

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДВНЗ «УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ФІЗИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ

В.В. Рубіш

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З КУРСУ
«ЕЛЕКТРОДИНАМІКА»

УЖГОРОД–2020

Рубіш В.В. Конспект лекцій з курсу «Електродинаміка»: навчальний посібник. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2020. – 90 с.

У навчальному посібнику розроблено курс лекцій, присвячений викладу основ електродинаміки. Метою даного курсу є оволодіння студентами 014.08 «Середня освіта. Фізика», 104 «Фізика та астрономія», 105 «Прикладна фізика і наноматеріали» та 172 «Телекомунікації та радіотехніка» основними законами електродинаміки, побудова математичних моделей електромагнітних явищ, а також їх аналіз на основі аналітичних розв'язків електродинамічних задач. У посібнику наведені базова система рівнянь електродинаміки – система рівнянь Максвелла, основи спеціальної теорії відносності та прикладні аспекти електродинаміки.

Курс базується на знаннях студентів, отриманих в курсах загальної фізики, математичного та тензорного аналізу, класичної (теоретичної) механіки.

Розробник:

Рубіш Василь Васильович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теоретичної фізики фізичного факультету ДВНЗ «УжНУ».

Рецензент:

кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри теоретичної фізики фізичного факультету ДВНЗ «УжНУ»
Карбованець М.І.

Відповідальний за випуск:

доктор фізико-математичних наук, професор, декан фізичного факультету
Лазур В.Ю.

*Рекомендовано до друку методичною комісією фізичного факультету
(протокол № 6 від 18 лютого 2020 року)*

©Рубіш В.В., 2020 р.
©ДВНЗ «Ужгородський національний університет», 2020 р.

ЗМІСТ

1	КЛАСИЧНА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА	5
1.1	Експериментальні основи та математичне формулювання фундаментальних законів класичної електродинаміки	5
1.2	Принцип суперпозиції електричних полів. Теорема Гаусса	9
1.3	Робота електричного поля. Скалярний потенціал електричного поля	15
2	СТАЦІОНАРНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ	22
2.1	Сила і густина електричного струму. Рівняння неперервності	22
2.2	Магнітне поле провідника із струмом	23
2.3	Векторний потенціал магнітного поля	27
2.4	Закон Біо-Савара-Лапласа	28
3	ЗМІННЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ	33
3.1	Закон електромагнітної індукції	33
3.2	Струм зміщення. Гіпотеза Максвелла	36
3.3	Рівняння змінного електромагнітного поля у вакуумі	37
3.4	Потенціали змінного електромагнітного поля у вакуумі. Рівняння Д'Аламбера	41
3.5	Запізнювальний та випереджувальний потенціали	44
3.6	Закон збереження енергії в електромагнітному полі у вакуумі. Вектор Пойнтінга	49
3.7	Закон збереження імпульсу в електромагнітному полі у вакуумі	51
4	ВІЛЬНЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ.	54
4.1	Хвильове рівняння Д'Аламбера для векторів у випадку вільного електромагнітного поля. Електромагнітні хвилі	54
4.2	Плоскі електромагнітні хвилі	57
4.3	Сферичні електромагнітні хвилі	60
4.4	Поляризація електромагнітних хвиль	61
4.5	Електромагнітне поле на великих відстанях від системи зарядів	63
4.6	Електромагнітне поле дипольного випромінювання далеко від випромінювача	69
5	РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ У РЕЧОВИНИ	73
5.1	Граничні умови для векторів електромагнітного поля	73
5.1.1	Граничні умови для нормальних складових електричного поля	73
5.1.2	Граничні умови для тангенціальних складових електричного поля	75
5.1.3	Граничні умови для нормальних складових магнітного поля	77

5.1.4	Граничні умови для тангенціальних складових магніт- ного поля	77
5.2	Рівняння Максвелл-Лоренца	78
5.3	Вектори поляризації та електричної індукції	79
5.4	Вектори намагнічення і напруженості магнітного поля	80
5.5	Рівняння Максвелла для електромагнітного поля в речовині . .	83
5.6	Граничні умови для векторів електромагнітного поля в речовині	84
5.7	Закон збереження енергії для електромагнітного поля у речовині	86
5.8	Потенціали електромагнітного поля в речовині	87
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА		89

1 КЛАСИЧНА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

1.1 Експериментальні основи та математичне формулювання фундаментальних законів класичної електродинаміки

1. *Електричне поле і заряди.*
2. *Закон збереження електричного заряду. Квантування електричного заряду. Елементарний електричний заряд.*
3. *Закон Кулона. Залежність його від вибору системи одиниць.*
4. *Силові лінії електричного поля.*

Електромагнітна взаємодія є одною з чотирьох типів фундаментальних взаємодій у природі. В силу того, що вона має досить велику інтенсивність і нескінченний радіус дії, електромагнітне взаємодія проявляє себе на всіх рівнях організації матерії, як макроскопічному так і мікроскопічному рівнях. Відповідно до цього електродинаміку поділяють на класичну електродинаміку і квантову електродинаміку. У даному курсі розглядається класична електродинаміка, тобто дана теорія не є квантовою теорією.

Основною характеристикою, що визначає здатність тіла (частинки) брати участь у електромагнітній взаємодії, є електричний заряд. Взаємодія між частинками здійснюється за допомогою електромагнітного поля, яке існує навколо кожного зарядженого тіла. Таким чином, основною фізичною системою, яка вивчається в електродинаміці, є система, що складається із заряджених частинок та електромагнітного поля, що взаємодіють між собою. З одного боку заряджені частинки є джерелами поля, а з іншого відчують вплив з боку поля.

Таким чином, **електромагнітне поле** – це фундаментальне фізичне поле, яке взаємодіє з зарядженими тілами (а також з тілами, що мають власні дипольні і мультипольні електричні і магнітні моменти). Воно виявляється за дією на заряджені тіла.

Якщо електричне і магнітне поле не змінюються з часом, то їх можна розглядати окремо. Розділ електродинаміки, який вивчає електричні поля нерухомих зарядів (звичайно, це деяке наближення), називається **електростатикою**. Постійні магнітні поля досліджуються в **мagnetизмі**.

Напрявленість дії електричних сил поля дозволяє характеризувати поле деяким вектором \vec{E} , який називається **напруженістю електричного поля** (силова характеристика поля). Вектор \vec{E} є функцією координат точки

у вибраній системі відліку, та часу, якщо заряди, що створюють це поле є рухомими, тобто $\vec{E}(\vec{r}, t)$.

Дослід показує, що при заданій напруженості поля \vec{E} сили, що діють на різні нерухомі заряди, розташовані в даній точці поля, різні. Тому треба вважати, що електрична сила не рівна, а пропорційна напруженості поля (напруженість – це силова характеристика електричного поля)

$$\vec{F}_e = q \vec{E}. \quad (1.1)$$

Скалярний множник пропорційності q служить мірою величини **електричного заряду**.

Тобто, електричний заряд – це фізична величина, яка характеризує здатність тіл вступати у електричну взаємодію. У виразі (1.1) передбачається, що заряд **точковий** (тобто, його розмірами за даних умов можна знехтувати) і поле \vec{E} береться в точці, де розташований заряд. Стан такого заряду визначається його радіус-вектором \vec{r} і швидкістю $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ у вибраній системі відліку. Співвідношення (1.1) виражає **принцип близькодії** для електричного поля: взаємодія між зарядами відбувається через електричне поле, яке існує навколо кожного електричного заряду.

Сила \vec{F}_e , що діє на нерухомий заряд, може бути як паралельною до \vec{E} , так і антипаралельною до \vec{E} , тому заряди можуть бути різних знаків.

Одиниця вимірювання заряду (в СІ) – *кулон* (Кл) – є похідною і виражається через дві основні одиниці – силу струму і час. По визначенню один кулон – це заряд, що проходить за одну секунду через поперечний переріз провідника при силі струму один ампер:

$$1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}.$$

Носіями електричних зарядів є "елементарні" частинки та атоми. Наявність електричного заряду – невід'ємна природна властивість деяких елементарних частинок. Носіями від'ємних зарядів є електрони, а додатних зарядів – протони. Заряд всіх протонів однаковий і рівний мінімальному заряду, який зустрічається в природі – так званому **елементарному електричному заряду e** :

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

Заряди всіх електронів також однакові і за абсолютною величиною рівні елементарному електричному заряду. Заряд всіх "елементарних" частинок рівний $\pm e$ (крім кварків), а заряди атомних ядер рівні Ze , де Z – номер елемента в періодичній системі елементів.

Чисельне значення заряду частинки не залежить від її швидкості, тобто перехід від одної інерціальної системи до іншої не змінює електричного заряду. Таким чином електричний заряд є інваріантним відносно перетворень Лоренца. В цьому полягає **властивість інваріантності** електричного заряду. Фактично інваріантність доводиться фактом нейтральності атома. Внаслідок великої різниці між масою електрона і протона, електрони в атомах

рухаються набагато швидше протонів. Таким чином, якби заряд залежав від швидкості, то нейтральність атома була би порушена.

Електричний заряд – величина адитивна, тому заряд макроскопічного тіла, визначається сумарним зарядом елементарних частинок, які його утворюють. В результаті різних взаємодій заряд макроскопічного тіла може змінюватися, але справедливий **закон збереження електричного заряду** – в замкненій системі при будь-яких взаємодіях тіл алгебраїчна сума електричних зарядів всіх тіл залишається постійною:

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = \text{const.} \quad (1.2)$$

Закон Кулона (1794 р.): два нерухомі точкові заряди q_1 і q_2 взаємодіють із силою \vec{F}_e пропорційною добутку зарядів і обернено пропорційною квадрату відстані між ними:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}^0 = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r} \quad (1.3)$$

$\vec{r}^0 = \vec{r}/r$ – одиничний вектор, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ – різниця радіус-векторів точкових зарядів q_1 і q_2 , тобто $|\vec{r}|$ – відстань між цими зарядами. Причому однойменні заряди відштовхуються ($q_1 q_2 > 0$), а різнойменні – притягуються ($q_1 q_2 < 0$). В системі СІ коефіцієнт пропорційності k рівний

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2},$$

де

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$$

– електрична стала. Коефіцієнт k показує з якою силою взаємодіють два точкові заряди величиною 1 Кл, розташовані на відстані 1 м.

Згідно принципу близькодії взаємодія зарядів виглядає так: заряд створює електричне поле, яке діє на інший заряд, внесений в це поле, з силою

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \cdot q_2 \quad \text{або} \quad \vec{F}_{21} = k \frac{q_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} \cdot q_1. \quad (1.4)$$

В цьому полягає **польове трактування** закону Кулона.

Якщо електричний заряд займає деякий скінчений об'єм V , то його зручно характеризувати об'ємною густиною заряду

$$\rho(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV},$$

яка чисельно рівна величині заряду в одиниці об'єму. Заряд в елементі об'єму dV рівний $dq = \rho dV$, а повний заряд в об'ємі V отримуємо завдяки адитивності заряду інтегруванням по всьому об'єму

$$q = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV. \quad (1.5)$$

Сила, яка діє в електричному полі на заряд в елементі об'єму dV , рівна $d\vec{F}_e = \vec{E} dq = \rho \vec{E} dV$. Сила, яка діє на заряд в об'ємі V , отримаємо інтегруванням по об'єму

$$\vec{F}_e = \int_V \rho \vec{E} dV. \quad (1.6)$$

З виразу (1.1) для сили, що діє збоку електричного поля на заряд можна записати

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q}. \quad (1.7)$$

Іншими словами, напруженість електричного поля \vec{E} рівна силі, яка діє на одиничний додатній пробний заряд. В загальному випадку напруженість поля різна в різних точках. Поле, напруженість якого у всіх точках однакова як по модулю, так і за напрямком, називається **однорідним**.

Скориставшись виразом (1.7) та законом Кулона (1.3), можна обчислити напруженість електричного поля, створеного точковим зарядом q на відстані r від нього:

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.8)$$

Для наочного зображення електричного поля, вводять поняття про силові лінії вектора \vec{E} . Лінії вектора напруженості є просторовими кривими, проведеними так, що дотична в кожній її точці напрямлена вздовж вектора \vec{E} в цій точці. Диференціальне рівняння лінії вектора \vec{E} має вигляд

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \quad (1.9)$$

Так як силову лінію можна провести через кожну точку простору, то поле характеризується нескінченним числом силових ліній, однак, зображають тільки деякі лінії. Поля точкових зарядів (додатних і від'ємних) зарядів представлені на рис. 1.1.

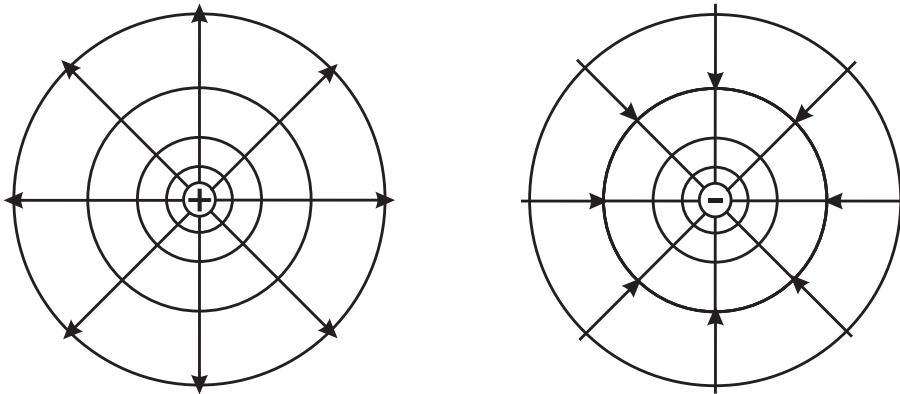


Рис. 1.1

1.2 Принцип суперпозиції електричних полів. Теорема Гаусса

1. Принцип суперпозиції електричних полів.
2. Електричне зміщення.
3. Потік вектора напруженості електричного поля.
4. Теорема Гаусса (інтегральна та диференціальна форми).
5. Приклади застосування теореми Гаусса для знаходження напруженості електричного поля деяких фізичних об'єктів.

З експериментального факту векторного додавання сил, які діють на заряд q_0 , що знаходиться в точці r , з боку інших зарядів q_1, q_2, \dots, q_n

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

впливає

$$\frac{\vec{F}}{q_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\vec{F}_i}{q_0}$$

принцип суперпозиції полів: поле двох або декількох зарядів рівне векторній сумі полів, створених кожним зарядом окремо, тобто

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(\vec{r}, t) \quad (1.10)$$

де $\vec{E}_i(\vec{r}, t)$ – поле, створене i -м зарядом в точці \vec{r} в момент t ; $\vec{E}(\vec{r}, t)$ – результуюче поле в цій же точці і в той же момент часу. Принцип суперпозиції фактично означає, що присутність інших електричних зарядів не впливає на поле, створене даним зарядом.

Основною задачею електродинаміки є знаходження вектора \vec{E} в кожній точці електричного поля, створеного системою джерел поля – електричних зарядів. Для розв'язання цієї задачі крім принципу суперпозиції полів, застосовують метод, що базується на обчисленні потоку вектора напруженості електричного поля.

Введемо поняття потоку вектора напруженості. Позначимо елемент площі деякої поверхні σ з нормаллю \vec{n} через $d\vec{\sigma}$ (рис. 1.2). Потік вектора \vec{E} через $d\vec{\sigma}$ визначиться як скалярний добуток цих векторів:

$$d\Phi = \vec{E} d\vec{\sigma} = \vec{E} \vec{n} d\sigma = E \cos \alpha d\sigma = E_n d\sigma, \quad (1.11)$$

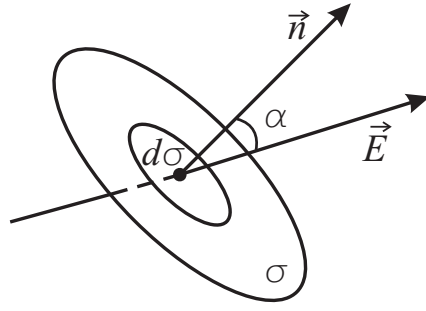


Рис. 1.2

де E_n – проекція вектора \vec{E} на напрямок нормалі.

Потік вектора \vec{E} через всю поверхню σ знаходять інтегруванням всіх елементарних потоків

$$\Phi = \int_{\sigma} E_n d\sigma. \quad (1.12)$$

Якщо поле однорідне $E_n = E = \text{const}$ і плоска поверхня σ розташована перпендикулярно до поля, то

$$\Phi = E \sigma.$$

Якщо поле \vec{E} створюється декількома зарядами, то на підставі (1.10) маємо $E_n = \sum_i E_{in}$

$$\Phi = \sum_i \int_{\sigma} E_{in} d\sigma = \sum_i \Phi_i, \quad (1.13)$$

тобто потік рівнодійного поля через деяку поверхню σ рівний алгебраїчній сумі потоків полів від кожного заряду.

Потік Φ вектора \vec{E} через поверхню σ можна інтерпретувати як число силових ліній, що пронизують поверхню σ . Вибираючи елемент поверхні $d\sigma$ перпендикулярною до \vec{E} , з (1.11) знаходимо

$$E = |\vec{E}| = \frac{d\Phi}{d\sigma}, \quad (1.14)$$

тобто напруженість поля рівна числу силових ліній, що проходять через одиницю площі поверхні, перпендикулярної до напрямку поля. Зауважимо, що силові лінії служать лише для наочного зображення поля, але не є реальними об'єктами.

Розглянемо тепер потік поля через довільну замкнену поверхню σ . Припустимо, що поле створюється точковими зарядами. Для одного точкового заряду q_i потік через поверхню $d\sigma$, згідно (1.8) і (1.11), рівний

$$d\Phi_i = \vec{E}_i \cdot \vec{n} d\sigma = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{r}^0| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \alpha d\sigma}{r^2} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \alpha d\sigma}{r^2}, \quad (1.15)$$

де α – кут між вектором \vec{E}_i (рис. 1.3) і нормаллю \vec{n} до елемента поверхні $d\sigma$ (нормаль вибираємо завжди зовнішню). Оскільки

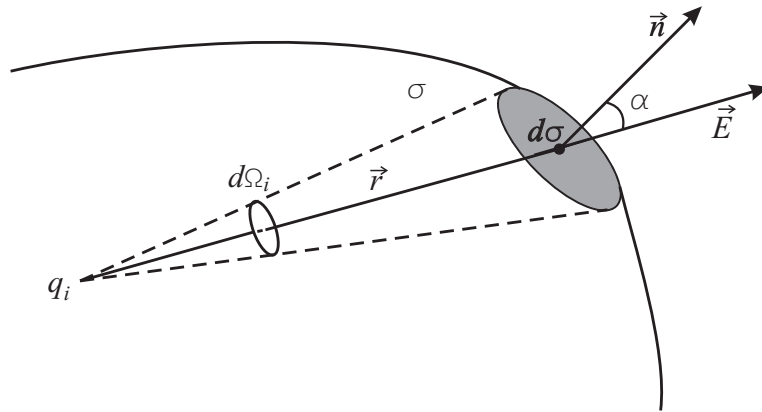


Рис. 1.3

$$\frac{\cos \alpha \cdot d\sigma}{r^2} = d\Omega_i,$$

($d\Omega_i$ – елемент тілесного кута, під яким видно площу $d\sigma$ з точки, у якій розташовано заряд q_i), то

$$d\Phi_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} d\Omega_i. \quad (1.16)$$

Потік через всю замкнену поверхню рівний

$$\Phi_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega_i, \quad (1.17)$$

де $\oint d\Omega_i$ – повний тілесний кут, під яким видно поверхню з точки, у якій розташовано заряд. Якщо заряд q_i знаходиться всередині поверхні, то тілесний кут, під яким видно всю замкнену поверхню, рівний 4π ¹. Якщо заряд q_i знаходиться поза замкнутою поверхнею, то її видно під тілесним кутом, рівним нулю. Отже,

$$\oint d\Omega_i = \begin{cases} 4\pi, & \text{якщо заряд } q_i \text{ знаходиться всередині} \\ & \text{поверхні } \sigma, \\ 0, & \text{якщо заряд } q_i \text{ знаходиться поза} \\ & \text{поверхнею } \sigma. \end{cases} \quad (1.18)$$

¹Мірою тілесного кута з вершиною в центрі сфери є відношення площі сферичної поверхні S , на яку він спирається, до квадрата радіуса сфери r : $\Omega = \frac{S}{r^2}$. Повний тілесний кут навколо точки включає сферу цілком, тому $\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$.

Тому потік через замкнену поверхню

$$\Phi_i = \begin{cases} \frac{q_i}{\varepsilon_0}, & \text{якщо заряд } q_i \text{ знаходиться всередині} \\ & \text{поверхні } \sigma, \\ 0, & \text{якщо заряд } q_i \text{ знаходиться поза} \\ & \text{поверхнею } \sigma. \end{cases} \quad (1.19)$$

Розділимо тепер всі заряди на дві групи: а) заряди q_i , що знаходяться усередині замкненої поверхні, б) заряди q_j , що знаходяться поза замкненою поверхнею. Тоді згідно (1.12) повний потік через замкнену поверхню рівний

$$\Phi = \oint_{\sigma} E_n d\sigma = \sum_i \Phi_a + \sum_j \Phi_j. \quad (1.20)$$

Але згідно (1.19) всі $\Phi_i = \frac{q_i}{\varepsilon_0}$, а всі $\Phi_j = 0$. Тому

$$\Phi = \oint_{\sigma} E_n d\sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad (1.21)$$

або

$$\oint_{\sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad (1.22)$$

де $q = \sum_i q_i$ – повний заряд, що знаходиться всередині замкненої поверхні.

Для неперервного розподілу зарядів з об'ємною густиною $\rho(\vec{r})$ вираз (1.22) з урахуванням (1.5) має вигляд

$$\oint_{\sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV, \quad (1.23)$$

де V – об'єм, обмежений поверхнею σ .

Формула (1.21) виражає **теорему Гаусса**: потік напруженості електричного поля через довільну замкнену поверхню пропорційний алгебраїчній сумі вільних електричних зарядів q_i , що знаходяться в середині цієї поверхні. Знак потоку визначається знаком сумарного заряду. Потік Φ характеризує число силових ліній і не залежить від розмірів і форми замкнутої поверхні, що охоплює точковий заряд (поверхню можна зробити скільки завгодно малою). Отже, від позитивного заряду $+q$ виходить q/ε_0 , а в негативний заряд $-q$ входить q/ε_0 силових ліній.

Теорема Гаусса говорить про те, що джерелами електричного поля є електричні заряди. Нею зручно користуватися для визначення поля зарядів, розподілених з сферичною, циліндричною або плоскою симетрією.

Співвідношення (1.22) та (1.23) є *інтегральною формою* теореми Гаусса. При проведенні практичних розрахунків набагато зручніше користуватися теоремою Гаусса у диференціальній формі. Для її отримання застосуємо добре відому з векторного аналізу теорему Гаусса-Остроградського.

Теорема Гаусса-Остроградського ("теорема про дивергенцію") говорить, що для будь-якого векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$, визначеного в об'ємі V , що обмежений поверхнею σ , справедливе наступне співвідношення між об'ємним інтегралом від дивергенції \vec{A} і поверхневим інтегралом від проекції \vec{A} на напрямки зовнішньої нормалі до поверхні σ :

$$\oint_{\sigma} A_n d\sigma = \oint_{\sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV, \quad \text{де} \quad \operatorname{div} \vec{A} = \nabla \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

$\operatorname{div} \vec{A}$ визначається, як скалярний добуток диференціального оператора Гамільтона ∇ ("набла")

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.24)$$

на вектор \vec{A} .

Теорема про дивергенцію дозволяє вираз (1.23) для інтегральної теореми Гаусса у вигляді

$$\int_V \left(\operatorname{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) dV = 0 \quad (1.25)$$

для довільного об'єму V . Звідси випливає, що підінтегральний вираз рівний нулю, тобто

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (1.26)$$

Це і є *диференціальна форма* теореми Гаусса в електродинаміці. Рівняння (1.26) показує, що джерелом електростатичного поля є заряди.

Вище нами було зазначено, що "елементарні" заряди ми розглядаємо як точкові. Але для зручності математичного розгляду деяких питань можна вводити густину заряду ρ , яка рівна нулю скрізь, окрім тих точок, в яких знаходяться точкові заряди. У цих точках густина заряду обертається на нескінченність. Для одного точкового заряду q_i можна записати

$$\rho_i(\vec{r}) = q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (1.27)$$

де \vec{r} – радіус-вектор точки спостереження, а $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$ – радіус-вектор заряду. Функція $\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ є так званою **невласною функцією Дірака**, що характеризує точкове джерело поля.

Невласна функція $\delta(x - x_0)$ однієї незалежної змінної x може бути визначена таким чином: $\delta(x - x_0) = 0$ при $x \neq x_0$ і $\delta(x - x_0)$ рівна нескінченності

при $x = x_0$, причому для будь-якої неперервної функції $f(x)$

$$\int_i^b f(x)\delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & \text{якщо } a < x_0 < b, \\ 0, & \text{якщо } x_0 \text{ не належить } (a, b). \end{cases} \quad (1.28)$$

Зокрема, при $f(x) = 1$

$$\int_i^b \delta(x - x_0) dx = 1, \quad \text{якщо } a < x_0 < b. \quad (1.29)$$

Область інтегрування може бути нескінченною. Мають місце рівності:

$$\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x), \quad \delta[\alpha(x - x_0)] = \frac{1}{\alpha}\delta(x - x_0). \quad (1.30)$$

Зміст цих рівностей полягає в тому, що їх права і ліва частини дають однакові результати, якщо їх застосувати в якості множника під знаком інтегрування.

Аналогічно можна ввести тривимірну δ -функцію $\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$, рівну нулю скрізь, окрім точки \vec{r}_i , і таку, що інтеграл за об'ємом рівний

$$\int_V f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}_i) dV = \begin{cases} f(\vec{r}_i), & \text{якщо } V \text{ містить точку } \vec{r}_i, \\ 0, & \text{якщо } V \text{ не містить точку } \vec{r}_i. \end{cases} \quad (1.31)$$

Зокрема,

$$\int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) dV = \begin{cases} 1, & \text{якщо } V \text{ містить точку } \vec{r}_i, \\ 0, & \text{якщо } V \text{ не містить точку } \vec{r}_i. \end{cases} \quad (1.32)$$

В якості такої функції можна узяти, наприклад, добуток

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0). \quad (1.33)$$

Повертаючись до густини заряду, бачимо, що в силу (1.32) повний заряд, який відповідає густині (1.27), рівний

$$\int_V \rho_i(\vec{r}) dV = q_i \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) dV = q_i,$$

де інтегрування ведеться по нескінченному об'єму або будь-якому об'єму, що містить точку \vec{r}_i .

Густина заряду системи точкових зарядів може бути записана за допомогою δ -функції у формі

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (1.34)$$

де сума береться по всіх зарядах. Тоді

$$\int_V \rho dV = \sum_i q_i$$

є сумою всіх зарядів, що знаходяться в об'ємі V . Для точкового заряду диференціальна теорема Гаусса згідно (1.26) і (1.27) набуває вигляду

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{q_i}{\varepsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (1.35)$$

Підставляючи сюди напруженість поля заряду q_i , яку згідно (1.8) можна записати у формі

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}}{R^3},$$

де $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_i$, отримаємо математичне співвідношення

$$\nabla \frac{\vec{R}}{R^3} = 4\pi \delta(\vec{R}), \quad (1.36)$$

яке визначає δ -функцію через дивергенцію вектора $\frac{\vec{R}}{R^3}$.

1.3 Робота електричного поля. Скалярний потенціал електричного поля

1. Робота по переміщенню заряду в електростатичному полі.
2. Поняття циркуляції вектора напруженості.
3. Теорема про циркуляцію вектора (інтегральна і диференціальна форми).
4. Потенціал електростатичного поля. Зв'язок напруженості і потенціалу.

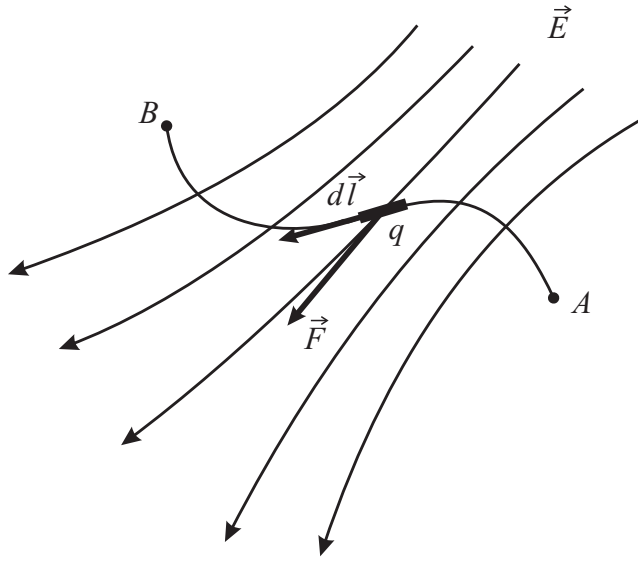


Рис. 1.4

5. Рівняння Пуассона і Лапласа.

Елементарна робота dA , яку виконує сила \vec{F} , що діє на точковий електричний заряд q , який знаходиться в електричному полі з напруженістю \vec{E} (див. рис. 1.4), рівна

$$dA = F dl \cos(\vec{F}, d\vec{l}) = q E dl \cos(\vec{E}, d\vec{l}) = q \vec{E} d\vec{l},$$

де dl – елементарне переміщення заряду, $(\vec{E}, d\vec{l})$ – кут між векторами \vec{E} і $d\vec{l}$.

Повна робота при скінченному переміщенні заряду q із точки A в точку B поля рівна

$$A = q \int_A^B E dl \cos(\vec{E}, d\vec{l}) = q \int_A^B \vec{E} d\vec{l}. \quad (1.37)$$

Обчислимо роботу, яку виконує поле точкового заряду q_0 (1.8) переміщуючи пробний заряд q із точки A в точку B . Елементарна робота буде рівна

$$dA = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}^0 d\vec{l} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^0 dr = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr,$$

де $dr = dl \cos \alpha$ – проекція вектора $d\vec{l}$ на напрямок вектора \vec{r} ; тоді робота електричного поля на шляху AB рівна

$$A = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right) = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right). \quad (1.38)$$

де r_A і r_B – відстані точок A і B до заряду q_0 .

Робота електричних сил відштовхування однойменних зарядів додатна при їх віддаленні один від одного і від'ємна при зближенні зарядів. Робота електричних сил притягання різнойменних зарядів додатна при їх зближенні і від'ємна при віддаленні зарядів один від одного. Як видно з (1.38) робота електростатичного поля по переміщенню заряду q не залежить від форми шляху (траєкторії), а визначається лише початковим і кінцевим положенням заряду q .

Таким чином, робота, яку виконують електричні сили при переміщенні одиничного додатнього заряду вздовж довільного замкненого контуру L рівна нулю:

$$A = q \oint_L E dl \cos(\vec{E}, d\vec{l}) = q \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (1.39)$$

Інтеграл $\oint_L \vec{E} d\vec{l}$ називається **циркуляцією напруженості** по замкненому контуру L .

Із формули (1.39) випливає, що циркуляція напруженості електростатичного поля по замкненому контуру рівна нулю

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad (1.40)$$

тобто електростатичне поле є **потенціальним** (його силові лінії не є замкненими кривими, а починаються і закінчуються на зарядах).

Скориставшись теоремою Стокса, яка зв'язує лінійний інтеграл від вектора \vec{a} по довільному замкненому контуру з поверхневим інтегралом від $\text{rot } \vec{a}$: $\oint \vec{a} d\vec{l} = \int \text{rot } \vec{a} d\vec{\sigma}$, можемо записати

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_{\sigma} \text{rot } \vec{E} d\vec{\sigma} = 0, \quad (1.41)$$

де σ – довільна поверхня, обмежена контуром L , $d\vec{\sigma}$ – вектор елементарної площадки, взятий на цій поверхні, $\text{rot } \vec{a}$ – вектор, який визначається, як векторний добуток диференціального оператора Гамільтона (1.24) на вектор \vec{a} :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} &= \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Умову (1.41) можна задовольнити для будь-якої довільно вибраної поверхні σ , лише в тому випадку, якщо підінтегральна функція в кожній точці

рівна нулю. Таким чином, ми приходимо до висновку, що ротор вектора напруженості електростатичного поля рівний нулю в кожній точці поля:

$$\text{rot } \vec{E} = 0. \quad (1.43)$$

Рівність нулю ротора напруженості є відмінною рисою електростатичного поля, що виражає його потенціальність.

Із векторного аналізу відомо, що ротор градієнта скалярної функції завжди рівний нулю

$$\text{rot grad } \varphi = [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi)] = \underbrace{[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}]}_0 \varphi = 0.$$

Тому напруженість електростатичного поля можна представити як градієнт деякої скалярної функції φ :

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (1.44)$$

де $\text{grad } \varphi$ – вектор, що визначається наступним чином:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi \equiv \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (1.45)$$

Функцію φ називають **скалярним потенціалом електростатичного поля**. Очевидно, що визначений з точністю до довільного сталої. Отже, потенціал можна відраховувати від будь-якої точки поля, для якої його значення приймають рівним нулю. З'ясуємо його фізичний зміст. З векторного аналізу відомо, що якщо вектор \vec{a} можна представити у вигляді

$$\vec{a} = \text{grad } \varphi$$

то циркуляція такого вектора рівна нулю:

$$\oint \text{grad } \varphi d\vec{l} = 0, \quad (1.46)$$

$$\int_1^2 \text{grad } \varphi d\vec{l} = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1). \quad (1.47)$$

Величину

$$\int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = - \int_1^2 \text{grad } \varphi d\vec{l} = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = -\Delta \varphi, \quad (1.48)$$

називають **електрорушійною силою** або **ЕРС**.

З (1.46) та (1.44) безпосередньо випливає умова (1.40). Врахувавши (1.48), роботу електричних сил (1.37) можна переписати у вигляді:

$$A = q \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = -q \int_A^B \text{grad } \varphi d\vec{l} = q (\varphi(\vec{r}_A) - \varphi(\vec{r}_B)). \quad (1.49)$$

Тобто робота, сил електростатичного поля по переміщенню точкового електричного заряду q , рівна добутку цього заряду на різницю потенціалів в початковій A і кінцевій B точках шляху. Якщо точка B знаходиться на нескінченності, то $\varphi(\vec{r}_B) = 0$. Робота A_∞ переміщення заряду q із точки A на нескінченність рівна:

$$A_\infty = q \varphi(\vec{r}_A);$$

отже, $\varphi = A_\infty/q$. Потенціал електростатичного поля чисельно рівний роботі електричних сил по переміщенню одиничного додатнього заряду із даної точки поля на нескінченність. Тепер стає зрозумілою наявність знака мінус в (1.44) – він вказує на те, що вектор \vec{E} напрямлений в бік спадання потенціалу.

Порівнюючи вирази для роботи (1.49) та (1.38) знаходимо потенціал поля точкового заряду q_0

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (1.50)$$

де r – радіус-вектор, проведений із точки, в якій знаходиться заряд q_0 , в точку, для якої визначається φ .

Взявши градієнт від виразу (1.50) та скориставшись співвідношенням (1.44), знайдемо відому вже нам напруженість поля точкового заряду (1.8)²:

$$\vec{E} = -\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Нехай поле створюється системою точкових зарядів q_i ($i = 1, \dots, n$), розташованих в точках, що визначаються радіус-векторами \vec{r}'_i . Тоді згідно принципу суперпозиції потенціал поля, в точці з радіус-вектором \vec{r} , рівний

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|}. \quad (1.51)$$

Якщо заряд, що створює поле, розподілений в просторі з густиною $\rho = \rho(\vec{r}')$, то обчислення потенціала поля можна проводити за формулою:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.52)$$

² $\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \text{grad } r = -\frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

Сукупність точок в електростатичному полі, які мають однаковий потенціал, утворюють **еквіпотенціальну поверхню**.

Виразивши у формулі (1.26), що є диференціальною формою теореми Гаусса, напруженість поля через потенціал відповідно до (1.44), отримаємо

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (1.53)$$

З векторного аналізу відомо, що

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = (\nabla \nabla) \varphi = \Delta \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi, \quad (1.54)$$

де Δ – оператор *Лапласа*. Таким чином, ми приходимо до співвідношення

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (1.55)$$

яке називають **рівнянням Пуассона**. У розгорнутому вигляді це рівняння має наступний вигляд:

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (1.56)$$

Розв'язок рівняння (1.55) має вигляд виразу (1.52)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}, \quad (1.57)$$

де (x, y, z) – координати точки в якій знаходять значення потенціалу φ , а (x', y', z') – змінні інтегрування. Величина $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ є відстанню від точки \vec{r}' до \vec{r} .

Підставляючи (1.57) у (1.55), можна легко переконатися, що даний вираз для потенціалу дійсно задовольняє рівняння Пуассона:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \Delta \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \rho(x', y', z') dV' \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\frac{4\pi}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \rho(x', y', z') \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') dx' dy' dz' \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(x, y, z). \end{aligned} \quad (1.58)$$

При цьому ми скористалися властивостями δ -функції та співвідношенням

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

Оператор Δ означає диференціювання за координатами \vec{r} і може бути внесений під знак інтегрування за координатами \vec{r}' .

Таким чином, знаючи розподіл густини заряду в просторі $\rho(x', y', z')$ і інтегруючи по всьому простору, можна знайти значення φ в будь-якій точці (x, y, z) .

Рівняння Пуассона дозволяє за заданим розподілом зарядів у просторі (за функцією ρ) знайти потенціал в кожній точці поля. Знаючи φ , можна за допомогою формули (1.44) визначити \vec{E} .

Для точок поля, в котрих $\rho = 0$, рівняння (1.55) набуває вигляду

$$\Delta \varphi = 0. \tag{1.59}$$

Співвідношення (1.59) називається **рівнянням Лапласа**.

Необхідно зауважити, фізичне значення має лише напруженість поля \vec{E} . Скалярний потенціал є лише допоміжною величиною, хоча і досить зручною. Значення потенціалу в електростатиці визначено з точністю до постійної величини: додаючи до потенціалу φ довільну постійну a , ми приходимо до потенціалу $\varphi' = \varphi + a$, який відповідає полю $\vec{E} = -\text{grad } \varphi' = -\text{grad } \varphi$. Таким чином, із-за неповної визначеності потенціалу не має змісту говорити про числове значення потенціалу φ в даній точці поля.

2 СТАЦІОНАРНЕ МАГНІТНЕ ПОЛЕ

2.1 Сила і густина електричного струму. Рівняння неперервності

До тепер ми досліджували поле нерухомих електричних зарядів. Далі переходимо до розгляду більш складного випадку полів рухомих зарядів. Рух електричних зарядів в просторі приводить до перенесення заряду, яке називають **електричним струмом**, або просто струмом. Електричний струм будемо характеризувати **вектор густини струму** $\vec{j}(\vec{r}, t)$, який визначається рівністю

$$\vec{j} = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (2.1)$$

де q_i – величина заряду, а \vec{v}_i – вектор швидкості i -го заряду. Підсумовування ведеться по всіх зарядах, що знаходяться у момент часу t в одиничному об'ємі, що оточує точку \vec{r} .

При неперервному розподілі заряду густину струму можна представити у вигляді

$$\vec{j} = \rho \vec{v}. \quad (2.2)$$

Вектор густини струму визначає величину заряду, що проходить за одиницю часу через одиницю площі, перпендикулярну до напрямку руху електричних зарядів, що знаходиться в момент часу t в точці \vec{r} .

Значення функцій ρ і \vec{v} , тобто густини заряду і швидкості його переміщення, не можуть бути довільними, вони повинні задовольняти умовам закону збереження заряду.

Розглянемо замкнуту поверхню, всередину якої поміщено деякий заряд $q = \int \rho dV$, і знайдемо похідну $-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV$. Тут інтегрування ведеться за об'ємом V , обмеженим поверхнею σ . Величина похідної (взята із знаком мінус) представляє зменшення заряду, обмеженого поверхнею σ , за одиницю часу. Оскільки електричні заряди не зникають і не виникають знову, то зменшення заряду в об'ємі V рівне потоку заряду, що виходить за 1 секунду через поверхню σ , яка охоплює цей об'єм. Отже, має місце рівність

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \oint \rho \vec{v} d\vec{\sigma} = \oint \vec{j} d\vec{\sigma} = \oint \vec{j}_n d\sigma, \quad (2.3)$$

де \vec{n} – одиничний вектор зовнішньої нормалі до елемента поверхні $d\sigma$.

Використовуючи теорему Гаусса-Остроградського та переходячи в останньому інтегралі до інтегрування за об'ємом, отримуємо

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \int \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV.$$

Змінюючи порядок незалежних операцій інтегрування за об'ємом і диференціювання за часом, маємо

$$-\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV.$$

Зважаючи на довільність об'єму інтегрування, остання рівність дає

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

або

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (2.4)$$

Формула (2.4), що є математичний виразом закону збереження заряду, носять назву **рівняння неперервності**.

При стаціонарних процесах, коли розподіл густини заряду не змінюється з часом, рівняння неперервності дає:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (2.5)$$

Рівність (2.5) показує, що при стаціонарних процесах вектор густини струму має соленоїдальний характер. Траєкторії рухомих зарядів є замкнутими, а векторні лінії вектора \vec{j} утворюють замкнуті трубки струму, які не перетинаються між собою.

Надалі ми використовуватимемо поняттям повного струму I через поверхню σ . За визначенням

$$I = \int_{\sigma} \vec{j} d\vec{\sigma} = \int_{\sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\sigma} j_n d\sigma, \quad (2.6)$$

де інтегрування ведеться по поверхні σ , \vec{n} – одиничний вектор зовнішньої нормалі до елемента поверхні $d\sigma$. Струм I дає величину повного заряду, що проходить за 1 секунду через поверхню σ .

2.2 Магнітне поле провідника із струмом

Поле рухомих зарядів ми будемо називати **електромагнітним полем**. Властивості електромагнітного поля є значно складнішими за властивості електростатичного поля. Встановлення основних закономірностей, що визначають поведінку електромагнітних полів, було частково результатом експериментального вивчення електромагнітних явищ (Ерстед, Ампер, Ом і Фарадей), та частково результатом теоретичного передбачення (Максвел), яке лише пізніше було підтверджено на досліді (Герц).

Розглянемо рух деякої сукупності зарядів уздовж трубки або контура l , що відбувається з постійною швидкістю. Іншими словами, припустимо,

що в деякому контурі проходить електричний струм, густина якого \vec{j} не залежить від часу. На практиці електричний струм найпростіше створити в металевих провідниках. Проте, оскільки ми не торкаємося руху зарядів в матеріальних середовищах, то під контуром із струмом розумітимемо деяку уявну поверхню – трубку, що охоплює сукупність кривих – траєкторій заряджених частинок, що рухаються у вакуумі.

Розташуємо поблизу контура з постійним струмом пробний заряд. Нас не буде цікавити дія контура із струмом на нерухомий пробний заряд q . Нові факти виявляються, якщо пробний заряд рухається по відношенню до контура зі струмом з деякою швидкістю \vec{v} . Виявляється, що саме рухомий пробний заряд дозволяє виявити поле, нерозривно пов'язане із рухомими зарядами в контурі із струмом, і відмінне по своєму характеру від електростатичного поля. Це поле отримало назву **магнітного поля**. Ця назва пов'язана з тим, що аналогічне поле створюють постійні магніти.

Магнітне поле, як і електростатичне, має векторний характер. Воно характеризується деяким вектором \vec{H} , що називається **напруженістю магнітного поля** або, коротко, **магнітним полем** ($\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}$, де \vec{B} – вектор індукції магнітного поля, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна постійна, μ – магнітна проникність речовини; для вакууму $\mu = 1$). З досліду випливає, що для індукції магнітного поля справедливий принцип суперпозиції: $\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$.

Експериментально встановлено, що на пробний заряд у магнітному полі діє сила

$$\vec{F} = \mu\mu_0 q [\vec{v} \vec{H}] = q [\vec{v} \vec{B}]; \quad F = \mu\mu_0 q v H \sin(\vec{v}, \vec{H}) = q v B \sin(\vec{v}, \vec{B}). \quad (2.7)$$

Ця сила отримала назву **сили Лоренца**.

Як видно з формули (2.7), сила Лоренца перпендикулярна як до швидкості пробного заряду \vec{v} , так і вектора \vec{H} , і утворює з ними правоївнгову систему.

Як і для всякого векторного поля, введемо основну характеристику магнітного поля – інтеграл $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_L H dl \cos(\vec{H}, d\vec{l})$, який називається **циркуляцією вектора \vec{H} напруженості магнітного поля вздовж замкнутого контуру L** , де $d\vec{l}$ – елемент довжини контура у напрямку його обходу.

Дослідження магнітних полів постійних струмів показало, що циркуляцією вектора \vec{H} рівна

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I \quad \text{або} \quad \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I, \quad \mu = 1, \quad (2.8)$$

де $I = \int_{\sigma_0} \vec{j} d\vec{\sigma}_0$ – повний струм, що проходить за 1 секунду через переріз σ_0

контур (трубки) із струмом.

Формула (2.8) показує, що циркуляція вектора \vec{H} відмінна від нуля тільки в такому контурі, який охоплює трубку із струмом. У простому випадку прямолінійного контура із струмом (або прямолінійної ділянки контура) векторні **лінії напруженості магнітного поля** утворюють систему концентричних кіл, що охоплюють контур (рис. 2.1). В кожній точці ліній вектор напруженості магнітного поля \vec{H} дотичний до них. Одиницю площі,

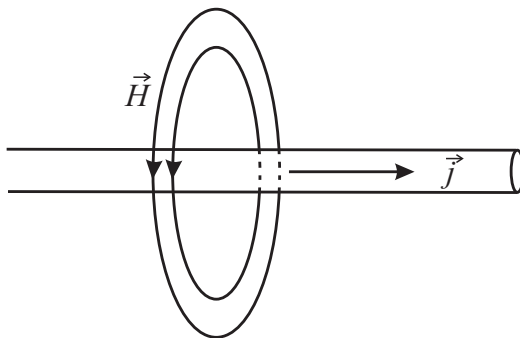


Рис. 2.1

перпендикулярної до вектора \vec{H} , має пронизувати кількість ліній напруженості магнітного поля, що дорівнює $|\vec{H}|$. Кількість ліній напруженості магнітного поля, які пронизують поверхню S , називають **магнітним потоком** крізь цю поверхню і позначають літерою Φ . Його обчислюють за допомогою формули (див. також (1.11))

$$\Phi = \int_S \vec{H} d\vec{S} = \int_S \vec{H} \vec{n} dS = \int_S H_n dS = \int_S H \cos \alpha dS = \int_S H dS_n. \quad (2.9)$$

У разі однорідного магнітного поля магнітний потік крізь площу поверхні S , перпендикулярної до напрямку магнітного поля,

$$\Phi = HS. \quad (2.10)$$

У системі SI одиницю магнітного потоку називають **Вебер** (1 Вб).

Величина циркуляції вектора \vec{H} пропорційна повному струму в контурі. Формула (2.8) виражає **закон Ерстеда**, що встановив в 1820-26 рр. зв'язок між електричним струмом і магнітними явищами.

Як і в електростатиці, дослід приводить до інтегрального співвідношення між характеристикою зарядів (струмом I) і полем \vec{H} . Для отримання диференціальної характеристики поля замінимо у виразі для повного струму поверхню інтегрування σ_0 довільною поверхнею σ , яка обмежена контуром із струмом. Густина струму \vec{j} відмінна від нуля тільки при інтегруванні по перерізу трубки із струмом σ_0 . Поза цим перерізом густина струму рівна нулю, так що можна написати:

$$I = \int_{\sigma_0} \vec{j} d\vec{\sigma}_0 = \int_{\sigma} \vec{j} d\vec{\sigma}.$$

Тоді маємо

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_{\sigma} \vec{j} d\vec{\sigma}. \quad (2.11)$$

Користуючись теоремою Стокса, знаходимо

$$\oint_{\sigma} \text{rot } \vec{H} d\vec{\sigma} = \int_{\sigma} \vec{j} d\vec{\sigma}, \quad (2.12)$$

звідки, зважаючи на довільність поверхні σ , випливає:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}. \quad (2.13)$$

Ми бачимо, що магнітне поле має вихровий характер (замкненість силових ліній). Рівняння (2.13) визначає вихори магнітного поля в кожній точці простору залежно від значення густини струму \vec{j} в кожній точці простору.

Рівняння (2.13) узгоджується із стаціонарним рівнянням неперервності (2.5) і тому є внутрішньо несуперечливим. Дійсно, обчисливши дивергенцію від обох частин (2.13)³, приходимо до рівності

$$\text{div rot } \vec{H} = \text{div } \vec{j} = 0. \quad (2.14)$$

Формула (2.13) показує, що рух електричних зарядів нерозривно пов'язаний з магнітним полем або, як не зовсім точно говорять, рух зарядів породжує магнітне поле.

Для однозначного визначення магнітного поля необхідно знати другу його диференціальну характеристику – $\text{div } \vec{H}$. Для її знаходження розглянемо потік вектора \vec{H} через довільну замкнуту поверхню $\oint \vec{H} d\vec{\sigma}$. Експериментальне вивчення розподілу магнітних полів постійних струмів показує, що магнітні поля завжди мають чисто соленоїдальний характер⁴ і

$$\oint \vec{H} d\vec{\sigma} = 0. \quad (2.15)$$

Використовуючи теорему Гаусса-Остроградського, отримуємо

$$\oint \vec{H} d\vec{\sigma} = \int \text{div } \vec{H} dV = 0 \quad (2.16)$$

або зважаючи на довільність об'єму інтегрування

$$\text{div } \vec{H} = 0. \quad (2.17)$$

³З властивостей мішаного добутку випливає, що $\text{div rot } \vec{a} = \nabla[\nabla \vec{a}] = \vec{a}[\nabla \nabla] = 0$.

⁴ $\text{div } \vec{a}$ представляє потік вектора $\vec{a}(r)$ через нескінченно малу поверхню, що оточує дану точку поля r , віднесений до одиниці об'єму. Векторне поле називається *соленоїдальним*, якщо в кожній точці поля $\text{div } \vec{a} = 0$. В тих точках поля, де $\text{div } \vec{a} \neq 0$, є джерела ($\text{div } \vec{a} > 0$) або стоки ($\text{div } \vec{a} < 0$) поля.

Таким чином, джерела і стоки у магнітного поля відсутні (відсутність магнітних зарядів). Лінії магнітного поля завжди замкнуті або йдуть на нескінченність.

Рівняння (2.13) і (2.17) повністю визначають магнітне поле постійних струмів. Магнітне поле постійних струмів, як і електростатичне поле, володіє адитивними властивостями. Це впливає з лінійного характеру рівнянь поля (2.13) і (2.17). Магнітне і електростатичне поля є незалежними один від одного. Будь-яке електростатичне поле (при даному розподілі рухомих зарядів) не впливає на магнітне поле останніх.

2.3 Векторний потенціал магнітного поля

Повернемося до рівняння (2.17). У векторному аналізі доводиться, що дивергенція від ротора векторної функції (див. зноску 3) завжди рівна нулю. Тому напруженість магнітного поля можна представити як ротор деякої векторної функції \vec{A} :

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = [\nabla \vec{A}]. \quad (2.18)$$

Функцію \vec{A} називають **векторним потенціалом магнітного поля**.

Векторний потенціал, як і скалярний потенціал φ , визначається неоднозначно. Оскільки ротор градієнта будь-якої функції рівний нулю, то додавання до векторного потенціалу величини $\text{grad } \psi = \nabla \psi$ (ψ – довільна функція) не змінює значення $[\nabla \vec{A}]$, тобто \vec{H} . Таким чином, якщо \vec{A} є векторним потенціалом, що відповідає даному магнітному полю, то і функція

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi \quad (2.19)$$

також буде векторним потенціалом даного поля.

Властивість (2.19) дозволяє вибрати потенціал найбільш зручним чином, наприклад, накладати певні умови на дивергенцію \vec{A} . Дійсно, з (2.19) випливає, що

$$\text{div } \vec{A}' = \text{div } \vec{A} + \text{div}(\text{grad } \psi) = \text{div } \vec{A} + \Delta \psi, \quad (2.20)$$

так що підбором ψ можна надати $\text{div } \vec{A}'$ будь-якого наперед заданого значення. При розгляді стаціонарних магнітних полів ми будемо вибирати ψ так, щоб

$$\text{div } \vec{A} = \nabla \vec{A} = 0. \quad (2.21)$$

Підставимо у формулу (2.13) замість \vec{H} ротор \vec{A} (див. (2.18)):

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = [\nabla[\nabla \vec{A}]] = \vec{j}.$$

Відомо що $[\nabla[\nabla \vec{A}]] = \nabla(\nabla \vec{A}) - \Delta \vec{A}$. Поклавши, як було домовлено (див. (2.21)), $\text{div } \vec{A} = 0$, отримаємо для \vec{A} диференціальне рівняння

$$\Delta \vec{A} = -\vec{j}. \quad (2.22)$$

Це векторне рівняння еквівалентне трьом скалярним рівнянням:

$$\Delta A_k = -j_k, \quad (k = x, y, z), \quad (2.23)$$

кожне з яких аналогічна рівнянню Пуассона для скалярного потенціалу φ (див. (1.55)). З математичної точки зору рівняння (1.55) і (2.23) тотожні. Отже, замінивши в розв'язку рівняння (1.55) φ на A_k , а ρ на j_k , ми отримаємо розв'язок рівняння (2.23). Взевши до уваги формулу (1.52), отримаємо

$$A_k = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{j_k(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (k = x, y, z), \quad (2.24)$$

де інтегрування ведеться по всій області в якій течуть струми, що створюють поле.

Три вирази (2.24) можна об'єднати в один векторний:

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.25)$$

Формула (2.25) дозволяє за відомим розподілом струмів у просторі обчислити векторний потенціал магнітного поля, яке створюється цими струмами.

2.4 Закон Біо-Савара-Лапласа

Знайдемо на основі виразу для векторного потенціалу \vec{A} формулу, яка б дозволяла за заданим розподілом струмів знайти напруженість магнітного поля \vec{H} . Для цього обчислимо ротор функції (2.25). Необхідно мати на увазі, що інтегрування в (2.25) ведеться по штрихованих координатах x', y', z' , а диференціювання при взятті ротора проводиться по нештрихованих координатах x, y, z . Тому операції інтегрування і взяття ротора можна міняти місцями. Приймаючи це до уваги, отримаємо

$$\vec{H}(\vec{r}) = [\nabla \vec{A}(\vec{r})] = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\nabla \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV'$$

Розглядаючи $\vec{j}(\vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|$ як добуток векторної функції $\vec{j}(\vec{r}')$ і скалярної функції $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ та скориставшись формулою

$$\text{rot}(\psi \vec{a}) = [\nabla(\psi \vec{a})] = [(\nabla \psi) \vec{a}] + \psi [\nabla \vec{a}] = [(\nabla \psi) \vec{a}] + \psi \text{rot} \vec{a},$$

де ψ – скалярна функція, одержуємо

$$\left[\nabla \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \left[\left(\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \vec{j}(\vec{r}') \right] + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} [\nabla \vec{j}(\vec{r}')].$$

Другий доданок рівний нулю, тому що $\vec{j}(\vec{r}')$ не містить нештрихованих координат. Градієнт, що фігурує в першому доданку, рівний

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \nabla \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Таким чином, ми приходимо до формули

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[-\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{j}(\vec{r}') \right] dV' = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{j}(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (2.26)$$

(ми винесли скалярний множник за знак векторного добутку і, крім того, поміняли місцями співмножники, внаслідок чого зник знак мінус).

Отримана формула розв'язує поставлене нами завдання – дозволяє по заданих струмах обчислити H . Формула (2.26) спрощується, якщо струми проходить тільки по тонких проводах. На рис. 2.2а зображена ділянка та-

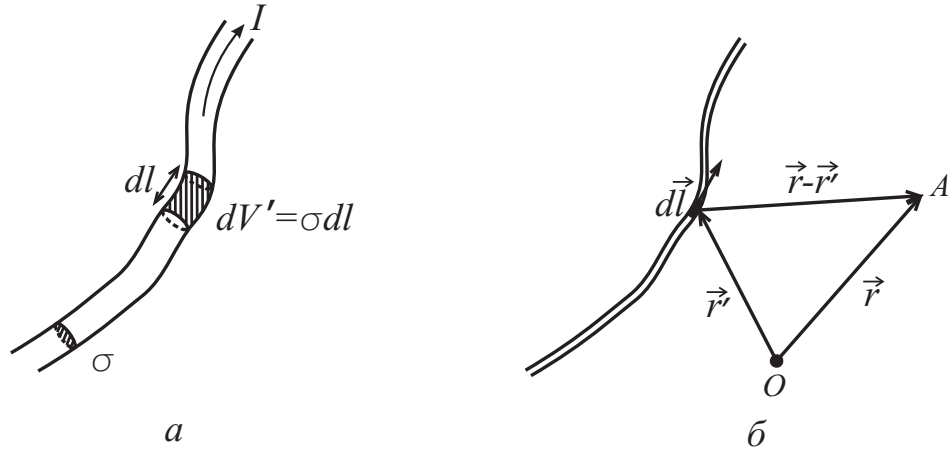


Рис. 2.2

кого дроту. З малюнка видно, що вираз $\vec{j}dV'$ можна представити у вигляді

$$\vec{j}dV' = \vec{j}\sigma dl = j\sigma d\vec{l} = I d\vec{l}, \quad (2.27)$$

де σ – поперечний переріз провідника, I – сила струму, $d\vec{l}$ – вектор, що співпадає з елементом провідника dl і напрямлений в ту сторону, в яку тече струм. Замінивши в (2.26) $\vec{j}dV'$ через $I d\vec{l}$, отримаємо

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{I [d\vec{l} (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (2.28)$$

(інтегрування ведеться по довжині всіх провідників).

Формула (2.28) є аналітичним виразом **закону Біо-Савара-Лапласа**. Рис. 2.2б пояснює, що $\vec{r} - \vec{r}'$ – це вектор, проведений з точки, в якій розташований елемент струму $d\vec{l}$ в точку, для якої обчислюється \vec{H} .

Якщо початок відліку – точку O сумістити з елементом струму $I d\vec{l}$, то напруженість $d\vec{H}$ створювана ним рівна

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{I [d\vec{l} \vec{r}]}{r^3}, \quad (2.29)$$

де \vec{r} – радіус-вектор, проведений від елемента струму $I d\vec{l}$ до точки спостереження A . Видно, що вектор $d\vec{H}$ перпендикулярний до площини в якій лежать вектори $d\vec{l}$ та \vec{r} (вектори $d\vec{H}$, $d\vec{l}$ та \vec{r} утворюють праву трійку векторів). Модуль вектора $d\vec{H}$, визначається як

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{I dl r \sin \varphi}{r^3} = \frac{1}{4\pi} \frac{I dl \sin \varphi}{r^2}, \quad (2.30)$$

де φ – кут між векторами $d\vec{l}$ і \vec{r} (див. рис. 2.3).

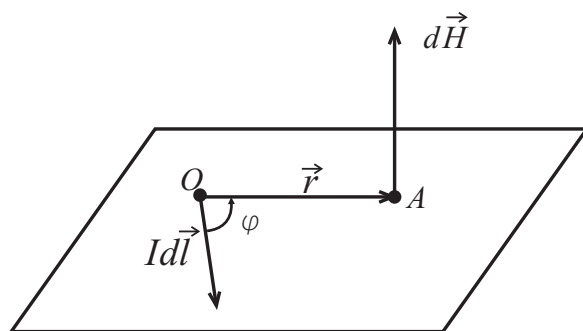


Рис. 2.3

У випадку колового струму радіуса r і точки спостереження в центрі контуру для всіх елементів струму $\varphi = \pi/2$ і всі елементи створюють напруженість $d\vec{H}$, перпендикулярну до площини контуру, причому

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{I dl}{r^2},$$

тому повна напруженість магнітного поля в центрі колового струму дорівнює

$$H = \frac{1}{4\pi} \int \frac{I dl}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{I}{r^2} \int_0^{2\pi r} dl = \frac{I}{2r}. \quad (2.31)$$

Напрямок вектора \vec{H} пов'язаний з напрямком струму в контурі за правилом гвинта (буравчика): якщо буравчик з правою нарізкою вкручувати у напрямку струму у провіднику, то напрям обертання ручки буравчика покаже напрям силових ліній магнітного поля.

Якщо елемент струму $I d\vec{l}$ помістити в деяку точку "зовнішнього" магнітного поля з напруженістю \vec{H} , то воно, як доводить дослід, діятиме на

нього з силою $d\vec{F}$, величина якої залежить від сили струму I , магнітного поля \vec{H} та від орієнтації елемента струму:

$$dF = \mu_0 I H dl \sin(\vec{H}, d\vec{l}) \quad \text{або} \quad dF = I B dl \sin(\vec{B}, d\vec{l}), \quad (2.32)$$

або у векторному вигляді

$$d\vec{F} = \mu_0 I [d\vec{l} \vec{H}] \quad \text{або} \quad d\vec{F} = I [d\vec{l} \vec{B}]. \quad (2.33)$$

Співвідношення (2.33) називається **законом Ампера**.

Повна пондеромоторна сила, що діє на замкнений контур L з струмом I у зовнішньому магнітному полі \vec{H} , дорівнює

$$\vec{F} = \mu_0 I \oint_L [d\vec{l} \vec{H}]. \quad (2.34)$$

Розглянемо два замкнені контури L_1 і L_2 з лінійними струмами I_1 та I_2 і виділимо в них елементи струму $I_1 d\vec{l}_1$, $I_2 d\vec{l}_2$. Елемент $I_1 d\vec{l}_1$ першого контуру створює в точці, де знаходиться елемент $I_2 d\vec{l}_2$ другого контуру, магнітне поле з напруженістю, яка за формулою (2.29) дорівнює

$$d\vec{H}_{12}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{I_1 [d\vec{l}_1 \vec{r}_{12}]}{r_{12}^3}, \quad (2.35)$$

де r_{12} – радіус-вектор, проведений від елемента $I_1 d\vec{l}_1$ до елемента $I_2 d\vec{l}_2$ (рис. 2.4). Тоді на підставі співвідношення (2.33) силу, з якою елемент $I_1 d\vec{l}_1$

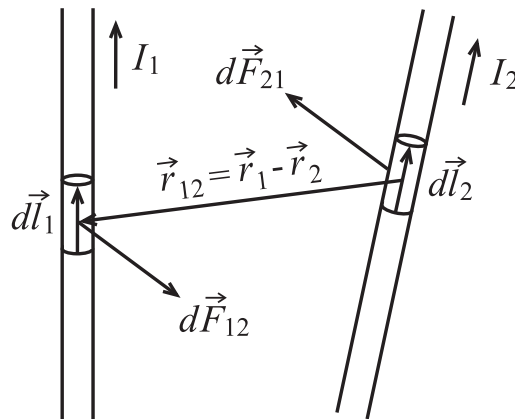


Рис. 2.4

діє на елемент $I_2 d\vec{l}_2$, запишемо як

$$d\vec{F}_{12} = \mu_0 I_2 [d\vec{l}_2 d\vec{H}_{12}] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{12}^3} \left[d\vec{l}_2 \left[d\vec{l}_1 \vec{r}_{12} \right] \right]. \quad (2.36)$$

Легко бачити, що елемент $I_2 d\vec{l}_2$ діє на елемент $I_1 d\vec{l}_1$ із силою

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r_{21}^3} \left[d\vec{l}_1 \left[d\vec{l}_2 \vec{r}_{21} \right] \right], \quad (2.37)$$

де $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$.

На весь контур L_2 діятиме сила

$$\vec{F}_{12} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_2 \left[d\vec{l}_1 \vec{r}_{12} \right]}{r_{12}^3}, \quad (2.38)$$

а на контур L_1 – сила

$$\vec{F}_{21} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint_{L_1} \frac{d\vec{l}_1 \left[d\vec{l}_2 \vec{r}_{21} \right]}{r_{21}^3}. \quad (2.39)$$

Із рис. 2.4 випливає, що $d\vec{F}_{12} \neq -d\vec{F}_{21}$, отже, у разі взаємодії двох елементів струмів третій закон Ньютона не виконується. Проте можна довести, що $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, тобто у разі взаємодії контурів третій закон механіки виконується.

3.1 Закон електромагнітної індукції

До цього часу ми розглядали лише електростатичні та магнітостатичні поля, які створювались електричними зарядами, густина яких з часом не змінюється (нерухомі заряди і постійні струми). Якщо розподіл цих зарядів із часом змінюється ($\rho = \rho(\vec{r}, t)$, $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$), то створювані ними електричне і магнітне поля стають залежними від часу, тобто $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t)$. У цьому разі вже не існує інерціальної системи відліку, в якій би спостерігалось лише одне поле: в усіх інерціальних системах відліку існують і електричне і магнітне поля, які разом називають **електромагнітним полем**. Це означає, що між обома полями існує нерозривний взаємозв'язок, який визначають за законом електромагнітної індукції Фарадея та законом (гіпотезою) Максвелла. Фарадей встановив, що змінне в часі магнітне поле породжує електричне поле, а Максвелл теоретично показав, що змінне електричне поле приводить до появи магнітного поля. Це теоретичне передбачення було підтверджене дослідженнями Герца.

Дослідами Фарадея було встановлено, що зміна в часі магнітного потоку, через довільну поверхню S супроводжується появою **електрорушійної сили індукції** у замкнутому контурі, що обмежує цю поверхню, тобто

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.1)$$

Співвідношення (3.1) розкриває зміст **закону електромагнітної індукції**. Обґрунтуємо його теоретично.

Нехай контур провідника L переміщується у магнітному полі \vec{H} зі швидкістю \vec{v} . Тоді носії струму матимуть швидкість спрямованого руху \vec{v} , отже, згідно (2.7), на них діятиме сила Лоренца

$$\vec{F}_L = \mu_0 e [\vec{v}\vec{H}]. \quad (3.2)$$

Силу Лоренца (3.2) слід вважати сторонньою силою (неелектростатичного походження, тому що робота електростатичних сил вздовж замкнутого контуру рівна нулю). Тому напруженість еквівалентного електричного поля дорівнює

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_L}{e} = \mu_0 [\vec{v}\vec{H}], \quad (3.3)$$

а електрорушійну силу ⁵, згідно з (1.48), визначають як

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \mu_0 \oint_L [\vec{v}\vec{H}] d\vec{l}. \quad (3.4)$$

⁵Електрорушійна сила чисельно рівна роботі сторонніх сил по переміщенню одиничного заряду вздовж замкнутого контуру.

Якщо $d\vec{s}$ – переміщення елемента $d\vec{l}$ контуру L за час dt , тоді $\vec{v} = d\vec{s}/dt$, отже,

$$\mathcal{E}_i = \mu_0 \oint_L \left[\frac{d\vec{s}}{dt} \vec{H} \right] d\vec{l} = -\mu_0 \oint_L \vec{H} \left[\frac{d\vec{s}}{dt} d\vec{l} \right] = -\mu_0 \frac{1}{dt} \oint_L \vec{H} [d\vec{s} d\vec{l}]. \quad (3.5)$$

Інтеграл

$$\oint_L \vec{H} [d\vec{s} d\vec{l}] = \delta\Phi$$

є зміною магнітного потоку крізь площу контуру, зумовленого як рухом контуру, так і його деформацією, а $[d\vec{s} d\vec{l}]$ – площа, яку описує при цьому елемент $d\vec{l}$ контуру. Тому замість (3.5) можна записати

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\delta\Phi}{dt}. \quad (3.6)$$

Якщо при цьому з часом змінюється також магнітне поле ($\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t)$), слід записувати

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.7)$$

де

$$\Phi = \int_S \vec{H} d\vec{S}$$

магнітний потік, що проходить через площу контуру S , який загалом може змінюватися з часом як внаслідок змін магнітного поля так площі контуру.

У разі нерухомого контуру за умови, що магнітне поле змінюється з часом $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t)$

$$\mathcal{E}_i = -\mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (3.8)$$

де похідна $\partial \vec{H} / \partial t$ визначає швидкість зміни напруженості магнітного поля у фіксованій точці простору.

На підставі (3.4) і (3.8) можна записати

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (3.9)$$

тоді, використовуючи теорему Стокса, отримаємо

$$\int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = -\mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (3.10)$$

з огляду на довільність поверхні інтегрування в (3.10), із рівності інтегралів випливає рівність підінтегральних виразів:

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (3.11)$$

Рівняння (3.11) є законом електромагнітної індукції в диференціальній формі; інтегральну форму визначають за співвідношенням (3.1).

Із рівняння (3.11) випливає, що індукване змінним магнітним полем електричне поле, на відміну від електростатичного, має вихровий характер, його силові лінії замкнені, тому поняття скалярного потенціалу до нього не застосовне.

Крім того, з рівняння (3.11) також випливає, що сутністю закону електромагнітної індукції є породження змінним магнітним полем вихрового електричного поля. За наявності провідного контуру індукване електричне поле створює в ньому індукційний струм. Без такого контуру струм не виникає, але вихрове електричне поле існує.

Тому вирішальне значення має не рух контуру в магнітному полі, з боку якого на носії струму діє сила Лоренца і яка відіграє допоміжну роль, а зміна магнітного поля у заданій системі відліку, отже, і магнітного потоку, що проходить крізь площу контуру. В системі відліку, пов'язаній з рухомих контуром, він залишається нерухомим і сила Лоренца відсутня, але у ньому виникає електрорушійна сила індукції внаслідок зміни магнітного потоку.

Знак «мінус» у (3.1) і (3.7) доводить, що напрям вектора напруженості індукваного електричного поля \vec{E} , тобто напрям індукційного струму, утворює з напрямом зростання потоку напруженості магнітного поля $\frac{d\Phi}{dt}$ лівогвинтову систему. Напрямок потоку Φ і напрям його зміни $d\Phi/dt$ зображено на рис. 3.1 стрілками. У випадку, наведеному на рис. 3.1,а, коли магнітний

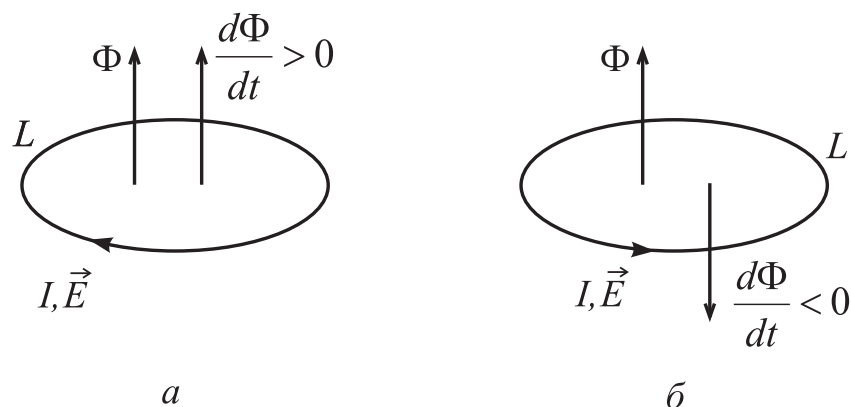


Рис. 3.1

потік Φ зростає, індукційний струм I своїм магнітним полем протидіє його зростанню, а у випадку, зображеному на рис. 3.1,б, коли магнітний потік зменшується, – підтримує його. Цей висновок відповідає відомому **правилу Ленца**: у разі зміни магнітного потоку, що проходить крізь замкнений

провідний контур, у ньому індукується струм у такому напрямі, щоб його магнітне поле прагнуло компенсувати зміну магнітного потоку, що проходить крізь контур.

3.2 Струм зміщення. Гіпотеза Максвелла

У випадку якщо електромагнітне поле не є стаціонарним $\rho = \rho(\vec{r}, t)$, тобто $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$, з рівняння неперервності (2.4)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

впливає, що

$$\operatorname{div} \vec{j} \neq 0. \quad (3.12)$$

Це означає, що рівняння стаціонарного магнітного поля (2.13)

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$$

до змінного електромагнітного поля незастосовне, оскільки з нього випливає співвідношення $\operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = 0$.

Цю неузгодженість можна усунути, доповнивши у рівнянні (2.13) густину струму провідності \vec{j} доданком $\vec{j}_{\text{ЗМ}}$, який називають **густиною струму зміщення**, за умови

$$\operatorname{div} (\vec{j} + \vec{j}_{\text{ЗМ}}) = 0. \quad (3.13)$$

У цьому разі замість рівняння (2.13) слід записувати

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{ЗМ}} \quad (3.14)$$

З рівнянь (3.13) і (2.4) та рівняння $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ (див. (1.26)) випливає співвідношення

$$\operatorname{div} \vec{j}_{\text{ЗМ}} = -\operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E}. \quad (3.15)$$

Оскільки дивергенція діє на координати поля

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

то можна записати

$$\operatorname{div} \vec{j}_{\text{ЗМ}} = \varepsilon_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3.16)$$

тому найпростіше вважати, що

$$\vec{j}_{\text{ЗМ}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (3.17)$$

Ввівши вектор електричної індукції $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, можна записати

$$\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3.18)$$

З урахуванням (3.17) рівняння (3.14) набував вигляду

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (3.19)$$

З (3.19) випливає висновок про породження магнітного поля не лише струмом провідності, а й струмом зміщення, тобто змінним електричним полем.

Водночас слід зазначити, що струм провідності та струм зміщення у вакуумі, незважаючи на подібність назв, є різними фізичними явищами. Єдине, що їх об'єднує, – це здатність однаково породжувати магнітне поле. Вперше це зрозумів Максвелл, сформулювавши гіпотезу про породження магнітного поля змінним електричним полем. Проте струм зміщення у вакуумі жодним рухом зарядів та виділенням джоулевої теплоти не супроводжується. Він відповідає лише зміні напруженості електричного поля.

Таким чином, між електричним і магнітним полями існує глибока симетрія і взаємозв'язок. Ротор вектора \vec{H} визначається швидкістю зміни вектора \vec{E} , тоді як, згідно закону індукції Фарадея (3.11), ротор вектора \vec{E} визначається швидкістю зміни вектора \vec{H} . Тільки в тих областях простору, де густина струму відмінна від нуля, симетрія між електричним і магнітним полем порушується. Оскільки магнітних зарядів не існує в природі і магнітне поле завжди має чисто соленоїдальний характер, то в рівнянні для електромагнітної індукції (3.11) немає члена, аналогічного \vec{j} у рівнянні (3.19).

3.3 Рівняння змінного електромагнітного поля у вакуумі

Система рівнянь змінного електромагнітного поля – це рівняння, що дають змогу за розподілом у просторі й часі зарядів $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ та струмів $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$ знайти вектори напруженості електричного $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ і магнітного полів $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t)$.

Ця система рівнянь має бути повною, тобто з неї мають впливати всі властивості поля, зокрема рівняння електростатичного і магнітостатичного полів як граничні випадки. Система рівнянь Максвелла складається з чотирьох рівнянь, які можна записати у диференціальній та інтегральній формах. Розглянемо їх спочатку в диференціальній формі.

Першим рівнянням Максвелла змінного електромагнітного поля у вакуумі є отримане рівняння (3.19)

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Другим рівнянням Максвелла є рівняння (3.11)

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Два інші рівняння випливають з (3.19) і (3.11) при деяких додаткових припущеннях.

Оскільки дивергенція ротора дорівнює нулю, з (3.19) випливає, що

$$\text{div rot } \vec{H} = 0 = \text{div } \vec{j} + \varepsilon_0 \text{div } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{div } \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{E}.$$

З урахуванням рівняння неперервності (2.4) останнє рівняння можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \text{div } \vec{E} - \rho) = 0,$$

звідки

$$\varepsilon_0 \text{div } \vec{E} - \rho = f(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + f(\vec{r}),$$

де $f(\vec{r})$ – довільна функція, яка залежить тільки від координат, але не від часу.

Припустимо, що в довільний момент часу, який можна вважати початковим, електричні заряди були нерухомими. Тоді в початковий момент часу справедливим має бути рівняння електростатичного поля (1.26), і функція $f(\vec{r})$ є рівною нулеві. Оскільки $f(\vec{r})$ не залежить від часу, то це означає, що $f(\vec{r})$ завжди рівна нулю. Дивергенція електричного поля як в стаціонарному, так і в нестаціонарному випадках визначається формулою

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (3.20)$$

Аналогічно, беручи дивергенцію від (3.11), знаходимо

$$\text{div rot } \vec{E} = 0 = \text{div } \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{H},$$

або

$$\text{div } \vec{H} = f_1(\vec{r}).$$

Знову припускаючи, що в початковий момент часу магнітне поле мало стаціонарний характер, і повторюючи тільки що приведені міркування, приходимо до висновку:

$$\text{div } \vec{H} = 0. \quad (3.21)$$

Магнітне поле як стаціонарне, так і нестаціонарне має чисто вихровий (соленоїдальний) характер. Магнітних зарядів, на яких починаються і закінчуються лінії магнітного поля, не існує ні в стаціонарних, ні в змінних полях.

Рівняння (3.19), (3.11), (3.20) і (3.21) утворюють систему диференціальних рівнянь Максвелла змінного електромагнітного поля у вакуумі.

Встановимо вигляд рівнянь Максвелла в інтегральній формі. Визначивши потік векторів в обох частинах рівняння (3.19) через деяку поверхню S , отримаємо

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{S} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (3.22)$$

Використовуючи теорему Стокса, можна записати

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{S} = \oint_L \vec{H} d\vec{l},$$

де L – контур, що стягує поверхню S (або – контур, на який спирається поверхня S). У правій частині (3.22)

$$\int_S \vec{j} d\vec{S} = I; \quad (3.23)$$

$$\varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} = \int_S \vec{j}_{\text{ЗМ}} d\vec{S} = I_{\text{ЗМ}}, \quad (3.24)$$

де I – сила струму провідності; $I_{\text{ЗМ}}$ – сила струму зміщення через поверхню S . Тоді замість (3.22) отримаємо рівняння

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I + I_{\text{ЗМ}}, \quad (3.25)$$

яке є інтегральною формою рівняння Максвелла (3.19). Воно встановлює залежність циркуляції вектора \vec{H} вздовж контуру L від повного струму через поверхню S , обмежену контуром L (**закон повного струму**). Ця залежність є наслідком узагальнення закону Біо-Савара-Лапласа (див. підрозд. 2.4).

Потоки векторів через поверхню S у рівнянні (3.11) утворюють співвідношення

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{S} = -\mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\vec{S} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{H} d\vec{S}.$$

Оскільки (за теоремою Стокса)

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{S} = \oint_L \vec{E} d\vec{l},$$

отримаємо інтегральну форму рівняння Максвелла (3.11) у вигляді рівняння

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{H} d\vec{S}, \quad (3.26)$$

яке відповідає закону електромагнітної індукції Фарадея (3.1).

На підставі рівняння (3.21) і теореми Гаусса можна записати

$$\int_V \operatorname{div} \vec{H} dV = \oint_S \vec{H} d\vec{S} = 0,$$

тому рівняння

$$\oint_S \vec{H} d\vec{S} = 0 \quad (3.27)$$

є інтегральною формою рівняння Максвелла (3.21), яке відповідає відсутності магнітних зарядів.

Неважко переконатися, проінтегрувавши рівняння (3.20) за об'ємом V і застосувавши теорему Гаусса, що

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{q}{\varepsilon_0}. \quad (3.28)$$

Рівняння (3.28) є інтегральною формою рівняння (3.20), яке є наслідком закону Кулона. Підсумовуючи, подамо зведену систему рівнянь Максвелла в диференціальній та інтегральній формах:

Диференціальна форма	Інтегральна форма	
$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$	$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{H} d\vec{S};$	(3.29)

$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$	$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}.$	(3.30)
--	---	--------

$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$	$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} d\vec{S};$	(3.31)
---	---	--------

$\operatorname{div} \vec{H} = 0,$	$\oint_S \vec{H} d\vec{S} = 0.$	(3.32)
-----------------------------------	---------------------------------	--------

3.4 Потенціали змінного електромагнітного поля у вакуумі. Рівняння Д'Аламбера

Для спрощення обчислень напруженостей \vec{E} електростатичного та \vec{B} стаціонарного магнітного полів, за заданими в кожній точці простору значеннями ротора ($\text{rot } \vec{E} = 0$) та дивергенції ($\text{div } \vec{H} = 0$), у підрозд. 1.3 і 2.3 було введено допоміжні величини: скалярний $\varphi(\vec{r})$ та векторний $\vec{A}(\vec{r})$ потенціали, які задовольняють умовам $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$. Виявляється, подібні допоміжні функції можна ввести і для змінного електромагнітного поля.

Враховуючи, що магнітне поле завжди є соленоїдальним і $\text{div rot} = 0$, на підставі рівняння Максвелла (3.32) можна вважати, що

$$\mu_0 \vec{H}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t), \quad \text{або} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t), \quad (3.33)$$

де $\vec{A}(\vec{r}, t)$ – **векторний потенціал** змінного електромагнітного поля. Тоді рівняння Максвелла (3.29) запишемо у вигляді

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = -\text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

тобто

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.34)$$

Останнє рівняння показує, що вектор $\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$ є потенціальним вектором (його ротор рівний нулю), тобто може бути представлений у вигляді

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi \quad (3.35)$$

де $\varphi(\vec{r}, t)$ – функція координат і часу, яку ми називатимемо **скалярним потенціалом** електромагнітного поля.

На відміну від випадку електростатики, вектор електричного поля, що має вихровий характер, вже не може бути представлений у вигляді градієнта якого-небудь потенціалу. Він виражається через сукупність скалярного і векторного потенціалів за формулою

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\text{grad } \varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (3.36)$$

причому другий доданок, що пов'язує електричне поле з магнітними величинами, виражає закон електромагнітної індукції.

Встановивши вигляд **електромагнітних потенціалів** $\varphi(\vec{r}, t)$ і $\vec{A}(\vec{r}, t)$ за формулами (3.33) і (3.36) можна знайти вектори поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ і $\vec{H}(\vec{r}, t)$. З огляду на це розглянемо основні властивості електромагнітних потенціалів і встановимо рівняння, за допомогою яких їх обчислюють.

Зазначимо, що електромагнітні потенціали, подібно до електростатичного потенціалу $\varphi(\vec{r})$ і векторного потенціалу $\vec{A}(\vec{r})$, є неоднозначними функціями. Якщо до векторного потенціалу $\vec{A}(\vec{r}, t)$ додати вектор $\text{grad} \psi(\vec{r}, t)$, де $\psi(\vec{r}, t)$ – довільна скалярна функція координат і часу, а від скалярного потенціалу $\varphi(\vec{r}, t)$ відняти похідну $\partial\psi(\vec{r}, t)/\partial t$, тобто виконати перетворення

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} \psi, \quad (3.37)$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (3.38)$$

то вектори поля \vec{E} і \vec{H} не зміняться, оскільки

$$\begin{aligned} \vec{H}' &= \text{rot} \vec{A}' = \text{rot} \vec{A} + \text{rot} \text{grad} \psi = \text{rot} \vec{A} = \vec{H}; \\ \vec{E}' &= -\text{grad} \varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\text{grad} \varphi + \text{grad} \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \psi = \\ &= -\text{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\partial\psi}{\partial t} - \text{grad} \frac{\partial\psi}{\partial t} = \vec{E}. \end{aligned}$$

Отже, електромагнітне поле інваріантне відносно перетворень потенціалів (3.37) і (3.38), які називають **калібрувальними перетвореннями**, а інваріантність поля відносно них – **калібрувальними інваріантностями**.

У випадку електростатичного і магнітостатичного полів рівняння для потенціалів $\varphi(\vec{r})$ і $\vec{A}(\vec{r})$ є рівняннями Пуассона (1.55) і (2.22). Встановимо вигляд рівнянь для електромагнітних потенціалів $\varphi(\vec{r}, t)$ і $\vec{A}(\vec{r}, t)$.

З рівняння (3.31) випливає, що

$$\text{rot} \text{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{j} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \varphi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2},$$

або з врахуванням формули $\text{rot} \text{rot} \vec{a} = \text{grad} \text{div} \vec{a} - \Delta \vec{a}$ отримаємо

$$\text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \varepsilon_0 \mu_0 \text{grad} \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}.$$

Перепишемо останнє рівняння вигляді

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \text{grad} \left(\text{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) \quad (3.39)$$

В свою чергу з рівнянь (3.32) і (3.36) знаходимо рівняння ($\text{div} \text{grad} = \Delta$)

$$\text{div} \left(-\text{grad} \varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

або

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A}. \quad (3.40)$$

Калібрувальна інваріантність електромагнітного поля, тобто неоднозначність електромагнітних потенціалів, дає змогу накласти на них такі додаткові умови, які, не змінюючи співвідношень (3.33) і (3.36), дозволять зробити рівняння (3.39) і (3.40) незалежними. Співвідношення (3.33) визначає ротор вектор-потенціалу \vec{A} . Однак сам вектор-потенціал \vec{A} ще не визначений, оскільки його дивергенція не задана. Якщо задати дивергенцію \vec{A} співвідношенням

$$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (3.41)$$

яке називається **умовою Лоренца**, то замість рівнянь (3.39) і (3.40) отримаємо незалежні рівняння для електромагнітних потенціалів у вигляді

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (3.42)$$

$$\Delta \varphi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (3.43)$$

Рівняння для потенціалів (3.39) і (3.40) називають **рівняннями Д'Аламбера**. Ввівши диференціальний оператор Д'Аламбера

$$\square = \Delta - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (3.44)$$

їх можна переписати у більш компактному вигляді

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (3.45)$$

$$\square \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (3.46)$$

Використання рівнянь Д'Аламбера спрощує обчислення полів \vec{E} і \vec{H} , оскільки їх розв'язування значно простіше, ніж розв'язування рівнянь Максвелла.

Зауважимо, що згідно з принципом відповідності у разі незалежності потенціалів від часу з рівнянь Д'Аламбера (3.45) і (3.46) випливають рівняння Пуассона для електростатичного та магнітостатичного полів (1.55) і (2.22).

Додамо, що у квантовій теорії поля замість умови Лоренца (3.41) використовують **кулонівське калібрування потенціалів**, згідно з яким

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad (3.47)$$

Тоді з рівнянь (3.39) і (3.40) випливають рівняння для електромагнітних потенціалів у вигляді

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (3.48)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (3.49)$$

3.5 Запізнювальний та випереджувальний потенціали

Рівняння для електромагнітних потенціалів, які залежать від координат і часу, мають вигляд

$$\Delta \varphi(\vec{r}, t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0}, \quad (3.50)$$

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}, t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t), \quad (3.51)$$

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}, t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0. \quad (3.52)$$

Система рівнянь (3.50)–(3.52) представляє собою систему лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних. Тому для знаходження конкретного розподілу електромагнітного поля в просторі і в часі в залежності від значень відомих функцій густини заряду $\rho(\vec{r}, t)$ та густини струму $\vec{j}(\vec{r}, t)$ необхідно задати початкові умови.

При знаходженні електромагнітного поля початкові умови ставляться так: до деякого моменту $t = 0$ (тобто при $t < 0$) всі заряди є нерухомими; в момент часу $t = 0$ всі заряди починають довільним чином рухатися. Тому при $t \leq 0$ необхідно покласти, що $\rho(\vec{r}, 0) = 0$ та $\vec{j}(\vec{r}, 0) = 0$, тобто густини заряду та струму в початковий момент рівні нулю. Відповідно, в момент часу $t = 0$ рівні нулю і вектори електричного і магнітного полів $\vec{E}(\vec{r}, 0) = \vec{H}(\vec{r}, 0) = 0$. Тоді початкові умови для потенціалів набувають вигляду:

$$\left. \begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, 0) &= 0, \\ \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, 0)}{\partial t} &= 0, \\ \varphi(\vec{r}, 0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

Перша із записаних рівностей відповідає рівності $-\vec{H} = 0$, друга і третя (див. (3.36)) – відсутності електричного поля $\vec{E} = 0$ в початковий момент часу. При $t > 0$ функції $\rho(\vec{r}, t)$ та $\vec{j}(\vec{r}, t)$ вважаються заданими.

Розіб'ємо всю систему на сукупність точкових зарядів $dq = \rho(\vec{r}, t)dV$, де dV – як завгодно малий об'єм в області V' . Шукатимемо в деякій точці

спостереження потенціал поля, що створюється зарядом dq , вважаючи, що ніяких інших зарядів в просторі немає. Повне поле, на основі принципу суперпозиції, є сумою полів, що створюються всіма зарядами dq , які входять в систему.

Знайдемо, перш за все, розв'язки системи рівнянь для потенціалів поля, що створюється зарядом dq у всьому просторі поза малим об'ємом dV .

В усіх точках простору поза об'ємом dV густина заряду, згідно нашого припущення, рівна нулю. Тому поза об'ємом dV рівняння (3.50)–(3.52) для потенціалів електромагнітного поля набувають вигляду

$$\Delta\varphi - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (3.54)$$

$$\Delta\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.55)$$

Введемо сферичну систему координат з початком в нескінченно малому об'ємі dV , де знаходиться точковий заряд dq . Тоді змінне електромагнітне поле цього заряду поза об'ємом dV буде сферично-симетричним, унаслідок чого потенціали поля не залежатимуть від полярного та азимутального кутів, а тільки від відстані до об'єму dV та часу. Скориставшись виразом для оператора Лапласа в сферичних координатах

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f), \quad (3.56)$$

отримуємо

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varphi) - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (3.57)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \vec{A}) - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.58)$$

Ми бачимо, що скалярний потенціал і всі компоненти вектора-потенціалу визначаються рівнянням одного типу:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}. \quad (3.59)$$

Рівняння типу (3.59) називають **хвильовим рівнянням**. Воно описує поширення довільного періодичнозмінного поля з швидкістю c . Найпростіше інтегрування хвильового рівняння може бути проведено методом Д'Аламбера, що полягає у зведенні рівняння в частинних похідних типу (3.59) до рівняння із змішаною другою похідною. Перепишемо рівняння (3.59) у вигляді

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r f) = 0 \quad (3.60)$$

і введемо нову невідому функцію,

$$\psi(r, t) = r f(r, t), \quad (3.61)$$

що завжди можливо, оскільки поза об'ємом dV , $r \neq 0$. Тоді маємо

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.62)$$

Перейдемо тепер в рівнянні (3.62) до нових змінних:

$$\xi = t - \frac{r}{c}, \quad (3.63)$$

$$\eta = t + \frac{r}{c}, \quad (3.64)$$

звідки

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial r} = \\ &= \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right). \end{aligned}$$

Далі

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta}.$$

У нових змінних рівняння (3.62) має вигляд

$$\frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (3.65)$$

Інтегруючи його за змінною η , дістанемо нове рівняння

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \phi(\xi),$$

після інтегрування якого отримаємо функцію ψ у вигляді

$$\psi(\xi, \eta) = \int \phi(\xi) d\xi + \phi_2(\eta) = \phi_1(\xi) + \phi_2(\eta). \quad (3.66)$$

Повертаючись до старих змінних r і t , з (3.61) знаходимо

$$f(r, t) = \frac{1}{r} \phi_1 \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \phi_2 \left(t + \frac{r}{c} \right). \quad (3.67)$$

Формула (3.67) є загальним розв'язком рівняння (3.60), і представляє накладення двох хвиль – розбіжної хвилі $\left(\frac{1}{r} \phi_1 \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)$, що поширюється з швидкістю c від початку координат, і хвилі, що збігається до початку координат $\left(\frac{1}{r} \phi_2 \left(t + \frac{r}{c} \right) \right)$. Поверхні сфер $r = \text{const}$ є поверхнями постійного значення функції f або поверхнями рівної фази. Оскільки поверхнями рівної фази є сферичні поверхні, то говорять, що хвильовий процес, що описується функцією f , є сукупністю розбіжної і збіжної сферичних хвиль. Скалярний потенціал φ і всі компоненти вектора-потенціалу \vec{A} можуть бути представлені у вигляді формули (3.67).

Для з'ясування змісту отриманих розв'язків розглянемо один з частинних розв'язків, наприклад розбіжну сферичну хвилю. Для конкретності запишемо вираз для скалярного потенціалу:

$$\varphi(\vec{r}, t)_1 = \frac{1}{r} \phi_1 \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (3.68)$$

При довільному вигляді функції ϕ_1 формула (3.68) є частинним розв'язком рівняння (3.50) в області простору поза об'ємом dV . Вимагатимемо тепер, щоб розв'язок (3.68) неперервно переходив у розв'язок рівняння (3.50) поблизу об'єму dV , тобто поблизу місця розташування заряду dq . Якщо в рівнянні (3.50) зробити формальний перехід, поклавши $c \rightarrow \infty$, то воно переходить в рівняння Пуассона (1.55) для електростатичного потенціалу, розв'язок якого має вигляд (1.57). У нашому випадку поле створюється точковим зарядом $dq = \rho(t)dV$, тому замість (1.57) будемо мати

$$d\varphi_1 = \frac{dq(t)}{r} = \frac{\rho(t)dV}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (3.69)$$

Порівнюючи (3.68) при $c \rightarrow \infty$ і (3.69) знаходимо співвідношення

$$\phi_1 = \frac{\rho(t)dV}{4\pi\epsilon_0}, \quad (3.70)$$

з якого випливає, що

$$\phi_1 \left(t - \frac{r}{c} \right) = \frac{\rho \left(t - \frac{r}{c} \right) dV}{4\pi\epsilon_0}, \quad (3.71)$$

отже,

$$d\varphi(r, t)_1 = \frac{\rho \left(t - \frac{r}{c} \right) dV}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (3.72)$$

Таким чином, ми приходимо до потенціалу поля, створюваного зарядом dq , який задовольняє рівнянню (3.57) поза об'ємом dV і переходить поблизу початку координат в (3.69).

Якщо заряд dq знаходиться не в початку координат, а в точці з координатою \vec{r}' , а точка спостереження має радіус-вектор \vec{r} , то

$$dq = \rho \left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) dV',$$

замість (3.72) потрібно записати

$$d\varphi_1(|\vec{r} - \vec{r}'|, t) = \frac{\rho \left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) dV'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.73)$$

Нарешті, якщо електричний заряд не є точковим, а розподілений в деякому об'ємі V' , на підставі (3.73) можна записати розв'язок рівняння Д'Аламбера (3.50) як

$$\varphi_1(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho \left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (3.74)$$

де $dV' = d^3r' = dx'dy'dz'$.

Так само, використовуючи другий доданок у правій частині співвідношення (3.67), отримаємо ще один розв'язок рівняння (3.50) у вигляді

$$\varphi_2(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho \left(\vec{r}', t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.75)$$

Значення потенціалу $\varphi_1(\vec{r}, t)$ у момент часу t визначається розподілом зарядів у попередній момент часу $t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$. Тому потенціал $\varphi_1(\vec{r}, t)$ називають **запізнювальним**, а величину $\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$ – часом запізнення. Він відповідає принципу причинності, оскільки причина (розподіл зарядів) передує наслідку (значення потенціалу).

Потенціал $\varphi_2(\vec{r}, t)$ у момент часу t визначається розподілом зарядів у наступний момент часу $t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$, тому його називають **випереджувальним**. У цьому разі наслідок передує причині, що суперечить принципу причинності. Надалі обмежимося запізнювальними потенціалами і вважатимемо, що розв'язок рівняння Д'Аламбера (3.50) має вигляд

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho \left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (3.76)$$

Додамо, що формально розв'язок (3.75) з'явився внаслідок інваріантності рівняння (3.50) відносно інверсії часу $t \rightarrow -t$, яка означає, що причина стає наслідком, а наслідок – причиною. Однак у нашому випадку це суперечить умові задачі, згідно з якою електромагнітні хвилі є наслідком, а причиною – зміна з часом розподілу електричних зарядів.

Розв'язок рівняння Д'Аламбера (3.51) запишемо аналогічно (3.76) у вигляді запізнювального векторного потенціалу

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (3.77)$$

3.6 Закон збереження енергії в електромагнітному полі у вакуумі. Вектор Пойнтінга

Першим важливим загальним наслідком, який витікає з системи рівнянь Максвелла, є існування енергії електромагнітного поля. Для знаходження енергії електромагнітного поля розглянемо замкнуту систему, що складається з поля і частинок.

Знайдемо силу з якою поле діє на заряди (неперервно розподілені в просторі), що знаходяться в об'ємі V

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{V} = \rho \vec{E} + \mu_0 \rho [\vec{v} \vec{H}] = \rho \vec{E} + \mu_0 [\vec{j} \vec{H}]. \quad (3.78)$$

Тому робота A , виконана силами поля над зарядами за одиницю часу рівна

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_V \vec{f} \vec{s} dV = \int_V \vec{f} \vec{v} dV = \int_V \rho (\vec{E} + \mu_0 [\vec{v} \vec{H}]) \vec{v} dV = \\ &= \int_V \rho \vec{E} \vec{v} dV + \mu_0 \int_V \rho [\vec{v} \vec{H}] \vec{v} dV = \int_V \vec{j} \vec{E} dV, \end{aligned} \quad (3.79)$$

де враховано, що $\rho \vec{v} = \vec{j}$ і $\vec{v} [\vec{v} \vec{H}] = 0$, оскільки $[\vec{v} \vec{H}] \perp \vec{v}$. Робота сили магнітного поля рівна нулю, оскільки ця сила перпендикулярна до швидкості частинки.

Перетворимо співвідношення (3.79), використовуючи рівняння Максвелла. Виражаючи густину струму через вектори поля за допомогою (3.31), маємо

$$\frac{dA}{dt} = \int_V \vec{j} \vec{E} dV = \int_V \vec{E} \left(\text{rot } \vec{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dV = \int_V \vec{E} \text{rot } \vec{H} dV - \varepsilon_0 \int_V \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dV. \quad (3.80)$$

Як ми неодноразово підкреслювали, повинна існувати симетрія між електричним і магнітним полями. Тим часом, рівняння (3.80) асиметричне. Ми

можемо надати йому належному вигляду, додавши до правої його частини вираз

$$- \int_V \vec{H} \left(\text{rot } \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) dV,$$

рівний, в силу рівняння Максвелла (3.29), нулю. Це дає

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \int_V (\vec{E} \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \text{rot } \vec{E}) dV - \int_V \left(\varepsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) dV = \\ &= \int_V (\vec{E} \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \text{rot } \vec{E}) dV - \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2}{2} \right) dV \end{aligned} \quad (3.81)$$

Перший інтеграл в правій частині рівняння (3.81) може бути перетворений до поверхневого. А саме, згідно формули $\text{div} [\vec{a}\vec{b}] = \vec{b} \text{rot } \vec{a} - \vec{a} \text{rot } \vec{b}$ маємо:

$$-(\vec{E} \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \text{rot } \vec{E}) = \text{div} [\vec{E}\vec{H}].$$

Тому (за теоремою Гаусса)

$$\int_V (\vec{E} \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \text{rot } \vec{E}) dV = - \int_V \text{div} [\vec{E}\vec{H}] dV = - \oint_S [\vec{E}\vec{H}] d\vec{S},$$

де S – замкнена поверхня, що обмежує об'єм V . Тоді замість (3.81) можна написати

$$\frac{dA}{dt} = - \oint_S [\vec{E}\vec{H}] d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2}{2} \right) dV. \quad (3.82)$$

Розглянемо випадок, коли об'єм інтегрування V необмежено зростає і поверхня S охоплює весь простір в якому є електромагнітне поле. Тому у точках цієї поверхні поле має бути відсутнім і перший інтеграл у правій частині співвідношення (3.82) дорівнюватиме нулю⁶. У цьому разі

$$\frac{dA}{dt} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2}{2} \right) dV. \quad (3.83)$$

У замкненій системі робота поля має дорівнювати зменшенню його енергії, тому величина

$$W = \int_V \left(\frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2}{2} \right) dV \quad (3.84)$$

⁶Якщо вектори поля \vec{E} і \vec{H} прямують до нуля при $r \rightarrow \infty$ швидше, ніж по закону $\frac{1}{r}$, то поверхневий інтеграл перетворюється в нуль. Оскільки, $E \sim \frac{1}{r^2}$ (див. (1.8)) і $H \sim \frac{1}{r^2}$, то підінтегральний вираз спадає швидше, ніж $\frac{1}{r^2}$, а величина поверхні росте, як r^2 , то поверхневий інтеграл у правій частині співвідношення (3.82) дорівнюватиме нулеві.

має зміст енергії електромагнітного поля в об'ємі V , а величина

$$w = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2}{2} \quad (3.85)$$

є густиною енергії електромагнітного поля.

Тоді відповідно, доданок

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \quad (3.86)$$

має зміст густини енергії електричного поля у вакуумі, а доданок

$$w_m = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}^2 \quad (3.87)$$

слід вважати густиною енергії магнітного поля у вакуумі.

Припустимо, що замкнена поверхня S , яка фігурує в співвідношенні (3.82), не охоплює всього поля. Тоді його перепишемо у вигляді

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{dA}{dt} + \oint_S [\vec{E} \vec{H}] d\vec{S}. \quad (3.88)$$

Співвідношення (3.88) означає, що зменшення енергії електромагнітного поля всередині замкненої поверхні S відбувається внаслідок виконання полем роботи і втрати енергії поля крізь поверхню S , причому

$$-\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{\text{витік}} = \oint_S [\vec{E} \vec{H}] d\vec{S} = \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S}. \quad (3.89)$$

Вектор

$$\vec{\Pi} = [\vec{E} \vec{H}] \quad (3.90)$$

називають **вектором Пойнтінга**. Чисельно він дорівнює енергії, яка витікає за одиницю часу через одиницю площі поверхні в напрямі, перпендикулярному до векторів \vec{E} і \vec{H} .

Отже, співвідношення (3.88) має зміст **закону збереження енергії** для системи з електромагнітного поля і електричних зарядів у вакуумі.

3.7 Закон збереження імпульсу в електромагнітному полі у вакуумі

Поряд з густиною енергії електромагнітне поле також має і густину імпульсу.

Якщо на заряд, що знаходиться в об'ємі V діє сила (3.78), то його рівняння руху можна записати так:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_V \vec{f} dV = \frac{d\vec{P}_{\text{част}}}{dt} = \int_V \left(\rho \vec{E} + \mu_0 [\vec{j} \vec{H}] \right) dV = \\ &= \int_V \rho \vec{E} dV + \int_V \mu_0 [\vec{j} \vec{H}] dV,\end{aligned}\quad (3.91)$$

де $\vec{P}_{\text{част}}$ – повний імпульс частинок, що знаходяться в об'ємі V . Виражаючи ρ і \vec{j} через напруженості поля відповідно до (3.30) і (3.31), знаходимо

$$\frac{d\vec{P}_{\text{част}}}{dt} = \varepsilon_0 \int_V \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} dV + \mu_0 \int_V [\operatorname{rot} \vec{H} \cdot \vec{H}] dV - \varepsilon_0 \mu_0 \int_V \left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \vec{H} \right] dV. \quad (3.92)$$

Симетризуємо останнє рівняння, додавши до його правої частини вираз, що рівний нулю (див. (3.29) і (3.32))

$$\varepsilon_0 \int_V \left[\left(\operatorname{rot} \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \vec{E} \right] dV + \mu_0 \int_V \vec{H} \operatorname{div} \vec{H} dV$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{P}_{\text{част}}}{dt} &= -\varepsilon_0 \mu_0 \int_V \left(\left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \vec{H} \right] + \left[\vec{E} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right] \right) dV + \\ &+ \int_V \left(\varepsilon_0 \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \mu_0 \vec{H} \operatorname{div} \vec{H} + \varepsilon_0 [\operatorname{rot} \vec{E} \cdot \vec{E}] + \mu_0 [\operatorname{rot} \vec{H} \cdot \vec{H}] \right) dV = \\ &= -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_V [\vec{E} \vec{H}] dV + \\ &+ \int_V \left(\varepsilon_0 \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \mu_0 \vec{H} \operatorname{div} \vec{H} - \varepsilon_0 [\vec{E} \operatorname{rot} \vec{E}] - \mu_0 [\vec{H} \operatorname{rot} \vec{H}] \right) dV.\end{aligned}\quad (3.93)$$

Другий інтеграл може бути перетворений до поверхневого. Це перетворення ми проведемо нижче. Зрозуміло, що поверхневий інтеграл, який містить вектори поля в другій степені, буде прямувати до нуля при необмеженому зростанні поверхні, якщо вектори поля спадають швидше, ніж функція $\frac{1}{r}$. Тоді, переходячи до нескінченно великого об'єму і відкидаючи в (3.93) другий інтеграл, ми приходимо до виразу

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{P}_{\text{част}} + \varepsilon_0 \mu_0 \int_V \vec{\Pi} dV \right) = 0 \quad (3.94)$$

або

$$\vec{P}_{\text{част}} + \varepsilon_0 \mu_0 \int_V \vec{\Pi} dV = \text{const.} \quad (3.95)$$

Величина

$$\vec{P}_{\text{поля}} = \varepsilon_0 \mu_0 \int_V \vec{\Pi} dV \quad (3.96)$$

має зміст імпульсу електромагнітного поля. Відповідно вектор

$$\vec{g} = \varepsilon_0 \mu_0 \vec{\Pi} = \varepsilon_0 \mu_0 [\vec{E} \vec{H}] \quad (3.97)$$

є густиною імпульсу електромагнітного поля.

Формула (3.95) показує, що сумарний імпульс замкнутої системи, що складається з поля і частинок, зберігається. При взаємодії поля і частинок поряд із законом збереження сумарної енергії має місце закон збереження сумарного імпульсу. Передача імпульсу частинкам супроводжується зменшенням імпульсу поля. Втрата імпульсу частинками (наприклад, при випромінюванні) приводить до збільшення імпульсу поля.

Покажемо тепер, що другий інтеграл у формулі (3.93) можна звести до поверхневого інтегралу. Оскільки інтеграл

$$\int \left\{ \varepsilon_0 \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \mu_0 \vec{H} \operatorname{div} \vec{H} - \varepsilon_0 [\vec{E} \operatorname{rot} \vec{E}] - \mu_0 [\vec{H} \operatorname{rot} \vec{H}] \right\} dV$$

симетричний відносно векторів \vec{E} і \vec{H} , розглянемо тільки інтеграл

$$I = \int \left\{ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - [\vec{E} \operatorname{rot} \vec{E}] \right\} dV. \quad (3.98)$$

Скориставшись векторними рівностями

$$\operatorname{grad} \frac{a^2}{2} = (\vec{a} \operatorname{grad} a) + [\vec{a} \operatorname{rot} a]$$

та

$$\oint (\vec{a} \vec{n}) \vec{b} dS = \int \vec{b} \operatorname{div} \vec{a} dV + \int (\vec{a} \operatorname{grad}) \vec{b} dV,$$

можемо записати

$$\int (\vec{E} \operatorname{grad}) \vec{E} dV = \oint (\vec{E} \vec{n}) \vec{E} dS - \int \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} dV, \quad (3.99)$$

$$\int (\vec{E} \operatorname{grad}) \vec{E} dV = \int \operatorname{grad} \frac{E^2}{2} dV - \int [\vec{E} \operatorname{rot} \vec{E}] dV. \quad (3.100)$$

Віднімаючи (3.99) від (3.100), знаходимо

$$\int \left\{ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - [\vec{E} \operatorname{rot} \vec{E}] \right\} dV = - \int \operatorname{grad} \frac{E^2}{2} dV + \int (\vec{E} \vec{n}) \vec{E} dS$$

Враховуючи, що $\oint \varphi d\vec{S} = \int \operatorname{grad} \varphi dV$, одержуємо

$$I = \oint \left\{ (\vec{E} \vec{n}) \vec{E} - \vec{n} \frac{E^2}{2} \right\} dS.$$

Аналогічний вираз можна записати для магнітної частини інтеграла, що нас цікавить. Таким чином, остаточно одержуємо

$$\begin{aligned} \int \left\{ \varepsilon_0 \left(\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - [\vec{E} \operatorname{rot} \vec{E}] \right) + \mu_0 \left(\vec{H} \operatorname{div} \vec{H} - [\vec{H} \operatorname{rot} \vec{H}] \right) \right\} dV = \\ = \oint \left\{ \varepsilon_0 \left((\vec{E} \vec{n}) \vec{E} - \vec{n} \frac{E^2}{2} \right) + \mu_0 \left((\vec{H} \vec{n}) \vec{H} - \vec{n} \frac{H^2}{2} \right) \right\} dS. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Спрямувавши до нескінченності радіус поверхні інтегрування і вважаючи, що поля \vec{E} і \vec{H} спадають на нескінченності швидше, ніж $\frac{1}{r}$, приходимо до рівності нулю всього поверхневого інтеграла.

Не зупиняючись на розгляді більш складного випадку, коли інтегрування в (3.93) ведеться по скінченному об'єму, вкажемо лише результат такого розгляду: зміна повного імпульсу поля в деякому об'ємі $\int g dV$ рівна зміні імпульсу частинок, що знаходяться в цьому об'ємі, і потоку імпульсу через поверхню, що обмежує вибраний об'єм.

4 ВІЛЬНЕ ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ.

4.1 Хвильове рівняння Д'Аламбера для векторів у випадку вільного електромагнітного поля. Електромагнітні хвилі

Серед важливих наслідків, які випливають з рівнянь Максвелла (3.29) – (3.32), є висновок про існування електромагнітних хвиль. З огляду на це розглянемо змінне електромагнітне поле в точках простору, де заряди і струми провідності відсутні. За таких умов рівняння Максвелла набувають

вигляду

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad (4.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0; \quad (4.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0. \quad (4.4)$$

З рівнянь (4.1) і (4.3) випливає співвідношення

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

тому, враховуючи, що $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$, і беручи до уваги (4.2), отримаємо рівняння

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.5)$$

Так само, використовуючи рівняння (4.1)–(4.3), отримаємо

$$\Delta \vec{H} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.6)$$

Ще два рівняння, подібні до рівнянь (4.5) і (4.6), отримаємо з рівнянь Д'Аламбера (3.42) і (3.43) за умови, що $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$:

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0, \quad (4.7)$$

$$\Delta \varphi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (4.8)$$

Рівняння такого вигляду називають хвильовим. Воно описує поширення періодичного змінного електричного поля зі швидкістю

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (4.9)$$

Представимо напруженість електричного поля у вигляді

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} \left(t \pm \frac{1}{v} \vec{k}_0 \vec{r} \right), \quad (4.10)$$

де \vec{k}_0 – сталий одиничний вектор, і переконаємося що вона задовільняє рівняння (4.5). Ввівши позначення

$$\varphi = t \pm \frac{1}{v} \vec{k}_0 \vec{r},$$

одержимо ($\vec{k}_0\vec{r} = k_{0x}x + k_{0y}y + k_{0z}z$)

$$\begin{aligned}\Delta\vec{E} &= \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = \\ &= \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial\varphi^2}\left(\frac{k_{0x}^2 + k_{0y}^2 + k_{0z}^2}{v^2}\right) = \frac{k_0^2}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial\varphi^2}; \\ \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial\varphi^2},\end{aligned}$$

отже, функції (4.10) задовольняють рівняння (4.5).

Якщо в (4.10) вибрати знак «мінус», то за умови

$$\Delta t = \frac{1}{v}\Delta(\vec{k}_0\vec{r}),$$

отримаємо співвідношення

$$\vec{E}\left(t - \frac{1}{v}\vec{k}_0\vec{r}\right) = \vec{E}\left(t + \Delta t - \frac{\vec{k}_0\vec{r} + \Delta(\vec{k}_0\vec{r})}{v}\right), \quad (4.11)$$

з якого випливає, що значення функції $\vec{E}\left(t - \frac{1}{v}\vec{k}_0\vec{r}\right)$ у момент часу t і в точках з певним значенням $\vec{k}_0\vec{r}$ збігається з її значенням у наступний момент часу $t + \Delta t$, але в точках простору, для яких $\vec{k}_0\vec{r} + \Delta(\vec{k}_0\vec{r})$. Отже, відбувається зміщення певного значення функції \vec{E} вздовж вектора \vec{k}_0 зі швидкістю v .

Якщо вибрати знак «плюс» в (4.10)

$$\vec{E}\left(t + \frac{1}{v}\vec{k}_0\vec{r}\right) = \vec{E}\left(t + \Delta t + \frac{\vec{k}_0\vec{r} - \Delta(\vec{k}_0\vec{r})}{v}\right), \quad (4.12)$$

тобто деяке значення функції $\vec{E}\left(t + \frac{1}{v}\vec{k}_0\vec{r}\right)$ збігається з її значенням у наступний момент часу $t + \Delta t$ у точках $\vec{k}_0\vec{r} - \Delta(\vec{k}_0\vec{r})$, тобто відбувається поширення певного значення поля \vec{E} проти вектора \vec{k}_0 .

Оскільки рівняння (4.6) має аналогічну структуру, подібні висновки автоматично поширюються і на напруженість магнітного поля \vec{H} .

Поширення змінних і взаємопов'язаних електричного і магнітного полів називають **електромагнітною хвилею**. Отже, у вільному від електричних зарядів і струмів просторі електромагнітне поле може існувати у вигляді електромагнітних хвиль, які є реальними (спостережуваними) фізичними об'єктами. Водночас не слід забувати, що хоча електромагнітні хвилі можуть поширюватися у відриві від зарядів, саме електричні заряди є їх джерелами.

Електромагнітні хвилі є різного типу. Обмежимося розглядом плоских і сферичних хвиль.

4.2 Плоскі електромагнітні хвилі

Частинний розв'язок рівняння (4.5) будемо шукати у вигляді

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta), \quad (4.13)$$

де \vec{E}_0 – амплітуда хвилі (сталий вектор), \vec{k} – хвильовий вектор, його напрямок показує напрямок поширення хвилі, $\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta$ – фаза хвилі, δ – початкова фаза.

Підставимо функцію (4.13) в рівняння (4.5). Врахувавши, що $\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ будемо мати

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= -\vec{E}_0(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta) = -k^2 \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta) = -k^2 \vec{E}; \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= -\omega^2 \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta) = -\omega^2 \vec{E}; \\ k^2 - \frac{\omega^2}{v^2} &= 0, \end{aligned}$$

тобто, хвиля (4.13) задовільняє рівняння Даламбера (4.5) при умові, що $\omega = k v$.

Зафіксуємо деякий момент часу $t = t_0$, тоді рівняння

$$\vec{k}\vec{r} - \omega t_0 + \delta = \text{const}$$

визначає множину всіх точок, що коливаються в однаковій фазі. Цю множину точок називають **фронтом хвилі** або **хвильовою поверхнею**. Його форму визначають за рівнянням $\varphi = \text{const}$, в даному випадку рівняння

$$\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z = \text{const} \quad (4.14)$$

є рівнянням площини, перпендикулярної до вектора \vec{k} . Тому (4.13) є рівнянням плоскої монохроматичної гармонічної хвилі частоти ω з хвильовим вектором \vec{k} .

Найменший проміжок часу T , називається **періодом**, якщо виконується умова:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}(\vec{r}, t + T); \\ \vec{E}(\vec{r}, t + T) &= \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \omega T + \delta) = \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta), \end{aligned}$$

цю умову можна задовільнити, якщо $\omega T = 2\pi$. Тоді

$$T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \omega = 2\pi\nu, \quad T = \frac{1}{\nu}. \quad (4.15)$$

Довжиною хвилі λ , називається найменша відстань в просторі, на яку зсунувши фронт хвилі, сама хвиля не зміниться:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r} + \lambda \vec{n}, t) \quad \vec{n} = \frac{\vec{k}}{k};$$

$$\vec{E}(\vec{r} + \lambda \vec{n}, t) = \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} + \lambda k - \omega t + \delta) = \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta),$$

цю умова виконується, якщо $\lambda k = 2\pi$. Тоді

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (4.16)$$

Продиференціюємо за часом рівняння $\varphi = \text{const}$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \vec{k} \frac{d\vec{r}}{dt} - \omega = 0. \quad (4.17)$$

Звідси швидкість поширення певного значення фази (**фазову швидкість**) визначають за формулою

$$\vec{v}_\Phi = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\omega}{\vec{k}} = \frac{\omega \vec{k}}{k^2} = v \vec{k}_0, \quad (4.18)$$

отже, напрям фазової швидкості збігається з напрямом хвильового вектора, а модуль рівний

$$v_\Phi = v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Оскільки, ε_0 і μ_0 не залежать від вибору системи відліку, то у вакуумі швидкість електромагнітних хвиль рівна швидкості світла і не залежить від вибору системи відліку.

Аналогічно до (4.13) можна записати плоску хвилю, що описує поширення змінного магнітного поля

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \sin(\vec{k}'\vec{r} - \omega't + \delta'). \quad (4.19)$$

Вираз (4.19) буде розв'язком рівняння (4.6) якщо $\omega' = k'v$. Переконаємося, що мають місце наступні співвідношення: $\vec{k}' = \vec{k}$, $\omega' = \omega$, $\delta' = \delta$, $\vec{E} \perp \vec{k}$, $\vec{H} \perp \vec{k}$, $\vec{E} \perp \vec{H}$, $\omega H_0 = k E_0$.

Підставимо (4.13) в рівняння Максвелла (4.2). Врахувавши, що $\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ і

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} E_{0x} \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta) = k_x E_{0x} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta),$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = k_y E_{0y} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta), \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = k_z E_{0z} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta),$$

одержимо

$$\operatorname{div} \vec{E} = (k_x E_{0x} + k_y E_{0y} + k_z E_{0z}) \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta) = \vec{k}\vec{E}_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta) = 0.$$

Оскільки, $\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta) \neq 0$, то

$$\vec{k}\vec{E}_0 = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}_0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}.$$

Аналогічно підставляючи (4.19) в (4.4), одержимо $\vec{k}' \perp \vec{H}$.

Тепер підставимо (4.13) та (4.19) в рівняння Максвелла (4.1):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = \left(E_{0z} \frac{\partial \sin(\dots)}{\partial y} - E_{0y} \frac{\partial \sin(\dots)}{\partial z} \right) \vec{i} - \\ &- \left(E_{0z} \frac{\partial \sin(\dots)}{\partial x} - E_{0x} \frac{\partial \sin(\dots)}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(E_{0y} \frac{\partial \sin(\dots)}{\partial x} - E_{0x} \frac{\partial \sin(\dots)}{\partial y} \right) \vec{k} = \\ &= \left[(E_{0z} k_y - E_{0y} k_z) \vec{i} - (E_{0z} k_x - E_{0x} k_z) \vec{j} + (E_{0y} k_x - E_{0x} k_y) \vec{k} \right] \cos(\dots) = \\ &= \left[\vec{k}\vec{E}_0 \right] \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta); \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= -\omega' \vec{H}_0 \cos(\vec{k}'\vec{r} - \omega' t + \delta'); \end{aligned}$$

тоді рівність

$$\left[\vec{k}\vec{E}_0 \right] \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta) = \mu_0 \omega' \vec{H}_0 \cos(\vec{k}'\vec{r} - \omega' t + \delta')$$

можлива лише коли $\vec{k}' = \vec{k}$, $\omega' = \omega$, $\delta' = \delta$. Тобто

$$\left[\vec{k}\vec{E}_0 \right] = \mu_0 \omega \vec{H}_0 \Rightarrow \vec{H}_0 \perp \vec{E}_0 \Rightarrow \vec{H} \perp \vec{E}; \quad (4.20)$$

а для модулів одержуємо

$$k E_0 = \mu_0 \omega H_0 \Rightarrow E = c \mu_0 H = c B. \quad (4.21)$$

або врахувавши, що $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

$$\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H. \quad (4.22)$$

Таким чином, із співвідношень (4.20)–(4.22) випливає, що вектори \vec{E} , \vec{H} , \vec{k} утворюють праву трійку векторів, тобто електромагнітна хвиля є поперечною хвилею – вектори \vec{E} і \vec{H} лежать у площині перпендикулярній напрямку поширення хвилі, перпендикулярні один одному, а їх модулі зв'язані співвідношенням $\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$. З рівнянь (4.13) та (4.19) випливає також, що електричне і магнітне поля в плоскій електромагнітній хвилі змінюються синфазно. Всі ці властивості справедливі і для сферичних хвиль, які розглянемо далі.

4.3 Сферичні електромагнітні хвилі

Розглянемо випадок точкового джерела електромагнітних хвиль, розташованого в початку координат. Породжене ним електромагнітне поле буде мати сферичну симетрію з центром симетрії в початку координат. Тоді в рівнянні (4.5) оператор Лапласа зручно записати в сферичній системі координат у вигляді (3.56), де r – відстань від початку координат до точки спостереження, а залежність від кутів θ і φ відсутня, оскільки поле центрально-симетричне. В результаті для \vec{E} одержимо рівняння типу (3.60). Ввівши нову функцію $\vec{E}(r, t) = \frac{\vec{\mathcal{E}}(r, t)}{r}$, одержимо для неї хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = 0, \quad (4.23)$$

розв'язок якого може бути записаний у вигляді

$$\vec{\mathcal{E}}(r, t) = \vec{E}_0 \sin(kr - \omega t + \delta), \quad (4.24)$$

де $\omega = kc$, k – модуль хвильового вектора \vec{k} . Тоді

$$\vec{E}(r, t) = \frac{\vec{E}_0}{r} \sin(kr - \omega t + \delta). \quad (4.25)$$

Оскільки рівняння хвильової поверхні $kr = \text{const} \Rightarrow r = \text{const}$ описує сферу радіуса r , то функція (4.25) є рівнянням сферичної монохроматичної⁷ гармонічної хвилі, яка поширюється від початку координат.

З (4.25) випливає, що на відміну від амплітуди плоскої хвилі, амплітуда сферичної хвилі обернено пропорційна відстані від початку координат, а хвильовий вектор \vec{k} спрямований уздовж радіуса-вектора \vec{r} , оскільки $\vec{k}\vec{r} = kr$. Рівняння (4.25) незастосовне при $r \rightarrow 0$, тому що тоді амплітуда прямує до нескінченності. Те що амплітуда спадає по закону $\sim \frac{1}{r}$, легко зрозуміти з простих фізичних міркувань. Ми знаємо, що густина енергії хвилі залежить від квадрата амплітуди хвилі. У міру того як хвиля розбігається, її енергія

⁷Електромагнітна хвиля називається монохроматичною, якщо змінні поля змінюються з часом за гармонічним законом.

розпливається на все більшу і більшу площу, пропорційну квадрату радіуса хвилі. Якщо повна енергія зберігається, густина енергії повинна спадати як $\frac{1}{r^2}$, а амплітуда – як $\frac{1}{r}$.

Підставимо (4.25) в рівняння Максвелла (4.2). Врахувавши, що $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ і

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial x} &= E_{0x}x \left(\frac{k \cos(kr - \omega t + \delta)}{r^2} - \frac{\sin(kr - \omega t + \delta)}{r^3} \right), \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= E_{0y}y(\dots), \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = E_{0z}z(\dots),\end{aligned}$$

одержимо

$$\operatorname{div} \vec{E} = (E_{0x}x + E_{0y}y + E_{0z}z)(\dots) = \vec{E}_0 \vec{r}(\dots) = 0.$$

Оскільки, $(\dots) \neq 0$, то

$$\vec{E}_0 \vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{E}_0 \perp \vec{r} \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{r} \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{k},$$

з чого випливає поперечність сферичної електромагнітної хвилі.

4.4 Поляризація електромагнітних хвиль

Нехай вектор \vec{E} в електромагнітній хвилі залишається в процесі її розповсюдження паралельним деякому постійному вектору \vec{e} , який називається **вектором поляризації**. У цьому випадку хвиля називається **лінійно поляризованою**. Площину в якій лежать вектори \vec{E} і \vec{k} називають **площиною поляризації**. Для плоскої монохроматичної лінійно поляризованої хвилі можна записати:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e} E_0 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \delta). \quad (4.26)$$

Внаслідок поперечності електромагнітних хвиль вектор \vec{E} знаходиться у площині, перпендикулярній до хвильового вектора \vec{k} . Якщо у цій площині вибрати два взаємно перпендикулярні напрями з одиничними векторами \vec{e}_1 і \vec{e}_2 , амплітуду \vec{E}_0 можна записати як розклад за цими векторами:

$$\vec{E}_0 = \vec{e}_1 E_{01} + \vec{e}_2 E_{02}. \quad (4.27)$$

Надалі вважатимемо, що електромагнітні хвилі поширюються вздовж осі z координатної системи, а вектори поляризації \vec{e}_1 і \vec{e}_2 відповідно спрямовані вздовж осей x і y . Тоді хвилю

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kz - \omega t + \delta), \quad (4.28)$$

згідно (4.27), можна записати у вигляді суми двох хвиль

$$\vec{E} = \vec{e}_1 E_{0x} \cos(kz - \omega t + \delta) + \vec{e}_2 E_{0y} \cos(kz - \omega t + \delta), \quad (4.29)$$

які мають однакові початкові фази, але поляризовані взаємно перпендикулярно вздовж осей x і y за умови $\vec{E}_0 = \vec{E}_{0x} + \vec{E}_{0y}$. Розглянемо випадок, коли ці дві хвилі мають різні початкові фази:

$$E_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \delta_1), \quad (4.30)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \delta_2). \quad (4.31)$$

Тоді у площині xu відбуватиметься додавання двох взаємно перпендикулярних електричних гармонічних коливань однакової частоти, але з різними амплітудами і початковими фазами. Знайдемо рівняння траєкторії в (координатах E_x, E_y), яку описує кінець результуючого вектора \vec{E} . Виключимо з даних рівнянь хвильовий аргумент $kz - \omega t = \phi$. Для цього рівняння (4.30) і (4.31) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \cos(\phi + \delta_1) &= \frac{E_x}{E_{0x}}, \\ \cos(\phi + \delta_2) &= \frac{E_y}{E_{0y}}. \end{aligned}$$

Підставимо перше рівняння в друге, переписане як

$$\begin{aligned} \cos((\phi + \delta_1) + (\delta_2 - \delta_1)) &= \\ &= \cos(\phi + \delta_1) \cos(\delta_2 - \delta_1) - \sin(\phi + \delta_1) \sin(\delta_2 - \delta_1) = \frac{E_y}{E_{0y}}, \\ \frac{E_x}{E_{0x}} \cos(\delta_2 - \delta_1) - \frac{E_y}{E_{0y}} &= \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{E_{0x}^2}} \sin(\delta_2 - \delta_1), \\ \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} (\cos^2(\delta_2 - \delta_1) + \sin^2(\delta_2 - \delta_1)) - \frac{2E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} \cos(\delta_2 - \delta_1) + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} &= \sin^2(\delta_2 - \delta_1), \\ \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} - \frac{2E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} \cos(\delta_2 - \delta_1) + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} &= \sin^2(\delta_2 - \delta_1). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Одержане рівняння (4.32) є рівнянням еліпса в площині (E_x, E_y) , осі якого повернуті відносно координатних осей.

Якщо $\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1 = 2\pi n$, $n \in Z$, то рівняння (4.32) набуває вигляду

$$E_y = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x. \quad (4.33)$$

Це рівняння прямої лінії в координатах E_x, E_y , отже, електромагнітна хвиля буде **плоскополяризованою**.

При $\Delta\delta = (2n + 1)\pi$, $n \in Z$, з рівняння (4.32) одержимо

$$E_y = -\frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x. \quad (4.34)$$

Це також рівняння прямої лінії, тобто ця електромагнітна хвиля плоскополяризована, але з іншою орієнтацією вектора \vec{E} .

Припустимо, що $\Delta\delta = (2n \pm \frac{1}{2})\pi$, $n \in Z$. Тоді рівняння (4.32) переходить у канонічне рівняння еліпса

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} = 1, \quad (4.35)$$

тобто кінець вектора \vec{E} з часом у площині $E_x E_y$ описує еліпс.

При різниці фаз $\Delta\delta = (2n + \frac{1}{2})\pi$, $n \in Z$ кінець вектора \vec{E} рухається проти годинникової стрілки, а за умови $\Delta\delta = (2n - \frac{1}{2})\pi$ – за годинниковою стрілкою.

Такі електромагнітні хвилі називають **еліптично поляризованими**. Якщо при цьому $\vec{E}_{0x} = \vec{E}_{0y}$, то еліпс вироджується в коло. Тоді хвилю називають **циркулярно поляризованою** (поляризованою по колу) – **лівоциркулярно** або **правоциркулярно** поляризованою залежно від напрямку обертання вектора \vec{E} . При $\Delta\delta = 0$ еліпс вироджується в пряму лінію з рівнянням (4.33), тобто електромагнітна хвиля стає лінійно поляризованою.

У випадку лінійної, еліптичної і циркулярної поляризацій різниця фаз компонентів (4.30) та (4.31) з часом не змінюється. Тоді електромагнітні хвилі називають **повністю поляризованими**. Загалом, лінійно поляризовані та циркулярно поляризовані хвилі є частковими випадками еліптично поляризованих хвиль.

Якщо між фазами хвиль, поляризованих вздовж осей x і y , взаємної кореляції немає, тобто різниця фаз $\Delta\delta$ змінюється хаотично, то напрям вектора \vec{E} у площині xy також змінюватиметься хаотично. Такі електромагнітні хвилі називають **неполяризованими**.

4.5 Електромагнітне поле на великих відстанях від системи зарядів

Вигляд змінного електромагнітного полі істотно залежить від відстані до системи зарядів, які його породжують. Найпростіший вигляд має поле на великій відстані від випромінювача.

Нехай \vec{r}' – радіус-вектор системи зарядів, що знаходяться в деякому об'ємі $V' \sim L^3$, L – характерний лінійний розмір системи, тобто $r' \sim L$. Тут вважаються заданими $\rho(\vec{r}', t)$ і $\vec{j}(\vec{r}', t)$. Через \vec{r} позначимо радіус-вектор точки спостереження, в якій визначаємо потенціали поля $\varphi(\vec{r}, t)$ і $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Тому

вважатимемо, що точка спостереження знаходиться на великій відстані від зарядів, якщо $r \gg L$ або $r' \ll r$.

Величину $\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$, що фігурує у (3.76) і (3.77), можна записати у вигляді

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - x_i')^2}},$$

оскільки $|x_i'| \ll |x|$, то розкладемо її в ряд Тейлора по малих степенях x_i'

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} - \sum_{i=1}^3 x_i' \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \quad (4.36)$$

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} (x x' + y y' + z z') = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \vec{r}'}{r^3} = \frac{1}{r} + \vec{n} \frac{\vec{r}'}{r^2}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}. \quad (4.37)$$

Підставивши одержаний результат в (3.76) та ввівши позначення $\tau = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$, будемо мати

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', \tau) dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \vec{r}'}{r^3} \right) \rho(\vec{r}', \tau) dV' = \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', \tau) dV'}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} \vec{r}'}{r^3} \rho(\vec{r}', \tau) dV'. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Необхідно зауважити, що $\int \rho(\vec{r}', \tau) dV' \neq q$, тобто не є повним зарядом системи. Причина полягає в тому, що значення густини в цьому інтегралі залежить від аргумента $\tau = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$, а він від часу запізнення $\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$, який для кожної точки в об'ємі dV' буде різним. Тому на відміну від випадку точкового джерела інтеграли в (4.38) не можуть бути обчислені в загальному вигляді.

Подальше спрощення виникає в тому випадку, якщо замість різного часу запізнювання для кожної точки системи ввести один загальний час запізнювання для всієї системи. Для цього розкладемо R в ряд Тейлора по малих степенях x_i'

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = r - \sum_{i=1}^3 x_i' \frac{\partial r}{\partial x_i} + \dots \quad (4.39)$$

$$R \approx r - \frac{1}{r} (x x' + y y' + z z') = r - \frac{\vec{r} \vec{r}'}{r} = r - \vec{n} \vec{r}'. \quad (4.40)$$

Записавши аргумент $\tau = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$ у вигляді

$$\tau \approx t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r} \vec{r}'}{c r} = \tau_0 + \frac{\vec{r} \vec{r}'}{c r}, \quad (4.41)$$

ми бачимо, що повний час запізнювання $\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ складається з двох частин. Перша з них, рівна $\frac{r}{c}$ і називається часом запізнювання системи, визначає час, потрібний для поширення електромагнітного поля від початку координат до точки спостереження. Друга частина, що рівна $\frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr}$ називається власним запізнюванням, також має простий зміст: це час, потрібний для поширення поля в межах системи. По порядку величини $\frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr} \sim \frac{L}{c}$ і при $r \gg L$ власне запізнювання $\frac{r'}{c}$ за абсолютною величиною мале порівняно з $\frac{r}{c}$. Проте, це ще не означає, що густину заряду можна розкласти в ряд за малим параметром $\frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr}$, записавши

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}', \tau) &= \rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) = \rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr}\right) = \\ &\approx \rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \cdot \frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr} = \rho(\vec{r}', \tau_0) + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr} \dot{\rho}(\vec{r}', \tau_0), \end{aligned} \quad (4.42)$$

де вже ρ і $\dot{\rho}$ залежать лише від часу τ_0 , який для всіх точок системи однаковий.

Дійсно, якщо за час, рівний часу власного запізнювання $\frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr}$, конфігурація зарядів в системі встигне помітно змінитися, тобто, якщо за цей час заряди встигнуть помітно зміститися в системі, то густина заряду в момент часу $t - \frac{r}{c}$ буде істотно відрізнятися від густини заряду в момент часу $t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr}$. Іншими словами, густина заряду ρ буде швидко змінною функцією свого аргументу, і користуватися рівністю (4.42) неприпустимо. Для того щоб ця рівність мало місце, необхідно, щоб за час $\frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr}$ (протягом якого поле, що поширюється зі швидкістю c , проходить по системі) заряди в системі, що рухаються зі швидкістю v , не встигли помітно зміститися. За час $\frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr}$ заряди проходять шлях порядку $v \frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr} \sim v \frac{L}{c}$. Якщо цей шлях малий у порівнянні з розмірами системи, можна вважати, що за час власного запізнювання розташування зарядів в системі не встигає помітно змінитися.

Таким чином, можна вважати, що при

$$v \frac{L}{c} \ll L,$$

або при швидкостях, що задовольняють нерівність

$$v \ll c, \quad (4.43)$$

зміна конфігурації за час власного запізнювання є малою. При цьому $\rho(\vec{r}', \tau)$ є повільно змінюючоюся функцією свого аргументу. Це означає, що малим змінам τ відповідають малі зміни ρ і можна користуватися розкладом ρ за ступенями малого запізнювання. Підставляючи (4.42) в (4.38) і обмежувачись членами в розкладі, що містять найменші степені $\frac{1}{r}$, знахо-

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{r}, t) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^3} \right) \left(\rho(\vec{r}', \tau_0) + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr} \dot{\rho}(\vec{r}', \tau_0) \right) dV' = \\
&\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{\rho(\vec{r}', \tau_0)}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr^2} \dot{\rho}(\vec{r}', \tau_0) \right) dV' = \\
&\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', \tau_0)}{r} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 cr} \int \vec{r}' \dot{\rho}(\vec{r}', \tau_0) dV', \quad (4.44)
\end{aligned}$$

де $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$. Доданок $\frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr^3} \rho(\vec{r}', \tau_0)$ є малим у порівнянні з доданком $\frac{\vec{r}\vec{r}'}{cr^2} \dot{\rho}(\vec{r}', \tau_0)$ на достатньо великій відстані від системи.

У формулі (4.44) зроблено достатньо істотне спрощення в порівнянні з (4.38), оскільки густина заряду у всіх точках системи береться в один і той же момент часу

$$\tau_0 = t - \frac{r}{c}.$$

Перший доданок в (4.44) має простий зміст: $\rho(\vec{r}', \tau_0) = \rho(\vec{r}'t - \frac{r}{c})$ є густиною заряду в системі в момент часу τ_0 . Інтеграл $\int \rho(\vec{r}', \tau_0) dV'$ дає повний заряд системи. Для електронейтральної системи він дорівнює нулю. У цьому випадку маємо

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 cr} \int \vec{r}' \dot{\rho}(\vec{r}', \tau_0) dV'. \quad (4.45)$$

Інтеграл у правій частині формули (4.44) перепишемо, скориставшись рівнянням неперервності (2.4):

$$\int \vec{r}' \dot{\rho} dV' = \int \vec{r}' \frac{\partial \rho(\vec{r}', \tau_0)}{\partial \tau_0} dV' = \int \vec{r}' \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau_0} dV' = - \int \vec{r}' \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}', \tau_0) dV'.$$

Останній інтеграл зручно обчислити в координатному представленні

$$\begin{aligned}
\int \vec{r}' \operatorname{div} \vec{j} dV' &= \int (x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}') \operatorname{div} \vec{j} dV' = \\
&= \vec{i}' \int x' \operatorname{div} \vec{j} dV' + \vec{j}' \int y' \operatorname{div} \vec{j} dV' + \vec{k}' \int z' \operatorname{div} \vec{j} dV',
\end{aligned}$$

де \vec{i}' , \vec{j}' , \vec{k}' – орти штрихованої системи координат. Скориставшись співвідношенням

$$\operatorname{div}(\psi \vec{a}) = \psi(\nabla \vec{a}) + \vec{a}(\nabla \psi) = \psi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a}(\nabla \psi),$$

можна записати (врахувавши, що $\nabla' x' = \vec{i}' \frac{\partial x'}{\partial x'} + \vec{j}' \frac{\partial x'}{\partial y'} + \vec{k}' \frac{\partial x'}{\partial z'} = \vec{i}'$)

$$\begin{aligned}
x' \operatorname{div} \vec{j} &= \operatorname{div}(x' \vec{j}) - \vec{j}(\nabla' x') = \operatorname{div}(x' \vec{j}) - \vec{j} \vec{i}' = \operatorname{div}(x' \vec{j}) - j_{x'}, \\
\int x' \operatorname{div} \vec{j} dV' &= \int \operatorname{div}(x' \vec{j}) dV' - \int j_{x'} dV' = \oint x' \vec{j} dS - \int j_{x'} dV'.
\end{aligned}$$

Замкнена поверхня S охоплює весь об'єм струмів, тому на ній $\vec{j} = 0$, отже,

$$\int x' \operatorname{div} \vec{j} dV' = - \int j_{x'} dV',$$

тоді весь інтеграл рівний

$$\int \vec{r}' \operatorname{div} \vec{j} dV' = - \int (j_{x'} \vec{i}' + j_{y'} \vec{j}' + j_{z'} \vec{k}') dV' = - \int \vec{j} dV'.$$

Відповідно отримаємо

$$\int \vec{r}' \dot{\rho}(\vec{r}', \tau_0) dV' = \int \vec{j} dV'. \quad (4.46)$$

Подставляючи (4.46) в (4.45), знаходимо скалярний потенціал як функцію густини струму в системі

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{n}}{cr} \int \vec{j}(\vec{r}', \tau_0) dV'. \quad (4.47)$$

Аналогічно можна одержати вираз для векторного потенціалу, розкладаючи в ряд вираз $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ у формулі (3.77) і нехтуючи власним запізненням:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{j}(\vec{r}', \tau_0) dV'. \quad (4.48)$$

Порівнюючи (4.47) і (4.48), знаходимо, що між φ і \vec{A} існує простий зв'язок:

$$\varphi = c \vec{A} \vec{n}. \quad (4.49)$$

Інтеграл $\int \vec{r}' \dot{\rho}(\vec{r}', \tau_0) dV'$ має простий фізичний зміст. Дійсно, з означення дипольного моменту $\vec{d} = \sum q_i \vec{r}_i' = \int \rho \vec{r}' dV'$, ми бачимо, що

$$\int \vec{j} dV' = \int \vec{r}' \dot{\rho}(\vec{r}', \tau_0) dV' = \frac{\partial}{\partial \tau} \int \vec{r}' \rho(\vec{r}', \tau_0) dV' = \dot{\vec{d}}(\tau_0), \quad (4.50)$$

де $\dot{\vec{d}}(\tau_0)$ – похідна дипольного моменту за часом, взята в момент часу τ_0 . При цьому ми скористалися тим, що незалежна змінна інтегрування \vec{r}' , не залежить від τ_0 .

За допомогою (4.50) вирази для потенціалів (4.47) і (4.48) можна представити у вигляді

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{n} \dot{\vec{d}}(\tau_0)}{cr}, \quad (4.51)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{d}}(\tau_0)}{r}. \quad (4.52)$$

Ми бачимо, що в тому наближенні, коли можна знехтувати власним запізненням, потенціали поля далеко від системи зарядів визначаються значенням похідної за часом від її дипольного моменту. Тому таке наближення при обчисленні потенціалів поля називається **дипольним наближенням**. Умовою застосовності дипольного наближення є виконання нерівності (4.43).

Легко переконатися, що для потенціалів, знайдених у дипольному наближенні, виконується умова Лоренца (3.41):

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{div} \frac{\dot{\vec{d}}(\tau_0)}{r} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \operatorname{div} \dot{\vec{d}}(\tau_0) + \frac{\mu_0}{4\pi} \dot{\vec{d}}(\tau_0) \operatorname{grad} \frac{1}{r} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \operatorname{div} \dot{\vec{d}}(\tau_0).\end{aligned}\quad (4.53)$$

Оскільки, $\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\vec{n}/r^2$, то як і при обчисленні (4.44), другий член, що пропорційний $1/r^2$ є малим у порівнянні з першим, пропорційним $1/r$, і може бути опущений. Ми бачимо, що при диференціюванні за координатами далеко від випромінювача величину $1/r$ можна вважати постійною (винести за знак похідної). Далі, за формулою

$$\operatorname{div} \vec{a}(u) = \vec{\nabla} \vec{a}(u) = \frac{d\vec{a}}{du} \vec{\nabla} u = \frac{d\vec{a}}{du} \operatorname{grad} u,$$

де u – скалярна функція, маємо

$$\operatorname{div} \dot{\vec{d}}(\tau_0) = \frac{\partial \dot{\vec{d}}(\tau_0)}{\partial \tau_0} \operatorname{grad} \tau_0 = -\ddot{\vec{d}} \frac{\vec{r}}{cr} = -\frac{\ddot{\vec{d}} \vec{n}}{c},$$

де враховано, що

$$\operatorname{grad} \tau_0 = \nabla \left(t - \frac{r}{c} \right) = -\frac{1}{c} \nabla r = -\frac{\vec{r}}{cr} = -\frac{\vec{n}}{c}.\quad (4.54)$$

Таким чином,

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi cr} \ddot{\vec{d}} \vec{n}.$$

З іншого боку,

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\dot{\vec{d}} \vec{n}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\vec{n}}{r} \frac{\partial \dot{\vec{d}}}{\partial \tau_0} \frac{\partial \tau_0}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \ddot{\vec{d}} \vec{n},$$

тому

$$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

як і повинно бути.

Отримані результати мають простий і дуже важливий зміст: при русі зарядів в системі (зміні її дипольного моменту в часі) в навколишньому просторі виникає електромагнітне поле. Потенціали цього поля порівняно повільно (за законом $1/r$) спадають з відстанню від системи і залежать від часу.

Система зарядів, що рухаються нерівномірно (з прискоренням) є випромінювачем.

4.6 Електромагнітне поле дипольного випромінювання далеко від випромінювача

Знаючи розподіл потенціалів, можна знайти значення магнітного та електричного полів. Маємо

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{4\pi} \text{rot } \frac{\dot{\vec{d}}(\tau_0)}{r}.$$

При обчисленні ротора далеко від випромінювача слід проводити обчислення так само, як і при обчисленні дивергенції у формулі (4.53): при диференціюванні за координатами множник $1/r$ у слід вважати постійним. Тоді за формулою

$$\text{rot } \vec{a}(u) = \left[\vec{\nabla} \vec{a}(u) \right] = \left[\vec{\nabla} u \times \frac{d\vec{a}}{du} \right] = \left[\text{grad } u \times \frac{d\vec{a}}{du} \right]$$

знаходимо

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{4\pi r} \text{rot } \dot{\vec{d}}(\tau_0) = \frac{1}{4\pi r} \left[\text{grad } \tau_0 \times \frac{d \left(\dot{\vec{d}}(\tau_0) \right)}{d\tau_0} \right] = \frac{1}{4\pi r} \left[\text{grad } \tau_0 \times \ddot{\vec{d}}(\tau_0) \right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi c r} \left[\vec{n} \ddot{\vec{d}}(\tau_0) \right] = \frac{1}{4\pi c r} \left[\ddot{\vec{d}}(\tau_0) \vec{n} \right], \end{aligned} \quad (4.55)$$

де враховано (4.54). Або

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c r} \left[\ddot{\vec{d}}(\tau_0) \vec{n} \right]. \quad (4.56)$$

Для довільної функції запізнювального аргументу $\tau_0 = t - \frac{r}{c}$ має місце співвідношення

$$\text{grad } f(\tau_0) = \frac{\partial f}{\partial t} \text{grad } \tau_0 = \frac{\partial f}{\partial \tau_0} \frac{\partial \tau_0}{\partial t} \text{grad } \tau_0 = -\dot{f} \frac{\vec{n}}{c}.$$

Тому для електричного поля можна записати

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi(\tau_0) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial \tau_0} \frac{\partial \tau_0}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_0} \text{grad } \tau_0 - \dot{\vec{A}} = \\
 &= \frac{\vec{n}}{c} \dot{\varphi} - \dot{\vec{A}} = \vec{n} \left(\dot{A} \vec{n} \right) - \dot{\vec{A}} = \vec{n} \left(\vec{n} \dot{A} \right) - \dot{\vec{A}} (\vec{n} \vec{n}) = \left[\left[\dot{\vec{A}} \vec{n} \right] \vec{n} \right] = \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[\left[\ddot{d}(\tau_0) \vec{n} \right] \vec{n} \right].
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Порівнюючи (4.57) з (4.56) $\left(c \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[\ddot{d} \vec{n} \right] \right)$, ми бачимо, що вектори \vec{E} і \vec{B} пов'язані між собою співвідношенням

$$\vec{E} = c \left[\vec{B} \vec{n} \right]. \tag{4.58}$$

За формулами (4.56) і (4.57) визначають вектори поля електромагнітного випромінювання, зумовленого змінним електричним дипольним моментом випромінювача, яке називають **електродипольним**.

Напруженості електричного і магнітного полів залежать від координат і часу за законом:

$$\left| \vec{B} \right| = \left| \vec{E} \right| = \frac{1}{r} f \left(t - \frac{r}{c} \right).$$

Остання формула є вираженням сферичної хвилі (див. (3.67)). Амплітуда хвилі далеко від випромінювача зменшується за законом $\sim 1/r$. При цьому вектори електричного і магнітного полів рівні між собою за абсолютною величиною, а по напрямку перпендикулярні один до одного і до радіус-вектора r .

Область далеко від випромінювача, в якій електромагнітне поле описується сферичними хвилями, носить назву **хвильової зони**.

Припустимо, що випромінювач знаходиться у початку координат, а його змінний електродипольний момент зорієнтований вздовж осі z сферичної системи координат, а точка спостереження P має координати r, θ, φ (див. рис. 4.1). Тоді з (4.56) випливає, що напрям вектора \vec{B} визначається вектором $\left[\ddot{d} \vec{n} \right]$. Таким чином, вектор \vec{B} має бути перпендикулярним до площини в якій лежать вектори \vec{d} і \vec{n} , тобто дотичним до «паралелі», на якій знаходиться точка P .

Напрям вектора \vec{E} визначають за співвідношенням (4.57): він має бути дотичним до «меридіана» точки P .

Модулі векторів \vec{E} і \vec{B} визначають за формулами

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi c r} \ddot{d}(\tau_0) \sin \theta, \tag{4.59}$$

$$E = \frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{d}(\tau_0) \sin \theta. \tag{4.60}$$

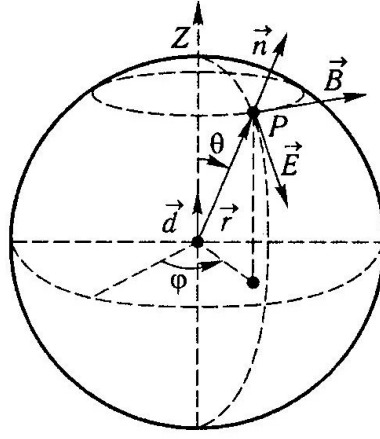


Рис. 4.1

Обчислимо вектор Пойтінга (3.90) випромінюючої системи:

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= [\vec{E} \vec{H}] = \frac{1}{\mu_0} [\vec{E} \vec{B}] = \frac{c}{\mu_0} [[\vec{B} \vec{n}] \vec{B}] = \frac{c}{\mu_0} [\vec{B} [\vec{n} \vec{B}]] = \\ &= \frac{c}{\mu_0} \left[\underbrace{\vec{n} (\vec{B} \vec{B})}_{B^2} - \underbrace{\vec{B} (\vec{B} \vec{n})}_0 \right] = \frac{c}{\mu_0} B^2 \vec{n} = \frac{\mu_0}{16 \pi^2 c r^2} [\ddot{d} \vec{n}]^2 \vec{n}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Вектор Пойтінга виявляється напрямленим вздовж радіус-вектора і за абсолютною величиною рівний

$$\Pi = \frac{\mu_0}{16 \pi^2 c r^2} (\ddot{d} n \sin \theta)^2 = \frac{\mu_0}{16 \pi^2 c} \frac{\ddot{d}^2(\tau_0)}{r^2} \sin^2 \theta. \quad (4.62)$$

З (4.62) випливає, що інтенсивність електродипольного випромінювання максимальна при $\theta = \frac{\pi}{2}$ (в екваторіальній площині), а вздовж і проти напрямку дипольного моменту ($\theta = 0, \pi$) випромінювання відсутнє.

Потік енергії через векторну площадку $d\vec{S}$, що стягує тілесний кут $d\Omega$, називається інтенсивність випромінювання в тілесному кутові $d\Omega$. Для інтенсивності випромінювання dI можна записати

$$\begin{aligned} dI &= \vec{\Pi} d\vec{S} = \Pi dS = \Pi r^2 d\Omega = \frac{\mu_0}{16 \pi^2 c} \frac{\ddot{d}^2 \sin^2 \theta}{r^2} r^2 d\Omega = \\ &= \frac{\mu_0 \ddot{d}^2}{16 \pi^2 c} \sin^3 \theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Повний потік енергії, що випромінюється системою або повна інтенсивність

випромінювання, рівні⁸

$$I = \int \vec{\Pi} d\vec{S} = \frac{\mu_0 \ddot{d}^2}{16 \pi^2 c} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0}{6 \pi c} \ddot{d}^2. \quad (4.64)$$

Інтенсивність випромінювання в дипольному наближенні визначається тільки значенням $\ddot{d}(t - \frac{r}{c})$. Іншими словами, в момент часу t значення I в даній точці залежить від величини \ddot{d} в попередній момент часу $t - \frac{r}{c}$. Крім того, інтенсивність випромінювання не залежить від відстані до випромінюючої системи, як це і слід було очікувати на підставі закону збереження енергії: потік енергії, що проходить за одиницю часу через будь-яку замкнуту поверхню, що оточує випромінюючу систему, має одне і те ж значення.

Важливим є випадок, коли електродипольний момент змінюється з часом за гармонічним законом, тобто $d = d_0 \cos \omega t$. Тоді співвідношення (4.64) набуває вигляду

$$I(t) = \frac{\mu_0 d_0^2 \omega^4}{6 \pi c} \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right), \quad (4.65)$$

а середнє значення повної інтенсивності електродипольного випромінювання дорівнює ($\langle \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \rangle = \frac{1}{2}$)

$$\langle I(t) \rangle = \frac{\mu_0 d_0^2 \omega^4}{12 \pi c}. \quad (4.66)$$

Якщо джерелом електромагнітного випромінювання є одна рухома частинка з електричним зарядом e , її електродипольний момент дорівнює $\vec{d} = e\vec{r}$. Тоді на підставі співвідношення (4.64) отримаємо

$$I(t) = \frac{\mu_0 e^2}{6 \pi c} (\ddot{\vec{r}})^2, \quad (4.67)$$

тобто заряджена частинка випромінює енергію, якщо вона рухається прискорено. Зауважимо, що такий висновок стосується частинок, рух яких можна описувати за допомогою законів класичної механіки, і незастосовний до частинок, поведінку яких описують за законами квантової механіки.

8

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = - \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = \frac{4}{3}; \quad \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

5 РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ У РЕЧОВИНІ

5.1 Граничні умови для векторів електромагнітного поля

Розглянутий у підрозділі 4.2 найпростіший тип електромагнітних хвиль – плоскі хвилі – є досить ідеалізованим, оскільки в даному випадку передбачається нескінченна протяжність хвильових фронтів. У будь-якій задачі електромагнітне поле тим чи іншим способом обмежене в просторі. Природними межами можуть бути, наприклад, металеві стінки або межі поділу між середовищами з різними параметрами. Якщо параметри середовищ на межі розділу змінюються стрибкоподібно, то в загальному випадку компоненти векторів електромагнітного поля також зазнають разривів в точках межі. Тому в цих точках рівняння Максвелла, записані у диференціальній формі, не застосовні. У даній темі будуть знайдені зв'язки між векторами електромагнітного поля при переході через межу поділу. Для цього будемо використовувати інтегральну форму рівнянь Максвелла.

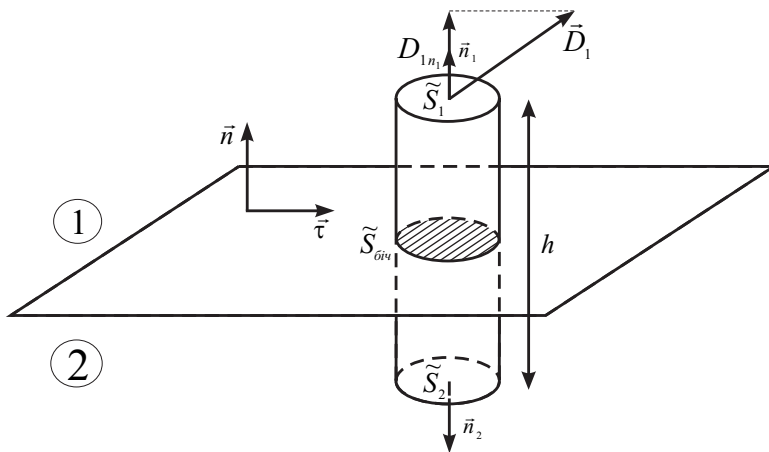


Рис. 5.1

Нехай два середовища 1 та 2 з різними електричними та магнітними властивостями розділено межею поділу. Для спрощення розв'язання поставленої задачі вектори електромагнітного поля прийнято розкласти на тангенціальні (дотичні) і нормальні складові. Так, вектор \vec{E} (див. рис. 5.1) може бути представлений у вигляді

$$\vec{E} = E_n \vec{n} + E_\tau \vec{\tau},$$

де \vec{n} і $\vec{\tau}$ – одиничні вектори нормального і тангенціального напрямку до межі поділу двох середовищ.

Далі будемо окремо розглядати поведінку нормальних і тангенціальних складових векторів поля на межі поділу.

5.1.1 Граничні умови для нормальних складових електричного поля

Позначимо через \vec{D}_1 і \vec{D}_2 ($\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$) вектори індукції електричного поля в середовищах 1 і 2 відповідно (див. рис. 5.1). Виділимо циліндричний об'єм

з основами \tilde{S}_1 і \tilde{S}_2 та висотою твірної h , достатньо малий для того, щоб вважати \vec{D}_1 і \vec{D}_2 постійними в межах площ \tilde{S}_1 і \tilde{S}_2 (тому наші міркування справедливі для випадку змінного електричного поля). Тоді відповідно до (3.30), потік вектора індукції електричного поля через сумарну поверхню циліндра ($\tilde{S} = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \tilde{S}_6$, де \tilde{S}_6 – бічна поверхня циліндра) запишеться наступним чином:

$$\oint_{\tilde{S}} \vec{D} d\vec{S} = \int_{\tilde{S}_1} \vec{D} d\vec{S} + \int_{\tilde{S}_2} \vec{D} d\vec{S} + \int_{\tilde{S}_6} \vec{D} d\vec{S} = q, \quad (5.1)$$

де q – електричний заряд, зосереджений в середині виділеного циліндра. Обчислюємо кожен доданок окремо

$$\int_{\tilde{S}_1} \vec{D} d\vec{S} = \int_{\tilde{S}_1} \vec{D}_1 d\vec{S} = \int_{\tilde{S}_1} D_1 dS \cos(\vec{D}_1, \vec{n}_1) = \int_{\tilde{S}_1} D_{1n_1} dS = D_{1n_1} \int_{\tilde{S}_1} dS = D_{1n_1} S_1, \quad (5.2)$$

де S_1 – площа основи \tilde{S}_1 .

Аналогічно одержуємо

$$\int_{\tilde{S}_2} \vec{D} d\vec{S} = \int_{\tilde{S}_2} \vec{D}_2 d\vec{S} = D_{2n_2} S_2, \quad (5.3)$$

$$\int_{\tilde{S}_6} \vec{D} d\vec{S} = \overline{D}_\tau S_6 = \overline{D}_\tau 2\pi r h, \quad (5.4)$$

де \overline{D}_τ – деяке усереднене значення тангенціальної складової вектора індукції електричного поля.

З врахуванням (5.2) – (5.4) співвідношення (5.1) набуває вигляду:

$$D_{1n_1} S_1 + D_{2n_2} S_2 + \overline{D}_\tau 2\pi r h = q,$$

оскільки, $S_1 = S_2 = S$, то одержимо

$$D_{1n_1} + D_{2n_2} = \frac{q}{S} - \overline{D}_\tau \frac{2\pi r}{S} h. \quad (5.5)$$

Якщо спрямувати до нуля висоту циліндра h , нескінченно малим стане потік вектора індукції через бічну поверхню циліндра

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\tilde{S}_6} \vec{D} d\vec{S} = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{D}_\tau \frac{2\pi r}{S} h = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(h)}{S} = \sigma,$$

де σ – поверхнева густина зарядів на межі поділу. Крім того, перейшовши до проєкцій на нормаль \vec{n} , з (5.5) остаточно одержимо:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma, \quad (5.6)$$

або

$$E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (5.7)$$

Таким чином, нормальні складові електричного поля при переході через заряджену поверхню поділу змінюються стрибкоподібно на величину σ (σ/ε_0).

Фізично це обумовлено тим, що заряд, розташований на поверхні поділу, створює власне поле, орієнтоване таким чином, що з одного боку від межі це поле додається з зовнішнім полем, а з іншого віднімається. Якщо поверхня поділу не заряджена $\sigma = 0$, то стрибка векторів електричного поля не має

$$D_{1n} = D_{2n}.$$

5.1.2 Граничні умови для тангенціальних складових електричного поля

Задача про поведінку на межі поділу тангенціальних складових електричного поля розв'язується на основі інтегрального формулювання закону електромагнітної індукції (3.29) для деякого малого контуру.

Введемо три взаємно ортогональні одиничні вектори \vec{n} , $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ (рис. 5.2). Два з них, і на далі, є одиничними векторами нормального і тангенціального напрямів, а вектор $\vec{\nu}$ утворює нормаль до площини, створеної першими двома векторами і лежить в площині межі поділу.

Виділимо достатньо малий прямокутний контур L висотою h шириною l , що лежить в площині, утвореній векторами \vec{n} і $\vec{\tau}$. На контурі задано такий напрям обходу, який з кінця вектора $\vec{\nu}$ відповідає руху проти годинникової стрілки.

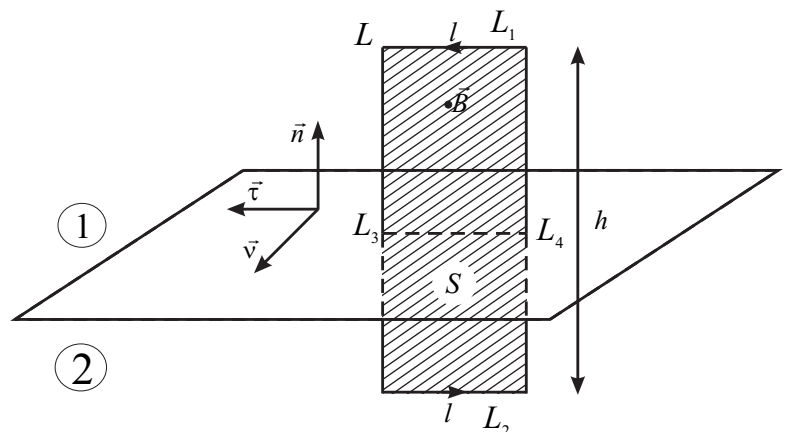


Рис. 5.2

Застосуємо до даного контуру закон електромагнітної індукції, причому будемо вважати, що розміри сторін контуру достатньо малі для того, щоб в їх межах вектори поля \vec{E}_1 і \vec{E}_2 вважати постійними. В результаті одержимо

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{E} d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{E} d\vec{l} + \int_{L_3} \vec{E} d\vec{l} + \int_{L_4} \vec{E} d\vec{l} = - \oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, \quad (5.8)$$

зокрема,

$$\begin{aligned} \int_{L_1} \vec{E} d\vec{l} &= \int_{L_1} E_1 dl \cos(\vec{E}_1, \vec{\tau}) = E_{1\tau} \int_{L_1} dl = E_{1\tau} l, \\ \int_{L_2} \vec{E} d\vec{l} &= \int_{L_2} E_2 dl \cos(\vec{E}_2, \vec{\tau}) = -E_{2\tau} l, \\ \int_{L_3} \vec{E} d\vec{l} &= -\overline{E}_n'' h, \\ \int_{L_4} \vec{E} d\vec{l} &= \overline{E}_n' h, \end{aligned}$$

де останні два інтеграли містять нормальні складові вектора \vec{E} і визначають його циркуляцію вздовж бічних сторін контуру L_3 і L_4 . Тоді

$$(E_{1\tau} - E_{2\tau})l + (\overline{E}_n' - \overline{E}_n'')h = - \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_\nu l h. \quad (5.9)$$

Потік вектора $\partial \vec{B} / \partial t$ через заштриховану площу контуру, при $h \rightarrow 0$ прямує до нуля. Тому перейшовши в (5.9) до границі $h \rightarrow 0$, одержимо

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (5.10)$$

Отже, під час переходу через межу поділу тангенціальні складові електричного поля не змінюються.

У випадку електростатичного поля граничні умови (5.7) та (5.10) можна переписати в термінах скалярного потенціалу. Врахувавши, що $\vec{n} \vec{E} = n E \cos(\vec{n} \vec{E}) = E_n$ та $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ будемо мати

$$\begin{aligned} E_n &= -\vec{n} \text{grad } \varphi = - \left(n_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + n_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + n_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \\ &= - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma \right) = - \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \end{aligned}$$

де $\cos \alpha = n_x/n = n_x$, $\cos \beta = n_y$, $\cos \gamma = n_z$ – напрямні косинуси одиничного вектора \vec{n} , а $\partial\varphi/\partial n$ – похідна скалярного потенціалу за напрямом \vec{n} . Тоді одержимо

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad (5.11)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)_1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)_2 \quad (5.12)$$

5.1.3 Граничні умови для нормальних складових магнітного поля

Методика виведення граничних умов і відповідна ілюстрація залишаються тут повністю аналогічними тим, що були використані в підрозділі 5.1.1. Тоді відповідно до (3.32) потік вектора магнітної індукції запишеться наступним чином:

$$(B_{1n} - B_{2n})S + \overline{B}_\tau 2\pi r h = 0, \quad (5.13)$$

звідки при переході до границі $h \rightarrow 0$ випливає

$$B_{1n} - B_{2n} = 0 \quad \text{або} \quad B_{1n} = B_{2n}. \quad (5.14)$$

Таким чином, нормальні складові вектора магнітної індукції на межі поділу двох середовищ неперервні.

5.1.4 Граничні умови для тангенціальних складових магнітного поля

Методика розв'язання даної задачі повністю співпадає з тією, яка була застосована в пункті 5.1.2. Відмінність полягає лише в тому, що замість закону електромагнітної індукції скористаємося законом повного струму (3.31). Відповідно до цього закону для контуру, зображеного на рис. 5.2, будемо мати

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = (H_{1\tau} - H_{2\tau})l + (\overline{H}'_n - \overline{H}''_n)h = I + \left(\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}\right)_\nu l h, \quad (5.15)$$

де I – повний струм провідності. Потік вектора $\partial\overline{D}/\partial t$ при $h \rightarrow 0$ прямує до нуля, тому виконавши граничний перехід $h \rightarrow 0$, одержимо

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = \frac{I}{l} = I_\nu. \quad (5.16)$$

При $h \rightarrow 0$ струм I вже є поверхневим струмом. Тоді величина I_ν має зміст густини поверхневого струму вздовж вектора $\vec{\nu}$ (див. рис. 5.2).

5.2 Рівняння Максвелл-Лоренца

Макроскопічне електромагнітне поле у вакуумі описується рівняннями Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (5.17)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (5.18)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (5.19)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (5.20)$$

доповненими граничними умовами (5.7) – (5.16).

Вектори поля \vec{E} і \vec{B} у рівняннях (5.17) – (5.20) мають макроскопічний характер: діючи на електричні заряди, мають однакове значення у межах нескінченно малого об'єму (який містить велику кількість частинок) і змінюються лише при зміні координат на макроскопічні величини, які набагато перевищують розміри атома.

Перейдемо до розгляду електромагнітного поля у матеріальному середовищі, яке складається із заряджених частинок – атомних ядер, електронів, іонів тощо. Джерелами поля вважатимемо деякі «зовнішні» заряди і струми, але точка спостереження буде знаходитися серед атомів речовини. Тоді значення векторів поля мають істотно залежати від положення точки спостереження у мікроскопічному масштабі – поблизу атомного ядра, у міжатомному просторі – та від моменту часу у зв'язку з рухом ядер і електронів.

Отже, миттєві значення векторів \vec{E} і \vec{B} дуже швидко змінюються при зміні точки спостереження і моменту часу. Надалі всі ці точні миттєві значення поля називатимемо мікроскопічним полем і позначатимемо їх як $\vec{E}_{\text{мікро}}$ і $\vec{B}_{\text{мікро}}$.

Поле всередині заряджених частинок – атомних ядер, нуклонів, електронів не розглядатимемо (ці питання належать до компетенції квантової теорії поля), тому вважатимемо, що точка спостереження знаходиться поза частинками, тобто у вакуумі. Тоді логічно припустити, що рівняння (5.17) – (5.20) в яких фігурують $\vec{E}_{\text{мікро}}$, $\vec{B}_{\text{мікро}}$, $\vec{j}_{\text{мікро}}$ та $\rho_{\text{мікро}}$ застосовні до опису мікрополя і називаються **рівняннями Максвелла – Лоренца**. Вони були застосовані для опису мікрополя у речовині Лоренцом при побудованій ним електронної теорії.

В той же час безпосередньо вимірюваними полями є поля, що діють не на окрему частинку, а на макроскопічний заряд або струм, тобто **макроскопічні поля**, які позначають як $\vec{E}_{\text{макро}} = \vec{E}$ і $\vec{B}_{\text{макро}} = \vec{B}$. Крім того, саме макрополя \vec{E} і \vec{B} зазвичай використовують у прикладних аспектах фізики. З урахуванням викладених міркувань неважко зрозуміти, що вектори $\vec{E}(\vec{r}, t)$ і $\vec{B}(\vec{r}, t)$ мають зміст середніх значень мікрополів $\langle \vec{E}_{\text{мікро}} \rangle$ і $\langle \vec{B}_{\text{мікро}} \rangle$.

Отже, система рівнянь (5.17) – (5.20) для макрополя в речовині набуває вигляду

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (5.21)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\langle \rho_{\text{мікро}} \rangle}{\varepsilon_0}, \quad (5.22)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \langle \vec{j}_{\text{мікро}} \rangle + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (5.23)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (5.24)$$

Подальше завдання полягає в обчисленні $\langle \rho_{\text{мікро}} \rangle$ та $\langle \vec{j}_{\text{мікро}} \rangle$.

5.3 Вектори поляризації та електричної індукції

При обчисленні $\langle \rho_{\text{мікро}} \rangle$ враховуватимемо поділ електричних зарядів у речовині на вільні та зв'язані. До **вільних** належать заряди, які можуть зміщуватися на макроскопічні відстані – вільні електрони у металах, іони в електролітах і газах, а також заряди, нанесені на діелектрик, які порушують його електронейтральність.

Зв'язаними називають електричні заряди в атомах і молекулах діелектрика, які під дією електричного поля можуть зміщуватися лише на мікроскопічні відстані (відносно положення рівноваги), залишаючись у «своїх» атомах і молекулах та зумовлюючи поляризацію діелектрика. Отже, можна записати

$$\langle \rho_{\text{мікро}} \rangle = \langle \rho_{\text{вільн}} \rangle + \langle \rho_{\text{зв}} \rangle. \quad (5.25)$$

Надалі для вільних зарядів використовуватимемо позначення

$$\langle \rho_{\text{вільн}} \rangle = \rho. \quad (5.26)$$

Якщо діелектрик електронейтральний, а зовнішнє електричне поле відсутнє, тоді зазвичай $\langle \rho_{\text{зв}} \rangle = 0$, але під дією зовнішнього поля відбувається зміщення зарядів і середня густина зв'язаних зарядів може стати відмінною від нуля.

Розглянемо в діелектрику, що знаходиться в електричному полі, деякий об'єм V , обмежений поверхнею S (див. рис. 5.3). Припустимо, що діелектрик складається із заряджених частинок кількох типів (електронів, ядер, іонів, тощо) із зарядами e_i і числом в одиниці об'єму n_i . Позначимо зміщення заряду i -го типу заряду під дією поля як $d\vec{r}_i$. Тоді через елемент поверхні dS об'єм V полишить електричний заряд, рівний

$$dq = \sum_i e_i n_i d\vec{r}_i d\vec{S},$$

внаслідок чого об'єм V набуває зв'язаного заряду

$$dq_{зв} = -dq = - \sum_i e_i n_i d\vec{r}_i d\vec{S} = -\vec{P} d\vec{S}, \quad (5.27)$$

де

$$\vec{P} = \sum_i e_i n_i d\vec{r}_i \quad (5.28)$$

електричний дипольний момент одиниці об'єму діелектрика, який називають **вектором поляризації**.

Крім зарядів, які під дією поля залишають об'єм V , слід ураховувати також заряди, що внаслідок зміщення потрапляють у цей об'єм. Тоді результуючий зв'язаний заряд, якого набуває об'єм, обмежений замкненою поверхнею S , визначимо як

$$q_{зв} = - \oint_S \vec{P} d\vec{S} = - \int_V \operatorname{div} \vec{P} dV, \quad (5.29)$$

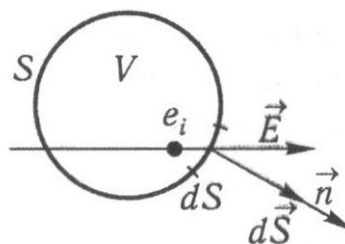


Рис. 5.3

після чого, записавши зв'язаний заряд у вигляді

$$q_{зв} = \int_V \langle \rho_{зв} \rangle dV, \quad (5.30)$$

отримаємо співвідношення

$$\langle \rho_{зв} \rangle = -\operatorname{div} \vec{P}. \quad (5.31)$$

На підставі (5.22) і (5.31) рівняння (5.25) набуває вигляду

$$\operatorname{div} (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho. \quad (5.32)$$

Вектор

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (5.33)$$

називають вектором **електричної індукції**. Тоді замість (5.22) можна записати рівняння

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (5.34)$$

5.4 Вектори намагнічення і напруженості магнітного поля

Обчислюючи $\langle \vec{j}_{мікро} \rangle$, слід мати на увазі, що мікроскопічні струми $\vec{j}_{мікро}$ можуть бути спричинені рухом вільних зарядів, зміщенням зв'язаних зарядів та замкненими струмами в атомах і молекулах, які створюються рухом електронів в них.

Напрявлений рух вільних зарядів є **струмом провідності**, густину якого позначимо $\vec{j}_{пр}$.

Зміщення зв'язаних зарядів пов'язане з поляризацією середовища, тому зумовлений нею мікрострум називають **поляризаційним (струмом поляризації)**. Густина струму поляризації записують у вигляді

$$\langle \vec{j}_{пол} \rangle = \sum_i e_i n_i \vec{v}_i = \frac{\partial}{\partial t} \sum_i e_i n_i d\vec{r}_i, \quad (5.35)$$

а з урахуванням (5.28) – як

$$\langle \vec{j}_{пол} \rangle = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (5.36)$$

Замкнені струми всередині атомів (молекул) зумовлюють намагнічування середовища, тому їх називають **струмами намагнічення**. Щоб знайти густину струмів намагнічення, вважатимемо, що замкнені струми в атомах (молекулах) лінійні з силою струму I_0 та площею контуру ΔS_0 (рис. 5.4 а).

Виділимо в середовищі макроскопічну ділянку ΔS , обмежену контуром L (рис. 5.4 б), і знайдемо силу струму, що проходить крізь неї, зумовленого внутрішньоатомними струмами. З рис. 5.4 б випливає, що ці струми дають внесок у шуканий струм лише за умови, якщо контур струму перетинає ділянку ΔS один раз, тобто, якщо контур L перетинає ділянки контурів ΔS_0 струмів у атомах.

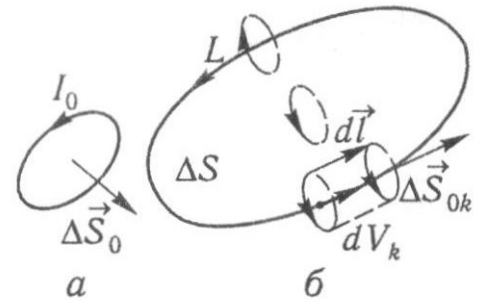


Рис. 5.4

На контурі L виділимо елемент $d\vec{l}$ і розглянемо нескінченно малий об'єм $dV_k = d\vec{l} \Delta \vec{S}_{0k}$ циліндра, утвореного твірною $d\vec{l}$ і основами, якими є дві однаково орієнтовані площі контурів струмів ΔS_{0k} . Враховуючи різні орієнтації контурів струмів на елементі $d\vec{l}$, результуючий струм, що проходить крізь ділянку ΔS на елементі її контуру $d\vec{l}$ можна записати у вигляді

$$dI_{маг} = \sum_k I_{0k} n_k dV_k = \sum_k I_{0k} n_k d\vec{l} \Delta \vec{S}_{0k}. \quad (5.37)$$

Вектор

$$\vec{p}_{mk} = I_{0k} \Delta \vec{S}_{0k} \quad (5.38)$$

є магнітним моментом замкненого струму I_{0k} з векторною ділянкою контуру $\Delta \vec{S}_{0k}$, а вектор

$$\vec{P}_m = \sum_k \vec{p}_{mk} n_k \quad (5.39)$$

називають **вектором намагнічення**, або **намагнічуваністю**. Чисельно він дорівнює магнітному моменту одиниці об'єму середовища. З урахуванням (5.39) співвідношення (5.37) запишемо як

$$dI_{маг} = \vec{P}_m d\vec{l}. \quad (5.40)$$

У неферромагнітному середовищі за відсутності зовнішнього магнітного поля магнітні моменти \vec{p}_{mk} у сумі (5.39) орієнтовані хаотично, внаслідок чого вектор намагнічення \vec{P}_m дорівнює нулю. У ферромагнетиках вектор \vec{P}_m може бути відмінним від нуля і за відсутності зовнішнього магнітного поля, але ферромагнетизм є квантовим ефектом. Тому його тут не розглядатимемо.

На підставі (5.40) повний струм намагнічення запишемо як

$$I_{маг} = \oint_L \vec{P}_m d\vec{l} = \int_{\Delta S} \text{rot } \vec{P}_m d\vec{S}, \quad (5.41)$$

тому, враховуючи, що

$$I_{маг} = \int_{\Delta S} \langle \vec{j}_{маг} \rangle d\vec{S}, \quad (5.42)$$

отримаємо середню густину струму намагнічення у вигляді

$$\langle \vec{j}_{маг} \rangle = \text{rot } \vec{P}_m. \quad (5.43)$$

Підсумовуючи усереднення мікрострумів, можна записати

$$\langle \vec{j}_{мікро} \rangle = \langle \vec{j}_{пр} \rangle + \langle \vec{j}_{пол} \rangle + \langle \vec{j}_{маг} \rangle = \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \text{rot } \vec{P}_m. \quad (5.44)$$

Підставивши (5.44) у (5.23), одержимо рівняння

$$\text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{P}_m \right) = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}). \quad (5.45)$$

Вектор

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{P}_m \quad (5.46)$$

називають **вектором напруженості магнітного поля**. Тоді з урахуванням (5.46) та (5.33) рівняння (5.45) запишемо у вигляді

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (5.47)$$

Рівняння (5.47) є наслідком усереднення рівняння (5.23).

5.5 Рівняння Максвелла для електромагнітного поля в речовині

Після усереднення $\langle \vec{\rho}_{\text{мікро}} \rangle$ та $\langle \vec{j}_{\text{мікро}} \rangle$ диференціальні рівняння електромагнітного поля у речовині набувають вигляду (одразу запишемо їх і у інтегральній формі)

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}; \quad (5.48)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV. \quad (5.49)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}; \quad (5.50)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (5.51)$$

Ці рівняння є рівняннями класичної макроскопічної електродинаміки електромагнітного поля у середовищі. На відміну від рівнянь Максвелла (3.29) – (3.32) вони застосовні як до макроскопічного поля у вакуумі (тоді $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$), так і до поля у речовині.

У рівняннях (5.48) – (5.51) використовують два «магнітні» вектори \vec{H} і \vec{B} , зв'язок між якими визначають із співвідношення (5.46), та два «електричні» вектори \vec{E} і \vec{D} із взаємозв'язком (5.33). Проте, силовою характеристикою електричного поля, яка визначає його дію на електричний заряд, є напруженість \vec{E} , а силовою характеристикою магнітного поля, що визначає його дію на електричний струм, є магнітна індукція \vec{B} .

У вакуумі різниця між векторами \vec{E} і \vec{D} та між векторами \vec{H} і \vec{B} фактично відсутня. Однак у матеріальному середовищі $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{P}_m$. Тому для повноти системи рівнянь Максвелла (5.48) – (5.51) потрібно знати залежності $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$ і $\vec{P}_m = \vec{P}_m(\vec{B})$. У макроскопічній електродинаміці ці залежності визначають на основі експериментальних даних; теоретично їх обґрунтовують за допомогою методів електронної теорії і квантової механіки.

З дослідних даних випливає, що у випадку слабких електричних полів в ізотропному середовищі вектор поляризації \vec{P} пропорційний напруженості поля \vec{E} . Цю залежність записують у вигляді

$$\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}, \quad (5.52)$$

де коефіцієнт κ називають діелектричною сприйнятливістю середови-

ща. Тоді залежність (5.33) набуває вигляду

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0(1 + \kappa) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \quad (5.53)$$

Величину

$$\varepsilon = 1 + \kappa \quad (5.54)$$

називають **діелектричною проникністю** середовища.

Замість залежності $\vec{P}_m(\vec{B})$ у більшості випадків використовують залежність $\vec{P}_m(\vec{H})$, тоді у випадку слабкого магнітного поля в ізотропному неферромагнітному середовищі

$$\vec{P}_m = \kappa_m \vec{H}, \quad (5.55)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{P}_m = \mu_0(1 + \kappa_m) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (5.56)$$

Коефіцієнт κ_m називають **магнітною сприйнятливістю**, а величину $\mu = 1 + \kappa_m$ – **магнітною проникністю** середовища.

Співвідношення

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (5.57)$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}; \quad (5.58)$$

і

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E}, \quad (5.59)$$

$$\vec{P}_m = \kappa_m \vec{H}, \quad (5.60)$$

називають **матеріальними рівняннями**. Вони доповнюють рівняння Максвелла (5.48) – (5.51).

5.6 Граничні умови для векторів електромагнітного поля в речовині

Крім матеріальних рівнянь (5.57) – (5.60) система диференціальних рівнянь Максвелла (5.48) – (5.51) має доповнюватися ще граничними умовами для векторів \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} і \vec{H} у місцях їх розривів, де рівняння у диференціальній формі незастосовні через стрибкоподібну зміну цих векторів (стійкість розв'язків диференціальних рівнянь передбачає, що нескінченно малим змінам координат і часу, мають відповідати нескінченно малі зміни векторів поля).

Водночас рівняння Максвелла в інтегральній формі, які є узагальненням дослідних фактів, застосовні в усіх випадках. Тому їх використовують під час встановлення граничних умов для векторів \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} і \vec{H} .

У підрозділі 5.1 зазначалося, що розриви векторів електромагнітного поля існують за наявності поверхневих зарядів і струмів. У речовині такі заряди і струми можуть виникати на межі поділу двох середовищ з різними електродинамічними параметрами (ε_1, μ_1 та ε_2, μ_2). Під час переходу крізь таку межу вектори поля можуть змінюватися стрибкоподібно. У зазначених параграфах розглядали також спосіб установлення граничних умов за допомогою рівнянь Максвелла в інтегральній формі. Застосуємо його без детальних розрахунків до електромагнітного поля у речовині.

Використовуючи інтегральну форму рівняння Максвелла (5.49) і міркування, приведені у підрозділі 5.1.1, неважко переконатися, що для нормальних компонентів вектора електричної індукції \vec{D} під час переходу крізь заряджену поверхню поділу двох середовищ гранична умова має вигляд

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma \quad (5.61)$$

де $D_n = \vec{D} \vec{n}$ – проекція вектора \vec{D} на нормаль \vec{n} до межі поділу середовищ, спрямована від другого середовища до першого (див. рис. 5.1); σ – поверхнева густина вільних зарядів на межі поділу.

У речовині $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ тому умову (5.61) можна записати як

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad (5.62)$$

де $\varepsilon_{1,2}$ – діелектрична проникність відповідно першого та другого середовища. З (5.62) випливає, що при $\sigma = 0$ і $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ неможливо, щоб $E_{1n} = E_{2n}$.

Гранична умова для тангенційної складової вектора \vec{E} випливає з рівняння Максвелла (5.48). На підставі поданих у підрозділі 5.1.2 міркувань і враховуючи, що у разі спрямування на рис. 5.2 висоти контуру L до нуля потік вектора магнітної індукції \vec{B} крізь його площу також прямує до нуля. Тоді отримаємо умову

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \quad \text{або} \quad \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}. \quad (5.63)$$

Таким чином, тангенціальні складові вектора напруженості електричного поля на межі поділу середовищ є неперервними, однак аналогічні складові вектора індукції електричного поля зазнають розриву.

Діючи аналогічно, як і в підрозділі 5.1.3, на підставі рівняння (5.51) та враховуючи відсутність магнітних зарядів, для нормальної складової \vec{B} одержимо

$$B_{1n} = B_{2n} \quad \text{або} \quad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}. \quad (5.64)$$

Для встановлення граничної умови для тангенційних складових вектора \vec{H} використаємо рівняння Максвелла (5.50) і застосуємо міркування, наведені у підрозділі 5.1.4. При спрямуванні висоти контуру L до нуля потік

вектора \vec{D} крізь його площу також прямує до нуля, тому

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = I_\nu, \quad (5.65)$$

де I_ν – проекція густини поверхневого струму на нормаль контуру.

5.7 Закон збереження енергії для електромагнітного поля у речовині

Розглянемо питання про енергію електромагнітного поля у матеріальному середовищі, вважаючи його ізотропним, неферромагнітним, непоглинаючим і нерухомим, до складу якого входять провідники і діелектрики.

Аналогічно як в підрозділі 3.6, стартуючи з виразу для сили Лоренца, запишемо роботу сил електромагнітного поля над зарядами в об'ємі V , що виконується за одиницю часу

$$\frac{dA}{dt} = \int_V \vec{j} \vec{E} dV. \quad (5.66)$$

Із рівняння Максвелла (5.50) знаходимо \vec{j} і підставляємо в (5.66)

$$\frac{dA}{dt} = \int_V \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} dV - \int_V \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dV. \quad (5.67)$$

Додамо до правої частини вираз

$$- \int_V \vec{H} \left(\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV,$$

який в силу рівняння Максвелла (5.48) рівний нулю. Тоді

$$\frac{dA}{dt} = \int_V (\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E}) dV - \int_V \left(\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV \quad (5.68)$$

Врахувавши зв'язок між векторами \vec{E} і \vec{D} та \vec{B} і \vec{H} за допомогою (5.57) і (5.58), можна записати такі співвідношення:

$$\vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t}; \quad (5.69)$$

$$w = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2 + \mu \mu_0 H^2}{2} = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B}; \quad (5.70)$$

$$\int_V (\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E}) dV = - \int_V \operatorname{div}[\vec{E} \vec{H}] dV = - \oint_S [\vec{E} \vec{H}] d\vec{S} = - \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S}. \quad (5.71)$$

Тоді (5.68) набуває вигляду

$$\frac{dA}{dt} = - \oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} \int_V w dV. \quad (5.72)$$

Якщо об'єм інтегрування V необмежено зростає і поверхня S охоплює весь простір в якому є електромагнітне поле, то в точках цієї поверхні поле має бути відсутнім і перший інтеграл у правій частині співвідношення (5.72) дорівнюватиме нулю, отже,

$$\frac{dA}{dt} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V w dV = - \frac{\partial W}{\partial t}. \quad (5.73)$$

Це означає, що робота системи виконується внаслідок зменшення величини

$$W = \int_V \left(\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2}{2} \right) dV, \quad (5.74)$$

яку слід вважати **енергією електромагнітного поля у речовині**, а величину (5.70) – **густиною енергії електромагнітного поля у речовині**.

Якщо поверхня S не охоплює всього поля, але система не містить провідників ($\vec{j} = 0$), то згідно (5.66) робота поля рівна нулю. Тоді з (5.72) випливає, що

$$\oint_S \vec{\Pi} d\vec{S} = - \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (5.75)$$

тобто зменшення енергії поля W відбувається внаслідок втрати енергії поля крізь поверхню S . Тому вектор

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}\vec{H}] \quad (5.76)$$

має зміст вектора Пойнтінга.

Імпульс електромагнітного поля у речовині визначається не однозначно, тому його не розглядатимемо.

5.8 Потенціали електромагнітного поля в речовині

У речовині електромагнітні потенціали визначають так само, як і у вакуумі, тобто на основі рівнянь Максвелла (5.48) – (5.51), які у випадку слаб-

кого електромагнітного поля ($\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$) набувають вигляду

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (5.77)$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}; \quad (5.78)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu\mu_0\vec{j} + \varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (5.79)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (5.80)$$

Ці рівняння відрізняються від рівнянь Максвелла для електромагнітного поля у вакуумі (5.17) – (5.20) замінами

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &\rightarrow \varepsilon\varepsilon_0, & \mu_0 &\rightarrow \mu\mu_0; \\ c &= 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \rightarrow 1/\sqrt{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Скалярний φ і векторний \vec{A} потенціали визначають за формулами (3.33) і (3.36). На підставі рівнянь (3.42), (3.43) і (5.81) рівняння Д'Аламбера для електромагнітних потенціалів у речовині набувають вигляду

$$\Delta \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0\vec{j}, \quad (5.82)$$

$$\Delta \varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (5.83)$$

Розв'язки рівнянь Д'Аламбера у вакуумі визначаються формулами (3.76) і (3.77). Тому по аналогії розв'язки рівнянь Д'Аламбера (5.82) і (5.83) запишемо так

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\right) dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad (5.84)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\right) dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \quad (5.85)$$

Крім того, електромагнітне поле в речовині, як і поле у вакуумі, інваріантне відносно калібрувального перетворення потенціалів (3.37) та (3.38).

Із (5.81), (5.82) – (5.85) випливає, що в речовині електромагнітне поле поширюється зі швидкістю

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (5.86)$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Венгер Є.Ф., Грибань В.М., Мельничук О.В. Основи теоретичної фізики. - К.: Вища школа, 2011. - 430 с.
2. Джежеря Ю.І., Климук О.С., Решетняк С.О. Теоретична фізика. Електродинаміка. Теорія поля з розв'язанням задач. – К.: НТУУ «КПІ», 2014. – 74 с.
3. Федорченко А.М. Теоретична фізика. Електродинаміка. – К.: Вища школа, 1992. – 297 с.
4. Матвеев А.Н. Электродинамика. - М.: Высшая школа, 1980. - 383 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. - М.: Наука, 1967. - 458 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. - М.: Наука, 1982. - 620 с.
7. Бушок Г.Ф., Левандовський В.В., Півень Г.Ф. Курс фізики: Навч.посібник: У 2 Кн. Кн.1. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм. - К.: Либідь, 1997. - 448с.
8. Батыгин В.В., Топтыгин Й.Н. «Сборник задач по электродинамике». – М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 640 с.
9. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике. – М.: «Высшая школа», 1984. – 336 с.
10. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.3. Электричество. – М.: Наука, 1977. – 687 с.
11. Измайлов С.В. Курс электродинамики. – М.: Госучпедиздат Минпросвета РСФСР, 1962. – 440 с.
12. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965. – 702 с.
13. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 5. Электричество и магнетизм. 2-е издание – М.: Мир, 1977. – 300 с.
14. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 6. Электродинамика. 2-е издание – М.: Мир, 1977. – 300 с.
15. Пановский В.В., Филипс М. Классическая электродинамика. – М.: Физматгиз, 1963. – 432 с.

В.В. Рубіш

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА
Конспект лекцій

Навчальний посібник

Формат 60×84/16. Умовн. друк. арк. 5,23. Зам. № 73. Наклад 100 прим.
Видавництво УжНУ «Говерла». м. Ужгород, вул. Капітульна, 18.
Тел.: 3-32-48.

*Свідоцтво про внесення до державного реєстру видавців, виготівників і
розповсюджувачів видавничої продукції –
Серія 3т № 32 від 31 травня 2006 року*