{2}(\dot{q}+t)^2$

$$\mathscr{L}'=\frac{1}{2}(\dot{q}+t)^2=\frac{1}{2}\dot{q}^2+\dot{q}t+\frac{1}{2}t^2.$$

Внаслідок адитивної неоднозначності функції Лагранжа член $\frac{1}{2}t^2=\frac{d}{dt}\left(\frac{t^3}{6}\right)$ опускаємо, тоді

$$\mathscr{L}'=\frac{1}{2}\dot{q}^2+\frac{d}{dt}(qt)-q.$$

Знову опускаємо член $\frac{d}{dt}(qt)$ через адитивної неоднозначності функції Лагранжа. В результаті маємо

$$\mathscr{L}'=\frac{1}{2}\dot{q}^2-q.$$

5. Інтегральні варіаційні принципи механіки і рівняння руху.

5.1 Принцип Гамільтона (принцип найменшої дії)

У розділі 2 рівняння руху механічної системи (рівняння Лагранжа 2-го роду) були одержані із „диференціального принципу" (принцип Даламбера на основі другого закону Ньютона). Проте рівняння руху можна одержати і з „інтегрального принципу" (принцип Гамільтона або принцип найменшої дії), в якому розглядається рух системи за скінчений проміжок часу. Цей принцип дає найбільш загальне сформулювання закону руху механічної системи і може бути покладений в основу класичної механіки замість законів Ньютона. Перевага принципу Гамільтона полягає в тому, що його можна поширити на системи, які не є чисто механічними (наприклад, на пружні середовища, електромагнітні поля тощо), а також узагальнити на релятивістську механіку та релятивістську квантову теорію поля.

Знайдемо інтегральний варіаційний принцип для механічних систем з узагальнено-потенціальними силами та ідеальними голономними зв'язками (принцип Гамільтона). Цьому принципу підчиняється функція дії S, яка задається співвідношенню

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(q, \dot{q}, t) dt, \tag{5.1}$$

де $\mathscr{L}(q, \dot{q}, t) = \mathscr{L}(q_1, q_2, ..., q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s, t)$ – функція Лагранжа механічної системи.

Перш ніж вивести принцип Гамільтона, зауважимо наступне. У кожний момент часу конфігурація системи задається значеннями узагальнених координат $q_1, q_2, ..., q_s$ і, якщо розглядати ці числа як координати в деякому s-вимірному просторі, то кожній конфігурації системи буде відповідати деяка точка цього простору. Такий s-вимірний простір називається простором конфігурацій. Із часом стан системи змінюються і точка, що зображує цю систему, описує в просторі конфігурації деяку криву, що має назву траєкторію руху системи. Принцип Гамільтона можна вивести, співставляючи значення дії S на дійсні траєкторії механічної системи із її значеннями на віртуальних траєкторіях. З цією метою розглянемо у просторі конфігурації близькі одна до одної дійсну і віртуальні траєкторії системи, вважаючи, що в початковий t_0 і кінцевий t_1 моменти часу всі ці траєкторії пересікаються. Нагадаємо, що дійсна траєкторія визначається функціями $\vec{r}_i(t)$, що задовольняють як

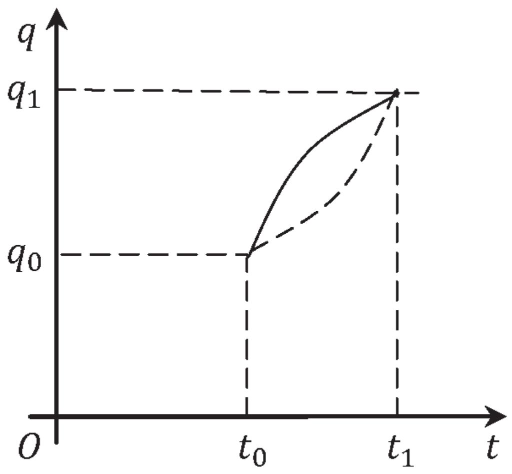

Рис. 5.1. Схематичне зображення траєкторій системи в просторі конфігурацій для дійсного руху (суцільна крива) та віртуального руху (пунктирна крива).

рівняння руху, так і рівняння зв'язків. У той же час, віртуальні траєкторії визначаються функціями $\vec{r}_i(t, \varepsilon)$, що задовольняють тільки рівняння зв'язків, причому $\vec{r}_i(t, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \vec{r}_i(t)$. Задамо віртуальні переміщення точок системи у вигляді

$$\delta\vec{r}_i(t, \varepsilon) = \vec{r}_i(t, \varepsilon) - \vec{r}_i(t) \quad (i = 1, 2, ..., N). \tag{5.2}$$

Для того щоб дійсне і віртуальні переміщення системи співпадали одне з одним у початковий і кінцевий момент часу, повинні виконуватися умови:

$$\delta\vec{r}_i(t_0) = 0; \quad \delta\vec{r}_i(t_1) = 0; \quad i = 1, 2, ..., N \tag{5.3}$$

Для дійсних переміщень в кожній точці траєкторії задовольняється загальне рівняння механіки (2.3)

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i)\delta\vec{r}_i = 0, \tag{5.4}$$

що є необхідною і достатніми умовами руху системи у відповідності з рівняннями руху. Що стосується віртального „руху", то для нього не справедливе загальне рівняння механіки.

Для подальшого аналізу першу суму в рівнянні (5.4) зручно записати у вигляді

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}} \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}_i)\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}_i \delta\vec{r}_i) - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_i) = \\ = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \delta\vec{r}_i\right) - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \delta\dot{\vec{r}}_i.\end{aligned} \tag{5.5}$$

При одержані (5.5) ми скористалися комутативністю операцій диференціювання за часом і варіювання при фіксованому t: $\frac{d}{dt}\delta q_j = \delta(\frac{dq_j}{dt}) \equiv \delta\dot{q}_j \quad (j = 1, 2, ..., s)$. Підставивши тепер результат (5.5) у загальне рівняння механіки (5.4), одержимо

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \delta\vec{r}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \delta\dot{\vec{r}}_i - \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \delta\vec{r}_i. \tag{5.6}$$

Але доданок $\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \delta\dot{\vec{r}}_i$ дорівнює варіації кінетичної енергії δT:

$$\delta T = \delta \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \delta\dot{\vec{r}}_i. \tag{5.7}$$

Тому рівняння (5.6) можна записати у вигляді:

$$\delta T + \delta A = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \delta\vec{r}_i\right), \tag{5.8}$$

де $\delta A = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i \delta\vec{r}_i$ – віртуальна робота заданих сил. Інтегруючи обидві частини (5.8) по t, отримаємо

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \delta\vec{r}_i \Big|_{t_0}^{t_1} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \delta\vec{r}_i(t_1) - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i \delta\vec{r}_i(t_0). \tag{5.9}$$

Врахувавши (5.3), остаточно одержимо інтегральну умову

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0 \\ \delta\vec{r}_i(t_0) = \delta\vec{r}_i(t_1) = 0, \quad (i = 1, 2, ..., N),\end{gathered} \tag{5.10}$$

яка разом із рівняннями зв'язків (1.20) визначає інтегральний варіаційний принцип для систем з будь-якими заданими силами і ідеальними голономними зв'язками. Використовуючи узагальнені координати, які перетворюють рівняння голономних зв'язків у тотожності, цей принцип можна записати у вигляді:

$$\begin{gathered}\int_{t_0}^{t_1}(\delta T + \delta A)dt = 0,\\ \delta q_j(t_0) = 0; \quad \delta q_j(t_1) = 0 \quad (j = 1, 2, ..., s).\end{gathered} \tag{5.11}$$

Таким чином, ми вивели варіаційний принцип (5.11) для механічних систем з ідеальними голономними зв'язками.

Розглянемо важливий випадок, коли задані сили є узагальнено-потенціальними силами, тобто можуть бути представлені у вигляді (2.41):

$$Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial q_j}, \tag{5.12}$$

де $\mathscr{U}$ – узагальнений потенціал. Тоді елементарна робота δA в (5.11) набуде вигляду

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j = \sum_{j=1}^{s}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial q_j}\right\}\delta q_j. \tag{5.13}$$

Перетворимо вираз у правій частині (5.13):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) - \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\delta q_j}{dt}. \tag{5.14}$$

Підставляючи (5.14) в (5.13), одержимо:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) - \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j\right)\Bigg),$$

або

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) - \delta \mathscr{U} \tag{5.15}$$

Підставимо тепер (5.15) в інтеграл (5.11), отримаємо:

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T - \delta \mathscr{U})dt + \sum_{j=1}^{s}\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right)dt = 0,$$

звідки, в силу умов $\delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0$, маємо

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta \mathscr{U}) dt = -\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1} = 0. \tag{5.16}$$

Крім того, використовуючи означення функції Лагранжа $\mathscr{L} = T - \mathscr{U}$ (2.28) і дії S (5.1), із виразу (5.16) знайдемо:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \delta \mathscr{L} dt = \delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathscr{L} dt = \delta S = 0,$$

або остаточно

$$\begin{aligned} &\delta S = 0, \\ &\delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0 \quad (j = 1, 2, ..., s). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Формули (5.17) задають інтегральний варіаційний принцип Гамільтона для системи з узагальнено-потенціальними силами. Згідно цього принципу функція дії S на дійсній траєкторії має екстремальне значення у порівняні із її значеннями на віртуальних траєкторіях, точки яких у початковий і кінцевий моменти часу співпадають відповідно з початковим і кінцевим положеннями системи.

Покажемо, що для достатньо малих інтервалів часу $t_1 - t_0$ варіація другого порядку $\delta^2 S > 0$ і тому на дійсних траєкторіях має місце мінімум дії. Справді, друга варіація функції дорівнює

$$\delta^2 S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \delta^2 \mathscr{L} dt, \tag{5.18}$$

де

$$\delta^2 \mathscr{L} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{s} \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_j \delta \dot{q}_k + \sum_{j,k=1}^{s} \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j \partial q_k} \delta \dot{q}_j \delta q_k + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{s} \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial q_j \partial q_k} \delta q_j \delta q_k. \tag{5.19}$$

Використовуючи оцінку варіацій координат [14]

$$|\delta q_j(t)| = |\int\limits_{t_0}^{t} \delta \dot{q}_j(t)| < (t - t_0) \max |\delta \dot{q}_j|,$$

$$j = 1, 2, ..., s; \quad t_0 < t < t_1,$$

і нехтуючи в (5.19) всіма членами, які лінійні і квадратичні відносно малого інтервалу $t_1 - t_0$, одержимо:

$$\delta^2 S \approx \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{j,k=1}^{s}\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}\delta\dot{q}_j\delta\dot{q}_k dt. \tag{5.20}$$

Оскільки

$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} = a_{jk},$$

то підінтегральний вираз в (5.20) буде додатно визначеною формою варіацій узагальнених швидкостей, що і доводить умову $\delta^2\mathscr{L} > 0$ для порівняно малих інтервалів часу. Таким чином, із принципу Гамільтона випливає, що різниця між усередненими за часом кінетичною енергією і узагальненим потенціалом на дійсних траєкторіях досягає мінімуму $\min(\overline{T} - \overline{\mathscr{U}})$.

5.2 Рівняння Лагранжа другого роду як внаслідок принципу Гамільтона

Покажемо, що динаміку механічних систем можна побудувати, виходячи з принципу Гамільтона (5.17) як із основного постулату, що замінює закони Ньютона.

Перейдемо до виведення диференціальних рівнянь Лагранжа, які виходять з виразу для варіації δS функціонала (5.1).

Нехай $q = q(t)$ є функція, для якої дія S має екстремум на відрізку часу від t_1 до t_2 (рис.5.1). Зауважимо, що якби був мінімум, тоді S зростала при заміні $q(t)$ на будь-яку варіювану функцію виду:

$$q'(t) = q(t) + \delta q(t),$$

де $q(t)$ – позначає дійсну траєкторію системи, $q'(t)$ – позначає близьку до дійсної траєкторію (це віртуальна або пробна траєкторія, причому існує нескінченна кількість таких траєкторій), $\delta q(t)$ – синхронна варіація функції $q(t)$.

Накладемо граничні умови. При $t = t_1$ і $t = t_2$ всі функції $q'(t)$ повинні приймати одні і ті ж значення $q^{(1)}$ і $q^{(2)}$, відповідно. Тому:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0.$$

Розглянемо всі можливі траєкторії, що переводять систему з даного початкового положення $q^{(1)}$ в дане кінцеве положення $q^{(2)}$ за один і той же інтервал часу $\Delta t = t_2 - t_1$. Однак тільки для дійсної (істинної) траєкторії $q(t)$ має бути $\delta S = 0$.

Зміна дії S при варіюванні функції $q(t)$, тобто заміни $q(t)$ на $q(t) + \delta q(t)$, задається формулою:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathscr{L}(q, \dot{q}, t) dt.$$

Тут врахували наступне. Оскільки варіювання синхронне, то операції варіювання і інтегрування комутативні.

У свою чергу зміна функції $\mathscr{L}$ при заміні $q \to q(t) + \delta q$ визначається різницею:

$$\delta \mathscr{L}(q, \dot{q}, t) = \mathscr{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - \mathscr{L}(q, \dot{q}, t),$$

і називається варіацією функції Лагранжа. Перший член цієї різниці розкладемо в ряд за степенями δq і $\delta \dot{q}$ з точністю до членів першого порядку, що допустимо, оскільки δq прямує до нуля:

$$\mathscr{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) = \mathscr{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial \mathscr{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathscr{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q},$$

тут мається на увазі підсумовування за степенями вільності. Тоді для варіації функції Лагранжа отримаємо:

$$\delta \mathscr{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}.$$

Тому з урахуванням теореми на екстремум функціоналу можемо записати:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q \right) dt = 0.$$

В останній рівності враховували, що для синхронного варіювання операції варіювання і диференціювання комутативні. В даному виразі проінтегруємо другий член інтеграла по частинах:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q dt = \begin{vmatrix} u = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} \\ dv = \frac{d}{dt} \delta q dt \end{vmatrix} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} \right) dt,$$

де перший член дорівнює 0 в силу граничних умов. Отже:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0.$$

Оскільки інтеграл дорівнює 0, то в силу довільності вибору варіації δq, підінтегральний вираз також має обертатися в нуль. Тим самим з принципу найменшої дії виходять рівняння виду (2.29):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} = 0,$$

які, як уже було сказано, називаються рівняннями Лагранжа другого роду.

Зауваження. Оскільки q є $q_1, q_2, ..., q_s$, то повинні варіюватися s різних функцій q_i.

Отже дія S набуває екстремальних значень лише для таких кривих (траєкторій) $q(t)$, які задовольняють рівняння Лагранжа другого роду.

Таким чином, принцип Гамільтона приводить до системи диференціальних рівнянь другого порядку (2.29). Ясно, що ці рівняння мають бути еквівалентними рівнянням Ньютона, а при використанні декартових координат матеріальних точок збігатися з рівняннями Ньютона. Це дозволяє встановити зв'язок між цими підходами, зокрема, знайти вигляд функції Лагранжа для конкретних механічних систем (див. розділ 2.).

6. Закони збереження і симетрії простору і часу. Теорема Ньотер

Простір в класичні механіці постулюється однорідним та ізотропним, а час – однорідним. З цими властивостями симетрії простору і часу в лагранжовому формалізмі пов'язане існування фундаментальних законів збереження імпульсу, моменту імпульсу та енергії для замкнутої системи матеріальних точок. Під замкнутою системою матеріальних точок розуміється система, на яку не тільки не діють зовнішні сили, але і в якій не відбуваються перетворення механічної енергії в інші види енергій, наприклад, в теплову енергію або в енергію електромагнітного поля.

Для замкнутої механічної системи внаслідок однорідності часу всі моменти часу однакові. Тому функція Лагранжа не повинна явно залежати від часу. В розділі 3 було показано, що у випадку коли функція Лагранжа не залежить явно від часу, механічна енергія зберігається, тобто із однорідності часу випливає закон збереження енергії для замкнутої механічної системи.

Внаслідок однорідності простору для замкнутої механічної системи всі точки простору рівноправні. Тому її функція Лагранжа не має залежати від положення механічної системи в просторі. Вона може залежати тільки від відносних відстаней між матеріальними точками системи.

Закон збереження моменту імпульсу замкнутої системи матеріальних точок в лагранжовому формалізми виводиться із ізотропності простору. Внаслідок ізотропності простору орієнтація механічної системи відносно простору не повинна впливати на її механічні властивості.

В деяких випадках окремі фундаментальні закони збереження виконується для систем матеріальних точок, які взаємодіють з іншими тілами. Якщо зовнішнє поле володіє деякими властивостями симетрії, то їм відповідають закони збереження. Наприклад, в центральному симетричному полі зберігається момент імпульсу механічної системи, який визначений відносно центра симетрії поля. Це випливає з того, що повороти механічної системи відносно осі, що проходить через центр симетрії поля, не впливають на рух механічної системи.

Серед інтегралів руху особливе значення мають адитивні інтеграли руху. Це такі величини, що їх значення для системи, яка складається з частин, взаємодією яких можна знехтувати, дорівнює сумі значень для кожної з частин окремо.

Адитивні закони збереження виявляються пов'язаними з властивостями симетрії простору і часу. Це випливає з доведеної в математиці теореми Емми Ньотер (1918 р.), яку для потреб механіки можна сформулювати наступним чином [15]: Будь-якому оборотному неперервному перетворенню координат, при якому функція дії або лагранжіан механічної системи залишається інваріантною величиною, відповідає адитивний інтеграл руху цієї системи.

Отже, закони збереження пов'язані з принципами інваріантності, в яких знаходять своє вираження геометричні симетрії простору і часу або ж внутрішні симетрії взаємодії. Звідси випливає важливість законів збереження як з практичної, так і з точки зору світогляду.

В класичній механіці розглядаються геометричні симетрії, які пов'язані з такими властивостями простору і часу, як однорідність і ізотропність простору та однорідність часу. Оскільки інших властивостей простору і часу немає, це привело Анрі Пуанкаре до формулювання теореми, згідно з якою в механіці існує лише сім аналітичних адитивних інтегралів руху:

1) енергія E, яка є наслідком однорідності часу;

2) 3 проекції імпульсу p_x, p_y, p_z, які є наслідком однорідності простору;

3) 3 проекції моменту імпульсу M_x, M_y, M_z, які є наслідком ізотропності простору.

Оскільки властивості симетрії простору і часу є точними, то відповідні закони збереження є строгими. Збереження електричного, лептонного, баріонного та інших зарядів, що зустрічаються у фізиці елементарних частинок, є наслідком властивостей симетрії електромагнітної, слабкої і сильної взаємодій. Деякі із симетрій взаємодій не є точними, тому у фізиці елементарних частинок зустрічаються і наближені закони збереження.

6.1 Теорема Ньотер

Велике значення цієї теореми в розвитку сучасної теоретичної фізики обумовлено тим, що в ній встановлюється досить загальний зв'язок між перетвореннями, що залишають дію інваріантною, і законами збереження.

Теорема Ньотер в найбільш простому випадку зводиться до твердження про те, що *будь-якому неперервному оборотньому координат, при якому функція дії S даної гамільтонової системи залишається інваріантною, відповідає перший інтеграл рівнянь Лагранжа цієї системи.*

Нехай задано неперервне оборотне перетворення

$$q_j' = q_j'(q, t, \varepsilon) \quad (j = 1, 2, ..., s), \tag{6.1}$$

яке залежить від деякого нескінченно малого параметра ε , причому якщо $\varepsilon = 0$, то перетворення переходить в тотожне, тобто

$$q'_j|_{\varepsilon=0} = q_j, \quad (j = 1, 2, ..., s), \tag{6.2}$$

використовуючи малість параметра ε

$$q'_j = q'_j(q, t, \varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} + \left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q'_j}{\partial \varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon^2 + ... \tag{6.3}$$

Отже, варіації координат q, відповідні перетворення (6.1), рівні

$$\delta q_j = q'_j - q_j = \left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon. \tag{6.4}$$

Уведемо дію S, яка визначається співвідношенням

Обчислимо варіацію дії $S = \int_{t_0}^{t_1} \mathscr{L}(q, \dot{q}, t)dt$:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathscr{L}(q, \dot{q}, t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta\mathscr{L}(q, \dot{q}, t)dt. \tag{6.5}$$

Знайдемо варіацію функції Лагранжа в (6.5):

$$\delta\mathscr{L}(q, \dot{q}, t) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j \tag{6.6}$$

Перетворимо другий доданок у правій частині співвідношення (6.6). Маємо:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}\delta q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j \tag{6.7}$$

Підставивши (6.7) у (6.6), одержимо:

$$\delta\mathscr{L} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\right]\delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) \tag{6.8}$$

Тут вираз у квадратних дужках в силу рівняння Лагранжа другого роду дорівнює нулю:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j} = 0 \quad (Q_j^d = 0),$$

тому для варіації функції Лагранжа із (6.8) маємо

$$\delta\mathscr{L} = \sum_{j=1}^{s} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right). \tag{6.9}$$

Підставивши (6.9) у (6.5), для варіації дії одержимо:

$$\delta S = \sum_{j=1}^{s} \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right)dt = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\bigg|_{t_0}^{t_1},$$

або, використовуючи (6.3), знайдемо варіацію дії на дійсній траєкторії

$$\delta S = \varepsilon \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\bigg|_{t_0}^{t_1}. \tag{6.10}$$

Але за умовою теореми дія S є інваріантною при перетворенні (6.1), тобто $\delta S = 0$. Тому із (6.10) випливає рівність

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\bigg|_{t_1} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\bigg|_{t_0}. \tag{6.11}$$

Оскільки моменти часу t_0 і t_1 – довільні, то одержимо, що перетворенню (6.1) відповідає перший інтеграл рівнянь Лагранжа

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \text{const}. \tag{6.12}$$

Теорема доведена.

6.2 Фізичні наслідки із теореми Ньотер.

6.2.1 Закон збереження імпульсу для замкнутої вільної системи. Однорідність простору. Одержимо закони збереження для *замкнутої вільної системи*, лангранжіан якої в інерціальній системі відліку має вигляд

$$\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} v_i^2 - \sum_{i<j} U_{ij}(|\overrightarrow{r}_i - \overrightarrow{r}_j|). \tag{6.13}$$

Цей лагранжіан, а отже і дія S, інваріантний відносно нескінченно малого паралельного переносу ε механічної системи (в цьому проявляється однорідність простору). Направимо ε уздовж осі Ox; тоді для перетворення координат точок системи маємо:

$$x'_i = x_i + \varepsilon,\ y'_i = y_i,\ z'_i = z_i \ \ (i = 1, 2, ..., N). \tag{6.14}$$

У цьому випадку

$$\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon} \Rightarrow \frac{\partial x'_i}{\partial \varepsilon} = 1; \quad \frac{\partial y'_i}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial z'_i}{\partial \varepsilon} = 0$$

і відповідний перетворенню (6.14) інтеграл руху (6.12) має вид

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{\partial x'_i}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i = P_{x0}. \tag{6.15}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}_i} = \sum_{l=1}^{N} \frac{m_l}{2} \cdot 2 \cdot \dot{x}_l \cdot \delta_{li} = m_i \dot{x}_l, \tag{6.16}$$

тут δ_{li} – символ Кронекера (2.12). Підставимо (6.16) в (6.12) і одержимо (6.15).

Використовуючи довільність вектора ε , аналогічно переконаємося в збереженні проекцій імпульсу системи на вісь Oy:

$$x'_i = x_i, \; z'_i = z_i, \quad y'_i = y_i + \varepsilon \;\; (i = 1, 2, ..., N).$$

Одержимо:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}_i} \left(\frac{\partial y'_i}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{y}_i = P_{y0}. \tag{6.15$'$}$$

На осі Oz

$$x'_i = x_i, \quad y'_i = y_i, \quad z'_i = z_i + \varepsilon, \;\; (i = 1, 2, ..., N).$$

Одержимо:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{z}_i} \left(\frac{\partial z'_i}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{z}_i = P_{z0}. \tag{6.15$''$}$$

Таким чином, імпульс замкнутої системи зберігається.

6.2.2 Закон збереження моменту імпульсу. Ізотропність простору. Переконаємося, що (6.6) інваріантний відносно нескінченно малого довільного повороту ε. Розглянемо поворот ε навколо осі Oz, при якому

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i - \varepsilon y_i, \\ y'_i &= y_i + \varepsilon x_i, \\ z'_i = z_i \;\; (i = 1, 2, ..., N)&, \end{aligned} \tag{6.17}$$

і відповідний інтеграл руху

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}_i}\left(\frac{\partial x'_i}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{y}_i}\left(\frac{\partial y'_i}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\right]=\sum_{i=1}^{N}m_i(x_i\dot{y}_i-y_i\dot{x}_i)=M_{z0}. \quad (6.18)$$

Аналогічно знайдемо інші інтеграли M_{x0} та M_{y0} і тим самим переконаємося в збережені кінетичного моменту системи.

6.2.3 Закон збереження енергії. Однорідність часу. Нарешті, функція Лагранжа (6.13), яка не залежить явно від часу, інваріантна відносно нескінченно малого „зміщення" системи в часі, тобто інваріантною щодо перетворення

$$t'=t+\varepsilon \quad (6.19)$$

(в цьому проявляється однорідність часу). Оскільки в даному випадку варіація часу відмінна від нуля і дорівнює $\delta t=t'-t=\varepsilon$, потрібно скористатися повною варіацією дії, коли варіюються не лише початкове і кінцеве положення системи, але і початковий і кінцевий моменти часу. Використовуючи визначення (5.1), для повної варіації дії S одержимо:

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{s}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta\dot{q}_j\right\}dt+\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{d\mathscr{L}}{dt}\delta t\right)dt, \quad (6.20)$$

де перший інтеграл пов'язаний із зміною виду функцій $q_j(t)$, а другий – із зміною її аргументу t. Перетворимо другий доданок в фігурних дужках (6.20), використовуючи комутативність операції варіювання з операцією диференціювання за часом:

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta\dot{q}_j=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_j}\,\frac{d}{dt}\delta q_j=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_j}\right)\delta q_j. \quad (6.21)$$

Крім того, обчислимо другий інтеграл в правій частині (6.20). Маємо

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{d\mathscr{L}}{dt}\delta t\right)dt=\int_{t_0}^{t_1}d\mathscr{L}\delta t=\int_{t_0}^{t_1}d(\mathscr{L}\delta t)-\int_{t_0}^{t_1}\mathscr{L}d\delta t=\mathscr{L}\delta t\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\mathscr{L}d\delta t.$$

Але $\delta t=t'-t=\varepsilon$ і $d\delta t=0$. Тому із попереднього співвідношення одержимо, що

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{d\mathscr{L}}{dt}\delta t\right)dt=\mathscr{L}\delta t\Big|_{t_0}^{t_1}. \quad (6.22)$$

Підставляючи вирази (6.21) і (6.22) у (6.20), отримаємо

$$\begin{aligned} \delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) \right\} \delta q_j dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{s} d\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) + \mathscr{L}\delta t \Big|_{t_0}^{t_1}. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Враховуючи, що між змінами початкового і кінцевого положення система рухається по дійсним траєкторіям у відповідності з рівняннями Лагранжа (2.29), прирівняємо до нуля вираз у фігурних дужках в (6.23) і тим самим знайдемо, що

$$\delta S = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}\, \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1} + \mathscr{L}\delta t \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Використовуючи означення узагальненого імпульсу p_j, а саме $p_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}$ (3.11), одержаний вище вираз для повної варіації дії можна подати у такому вигляді:

$$\delta S = \sum_{j=1}^{s} p_{j1}\, \delta q_j(t_1) - \sum_{j=1}^{s} p_{j0}\, \delta_j(t_0) + \mathscr{L}_1\, \delta t_1 - \mathscr{L}_0\, \delta t_2. \tag{6.24}$$

Тут $\mathscr{L}_1$ – значення функції $\mathscr{L}$ в момент t_1, $\mathscr{L}_0$ – значення функції $\mathscr{L}$ в момент t_0, δt_1 і δt_0 – варіації кінцевого і початкового моментів часу; p_{j1} і p_{j0} – узагальнені імпульси відповідно в моменти часу t_1 і t_0, а $\delta q_j(t_1)$ і $\delta q_j(t_0)$ – варіації функцій $q_j(t)$ в момент часу t_1 і t_0. Підкреслимо ще раз, що ці варіації пов'язані тільки зі зміною виду функцій $q_j(t)$ і на відміну від повних варіацій беруться при фіксованому часі t.

Для повних варіацій δq_{j0} і δq_{j1} маємо:

$$\delta q_{j0} = \delta q_j(t_0) + \dot{q}_j(t_0)\delta t_0, \tag{6.25}$$

і

$$\delta q_{j1} = \delta q_j(t_1) + \dot{q}_j(t_1)\delta t_1. \tag{6.26}$$

Підставивши вирази для повних варіацій (6.25) і (6.26) у повну варіацію дії (6.24), одержимо:

$$\begin{aligned} \delta S = \sum_{j=1}^{s} p_{j1}\delta q_{j1} - \sum_{j=1}^{s} p_{j1}\dot{q}_j(t_1)\, \delta t_1 - \\ - \sum_{j=1}^{s} p_{j0}\, \delta q_{j0} + \sum_{j=1}^{s} p_{j0}\dot{q}_j(t_0)\, \delta t_0 + \mathscr{L}_1\, \delta t_1 - \mathscr{L}_0\, \delta t_0 \end{aligned} \tag{6.27}$$

або

$$\delta S = \sum_{j=1}^{s} p_{j1}\ \delta q_{j1} - H_1\ \delta t_1 - \sum_{j=1}^{s} p_{j0}\ \delta q_{j0} + H_0\ \delta t_0, \tag{6.28}$$

де $H(q,p,t)$ – узагальнена енергія (3.19) як функція змінних q,p і t (тобто функція Гамільтона):

$$H(q,p,t) = \left\{ \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - \mathscr{L} \right\}_{\dot{q} \to \dot{q}(q,p,t)} . \tag{6.29}$$

Але $\delta t_0 = \delta t_1 = \varepsilon$, а $\delta q_0 = \delta q_1 = 0$, тому із (6.28) маємо:

$$\delta S = (-H_1 + H_0)\varepsilon = 0, \tag{6.30}$$

або в силу довільності $\varepsilon \neq 0$.

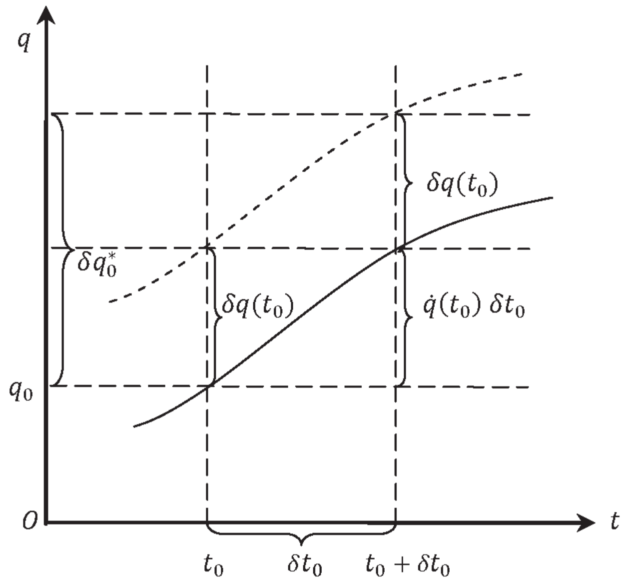

Рис. 6.1. Дві „траєкторії" системи в просторі q,t; одна з цих „траєкторій" проходить через „точку" q_0, t_0, а друга – через $q_0 + \delta q_0$, $t_0 + \delta t_0$.

Для розглянутої системи функція Гамільтона і повна енергія співпадають, тому із (6.30) знайдемо:

$$\delta S = (E_0 - E_1)\varepsilon = 0, \tag{6.31}$$

звідки випливає збереження повної енергії системи:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_{i<j=1}^{N} U_{ij} = E_0. \tag{6.32}$$

7. Лагранжевий формалізм в спеціальній теорії відносності

Вичерпному викладу спеціальної теорії відносності присвячено численні монографії, огляди та наукові статті, частина з яких наведена у переліку рекомендованої літератури (див. наприклад, [9, 10, 16]). Ми ж у даному розділі основну увагу спрямуємо на те, щоб показати, як спеціальна теорія відносності (СТВ) може бути уведена в класичному механіку. Тому ми наведемо основні положення і результати СТВ лише в тій мірі, яка необхідна нам для вказаної мети.

7.1 Постулати спеціальної теорії відносності

Як відомо, в основу СТВ покладено два постулати, сформульовані А. Ейнштейном у 1905 році:

1. *Принцип відносності Ейнштейна*: всі фізичні явища в усіх інерціальних системах відліку (ІСВ) при однакових початкових умовах протікають однаково. Це означає, що рівняння, які описують фізичні явища будь-якої природи, однакові в усіх ІСВ.

2. *Принцип сталості швидкості світла*: світло у вакуумі завжди поширюється з постійною швидкістю $c = 2,998 \cdot 10^8$м/с, незалежно від стану випромінюючого тіла.

Механіка Ньютона грунтується на припущені про миттєву передачу взаємодій від одного тіла до іншого. Спеціальна ж теорія відносності встановлює граничну швидкість поширення взаємодій, що дорівнює швидкості світла c.

Механіку побудовану на постулатах Ейнштейна, називають релятивістською, тоді як механіку Ньютона називають класичною.

В класичній механіці можна знехтувати впливом скінченності швидкості поширення взаємодії, якщо $v << c$. Це означає, що в границі $c \to \infty$ релятивістська механіка має переходити в класичну механіку Ньютона.

Перетворення Лоренца. Виходячи із сформульованих вище постулатів теорії відносності Ейнштейна, можна знайти закон перетворення, який зв'язує між собою просторові координати і час у двох системах відліку, що рухаються прямолінійно і рівномірно одна відносно одної. З цією метою розглянемо дві системи відліку K і K', що рухаються одна відносно одної зі сталою швидкістю $\vec{v}$ вздовж осей x і x' (рис. 7.1). Вважаємо, що у початковий момент часу початки відліку систем K і K' співпадають. При цьому нема жодних підстав вважати, що час t' в системі K' співпадає з часом t в системі K, як це беззастережно приймалося в класичній фізиці. Нехай деякий кінематичний процес вивчається спостерігачем, який рухається разом з системою K' і описує його за допомогою величин (x', y', z', t'). Необхідно знайти закон перетворення цих величин, який приводить до правильного опису досліджуваного процесу в змінних (x, y, z, t), що використовуються спостерігачем, який рухається разом з системою K.

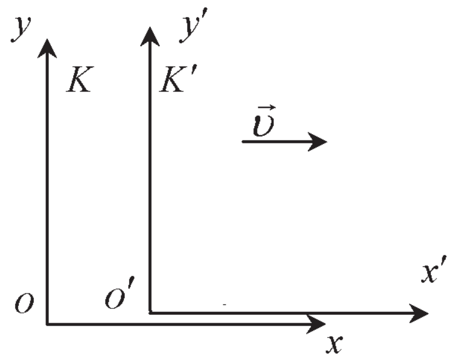

Рис. 7.1

Аналітичний зв'язок між величинами (x, y, z, t) і (x', y', z', t') вперше отримав Лоренц. Одержані ним формули, які носять назву перетворень Лоренца, мають вигляд (див. [10]):

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{7.1}$$

Використовуючи принцип відносності Ейнштейна щодо рівноправності систем відліку K і K', неважко одержати формули і оберненого перетворення координат і часу від системи відліку K до системи відліку K':

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{7.2}$$

При одержанні перетворень (7.2) було враховано, що напрям швидкості системи відліку K відносно K' буде зворотнім (тобто, $-\vec{v}$).

Важливою особливістю перетворень Лоренца є те, що при відносних швидкостях руху, набагато менших швидкості світла ($v << c$), вони переходять у перетворення Галілея:

$$x \approx x' + vt; \quad t' = t,$$

які застосовні у класичній механіці.

Інтервал. Одна із основних задач, яка постає перед теорією відносності, полягає у знаходженні абсолютних, не залежних від вибору ІСВ величин, які характеризують досліджувані фізичні явища і процеси. Першою з таких величин, як це слідує із другого постулату СТВ, є універсальна швидкість розповсюдження взаємодії – швидкість світла c. Іншим важливим інваріантом теорії відносності є так званий *інтервал*, поняття якого узагальнює звичайні поняття інтервалу (тобто відстані) між двома точками простору і інтервалу часу між двома подіями у класичній механіці.

Розглянемо поняття інтервалу більш детально. Нехай в ІСВ K відбулися деякі два фізичні явища, які будемо називати подіями. Вважаємо, що перша подія відбулася в точці простору з координатами (x_1, y_1, z_1) у момент часу t_1, а друга – у точці з координатами (x_2, y_2, z_2) у момент часу t_2. Тоді інтервалом між цими двома подіями називають величину

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}. \tag{7.3}$$

В іншій ІСВ K' ці події задаються своїми наборами просторових і часових координат (x'_1, y'_1, z'_1), t'_1 і (x'_2, y'_2, z'_2), t'_2. Тому в цій ІСВ K' інтервал між подіями дорівнює:

$$s'_{12} = \sqrt{c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2}.$$

Інваріантність інтервала відносно перетворень Лоренца може бути перевірена безпосереднім обчисленням. Дійсно, підставивши формули перетворення Лоренца (7.1) в інтервал s'_{12} і виконавши елементарні обчислення, одержимо:

$$s'_{12} = s_{12}.$$

Таким чином, при переході від однієї ІСВ до іншої інтервал між двома подіями не змінюється, тобто є інваріантом. Тому твердження: „ Дві фізичні події розділені інтервалом s" має абсолютний характер і справедливе для всіх інерціальних систем відліку. У той же час в класичній механіці такими інваріантними при переході від однієї ІСВ до іншої величинами є поокремо відстані і проміжки часу.

Часто розглядають інтервал між двома подіями, які відбуваються в нескінченно близьких точках через нескінченно малий час. У цьому випадку інтервал між двома подіями дорівнює

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}. \tag{7.4}$$

7.2 Лагранжевий формалізм в спеціальній теорії відносності

Перейдемо тепер до релятивістського узагальнення класичних рівняння Лагранжа (2.25) або (2.29). Перш ж за все зауважимо, що в релятивістському випадку важко отримати рівняння Лагранжа, виходячи тільки з принципу Даламбера. Справа, в тому, що хоча рівність (див. (2.3))

$$\sum_{i=1}^{N}(\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{7.5}$$

справедлива не тільки в класичній, але і в релятивістській механіці, проте всі перетворення, виконані в розділі 2, будуть у релятивістському випадку не вірні, оскільки імпульси $\vec{p}_i$ тепер не дорівнюватимуть $m\vec{v}_i$.

Інший шлях одержання релятивістських рівнянь Лагранжа базується на варіаційному принципі, який є загальним принципом, застосовним до будь-яких фізичних систем. У розділі 5 ми детально розглянули основні ідеї одного із таких принципів – принципу найменшої дії, стосовно задач класичної механіки. Зокрема, було встановлено, що дійсному руху системи відповідає мінімум дії, який досягається за умови, що функція Лагранжа задовольняє диференціальне рівняння Лагранжа 2-го роду (2.25). Таким чином, для одержання диференціальних рівнянь руху системи і законів збереження динамічних величин в класичній механіці достатньо знати функцію Лагранжа системи.

З'ясуємо питання по можливість застосування методу Лагранжа у динаміці релятивістської частинки. Як відомо (див. розділ 2), рівняння Лагранжа не залежать ні від вибору системи відліку, ні від конкретних властивостей системи, ні від властивостей простору і часу. При виведені цих рівнянь не накладалися жодні умови на вид і структуру функції Лагранжа. Тому рівняння Лагранжа можна застосовувати і в СТВ.

Властивості симетрії простору і часу (однорідність та ізотропність) проявляється і в релятивістській області руху, тому в СТВ закони збереження можна також одержати, використовуючи метод Лагранжа.

У цьому випадку побудова рівнянь руху і величин, що зберігаються, у спеціальній теорії відносності зводиться до побудови релятивістської функції Лагранжа, яка повинна задовольняти таким умовам:

1) функція Лагранжа повинна бути інваріантом перетворення Лоренца (принцип відносності);

2) функцію Лагранжа потрібно будувати із врахуванням властивостей простору і часу;

3) у випадку, коли швидкість тіла набагато менша швидкості світла, функція Лагранжа повинна набувати відомого із нерелятивістської механіки вигляду (принцип відповідності).

Нагадаємо, що в нерелятивістській механіці, базованій на ньютонівських уявленнях про властивості простору і часу, принципи дальнодії і відносності, функція Лагранжа вільної частинки в декартових координатах дорівнює

$$\mathscr{L} = \frac{mv^2}{2}, \tag{7.6}$$

де m – маса частинки, $\vec{v}$ – її швидкість.

7.2.1 Функція Лагранжа, енергія та імпульс вільної релятивістської частинки. Побудову релятивістської функції Лагранжа розпочнемо із вільної частинки. За означенням, функція Лагранжа може залежати від часу, швидкості і координати частинки. Проте в силу однорідності простору і часу дія S для вільної частинки не може містити під інтегралом в явному вигляді координати і час. Ізотропність простору виключає і залежність дії від напряму швидкості частини. Крім того, дія для релятивістської частинки має бути інваріантна і відносно перетворення Лоренца. Значить, під інтегралом дії повинен знаходитися лоренц-інваріантний скаляр у вигляді диференціалу першої степені.

Для вільної частинки існує єдина величина, яка задовольняє ці умови – це нескінченно малий інтервал ds:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \tag{7.7}$$

Тоді для дії S можемо записати:

$$S = \int \alpha ds = \int \alpha c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt, \tag{7.8}$$

де α – сталий коефіцієнт пропорційності. Порівнюючи (7.8) з визначення дії (5.1), одержимо функцію Лагранжа релятивістської вільної частинки з точністю до сталого множника α:

$$\mathscr{L} = \alpha c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{7.9}$$

Константу α знайдемо, використовуючи принцип відповідності, згідно якого при швидкостях $v << c$ вираз (7.9) повинен перейти в (7.6). Для цього розкладемо функцію (7.9) в ряд за степенями $\frac{v^2}{c^2} << 1$:

$$\mathscr{L} = \alpha c \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + ...\right) \approx \alpha c - \frac{1}{2}\frac{\alpha v^2}{c}.$$

Оскільки функція Лагранжа визначена з точністю до деякої адитивної сталою, яка не змінює рівняння руху (див. розд. 4), то перший доданок у попередньому розкладі можна відкинути, у результаті чого одержимо

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\frac{\alpha v^2}{c}. \tag{7.10}$$

Порівняння останнього виразу із (7.6) показує, що принцип відповідності виконуватиметься, якщо

$$\alpha = -mc. \tag{7.11}$$

Підставивши (7.11) в (7.9), отримаємо релятивістський вираз для функції Лагранжа вільної частинки

$$\mathscr{L} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{7.12}$$

Вираз (7.12) для функції Лагранжа релятивістської частинки узгоджується з вимогами симетрії простору і часу. Дійсно, в силу однорідності часу і простору ця функція не залежить від часу і від координат. А в силу ізотропності простору функція Лагранжа (7.12) не залежить від напряму вектора швидкості.

Знаючи вигляд функції Лагранжа (7.12), знайдемо імпульс $\vec{p}$ і енергію E вільної релятивістської частинки, які зберігаються. Імпульсом частинки називається, як відомо, вектор $\vec{p} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{v}}$ ($\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{v}}$ – символічне позначення вектора, компоненти якого дорівнюють похідним від $\mathscr{L}$ по відповідним компонентам (проекціям) вектора швидкості $\vec{v}$: $p_i = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_i}$, $(i \equiv x, y, z)$). За допомогою формули (7.12) знайдемо

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{v}} = -\frac{1}{2}\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(-\frac{2\vec{v}}{c^2}\right) = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{7.13}$$

При малих швидкостях $v << c$ і в границі при $c \to \infty$ цей вираз переходить у класичний імпульс вільної частинки $\vec{p} = m\vec{v}$.

Енергія E частинки визначається співвідношенням (див. (3.19)

$$E = \vec{v}\vec{p} - \mathscr{L}.$$

Підставивши сюди вирази (7.12) і (7.13) для $\mathscr{L}$ і $\vec{p}$, одержимо:

$$\begin{aligned} E =& \vec{v}\vec{p} - \mathscr{L} = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} = \\ =& \frac{mv^2 + mc^2(1 - v^2/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Із виразу для енергії (7.14) випливає, що в релятивістські механіці енергія вільної частинки не перетворюються в нуль при $v = 0$, а залишається скінченною величиною, яка дорівнює

$$E_0 = mc^2. \tag{7.15}$$

Її називають енергією спокою частинки.

Розкладаючи (7.14) при малих швидкостях ($v << c$) ряд за степенями $\frac{v^2}{c^2} << 1$, для енергії частинки одержимо:

$$E \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2},$$

що з точністю до енергії спокою співпадає з класичним виразом для кінетичної енергії частинки. Зауважимо також, що кінетичною енергією релятивістської частинки називають величину, яка дорівнює різниці повної енергії E частинки і її енергії спокою E_0:

$$T = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2. \tag{7.16}$$

Вправа

Знайти функцію Лагранжа вільної релятивістської частинки, для якої справедливі співвідношення:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_i} = p_i = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_i} = F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

<u>Розв'язання.</u>

Оскільки $\mathscr{L} = \mathscr{L}(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$, то

$$d\mathscr{L} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial z}dz + \\ + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_x}dv_x + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_y}dv_y + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_z}dv_z,$$

або

$$d\mathscr{L} = -\frac{\partial U}{\partial x}dx - \frac{\partial U}{\partial y}dy - \frac{\partial U}{\partial z}dz + \\ + m_0\frac{v_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}dv_x + m_0\frac{v_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}dv_y + m_0\frac{v_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}dv_z,$$

звідки

$$\mathscr{L} = m_0\int \frac{v_x dv_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \int \frac{\partial U}{\partial x}dx + m_0\int \frac{v_y dv_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \int \frac{\partial U}{\partial y}dy + \\ + m_0\int \frac{v_z dv_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \int \frac{\partial U}{\partial z}dz.$$

Обчислимо інтеграл по v_x:

$$I = \frac{m_0}{2}\int \frac{dv_x^2}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c}{2}\int \frac{dv_x^2}{\sqrt{(c^2 - v_y^2 - v_z^2) - v_x^2}} = \frac{m_0 c}{2}\int \frac{d\xi}{\sqrt{a - \xi}},$$

де $a = c^2 - v_y^2 - v_z^2$; $\xi = v_x^2$.

Тоді

$$I_1 = -\frac{m_0 c}{2}\int \frac{d(a-\xi)}{\sqrt{a - \xi}} = -m_0 c\sqrt{a - \xi} = \\ = -m_0 c\sqrt{c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2} = -m_0 c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Остаточно,

$$\mathscr{L} = -m_0 c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U.$$

7.2.2 Функція Лагранжа, енергія та імпульс замкнутої системи невзаємодіючих частинок. Нехай замкнута система складається з N частинок, які не взаємодіють одна з одною. Позначимо масу i-ої частинки m_i, а її швидкість – v_i (в деякій системі відліку K). Функція Лагранжа для будь-якої з частинок має вигляд

$$\mathscr{L}_i = -m_i c^2 \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}. \tag{7.17}$$

Для замкнутої системи невзаємодіючих між собою частинок функція Лагранжа дорівнює сумі одночастинкових функцій (7.17) (властивість адитивності)

$$\mathscr{L}_i = -\sum_{i=1}^{N} m_i c^2 \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}. \tag{7.18}$$

Енергія та імпульс замкнутої системи невзаємодіючих частинок. Оскільки функція Лагранжа такої системи дорівнює сумі одночастинкових функцій, то із означення повної енергії (7.14) видно, що енергія всієї системи буде рівна сумі енергій окремих частинок.

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \sum_{i=1}^{N} E_i = \mathrm{const} \tag{7.19}$$

Для імпульсу всієї системи, який зберігається в силу однорідності простору, одержимо суму імпульсів всіх частинок

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{v_i}}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \sum_{i=1}^{N} p_i = \mathrm{const}. \tag{7.20}$$

7.2.3 Релятивістська частинка у зовнішньому полі. Функція Лагранжа.

Функцію Лагранжа для релятивістської частинки у зовнішньому потенціальному полі знайдемо, відштовхуючись від її вигляду (7.12) для вільної частинки і застосовуючи принцип відповідності (див. підрозділ 7.2). Оскільки для частинки, яка знаходиться у зовнішньому полі, можна задати її потенціальну енергію $U(x, y, z)$, що залежить від координат частинки в полі, то класична функція Лагранжа у цьому випадку відома і має вигляд (порівняйте з (2.28)):

$$\mathscr{L} = \frac{mv^2}{2} - U.$$

Тому, якщо взяти для релятивістської частинки в зовнішньому полі вираз

$$\mathscr{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U, \tag{7.21}$$

то таке визначення функції Лагранжа задовольняє принцип відповідності і в границі $v << c$ дає правильний перехід до класичної механіки.

Зауважимо, що лагранжіан релятивістської частинки (7.21) не дорівнює різниці її кінетичної T (див. (7.16)) і потенціальної U енергій, як це має місце в класичній механіці. Проте, як показано нижче, він приводить до правильних рівнянь руху.

Рівняння руху. Для отримання необхідного рівняння руху досить підставити (7.21) в рівняння руху Лагранжа (2.29). Виконаємо обчислення:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \vec{p}, \tag{7.22}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = \vec{F}, \tag{7.23}$$

де використане позначення для імпульсу $\vec{p}$ (7.13).

Підставивши (7.22) і (7.23) в рівняння руху Лагранжа (2.29), отримаємо

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \vec{F}. \tag{7.24}$$

Це і є рівняння руху релятивістської частинки в зовнішньому полі. Якщо скористатися означенням імпульсу $\vec{p}$ (7.13), то рівняння (7.24) набуває вигляду

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}. \tag{7.25}$$

Закон збереження енергії. Нехай зовнішнє поле не залежить явно від часу, тобто воно стаціонарне:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0. \tag{7.26}$$

Тоді функція Лагранжа (7.21) інваріантна відносно перетворення зсуву часу. Значить, існує величина, що зберігається – енергія:

$$W = \vec{v}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vec{v}} - \mathscr{L} = \mathrm{const}.$$

Підставивши в цю формулу значення $\mathscr{L}$ з (7.21) і враховуючи (7.22), одержимо

$$\begin{aligned} W &= \vec{v}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - U\right) = \frac{m(v^2+c^2-v^2)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + U = \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + U = E + U. \end{aligned} \tag{7.27}$$

Перший доданок – це енергія вільної релятивістської частинки E (7.14), а другий доданок – потенціальна енергія цієї частинки в зовнішньому потенціальному полі. Всю енергію релятивістської частинки в зовнішньому полі W будемо називати повною енергією.

Отже, повна енергія релятивістської частинки в зовнішньому стаціонарному потенціальному полі зберігається

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(E+U) = \frac{d}{dt}E + \frac{d}{dt}U = \frac{dE}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0.$$

Перепишемо цей вираз, враховуючи умову (7.26):

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\vec{v}. \tag{7.28}$$

Таким чином, хоча повна енергія і зберігається, її компоненти E і U змінюються.

Розпишемо закон збереження енергії (7.28) з урахуванням визначення сили (7.23)

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F}\vec{v}. \tag{7.29}$$

Вираз в правій частині рівності є робота, виконана полем над частинкою за одиницю часу, тобто це потужність сили, що визначає швидкість зміни релятивістської енергії частинки E.

Лагранжіан (7.21) можна легко поширити на систему, що складається з N матеріальних точок. При цьому доцільно перейти від декартових координат x_i $(i = 1, 2, ..., 3N)$ до узагальнених координатах q_j, $(j = 1, 2, ..., s)$. Узагальнені імпульси, як і раніше, визначатися рівністю

$$p_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j},$$

і тому імпульси, що відповідають циклічним координатами, як і в нерелятивістській механіці, будуть зберігатися. Що стосується теореми про збереження енергії, то вона тут також буде мати місце, але її одержання доведеться дещо змінити. Раніше (див. підрозділ 3.3) було показано, що у випадку, коли $\mathscr{L}$ не залежить явно від часу, має місце рівність

$$\sum \dot{q}_j p_j - \mathscr{L} = H,$$

де H – деяка постійна. Цей висновок буде, звичайно, справедливий і зараз, оскільки, доводячи написану рівність, ми виходили лише із загального вигляду рівняння Лагранжа та із співвідношення $p_j = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_j}$. Однак подальший наш висновок, що H є повна енергія, тепер не можна буде отримати так само, як раніше, бо $\mathscr{L}$ вже не дорівнюватиме $T-U$, а $\sum \dot{q}_j p_j$ небуде рівною $2T$. Цей висновок, тим не менш, залишається в силі, в чому можна переконатися, розглядаючи приклад з однією матеріальною точкою, де H дорівнює

$$H = \sum_i \frac{mv_i^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + mc^2\sqrt{1-\beta^2} + U,$$

що після нескладного перетворення можна записати у вигляді

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + U = T + U = E.$$

Таким чином, ми бачимо, що H як і раніше дорівнює повній енергії E.

І останнє зауваження, що стосується результатів всього розділу. Оскільки всі функції Лагранжа були отримані з урахуванням принципу відповідності, то всі одержані за їх допомогою динамічні величини (енергії та імпульси) і рівняння (7.24), (7.25), (7.28) та (7.29) так само задовольняють принцип відповідності і в граничному випадку малих швидкостей $v << c$ переходять у відповідні вирази ньютонівської механіки.

Уведення потенціалів, що залежать від швидкості, також не становить тут особливих труднощів. Так, наприклад, лагранжіан частинки, що знаходиться в електромагнітному полі, має вигляд

$$\mathscr{L} = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - q\varphi + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{v}, \tag{7.30}$$

а відповідний узагальнений імпульс дорівнює

$$p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{q}{c}A_i \quad (i = x, y, z). \tag{7.31}$$

Як ми бачимо, він не дорівнює $\frac{mv_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, а відрізняється від нього доданком, що виникає від тієї частини потенціалу, яка залежить від швидкості.

Таким чином, майже всі спеціальні методи, створені нами для розв'язання задач класичної механіки, можна перенести на релятивістську механіку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ольховский И.И. *Курс теоретической механики для физиков* / И.И. Ольховский. – М.: Изд-во Моск. ун-та,г 1978. – 575 с.
2. Федорченко А.М. *Теоретична механіка. Механіка* / А.М. Федорченко. – Вища школа, 1971. – 272 с.
3. Ольховский И.И. *Задачи по теоретической механике для физиков* / И.И. Ольховский, Ю.Г. Павленко, Л.С. Кузьменков. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977. – 395 с.
4. Голдстейн Г. *Классическая механика* / Г. Голдстейн. – М.: Наука, 1975. – 413 с.
5. Ландау Л.Д. *Теоретическая физика* („Механика”, том I) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1988. – 215 с.
6. Ньютон Исаак. *Математические начала натуральной философии* / Исаак Ньютон (пер. с латин. А.Н. Кылова). – М.: Наука, 1989. – 711 с.
7. Лагранж Ж. *Аналитическая механика* (2-е изд.), том I / Ж. Лагранж (пер. с франц. В.С. Гохмана). – М-Л.: Гостехиздат, 1950. – 598 с.
8. Лагранж Ж. *Аналитическая механика* (2-е изд.), том II / Ж. Лагранж (пер. с франц. В.С. Гохмана). – М-Л.: Гостехиздат, 1950. – 440 с.
9. Ландау Л.Д. *Теоретическая физика* („Теория поля”, том II) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
10. Левич В.Г. *Курс теоретической физики* (2-е изд.), том I / В.Г. Левич. – М.: Наука, 1969. – 912 с.
11. Боголюбов Н.Н. *Введение в теорию квантованных полей* (4-е изд.) / Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. – М.: Наука, 1984. – 600 с.
12. Гречко Л.Г. *Сборник задач по теоретической физике* / Л.Г. Гречко, В.И. Сугаков, О.Ф. Томасевич, А.М. Федорченко. – М.: Высшая школа, 1972. – 336 с.
13. Айзенберг Т.Б. *Руководство к решению задач по теоретичкой механике* (6-е изд.) / Т.Б. Айзенберг, И.М. Воронков, В.М. Осецкий. – М.: Высшая школа, 1968. – 420 с.
14. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление* / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
15. Нетер Э. *Инвариантные вариационные задачи.* – В кн. „Вариационные принципы механики” / Э. Нетер. – М.: Физматгиз, 1959. – 932 с.

16. Лич Дж.У. *Классическая механика* / Дж.У. Лич (пер. с англ. Я.И. Секерж-Зеньковича). – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. – 173 с.

М.І. Карбованець, В.Ю. Лазур, Є.А. Нодь. Теоретична механіка. Частина І. Метод Лагранжа: навчальний посібник. – Ужгород: Видавництво УжНУ “Говерла”, 2019. – 82 с.

Рецензент:

доктор фізико-математичних наук, професор, старший науковий співробітник відділу електронних процесів і елементарних взаємодій ІЕФ НАН України
Гайсак М.І.

Відповідальний за випуск:
доктор фізико-математичних наук, професор,
декан фізичного факультету
Лазур В.Ю.

Посібник створено на базі частини лекційного курсу „Теоретична механіка” і „Прикладна механіка та мехатроніка”, що читається студентам спеціальностей „Середня освіта. Фізика”, „Фізика та астрономія”, „Прикладна фізика і наноматеріали” та „Телекомункації та радіотехніка” фізичного факультету УжНУ. Він містить ряд основних ідей і методів аналітичної механіки в обсязі, достатньому для їх подальшого застосування в курсах та спецкурсах із загальної та теоретичної фізики. Наводиться велика кількість завдань різного рівня складності, частину з яких можна використати в якості змістовних доповнень до курсів із теоретичної механіки, електродинаміки, квантової механіки, теорії коливань тощо.

Посібник розраховано на студентів фізико-математичних та інженерно-технічних спеціальностей університетів.

Рекомендована до друку методичною комісією фізичного факультету (протокол №7 від 19 березня 2019 року)