

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ
УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
КАФЕДРА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОГО
АНАЛІЗУ

Т.В. Боярищева
Т.В. Гудивок
О.О. Погоріляк

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник для студентів спеціальностей
«математика», «прикладна математика», «статистика»

Ужгород – 2013

Т.В. Боярищева, Т.В. Гудивок, О.О. Погоріляк. Функціональний аналіз. Навчальний посібник для студентів спеціальностей «математика», «прикладна математика», «статистика». – Ужгород, 2013. – 125 с.

У навчальному посібнику проілюстровано розв'язання опорних задач курсу функціонального аналізу за темами: «Збіжність в метричних просторах», «Компактність множин», «Принцип стискаючих відображень», «Лінійні нормовані простори, збіжність в лінійних нормованих просторах», «Гільбертові простори», «Лінійні неперервні оператори і функціонали, простори операторів», «Спряжені і компактні оператори, власні значення, вектори, спектр та резольвента оператора», «Інтегральні рівняння Вольтерра і Фредгольма та методи їх розв'язування», «Узагальнені функції». Також після кожної з тем наведено завдання для індивідуальної, самостійної та лабораторних робіт студента.

Рекомендовано до друку на засіданні кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 5 від 18 грудня 2012 року.

Рекомендовано до друку засіданням методичної комісії математичного факультету ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 5 від 10 січня 2013 року.

Рецензенти:

Король І.І., доктор фіз.-мат. наук, професор (ДВНЗ «УжНУ»)

Шапочка І.В., кандидат фіз.-мат. наук, доцент, в.о. завідувача кафедри алгебри (ДВНЗ «УжНУ»)

1 Метричні простори

Перелік необхідних питань теорії

1. Нерівності Коші-Буняковського, Коші-Гельдера, Мінковського.
2. Означення метрики, метричного простору.
3. Приклади метричних просторів.
4. Збіжність і фундаментальність у метричних просторах. Повнота метричного простору.
5. Топологія в метричному просторі(внутрішні, межові, граничні, ізольовані та точки дотику). Замикання множини. Відкриті і замкнені множини у метричних просторах.
6. Компактність у метричних просторах. Критерії компактності.
7. Цілком обмежені множини в метричних просторах. Критерій компактності Хаусдорфа.
8. Компактність у просторі $C_{[a,b]}$. Теорема Арцела.
9. Оператор стиску, його властивості.
10. Нерухома точка стискаючого відображення(оператора стиску). Теорема Банаха.
11. Застосування методу послідовних наближень до розв'язування алгебраїчних, диференціальних, інтегральних рівнянь.
12. Зв'язок між точністю наближення до розв'язку рівняння та кількістю ітерацій.

Теоретичні відомості

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ – довільні комплексні числа, тоді для будь-яких $p, q \in \mathbf{R}$ таких, що $p > 1, q > 1$ та $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ має місце нерівність *Коші-Гельдера*:

$$\sum_{k=1}^n |a_k \cdot b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Для дійснозначних функцій $f(x)$ та $g(x)$, визначених на $[a, b]$ нерівність Коші-Гельдера має вигляд:

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Як частковий випадок, коли $p = q = 2$ нерівність Коші-Гельдера носить назву *Коші-Буняковського*.

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ – довільні комплексні числа такі, що $\sum_{k=1}^n |a_k + b_k| > 0$, тоді для довільного $p \in \mathbf{R}$ такого, що $p > 1$ має місце нерівність *Мінковського*:

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Для дійснозначних функцій $f(x)$ та $g(x)$, визначених на $[a, b]$ нерівність *Мінковського* має вигляд:

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Метричним простором (X, ρ) називається множина елементів довільної природи, на якій введена метрика ρ – функція двох змінних, визначена на множині $X \times X$, що задовольняє таким умовам (аксіомам метрики):

1. $(\forall x, y \in X) \rho(x, y) \geq 0$, причому $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $(\forall x, y \in X) \rho(x, y) = \rho(y, x)$ (умова симетричності);
3. $(\forall x, y, z \in X) \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (нерівність трикутника).

Найпростішими прикладами метричних просторів є:

1. Множина дійсних чисел \mathbf{R} з метрикою $\rho(x, y) = |x - y|$; $x, y \in \mathbf{R}$.
2. Простір n -вимірних векторів \mathbf{R}^n з метрикою $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2}$,
 $x_k, y_k \in \mathbf{R}, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

- 2'. Аналогічний метричний простір із n -вимірних векторів визначається метрикою $\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|$. Позначається цей простір (\mathbf{R}_1^n, ρ_1) .
- 2''. Якщо у просторі \mathbf{R}^n ввести метрику $\rho_0(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |y_k - x_k|$, тоді отримаємо метричний простір (\mathbf{R}_0^n, ρ_0) .
- 2'''. Якщо у просторі \mathbf{R}^n ввести метрику $\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |y_k - x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, де $p \geq 1$ – будь-яке фіксоване число, тоді маємо метричний простір (\mathbf{R}_p^n, ρ_p) .
3. Множина послідовностей $l_p = \{x = (x_1, x_2, \dots), x_k \in \mathbf{R}, k = 1, 2, \dots\}$, для яких виконується умова $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ з метрикою $\rho(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p}$, де $p \geq 1$ – будь-яке фіксоване число.
4. Множина функцій $L_p[a, b]$, для яких виконується умова $\int_a^b |x(t)|^p dt < \infty$ з метрикою $\rho(x, y) = \sqrt[p]{\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt}$;
5. Множина функцій $C_{[a,b]}$, неперервних на сегменті $[a, b]$, з метрикою $\rho(x, y) = \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$.

Зауважимо, що на кожній із цих множин метрику можна ввести не єдиним способом. Та якщо конкретний вигляд метрики не вказано, вважається, що метрика задана стандартно – як наведено вище.

1.1 Збіжність у метричних просторах. Відкриті і замкнені множини у метричних просторах. Компактність множини

Теоретичні відомості

Послідовність $\{x_n\} \subset X$ називається *збіжною* до елемента $a \in X$, якщо виконується умова $(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}) (\forall n > n_\varepsilon) : \rho(x_n, a) < \varepsilon$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$. Таку збіжність будемо називати *збіжністю за метрикою* $\rho = \rho(x, y)$.

Послідовність $\{x_n\} \subset X$ називається *фундаментальною*, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) (\forall n, m > n_\varepsilon) : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Іноді умову фундаментальності формулюють дещо інакше:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}) (\forall n > n_\varepsilon) (\forall p \in \mathbb{N}) : \rho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon.$$

Зауважимо, що зі збіжності послідовності випливає її фундаментальність, але зворотне твердження, взагалі кажучи, несправедливе.

Якщо у метричному просторі будь-яка фундаментальна послідовність є збіжною, тоді кажуть, що цей метричний простір є *повним*.

Відкритим ε -околом точки x_0 (позначається $U_\varepsilon(x_0)$) називається така множина елементів x із метричного простору (X, ρ) , для яких виконується умова $\rho(x, x_0) < \varepsilon$.

Аналогічно *замкненим ε -околом* точки x_0 (позначається $U_\varepsilon[x_0]$) називається така множина елементів x із метричного простору, для яких виконується умова $\rho(x, x_0) \leq \varepsilon$.

Відкритим проколотим ε -околом точки x_0 називається така множина $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)$ елементів x із метричного простору, для яких виконується умова $0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon$, тобто де $x \neq x_0$.

Точка x_0 з метричного простору X називається *внутрішньою точкою множини* $M \subset X$, якщо існує такий відкритий ε -окіл точки x_0 $U_\varepsilon(x_0)$, що належить даній множині M . При цьому множина M метричного простору називається *відкритою*, якщо всі її точки є внутрішніми.

Точка x_0 з метричного простору X називається *точкою дотику* множини $M \subset X$, якщо будь-який відкритий ε -окіл точки x_0 має з даною множиною непорожній перетин: $U_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$. При цьому *замиканням* множини M називається об'єднання всіх її точок дотику; а сама множина називається *замкненою*, якщо вона співпадає зі своїм замиканням. Замикання множини M позначається $[M]$.

Точка x_0 з метричного простору X називається *граничною* точкою множини M , якщо будь-який відкритий проколотий ε -окіл точки x_0 має з даною множиною непорожній перетин: $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$.

Відмітимо, що останнє означення може бути сформульоване й іншим чином: точка x_0 називається *граничною* точкою множини M , якщо у даній множині існує нестационарна послідовність, збіжна до елемента x_0 .

Точка x_0 називається *ізолюваною* точкою множини M , $M \subset X$, якщо існує такий відкритий ε -окіл точки x_0 , який у перетині з даною множиною дає єдину точку x_0 , тобто $U_\varepsilon(x_0) \cap M = \{x_0\}$.

Точка x_0 з метричного простору X називається *межовою* точкою множини M , $M \subset X$, якщо будь-який відкритий ε -окіл точки x_0 містить як точки, що належать даній множині, так і точки, що їй не належать.

Множина M із метричного простору X називається *передкомпактною* (відносно компактною), якщо із будь-якої обмеженої її підмножини можна виділити фундаментальну послідовність.

Множина M із метричного простору X називається *компактною*, якщо із будь-якої обмеженої її підмножини можна виділити збіжну послідовність.

Для того, щоб сформулювати критерій компактності Хаусдорфа, необхідно наступне означення: множина B називається ε -сіткою для множини M , якщо $(\forall x \in M) (\exists y \in B) : \rho(x, y) < \varepsilon$.

Критерій компактності Хаусдорфа. Для того, щоб множина M була компактною, необхідно і досить, щоб для неї існувала скінченна ε -сітка, $\forall \varepsilon > 0$.

Для перевірки компактності у просторі $C_{[a,b]}$ зручно є наступна теорема.

Теорема Арцела. Для того, щоб множина функцій K із простору $C_{[a,b]}$ була компактною, необхідно і досить, щоб вона була рівномірно обмеженою та рівностепенево неперервною.

Іншими словами,

1. $(\exists C \in \mathbf{R}) (\forall x(t) \in K) : |x(t)| \leq C;$

2. $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta_\varepsilon > 0) (\forall t_1, t_2 \in [a, b]) (|t_1 - t_2| < \delta) (\forall x(t) \in K) :$

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon.$$

Розв'язання типових задач

Завдання 1. Чи задає метрику на просторі X функція $\rho(x, y)$, якщо:

а) $X = \mathbf{R}$, $\rho(x, y) = (x - y)^2;$

б) $X = \mathbf{R}^n$, $\rho(x, y) = \min \left\{ 1, \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} \right\};$

в) $X = C_{[a,b]}$, $\rho(x, y) = \max_{t \in [\frac{a+b}{2}, b]} |x(t) - y(t)|;$

г) $X = l_p$, $\rho(x, y) = \sup_{i \in \mathbf{N}} |x_i - y_i|.$

Розв'язання. а) Функція $\rho(x, y)$ визначена для всіх значень $(x, y) \in \mathbb{R}$, причому $\rho(x, y) = (x - y)^2 \geq 0$, і $(x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$. Разом із цим $\rho(x, y) = (x - y)^2 = (y - x)^2 = \rho(y, x)$. Перевіримо виконання аксіоми трикутника:

$$\rho(x, y) = (x - y)^2 = (x - z + z - y)^2 = (x - z)^2 + (z - y)^2 + 2(x - z)(z - y).$$

Але отримана сума належним вибором x, y, z може бути зроблена більшою від $(x - z)^2 + (z - y)^2$. А це означає, що умова $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ не виконується.

б) Оскільки $\rho(x, y)$ є мінімальним числом серед невід'ємних, то $\rho(x, y) \geq 0$ для будь-яких $x, y \in R^n$, тобто $\rho(x, y)$ є визначеною коректно.

1) Нехай $x, y \in R^n$ та $x = y$. Це означає, що для $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ справедливі рівності $x_k = y_k, k = 1, 2, \dots, n$. Тоді $\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 = 0$ й, відповідно, $\rho(x, y) = \min\{1, 0\} = 0$. Навпаки, якщо

$$\rho(x, y) = \min\left\{1, \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}\right\} = 0,$$

то необхідно $\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} = 0$. Скінченна сума невід'ємних чисел може дорівнювати нулю тільки тоді, коли вони всі одночасно є нулями, тобто $x_k = y_k \forall k = 1, 2, \dots, n$, а це означає, що $x = y$.

2) Виконання другої аксіоми метрики очевидне:

$$\rho(x, y) = \min\left\{1, \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}\right\} = \min\left\{1, \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2}\right\} = \rho(y, x).$$

3) Виберемо довільні $x, y, z \in R^n$ та розглянемо суму

$$\begin{aligned} \rho(x, z) + \rho(z, y) &= \min\left\{1, \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - z_k)^2}\right\} + \min\left\{1, \sqrt{\sum_{k=1}^n (z_k - y_k)^2}\right\} = \\ &= \min\left\{2, \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - z_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n (z_k - y_k)^2}\right\} \geq \\ &\geq \min\left\{1, \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}\right\} = \rho(x, y). \end{aligned}$$

В наведеному ланцюгу нерівностей використаний той факт, що має місце рівність $\min\{a+b\} = \min\{a\} + \min\{b\}$ та те, що $\rho_1(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$ є метрикою.

Отже, $\rho(x, y) = \min\left\{1, \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}\right\}$ є метрикою.

в) Найбільше значення множини абсолютних величин чисел є величина невід'ємна. Але якщо

$$\rho(x, y) = 0, \quad \text{то} \quad \max_{t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]} |x(t) - y(t)| = 0.$$

Це означає, що

$$x(t) - y(t) = 0 \quad \forall t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right],$$

оскільки в протилежному випадку порушувалась би умова $\rho(x, y) = 0$. На іншій половині проміжка $[a, b]$, а саме для $t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ може виконуватись інша умова:

$$x(t) \neq y(t).$$

Тому умова $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ не виконується, отже $\rho(x, y)$ не є метрикою.

г) Оскільки $x, y \in l_p$, то із визначення l_p випливає, що виконуються умови $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ і $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p < \infty$, тобто послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, $n \in \mathbf{N}$ є обмеженими. Тому обмеженою буде й числова множина $\{x_n + y_n\}$, $n \in \mathbf{N}$. Таким чином для неї існує точна верхня грань. Отже, $\forall x, y \in l_p$ функція $\sup_{i \in \mathbf{N}} |x_i - y_i|$ існує і набуває невід'ємних значень. Очевидно, що при $x = y$ (тобто коли $\forall i \in \mathbf{N} x_i = y_i$) $\sup_{i \in \mathbf{N}} |x_i - y_i| = 0$. Разом із цим, якщо $\rho(x, y) = 0$,

$$\sup_{i \in \mathbf{N}} |x_i - y_i| = 0 \Rightarrow \forall i \in \mathbf{N} |x_i - y_i| = 0 \Rightarrow \forall i \in \mathbf{N} x_i = y_i \Rightarrow x = y.$$

Виконання другої та третьої аксіом очевидне, тобто $\rho(x, y)$ задає метрику на X .

Завдання 2. Дослідити на збіжність у метричному просторі X послідовність $\{x_n\}$, якщо:

а) $X = \mathbf{R}$, $x_n = n \sin \frac{1}{n}$;

б) $X = L_2[0, 1]$, $x_n(t) = t^n$;

в) $X = l_1$, $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{9}, 0, \frac{1}{27}, 0, \dots, \frac{1}{3^n}, 0, 0, \dots}_{2n-1} \right)$;

$$\text{г) } X = l_2, \quad x_n = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, 1, 0, 0, \dots \right);$$

$$\text{д) } X = l_2, \quad x_n = \left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n, 1, 0, 0, \dots \right).$$

Розв'язання. а) У просторі \mathbf{R} поточкова збіжність співпадає зі збіжністю за метрикою, тому послідовність $\{x_n\}$ збіжна до

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

б) Знайдемо поточкову границю:

$$x_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} t^n = \begin{cases} 0, & \text{при } t \in [0, 1); \\ 1, & \text{при } t = 1. \end{cases}$$

Дослідимо цю послідовність на збіжність за метрикою:

$$\begin{aligned} \rho(x_n(t), x_0(t)) &= \sqrt{\int_0^1 |t^n - x_0(t)|^2 dt} = \\ &= \sqrt{\int_0^1 |t^n - 0|^2 dt + \int_1^1 |t^n - 1|^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 t^{2n} dt + 0} = \\ &= \sqrt{\left. \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right|_0^1} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Отже, дана послідовність збігається в $L_2[0, 1]$. Відмітимо, що якби потрібно було дослідити цю послідовність на збіжність у просторі $C_{[0,1]}$, то навіть після знаходження поточної границі було б зрозуміло, що збіжності не має, адже $x_0(t) \notin C_{[0,1]}$.

в) Знаходячи поточкову границю послідовності $x_n \subset l_1$, одержимо

$$x_0 = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{9}, 0, \dots, 0, \frac{1}{3^n}, 0, \frac{1}{3^{n+1}}, 0, \dots \right),$$

тобто послідовність, у якій $x_0^{(2k)} = 0$, $x_0^{(2k-1)} = \frac{1}{3^k}$. Така послідовність є елементом простору l_1 , бо

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_0^{(i)}| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} < \infty.$$

Дослідимо тепер збіжність за метрикою.

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_0) &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_n^{(i)} - x_0^{(i)}| = \\ &= \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right| + |0 - 0| + \left| \frac{1}{9} - \frac{1}{9} \right| + \dots + \left| \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^n} \right| + \sum_{i=n+1}^{\infty} \left| 0 - \frac{1}{3^i} \right| = \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{\frac{3^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}} = \frac{3}{3^{n+1} \cdot 2} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}. \end{aligned}$$

Оскільки послідовність $\frac{1}{2 \cdot 3^n}$ є нескінченно малою, то $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0$ за метрикою.

г) Поточковою границею послідовності з загальним членом

$$x_n = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, 1, 0, 0, \dots \right)$$

є нульовий елемент, тобто $x_0 = (0, 0, \dots)$. Але

$$\rho(x_n, x_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_n^{(i)} - x_0^{(i)}|^2} = 1,$$

тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) \neq 0$. Отже, збіжності за метрикою немає.

д) Поточковою границею послідовності $x_n \in x_0 = (1, 1, 1, \dots)$. Але оскільки ряд $\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_0^{(i)}|$ є розбіжний, то дана послідовність не збігається навіть поточною.

Завдання 3. Довести повноту метричного простору $C_{[a,b]}$.

Розв'язання. Розглянемо довільну фундаментальну послідовність $\{x_n\} \subset C_{[a,b]}$, тобто таку, для якої виконується

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n > n_\varepsilon \forall p \in \mathbb{N} \max_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x_{n+p}(t)| < \varepsilon.$$

Перейдемо в останній нерівності до границі при $p \rightarrow \infty$. Очевидно, одержимо твердження

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \forall n > n_\varepsilon \max_{t \in [a,b]} |x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon < 2\varepsilon,$$

де $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$. Але твердження, яке ми отримали, є означенням рівномірно збіжної функціональної послідовності. А з курсу математичного аналізу відомо, що границею рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій є неперервна функція. Тобто границя будь-якої фундаментальної послідовності з $C_{[a,b]}$ теж належить $C_{[a,b]}$, чим і підтверджується повнота цього метричного простору.

Завдання 4. Визначити точки дотику, внутрішні, ізольовані, межові та граничні точки, а також замикання множини $A = [1, 7] \cup \{2n : n \in \mathbf{N}\}$.

Розв'язання. Точка дотику множини A – це точка, будь-який окіл якої має непорожній перетин з множиною A . Тому множина точок дотику є $[1, 7] \cup \{2n : n \in \mathbf{N}\} = A$.

Внутрішня точка – це точка, що міститься в A разом з деяким своїм оточенням. Тому внутрішніми є точки відкритого інтервалу $(1, 7)$.

Ізольована точка множини A це така точка для якої існує відкритий окіл, що у перетині з множиною A дає тільки цю точку. Тому ізольованими будуть: $\{2n : n = 4, 5, 6, \dots\}$.

Межова точка множини A це точка в кожному оточенні якої містяться як точки що належить множині A , так і точки, що їй не належать. Межовими будуть: $\{1, 7\} \cup \{2n : n = 4, 5, 6, \dots\}$.

Очевидно, існують проколоти околиці $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_{2n})$ (наприклад, при $\varepsilon = \frac{1}{3}$), де $x_{2n} = 2n$, що $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_{2n}) \cap \{2n : n = 4, 5, 6, \dots\} = \emptyset$. Також, очевидно, що для $\forall x_0 \in [1, 7]$ маємо $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_{2n}) \cap [1, 7] \neq \emptyset$. Отже, граничними є кожна точка $[1, 7]$.

Замикання множини – це сукупність всіх її точок дотику, тому $[A] = [1, 7] \cup \{2n : n \in \mathbf{N}\}$.

Завдання 5. Дослідити на компактність у просторі $C_{[0,1]}$ такі множини:

а) $x_n(t) = (t - \frac{1}{2})^n, n \in \mathbf{N}$;

б) $x_\alpha(t) = \cos(t + \alpha), \alpha \in \mathbf{R}$;

в) $x_\alpha(t) = \cos(\alpha t), \alpha \in \mathbf{R}$;

г) $x_n(t) = e^{t-n}, n \in \mathbf{N}$.

Розв'язання. Для дослідження компактності у просторі неперервних на $[a, b]$ функцій $C_{[a,b]}$ використовують теорему Арцелла, згідно якої, для

компактності множини функцій $K \subset C_{[a,b]}$ достатньо, щоб множина K була рівномірно обмеженою та рівностепеневу неперервною.

а) Оскільки $\forall t \in [0, 1]$ справджуються очевидні нерівності $-\frac{1}{2} \leq t - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$, або $\frac{(-1)^n}{2^n} \leq (t - \frac{1}{2})^n \leq \frac{1}{2^n}$, або $\forall n \in N, |x_n(t)| \leq \frac{1}{2}$, то виконується умова рівномірної обмеженості функцій із $C_{[0,1]}$.

Перевіримо, чи має місце рівностепенева неперервність, тобто, чи виконується умова:

$(\forall \epsilon > 0), (\exists \delta_\epsilon > 0), (\forall n \in N), (\forall t_1, t_2 : |t_1 - t_2| < \delta) :$

$$|(t_1 - \frac{1}{2})^n - (t_2 - \frac{1}{2})^n| < \epsilon.$$

Згідно теореми Лагранжа $\exists \xi \in (0, 1)$ така, що

$$|(t_1 - \frac{1}{2})^n - (t_2 - \frac{1}{2})^n| = \left| n (t - \frac{1}{2})^{n-1} \right|_{t=\xi} |t_1 - t_2| = n \left| \xi - \frac{1}{2} \right|^{n-1} |t_1 - t_2|.$$

Послідовність $n \cdot a^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ якщо тільки $|a| < 1$. Тому вона буде обмеженою, тобто $\exists C, (\forall n \in N) : n \left| \xi - \frac{1}{2} \right| \leq C$. Тоді

$$|(t_1 - \frac{1}{2})^n - (t_2 - \frac{1}{2})^n| = C |t_1 - t_2| \leq C \cdot \delta.$$

Для виконання умови $|(t_1 - \frac{1}{2})^n - (t_2 - \frac{1}{2})^n| < \epsilon$ досить вимагати, щоб $C \cdot \delta < \epsilon$, тобто $\delta < \frac{\epsilon}{C}$. Існування параметра δ доводить компактність даної послідовності.

б) Очевидно, що $(\forall \alpha \in R) : |\cos(\alpha + t)| \leq 1$, тобто множина є рівномірно обмеженою. Разом із цим

$$\begin{aligned} |\cos(\alpha + t_1) - \cos(\alpha + t_2)| &= \left| (\cos(\alpha + t))'_{t=\xi} \right| |t_1 - t_2| = \\ &= |\sin(\alpha + \xi)| |t_1 - t_2| \leq |t_1 - t_2| < \delta. \end{aligned}$$

Таким чином, вибравши $\delta < \epsilon$, ми довели рівностепеневу неперервність даної множини, а разом із цим і її компактність.

в) Як і в попередньому випадку $(\forall \alpha \in R) : |\cos \alpha t| \leq 1$. Але

$$|\cos \alpha t_1 - \cos \alpha t_2| = |\alpha \sin(\alpha \xi)| |t_1 - t_2|.$$

Розглядаючи $\alpha = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\pi}{2}$, і $t_2 = t_1 + \xi$, отримаємо

$$|\cos \alpha t_1 - \cos \alpha t_2| = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{\xi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \xi\right) |\xi| = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

Таким чином, умова рівностепеневої неперервності не виконується, і тому дана множина не є компактною.

г) При $t \in [0, 1] \forall n \in N 0 < e^{t-n} \leq e^{1-1} = e^0 = 1$, тому дана множина є рівномірно обмеженою.

$$|e^{t_1-n} - e^{t_2-n}| = |e^{\xi-n}| |t_1 - t_2| \leq |t_1 - t_2| < \delta.$$

Як тільки $\varepsilon > \delta$, то рівностепенева неперервність має місце. Таким чином, множина є компактною.

Завдання для індивідуальних, самотійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. Чи є метрикою в X функція $\rho(x, y)$, якщо:

1. $X = C_{[0,1]}$, $\rho(x, y) = \max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} |x(t) - y(t)|$;
2. $X = \mathbf{R}^n$, $\rho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} ||x_i| - |y_i||$;
3. $X = C_{[a,b]}$, $\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$;
4. $X = \mathbf{R}^+$, $\rho(x, y) = |\ln(x+1) - \ln(y+1)|$;
5. $X = l_2$, $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=k_0}^{\infty} (x_k - y_k)^2}$;
6. $X = l_p$, $\rho(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^p}$;
7. $X = C_{[0,1]}$, $\rho(x, y) = \max_{t \in [\frac{1}{2}, 1]} |x'(t) - y'(t)| + \max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} |x(t) - y(t)|$;
8. $X = \mathbf{R}$, $\rho(x, y) = 1 - \cos|x - y|$;
9. $X = C_{[a,b]}$, $\rho(x, y) = |x(a) - y(b)|$;
10. $X = \mathbf{R}$, $\rho(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$.

Завдання 2. Чи є збіжною в X послідовність $\{x_n\}$, якщо:

1. $X = C_{[0,1]}$, $x_n(t) = t^{3n} - t^{3n-1}$;
2. $X = R^m$, $x_n = \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots, \frac{1}{2^{n+m}} \right)$;
3. $X = l_2$, $x_n = \left(\underbrace{1, 0, 1, 0, \dots, 1}_{2n-1}, 0, 0, 0, \dots \right)$;

4. $X = L_2 [0, 1], \quad x_n(t) = e^{-nt};$
5. $X = l_2, \quad x_n = (1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{2n-1}, 0, 0, 0, \dots);$
6. $X = C_{[2,3]}, \quad x_n(t) = 2^{-nt};$
7. $X = C_{[0,1]}, \quad x_n(t) = \ln \left(1 + \frac{t}{n} \right);$
8. $X = C_{[0,1]}, \quad x_n(t) = \frac{nt}{1 + nt};$
9. $X = C_{[0,1]}, \quad x_n(t) = \operatorname{arctg}(t + n);$
10. $X = l_2, \quad x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_n, 0, 0, \dots \right).$

Завдання 3. *Визначити точки дотику, внутрішні, ізольовані, межові та граничні точки множини A , а також замикання цієї множини:*

1. $A = [2, 4) \cup [7, 8);$
2. $A = [0, 9) \cup \{1, 10, 100\};$
3. $A = [1, 4) \cup \{e^{-n} : n \in \mathbf{N}\};$
4. $A = [2, 3) \cup \{n^2 : n \in \mathbf{N}\};$
5. $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + (-1)^n : n \in \mathbf{N} \right\};$
6. $A = (0, 3) \cup \left\{ \sin \frac{\pi n}{4} : n \in \mathbf{N} \right\};$
7. $A = \mathbf{N} \cup [1, 8);$
8. $A = [1, 4) \cup \mathbf{Q}_{[0,1]};$
9. $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\} \cup (1, 5);$
10. $A = [2, 5) \cup \left\{ 2 + \frac{1}{1 + n^2} : n \in \mathbf{N} \right\}.$

Завдання 4. *Чи є компактною в метричному просторі $C_{[a,b]}$ множина функцій $x_n(t)$, якщо:*

1. $[a, b] = \left[0, \frac{1}{2} \right], \quad x_n(t) = (2t)^n;$
2. $[a, b] = [2, 3], \quad x_n(t) = (t - 2)^n;$
3. $[a, b] = [0, 1], \quad x_\alpha(t) = \sin(\alpha + t), \alpha \in \mathbf{R};$
4. $[a, b] = [2, 3], \quad x_n(t) = (t - 2)^n;$
5. $[a, b] = [0, 1], \quad x_\alpha(t) = \sin(\alpha t), \alpha \in \mathbf{R};$
6. $[a, b] = [0, 1], \quad x_n(t) = \frac{t^n}{n};$
7. $[a, b] = [0, 1], \quad x_n(t) = \operatorname{arctg} \frac{t}{n};$

8. $[a, b] = [0, 1]$, $x_n(t) = 3^{-nt}$;
9. $[a, b] = [0, 1]$, $x_n(t) = e^{t-n}$;
10. $[a, b] = [0, 1]$, $x_n(t) = \operatorname{arctg} nt$.

1.2 Принцип стискаючих відображень. Теорема Банаха

Теоретичні відомості

Нехай (X, ρ) – метричний простір. Відображення цього простору в себе, $A : X \rightarrow X$ називається *стискаючим*, якщо

$$(\exists \alpha \in (0, 1)) (\forall x_1, x_2 \in X) : \rho(Ax_1, Ax_2) \leq \alpha \rho(x_1, x_2).$$

Точка x^* називається *нерухомою точкою* відображення $A : X \rightarrow X$ якщо $Ax^* = x^*$. Відображення A називається ще *оператором стиску*, а точка x^* називається ще *нерухомою точкою* оператора.

Теорема Банаха. Стискаюче відображення, що діє в повному метричному просторі, має одну і тільки одну нерухому точку.

Для розв'язування алгебраїчних, інтегральних, диференціальних рівнянь застосовується метод послідовних наближень. Ідея методу проілюстрована в доведенні теореми Банаха і вона полягає в тому, щоб привести задане рівняння $Ax = 0$ до еквівалентного вигляду

$$x = \tilde{A}x,$$

де відображення \tilde{A} було б стискаючим. Тоді, обравши довільно елемент x_0 , послідовно знаходимо $x_1 = \tilde{A}x_0$, $x_2 = \tilde{A}x_1, \dots, x_n = \tilde{A}x_{n-1}$. Нарешті, точний розв'язок x^* знаходиться в результаті граничного переходу при $n \rightarrow \infty$: $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Якщо знайти загальний вигляд x_n складно, тоді знаходять розв'язок наближено з потрібною точністю. При цьому користуються наступним наслідком теореми Банаха: якщо відображення $A : X \rightarrow X$ стискаюче, то $\rho(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(x_0, Ax_0)$.

При розв'язуванні інтегральних рівнянь корисим також є таке твердження: якщо оператор A визначається формулою

$$Ax(t) = \lambda \int_a^t K(t, s)x(s)ds + g(t)$$

та діє з простору $C_{[a,b]}$ в простір $C_{[a,b]}$, де $K(t, s)$ – неперервна на $[a, b] \times [a, b]$ функція, $x(t), g(t) \in C_{[a,b]}$, то $Ax(t)$ є оператором стиску для будь-якого $\lambda \in \mathbf{R}$.

Розв'язання типових задач

Завдання 1. Нехай $K(t, s)$ – неперервна функція в прямокутнику $[a, b] \times [a, b]$. При якому λ оператор $Ax(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds + \varphi(t)$, $\varphi(t) \in C_{[a,b]}$ є оператором стиску в просторі $C_{[a,b]}$.

Розв'язання. Оператор $Ax(t)$ є оператором стиску, якщо

$$(\exists \alpha \in (0, 1)) \quad (\forall x(t), y(t) \in C_{[a,b]}) : \rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x(t), y(t)).$$

Справедливі такі співвідношення:

$$\begin{aligned} \rho(Ax, Ay) &= \max_{a \leq t \leq b} \left| \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds + \varphi(t) - \lambda \int_a^b K(t, s)y(s)ds - \varphi(t) \right| = \\ &= \max_{a \leq t \leq b} \left| \lambda \int_a^b K(t, s)(x(s) - y(s)) ds \right| \leq \max_{a \leq t \leq b} |\lambda| \int_a^b |K(t, s)| |x(s) - y(s)| ds \leq \\ &\leq |\lambda| M \int_a^b \max_{a \leq s \leq b} |x(s) - y(s)| ds = |\lambda| M \max_{a \leq s \leq b} |x(s) - y(s)| (b - a) = \\ &= |\lambda| M (b - a) \rho(x, y). \end{aligned}$$

В процесі даних оцінок ми використали те, що функція $K(t, s)$ є неперервна на замкненій обмеженій множині $[a, b] \times [a, b]$, тому вона є й обмежена на ній, тобто $\forall (t, s) \in [a, b] \times [a, b]$, $|K(t, s)| \leq M$. Крім того врахували властивості інтегралів Рімана.

Таким чином, для того щоб $Ax(t)$ був оператором стиску достатньо, щоб $0 < |\lambda| M (b - a) < 1$, або $0 < |\lambda| < \frac{1}{M(b - a)}$.

Завдання 2. Довести, що рівняння $x(t) + \frac{1}{2} \cos x(t) + \varphi(t) = 0$, де $x(t)$ та $\varphi(t) \in C_{[a,b]}$ має єдиний розв'язок в $C_{[a,b]}$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді

$$-\frac{1}{2} \cos x(t) - \varphi(t) = x(t),$$

тоді якщо $Ax(t) = -\frac{1}{2} \cos x(t) - \varphi(t)$, то рівняння має вигляд

$$Ax(t) = x(t). \tag{1}$$

Оскільки метричний простір $C_{[a,b]}$ є повним, то існування і єдиність розв'язку операторного рівняння (1) випливає з теореми Банаха, оскільки A є оператором стиску, що є очевидним:

$$\begin{aligned} \rho(Ax(t), Ay(t)) &= \max_{t \in [a,b]} \left| -\frac{1}{2} \cos x(t) - \varphi(t) + \frac{1}{2} \cos y(t) + \varphi(t) \right| = \\ &= \max_{t \in [a,b]} \left| -\frac{1}{2} \cos x(t) + \frac{1}{2} \cos y(t) \right| = \max_{t \in [a,b]} \left| \sin \frac{x(t) + y(t)}{2} \cdot \sin \frac{x(t) - y(t)}{2} \right| \leq \\ &\leq \max_{t \in [a,b]} \left| \sin \frac{x(t) - y(t)}{2} \right| \leq \max_{t \in [a,b]} \frac{1}{2} |x(t) - y(t)| = \frac{1}{2} \rho(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

В останньому ланцюжку перетворень ми використали нерівності $|\sin x| \leq |x|$ та $|\sin x| \leq 1$.

Таким чином для $\alpha = \frac{1}{2}$ оператор A є оператором стиску. Тому рівняння, що задане в умові, має єдиний розв'язок.

Завдання 3. *Методом послідовних наближень розв'язати інтегральне рівняння задане в просторі $C_{[0,1]}$:*

а) $x(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 ts^2 x(s) ds + 1;$

б) $x(t) = \frac{t^2}{2} + t + \int_0^t x(s) ds.$

Розв'язання. а) Спочатку перевіримо, чи є відображення

$$Ax(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 ts^2 x(s) ds + 1$$

є стискаючим в просторі $C_{[0,1]}$:

$$\begin{aligned} \rho(Ax(t), Ay(t)) &= \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{1}{2} \int_0^1 ts^2 x(s) ds + 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 ts^2 y(s) ds - 1 \right| = \\ &= \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{1}{2} \int_0^1 ts^2 (x(s) - y(s)) ds \right| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} \frac{1}{2} \int_0^1 |ts^2| \max_{0 \leq s \leq 1} |x(s) - y(s)| ds = \\ &= \max_{0 \leq t \leq 1} \frac{1}{2} t \cdot \frac{s^3}{3} \Big|_0^1 \cdot \rho(x(t), y(t)) = \frac{1}{6} \rho(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Таким чином, застосування методу послідовних наближень до розв'язання інтегрального рівняння є можливим. Виберемо нульове наближення. Нехай $x_0(t) = 0$. Тоді

$$x_1(t) = 1;$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 ts^2 ds + 1 = \frac{1}{2} t \frac{s^3}{3} \Big|_0^1 + 1 = \frac{1}{6} t + 1;$$

$$x_3(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 ts^2 \left(\frac{1}{6} s + 1 \right) ds + 1 = \frac{1}{12} t \frac{s^4}{4} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} t \frac{s^3}{3} \Big|_0^1 + 1 = \frac{t}{3!} \left(1 + \frac{1}{8} \right) + 1;$$

$$x_4(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 ts^2 \left(\frac{s}{3!} \left(1 + \frac{1}{8} \right) + 1 \right) ds + 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{8} + 1 \right) t \frac{s^4}{4} \Big|_0^1 + \\ + \frac{1}{2} t \frac{s^3}{3} \Big|_0^1 + 1 = \frac{t}{3!} \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} \right) + 1.$$

За індукцією одержимо

$$x_n(t) = \frac{t}{3!} \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{8^{n-2}} \right) + 1.$$

Для знаходження розв'язку здійсимо граничний перехід:

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \frac{t}{3!} \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{8^n} + \dots \right) + 1 = \\ = \frac{t}{3!} \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} + 1 = \frac{t}{3!} \cdot \frac{8}{7} + 1.$$

б) Безпосередньою перевіркою (див. приклад а)) переконуємося в тому, що відображення $Ax(t) = \frac{t^2}{2} + t + \int_0^t x(s) ds$ є оператором стиску. Тому для знаходження розв'язку інтегрального рівняння можемо застосовувати метод послідовних наближень. За нульове наближення виберемо $x_0(t) = 0$.

$$x_1(t) = \frac{t^2}{2} + t = \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} \right) - 1 \right] + [(1 + t) - t - 1].$$

$$x_2(t) = \frac{t^2}{2} + t + \int_0^t \left(\frac{s^2}{2} + s \right) ds = \frac{t^2}{2} + t + \left(\frac{s^3}{3!} + \frac{s^2}{2} \right) \Big|_0^t = \frac{t^2}{2} + t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^2}{2!} = \\ = \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \right) - 1 \right] + \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} \right) - t - 1 \right].$$

$$\begin{aligned}
x_3(t) &= \frac{t^2}{2} + t + \int_0^t \left(\frac{s^2}{2} + s + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^2}{2!} \right) ds = \frac{t^2}{2} + t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^3}{3!} = \\
&= \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} \right) - 1 \right] + \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \right) - t - 1 \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_4(t) &= \frac{t^2}{2} + t + \int_0^t \left(\frac{s^2}{2} + s + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \frac{s^3}{3!} \right) ds = \frac{t^2}{2} + t + \\
&\quad + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^4}{4!} = \\
&= \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} \right) - 1 \right] + \left[\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} \right) - t - 1 \right].
\end{aligned}$$

Таким чином за індукцією отримаємо, що

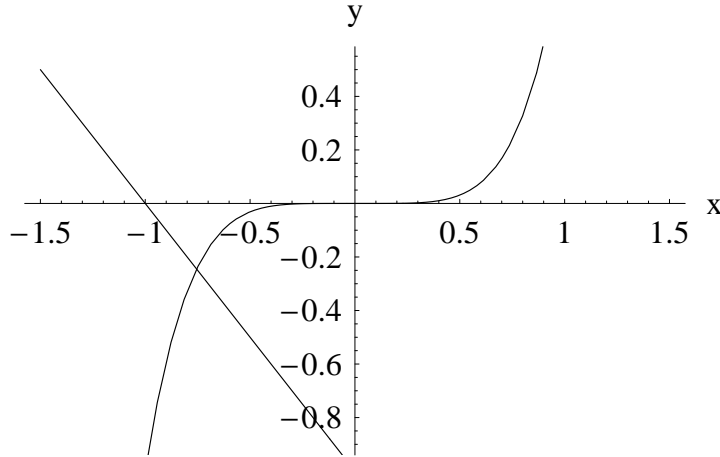
$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!} - 1 + \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} - t - 1.$$

Знайшовши границю $x_n(t)$, отримаємо розв'язок:

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} - 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} - t - 1 = 2e^t - t - 2.$$

Завдання 4. Довести, що рівняння $x^5 + x + 1 = 0$ має єдиний корінь та знайти проміжок, якому цей корінь належить. Звести рівняння до такого вигляду, щоб його можна було розв'язати методом послідовних наближень. Знайти кількість ітерацій необхідних для знаходження кореня з точністю, що не перевищує 0,01.

Розв'язання. Доведення існування і єдиності кореня здійснимо графічними міркуваннями. Перепишемо рівняння у вигляді $x^5 = -x - 1$. Намалюємо графіки функцій $y = x^5$ та $y = -x - 1$.



Мал. 1

З мал. 1 видно, що графіки мають єдину точку перетину, причому її абсциса $x \in (-1, 0)$.

Зобразимо рівняння у вигляді $x = x - \lambda(x^5 + x + 1)$ та підберемо параметр λ так, щоб формула $Ax = x - \lambda(x^5 + x + 1)$ визначала оператор стиску. Тоді, оскільки \mathbf{R} є повним метричним простором, оператор A матиме єдину нерухому точку. Звідси впливатиме, що початкове рівняння має єдиний розв'язок.

Позначимо $g(x) = x^5 + x + 1$. Розглянемо рівності (врахувавши, що метрика в \mathbf{R} визначається так: $\rho(x, y) = |x - y|$):

$$\begin{aligned} \rho(Ax, Ay) &= |x - \lambda g(x) - y + \lambda g(y)| = |(x - y) + \lambda(g(y) - g(x))| = \\ &= \left| (x - y) - \lambda g'(z)(x - y) \right| = |x - y| \left| 1 - \lambda g'(z) \right|. \end{aligned}$$

Оскільки $g'(x) = 5x^4 + 1 > 0$, функція $g(x)$ зростає на $[-1, 0]$, то $\min_{x \in [-1, 0]} g(x) =$

$$g(-1) = -1, \quad \max_{x \in [-1, 0]} g(x) = g(0) = 1, \text{ тому вибравши } \lambda = \frac{1}{6}, \text{ матимемо}$$

$$\rho(Ax, Ay) = |x - y| \left| 1 - \frac{1}{6} g'(z) \right| \leq |x - y| \left| 1 - \frac{1}{6} \cdot 1 \right| = \frac{5}{6} |x - y| = \frac{5}{6} \rho(x, y).$$

Використаємо формулу

$$\rho(x_n, x) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rho(Ax_0, x_0).$$

За нульове наближення виберемо $x_0 = 0$, тоді $Ax_0 = -\frac{1}{6}$, $\rho(Ax_0, x_0) = \frac{1}{6}$. Тому для знаходження кількості ітерацій залишається розв'язати нерівність

$$\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 - \frac{5}{6}} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,01,$$

$$n > \log_{\frac{5}{6}} 0,01.$$

Найменший натуральний розв'язок останньої нерівності є шукана кількість ітерацій.

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Методом послідовних наближень розв'язати інтегральне рівняння в просторі $C_{[a,b]}$:*

1. $x(t) = 1 + \int_0^t x(s) ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a, b] = [0, 1];$
2. $x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(t-s) + \sin(t+s)) x(s) ds + 1, \quad x_0(t) = 0, \quad [a, b] = [0, \pi];$
3. $x(t) = 2^t + \int_0^t 2^{t-s} x(s) ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a, b] = [0, 1];$
4. $x(t) = 1 + t^2 - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1+t^2}{1+s^2} x(s) ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a, b] = [0, 1];$
5. $x(t) = t - \int_0^t (t-s) x(s) ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a, b] = [0, 1];$
6. $x(t) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 sx(s) ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a, b] = [0, \pi];$
7. $x(t) = t^2 + \int_0^2 x(s) ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a, b] = [0, 2];$
8. $x(t) = 1 + \int_0^1 s^3 x(s) ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a, b] = [0, 1];$
9. $x(t) = 1 + \int_0^1 t^2 s^2 x(s) ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a, b] = [0, 1];$
10. $x(t) = 2 \cos t - \frac{\cos t}{2\pi} \int_0^\pi t^2 s x(s) ds, \quad x_0(t) = 0, \quad [a, b] = [0, \pi].$

Завдання 2. *Довести, що задане рівняння має єдиний корінь та знайти проміжок, якому цей корінь належить. Звести рівняння до такого вигляду, щоб його можна було розв'язати методом послідовних наближень. Знайти кількість ітерацій необхідних для знаходження кореня з точністю, що не перевищує 0,01, якщо:*

1. $x^3 + x - 3 = 0;$ 2. $x^5 + 2x - 1 = 0;$
3. $x^7 + x - 4 = 0;$ 4. $x^5 + x - 5 = 0;$
5. $x^3 + 3x - 1 = 0;$ 6. $x^5 + 3x - 2 = 0;$
7. $x^5 + x + 4 = 0;$ 8. $x^3 + 3x + 3 = 0;$
9. $x^5 + 6x + 1 = 0;$ 10. $x^5 + 10x - 1 = 0.$

2 Лінійні нормовані простори. Збіжність у нормованих просторах

Перелік необхідних питань теорії

1. Лінійний простір. Підпростір лінійного простору.
2. Ізоморфізм у лінійних просторах.
3. Лінійна залежність і незалежність.
4. Базис лінійного простору. Розмірність.
5. Означення норми і нормованого простору.
6. Збіжність у нормованих просторах.
7. Повнота нормованого простору.

Теоретичні відомості

Лінійним або *векторним простором* над полем дійсних чисел \mathbf{R} називається непорожня множина L , якщо ця множина задовольняє таким умовам:

1. Для будь-яких двох елементів x, y із L однозначно визначений третій елемент із L , який позначається символом $x + y$ і називається сумою елементів x та y та виконуються аксіоми:

- 1) $(\forall x, y \in L) : (x + y = y + x)$ (комутативність);
- 2) $(\forall x, y, z \in L) : ((x + y) + z = x + (y + z))$ (асоціативність);
- 3) $(\exists \theta \in L) (\forall x \in L) : (x + \theta = x)$ (існування нульового елемента);
- 4) $(\forall x \in L) (\exists -x \in L) : (x + (-x) = \theta)$ (існування протилежного елемента).

Введену операцію, що задовольняє цим аксіомам, називаємо додаванням елементів у просторі L .

2. Для будь-якого дійсного числа $\alpha \in \mathbf{R}$ і довільного елемента $x \in L$ визначений елемент $\alpha x \in L$ (добуток x на число α), причому виконуються такі аксіоми:

- 1) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}) (\forall x \in L) : (\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x)$ (асоціативний закон множення);

- 2) $(\forall x \in L) : (1 \cdot x = x)$ (множенню одиниці на елемент x відповідає цей же елемент $x \in L$);
- 3) $(\forall \alpha, \beta \in R) (\forall x \in R) : ((\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x)$ (дистрибутивний закон множення);
- 4) $(\forall \alpha \in R) (\forall x, y \in L) : (\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y)$ (дистрибутивний закон множення).

Аксиоми 3) і 4) формулюють правило «розкриття дужок» в просторі L . Введений цим визначенням лінійний простір L над полем дійсних чисел \mathbf{R} називають дійсним лінійним простором. Якщо ж замість поля дійсних чисел розглядати поле комплексних чисел \mathbf{C} , тоді такий лінійний простір L називається комплексним лінійним простором. Можна розглядати лінійні простори над довільним полем.

Підмножина L_1 лінійного простору L називається *підпростором* лінійного простору L , якщо L_1 є лінійним простором відносно операцій, введених в L . Інакше, L_1 – підпростір лінійного простору L , якщо для довільних $x, y \in L_1$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ маємо $\alpha x + \beta y \in \mathbf{R}$.

Множина елементів x_1, x_2, \dots, x_n з лінійного простору L називається *лінійно залежною*, якщо існують такі дійсні числа c_1, c_2, \dots, c_n , не всі рівні нулю, що $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \theta$. Якщо ж цей вираз дорівнює нульовому елементу лише при $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, то множина x_1, x_2, \dots, x_n називається *лінійно незалежною*.

Нескінченна система елементів $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ із лінійного простору L називається *лінійно незалежною*, якщо будь-яка її скінченна підсистема лінійно незалежна.

Множина елементів x_1, x_2, \dots, x_n з лінійного простору L називається *базисом* лінійного простору L , якщо вона є лінійно незалежною, але додавання до неї будь-якого елемента перетворює її в лінійно залежну. Іншими словами, базис – максимальна лінійно незалежна система елементів з L .

Відомо, що якщо множина елементів x_1, x_2, \dots, x_n є базисом у лінійному просторі L , то будь-який елемент із L може бути зображений (причому єдиним способом) у вигляді лінійної комбінації елементів базису.

Усі базиси одного й того ж лінійного простору L складаються з однакової кількості елементів, причому число елементів базису називається *розмірністю* лінійного простору. *Базисом* в n -вимірному просторі L називається будь-яка система із n лінійно незалежних елементів. Якщо ж в просторі L можна вказати систему із довільного скінченного числа лінійно незалежних елементів, тоді такий простір L назвемо *нескінченновимірним*.

Лінійний простір L називається *нормованим простором*, якщо кожному його елементу x ставиться у відповідність дійсне невід'ємне число $\|x\|$ (*норма x*), причому виконуються такі умови:

- 1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
- 2) $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall x \in L : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- 3) $\forall x, y \in L : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Відмітимо, що будь-який лінійний простір, на якому задана метрика $\rho(x, y)$ є нормованим простором з нормою $\|x\| = \rho(x, \theta)$. В одному і тому ж лінійному просторі L норма може задаватись по-різному. Прикладами нормованих просторів є:

1. Множина дійсних чисел \mathbf{R} з нормою $\|x\| = |x|$;
2. Простір n -вимірних векторів \mathbf{R}^n з нормою $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$;
3. Множина послідовностей $l_p = \{(x_1, x_2, \dots), x_i \in \mathbf{R}\}$ для яких виконується умова $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ з нормою $\|x\| = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p}$, де число $p \geq 1$ фіксоване;
4. Множина функцій $L_p[a, b]$ для яких виконується умова $\int_a^b |x(t)|^p dt < \infty$ з нормою $\|x\| = \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p dt}$, де число $p \geq 1$ фіксоване;
5. $C_{[a,b]}$ – множина неперервних на сегменті $[a, b]$ функцій з нормою $\|x\| = \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|$.

Послідовність $\{x_n\} \subset L$ називається *збіжною* у нормованому просторі L , якщо $\exists x \in L : \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$.

Послідовність $\{x_n\} \subset L$ називається *фундаментальною* у нормованому просторі L , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}) (\forall n > n_\varepsilon) (\forall m > n_\varepsilon) : \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Іноді умову фундаментальності ще записують у формі:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}) (\forall n > n_\varepsilon) (\forall p \in \mathbf{N}) : \|x_n - x_{n+p}\| < \varepsilon.$$

Якщо будь-яка фундаментальна послідовність у нормованому просторі L є збіжною, то простір називається *повним*. Повний нормований простір ще називають *банаховим* простором.

Розв'язання типових задач

Завдання 1. На множині \mathbf{R}^+ введено операції $x \oplus y = \{x, y\}$, $\lambda \otimes x = x^\lambda (\lambda \in \mathbf{R})$. Чи буде \mathbf{R}^+ з такими операціями утворювати лінійний простір?

Розв'язання. Зауважимо, що множина \mathbf{R}^+ – це множина додатніх дійсних чисел. Якщо $x, y \in \mathbf{R}^+$, то і $\max\{x, y\} \geq 0$, а також $x^\lambda > 0$, тобто дана множина замкнена відносно операцій \oplus і \otimes .

Перевіримо виконання аксіом лінійного простору:

$$\forall x, y : \max\{x, y\} = \max\{y, x\}$$

$$\forall x, y, z : \max\{\max\{x, y\}, z\} = \max\{x, \max\{y, z\}\},$$

тобто аксіоми комутативності та асоціативності виконуються. Перевіримо аксіому існування нуля:

$$\exists \tilde{0} \in \mathbf{R}^+ \quad \forall x \in \mathbf{R}^+ : \max(\tilde{0}, x) = x.$$

Але

$$\forall x \in \mathbf{R}^+, \forall y \in \mathbf{R}^+ \max(x, y) \neq 0,$$

тому дана множина не утворює лінійного простору.

Завдання 2. Чи утворюють у лінійному просторі неперервних на $[-1, 1]$ функцій $C_{[-1;1]}$ підпростір періодичні функції?

Розв'язання. Якщо функція $y = f(x)$ є періодичною з періодом T , то і функція $\lambda y = \lambda f(x)$ теж буде періодичною з тим же періодом, адже

$$f(x + T) = f(x) \Rightarrow \lambda f(x + T) = \lambda f(x).$$

Але якщо розглядати суму періодичних функцій, то вона буде періодичною лише у тому разі, якщо їх періоди мають спільне кратне. А це не завжди так, наприклад, функції $y = \sin x$ і $y = \sin \sqrt{2}x$ мають періоди відповідно 2π і $\sqrt{2}\pi$, для яких не існує спільного кратного, тобто числа, котре націло ділиться і на 2π , і на $\sqrt{2}\pi$.

Це означає, що періодичні функції не утворюють підпростору лінійного простору $C_{[-1;1]}$.

Завдання 3. Чи задає норму на лінійному просторі X функція $\|x\|$, якщо:

а) $X = C'_{[0,1]}$, $\|x(t)\| = \int_0^1 |x(t)| dt + \max_{x \in [0,1]} |x'(t)|$;

б) $X = \mathbf{R}^m$, $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i |x_j|^3 \right)^{\frac{1}{3}}$;

$$\text{в) } X = l_2, \|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{|x_i|};$$

$$\text{г) } X = m, \text{ де } m - \text{ множина всіх обмежених числових послідовностей } \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \|x\| = \max_{k \in N} x_k.$$

Розв'язання а) $C'_{[0,1]}$ це множина функцій неперервних на $[0, 1]$ разом зі своєю похідною. Тобто, $\forall x(t) \in C'_{[0,1]} \quad \exists \int_0^1 |x(t)| dt$ та $x'(t) \quad \forall t \in [0, 1]$.

Отже, функція $\|x\|$ є визначеною на всій множині $C'_{[0,1]}$. (Відмітимо, що на $C_{[0,1]}$ таке задання функції $\|x\|$ було б некоректним, адже $x'(t)$ існує не для всіх неперервних функцій. Наприклад, для неперервної функції $x = |t|$ не існує похідної у точці $t_0 = 0$.)

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt + \max_{x \in [0,1]} |x'(t)| \geq 0 \text{ як сума двох невід'ємних доданків.}$$

Перевіримо аксіоми норми:

$$1) \text{ Якщо } \|x\| = 0, \text{ то } \begin{cases} \int_0^1 |x(t)| dt = 0; \\ \max_{x \in [0,1]} |x'(t)| = 0. \end{cases} \quad \text{Друга умова системи має місце}$$

тоді і тільки тоді, коли $\forall t \in [0, 1] \quad |x'(t)| = 0 \Rightarrow x(t) = c = \text{const} \quad \forall t \in [0, 1]$. Але одночасно повинно виконуватись, що $\int_0^1 |x(t)| dt = 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0$

й перша аксіома виконується.

$$2) \forall \alpha \in \mathbf{R}$$

$$\|\alpha x\| = \int_0^1 |\alpha x(t)| dt + \max_{t \in [0,1]} |(\alpha x(t))'| = |\alpha| \int_0^1 |x(t)| dt + \\ + |\alpha| \max_{t \in [0,1]} |x'(t)| = |\alpha| \|x\|.$$

Тут використано властивість лінійності інтегрування та диференціювання.

$$3) \forall x, y \in C'_{[0,1]}$$

$$\|x + y\| = \int_0^1 |x(t) + y(t)| dt + \max_{t \in [0,1]} |(x(t) + y(t))'| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^1 (|x(t)| + |y(t)|)dt + \max_{t \in [0,1]} (|(x'(t) + y'(t))|) \leq \\ &\leq \int_0^1 |x(t)|dt + \max_{t \in [0,1]} |x'(t)| + \int_0^1 |y(t)|dt + \max_{t \in [0,1]} |y'(t)| = \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

В процесі оцінок використано нерівності $|a + b| \leq |a| + |b|$ та $\max_X (f(x) + g(x)) \leq \max_X f(x) + \max_X g(x)$, а також властивість лінійності інтеграла та похідної.

б) На множині \mathbf{R}^m функція $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i |x_j|^3 \right)^{\frac{1}{3}}$ є визначеною скрізь,

причому очевидно, що $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^m$.

1) Запишемо формулу для $\|x\|$ у іншій формі

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left(|x_1|^3 + (|x_1|^3 + |x_2|^3) + \dots + (|x_1|^3 + |x_2|^3 + \dots + |x_m|^3) \right)^{\frac{1}{3}} = \\ &= \left(m|x_1|^3 + (m-1)|x_2|^3 + \dots + |x_m|^3 \right)^{\frac{1}{3}} = 0 \iff \forall i = \overline{1, m} \quad |x_i| = 0, \end{aligned}$$

а, отже, $x = \theta$.

2)

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= (m|\alpha x_1|^3 + (m-1)|\alpha x_2|^3 + \dots + |\alpha x_m|^3)^{\frac{1}{3}} = \\ &= (m|\alpha|^3|x_1|^3 + (m-1)|\alpha|^3|x_2|^3 + \dots + |\alpha|^3|x_m|^3)^{\frac{1}{3}} = \\ &= |\alpha| (m|x_1|^3 + (m-1)|x_2|^3 + \dots + |x_m|^3)^{\frac{1}{3}} = |\alpha| \|x\|. \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= (m|x_1 + y_1|^3 + (m-1)|x_2 + y_2|^3 + \dots + |x_m + y_m|^3)^{\frac{1}{3}} = \\ &= (|\sqrt[3]{m}x_1 + \sqrt[3]{m}y_1|^3 + |\sqrt[3]{m-1}x_2 + \sqrt[3]{m-1}y_2|^3 + \dots + |x_m + y_m|^3)^{\frac{1}{3}} \leq \\ &\leq (|\sqrt[3]{m}x_1|^3 + |\sqrt[3]{m-1}x_2|^3 + \dots + |x_m|^3)^{\frac{1}{3}} + \\ &+ (|\sqrt[3]{m}y_1|^3 + |\sqrt[3]{m-1}y_2|^3 + \dots + |y_m|^3)^{\frac{1}{3}} = \\ &= (m|x_1|^3 + (m-1)|x_2|^3 + \dots + |x_m|^3)^{\frac{1}{3}} + \\ &+ (m|y_1|^3 + (m-1)|y_2|^3 + \dots + |y_m|^3)^{\frac{1}{3}} = \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Отже, $\|x\|$ задає норму на \mathbf{R}^m .

в) Для функції $\|x\|$ виконуються всі аксіоми норми, але разом з цим вона на норму не задає. Адже не для всіх елементів $x \in l_2$ функція $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ набуває скінченних значень. Наприклад, для $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right) \in l_2$ $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ розбіжний, а тому $\|x\|$ не є нормою в l_2 .

г) Якщо розглядати обмежену послідовність, яка складається лише з від'ємних членів (наприклад, $\left\{-1 + \frac{1}{n+1} : n \in \mathbf{N}\right\}$), то $\max_{n \in \mathbf{N}} x_n = -\frac{1}{2} < 0$, тому $\|x\|$ не задає норму на m .

Зауважимо, що навіть якби задати функцію $\|x\| = \max_{n \in \mathbf{N}} |x_n|$, то вона все одно не задавала б норму, адже не для всіх обмежених послідовностей існує максимальний елемент, наприклад, $\bar{\exists} \max_{n \in \mathbf{N}} \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$.

Завдання 4. Дослідити на збіжність у нормованому просторі послідовність $\{x_n, n \in \mathbf{N}\}$ якщо:

а) $E = C'_{[0,1]}$, $x_n(t) = \cos t - \cos \frac{t}{n}$;

б) $E = L_3[0, 1]$, $x_n(t) = \frac{nt}{\sqrt{1+n^2}}$

в) $E = l_2$, $x_n = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}, \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \dots\right)$;

г) $E = C_{[0,1]}$, $x_n(t) = e^{-nt}$;

д) $E = l_1$, $x_n = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$.

Розв'язання. а) На просторі $C'_{[0,1]}$ норму задаємо формулою:

$$\|x\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |x'(t)|$$

(перевірку зробити читачу).

Знайдемо поточкову границю послідовності x_n .

$$x_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos t - \cos \frac{t}{n}\right) = \cos t - \cos 0 = \cos t - 1$$

$\cos t - 1 \in C'_{[0,1]}$, тому далі дослідимо значення $\|x_n - x_0\|$.

$$\begin{aligned} \|x_n - x_0\| &= \left\| \cos t - \cos \frac{t}{n} - \cos t + 1 \right\| = \left\| 1 - \cos \frac{t}{n} \right\| = \\ &= \max_{t \in [0,1]} \left| 1 - \cos \frac{t}{n} \right| + \max_{t \in [0,1]} \left| \left(1 - \cos \frac{t}{n} \right)' \right|. \end{aligned}$$

Розглянемо обидва доданки в правій частині останньої рівності.

$\left(1 - \cos \frac{t}{n} \right)' = \frac{1}{n} \sin \frac{t}{n} = 0$ при $\frac{t}{n} = \pi k$. Позначимо $t_n = \pi nk$, $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Із усіх значень t_n проміжку $[0, 1]$ належать тільки $t_0 = 0$.

$$\left| 1 - \cos \frac{t}{n} \right|_{t=0} = |1 - 1| = 0, \quad \left| 1 - \cos \frac{t}{n} \right|_{t=1} = \left| 1 - \cos \frac{1}{n} \right| = 1 - \cos \frac{1}{n}.$$

Тому $\max_{t \in [0,1]} \left| 1 - \cos \frac{t}{n} \right| = 1 - \cos \frac{1}{n} \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$.

$\left(1 - \cos \frac{t}{n} \right)'' = \left(\frac{1}{n} \sin \frac{t}{n} \right)' = \frac{1}{n^2} \cos \frac{t}{n} = 0$ при $\frac{t}{n} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

$t_n = \frac{\pi}{2}n + \pi nk$ $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Жодне зі значень $t_n \notin [0, 1]$, тому обчислюємо значення тільки на кінцях проміжку.

$$\begin{aligned} \left| \left(1 - \cos \frac{t}{n} \right)' \right|_{t=0} &= \left| \frac{1}{n} \sin \frac{t}{n} \right|_{t=0} = 0. \\ \left| \left(1 - \cos \frac{t}{n} \right)' \right|_{t=1} &= \left| \frac{1}{n} \sin \frac{t}{n} \right|_{t=1} = \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Тобто $\max_{t \in [0,1]} \left| \left(1 - \cos \frac{t}{n} \right)' \right| = \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Таким чином, $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, отже x_n є збіжною в $C'_{[0,1]}$.

б) Досліджуючи на поточкову збіжність x_n , знайдемо:

$$x_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nt}{\sqrt{n^2 + 1}} = t,$$

$t \in L_3[0, 1]$, тому є сенс досліджувати числову послідовність $\{\|x_n - x_0\|\}$.

$$\|x_n - x_0\| = \sqrt[3]{\int_0^1 |x_n(t) - x_0(t)|^3 dt} = \sqrt[3]{\int_0^1 \left| \frac{nt}{\sqrt{n^2 + 1}} - t \right|^3 dt} =$$

$$= \left| \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} - 1 \right| \sqrt[3]{\int_0^1 t^3 dt} = \left| \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} \right| \sqrt[3]{\frac{t^4}{4} \Big|_0^1} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \left| \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} \right|.$$

Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}(n + \sqrt{n^2+1})} = 0,$$

то $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тобто $x_n \in$ збіжною в $L_3[0, 1]$.

$$в) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}, \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \dots \right) = (0, 0, \dots).$$

Поточкова границя $x_0 = (0, 0, \dots) \in l_2$, тому досліджуємо

$$\|x_n - x_0\| = \|x_n\| = \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} (x_n^{(k)})^2} = \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}}.$$

Даний вираз прямує до нуля як залишок збіжного ряду, тому і послідовність є збіжною.

г) Поточкова границя

$$x_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nt} = \begin{cases} 0, & t \in (0, 1]; \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Оскільки $x_0(t) \notin C_{[0,1]}$, то дана послідовність не буде збіжною навіть поточною.

д) Поточною границею послідовності x_n буде $x_0 = (0, 0, \dots) \in l_1$.

$$\|x_n - x_0\| = \|x_n\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_n^{(k)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

як залишок розбіжного ряду і тому збіжності числової послідовності $\{\|x_n - 0\|\}$ до нуля при $n \rightarrow \infty$ немає.

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. На множині X введено операції $x \oplus y$, $\lambda \otimes x$. Чи буде X з такими операціями утворювати лінійний простір, якщо:

1. $X = \mathbf{R}^+$, $x \oplus y = x + y$, $\lambda \otimes x = \lambda x$, ($\lambda \in \mathbf{R}$);

2. $X = \mathbf{R}$, $x \oplus y = xy$, $\lambda \otimes x = \lambda x$, $(\lambda \in \mathbf{R})$;
3. $X = \mathbf{R}$, $x \oplus y = \max(|x|, |y|)$, $\lambda \otimes x = \lambda x$, $(\lambda \in \mathbf{R})$;
4. $X = \mathbf{R}$, $x \oplus y = \max(x, y)$, $\lambda \otimes x = \lambda x$, $(\lambda \in \mathbf{R})$;
5. $X = \mathbf{R}$, $x \oplus y = xy$, $\lambda \otimes x = x^\lambda$, $(\lambda \in \mathbf{R})$;
6. $X = \mathbf{R}$, $x \oplus y = x + y$, $\lambda \otimes x = \lambda x$, $(\lambda \in \mathbf{R})$;
7. $X = \mathbf{R}$, $x \oplus y = \max(|x|, |y|)$, $\lambda \otimes x = x^\lambda$, $(\lambda \in \mathbf{R})$;
8. $X = \mathbf{R}^+$, $x \oplus y = xy$, $\lambda \otimes x = \lambda x$, $(\lambda \in \mathbf{R})$;
9. $X = \mathbf{R}^+$, $x \oplus y = xy$, $\lambda \otimes x = \lambda x$, $(\lambda \in \mathbf{R})$;
10. $X = \mathbf{R}^+$, $x \oplus y = \max(|x|, |y|)$, $\lambda \otimes x = \lambda x$, $(\lambda \in \mathbf{R})$.

Завдання 2. Чи утворюють в лінійному просторі $C_{[-1,1]}$ підпростір такі множини:

1. двічі неперервно диференційовні функції;
2. непарні функції;
3. періодичні функції;
4. монотонно зростаючі функції;
5. функції, для яких $x(0) = 0$;
6. функції, для яких $\int_{-1}^1 x(t) dt = 0$;
7. функції, для яких $\int_{-1}^0 x(t) dt = \int_0^1 x(t) dt$;
8. квадратичні функції;
9. многочлени фіксованого степеня;
10. монотонні функції.

Завдання 3. Чи задає норму в лінійному просторі L функція $\|x\|$, якщо:

1. $L = C_{[0,1]}$, $\|x(t)\| = \int_0^1 |p(t)x(t)| dt$, $p(t) \in C_{[0,1]}$, $p(t) \neq 0$;
2. $L = C_{[a,b]}^2$, $\|x(t)\| = |x'(a)| + |x'(b)| + \max_{t \in [a,b]} |x''(t)|$;

3. $L = \mathbf{R}^m$, $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^i x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$;
4. $L = C_{[0,1]}$, $\|x(t)\| = \left(\int_0^1 x^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$;
5. $L = \mathbf{R}^m$, $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^m (\alpha_k x_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $\alpha \in \mathbf{R}^m$;
6. $L = C_{[a,b]}^2$, $\|x(t)\| = \int_a^b |x(t)| dt + \max_{t \in [a,b]} |x''(t)|$;
7. $L = C_{[a,b]}^2$, $\|x(t)\| = |x(a)| + \max_{t \in [a,b]} |x''(t)|$;
8. $L = C_0$ (множина збіжних до нуля послідовностей), $\|x(t)\| = \max_{k \in \mathbf{N}} |x_k|$;
9. $L = \mathbf{R}^m$, $\|x\| = \sum_{i=1}^m \frac{|x_i|}{2^i}$;
10. $L = C$ (множина всіх збіжних послідовностей), $\|x(t)\| = \inf_{k \in \mathbf{N}} |x_k|$.

Завдання 4. Чи буде збіжною в нормованому просторі E послідовність $\{x_n, n \in \mathbf{N}\}$, якщо:

1. $E = l_2$, $x_n = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots \right)$;
2. $E = L_2[0, 1]$, $x_n(t) = t^n$;
3. $E = C'_{[0,1]}$, $x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^n}{n}$;
4. $E = l_2$, $x_n = \left(\underbrace{1, 0, \dots, 0}_n, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots \right)$;
5. $E = C_{[0,1]}$, $x_n(t) = t^n$;
6. $E = L_2[0, 1]$, $x_n(t) = nt^n$;
7. $E = L_2[0, 1]$, $x_n(t) = \sin t - \sin \frac{t}{n}$;
8. $E = C'_{[0,1]}$, $x_n(t) = \sin t - \sin \frac{t}{n}$;

9. $E = L_2 [0, 1]$, $x_n (t) = nt^{n-1}$;

10. $E = C_{(-\infty, \infty)}$, $x_n (t) = \sqrt[4]{t^4 + \frac{1}{n^4}}$.

3 Гільбертів простір

Перелік необхідних питань теорії

1. Поняття евклідового простору, гільбертового простору.
2. Властивості скалярного добутку.
3. Нерівність Коші-Буняковського.
4. Існування ортогональних базисів, ортогоналізація.
5. Ізоморфізм гільбертових просторів.
6. Підпростори, ортогональні доповнення, лінійний многовид.
7. Проекція елемента на підпростір гільбертового простору.

Теоретичні відомості

Одним із способів введення норми в лінійному просторі є введення в ньому поняття скалярного добутку. *Скалярним добутком* двох елементів x та y з лінійного простору H називається дійсне число (x, y) , що задовольняє умовам:

1. $(x, x) \geq 0$, причому $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
2. $\forall x, y \in H : (x, y) = (y, x)$;
3. $\forall \alpha \in \mathbf{R} : (\alpha x, y) = \alpha (x, y)$;
4. $\forall x, y, z \in H : (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Якщо у дійсному лінійному просторі H введено скалярний добуток, то цей простір називається *евклідовим*. Комплексний лінійний простір H називається *унітарним*, якщо кожній парі його елементів x та y ставиться у відповідність комплексне число (x, y) , й виконуються наступні умови:

1. $(x, x) \geq 0$, причому $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
2. $\forall x, y \in H : (x, y) = \overline{(y, x)}$,
3. $\forall \alpha \in \mathbf{C} : (\alpha x, y) = \alpha (x, y)$;
4. $\forall x, y, z \in H : (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

У кожному евклідовому чи унітарному просторі H за допомогою скалярного добутку можна ввести норму, поклавши $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Таким чином дійсний чи комплексний лінійний простір H стає нормованим простором. Якщо для нормованого простору норма визначається рівністю $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, то цю норму називають породженою скалярним добутком. Щоб у нормованому просторі H можна було ввести скалярний добуток так, щоб він породжував норму, необхідно і досить, щоб для всіх його елементів x та y виконувалась рівність:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Ця рівність характеризує відому властивість паралелограма в евклідовому просторі.

Нескінченно вимірний простір H зі скалярним добутком називається *гільбертовим*, якщо він є повним відносно норми, що породжена скалярним добутком (або є повним в розумінні метрики $\rho(x, y) = \|x - y\|$).

Кутом між ненульовими елементами евклідового простору називається кут $\varphi \in [0, \pi]$ такий, що $\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$. Якщо $\cos \varphi = 0$, то елементи x та y називаються *ортогональними* (позначають $x \perp y$). Очевидно, ортогональними є такі і тільки такі елементи $x, y \in H \setminus \{0\}$, для яких скалярний добуток $(x, y) = 0$.

Лінійним многовидом в гільбертовому просторі H називається така сукупність L елементів із H , що якщо $x, y \in L$, то $\alpha x + \beta y \in L$ для будь-яких чисел α і β . Замкнений лінійний многовид L в гільбертовому просторі H називається *підпростором* цього простору H .

Якщо елемент $x \in H$ є ортогональним до всіх елементів деякої множини $L \subset H$, то кажуть, що x *ортогональний* до L і позначають $x \perp L$. Множина всіх елементів $x \in H$, що ортогональні до L , називається *ортогональним доповненням* до L і позначається L^\perp . Відомо, що L^\perp завжди є лінійним підпростором простору H , навіть якщо L і не є підпростором. Якщо ж L – підпростір, то має місце наступна властивість:

Нехай H – гільбертів простір, $L \subset H$ – підпростір. Тоді $H = L \oplus L^\perp$, тобто довільний елемент $x \in H$ єдиним чином зображається у вигляді $x = u + v$, де $u \in L$, $v \in L^\perp$. При цьому $\rho(x, L) = \|x - u\| = \|v\|$. Елемент u називається *проекцією* елемента x на підпростір L .

Якщо M – замкнена множина у гільбертовому просторі H , то для довільного $x \notin H$ існує єдиний елемент $y \in M$ такий, що $\rho(x, M) = \|x - y\|$.

Система елементів e_1, e_2, \dots в евклідовому (унітарному) просторі називається *ортогональною*, якщо $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$ і *ортонормованою*,

якщо $(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Будь-яку систему $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ лінійно незалежних елементів можна перетворити в ортонормовану з допомогою процесу ортогоналізації Шмідта. Покладемо $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Нехай $y_2 = x_2 - c_{21}e_1$. Підберемо число c_{21} так, щоб $y_2 \perp e_1$. Очевидно, для цього треба взяти $c_{21} = (x_2, e_1)$. Покладемо $e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$. Нехай e_1, e_2, \dots, e_{n-1} уже побудовані. Візьмемо $y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} c_{nk}e_k$, де $c_{nk} = (x_n, e_k)$, і нарешті одержимо $e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$.

Розв'язання типових задач

Завдання 1. Чи задають скалярний добуток у просторі \mathbf{R}^2 функції:

а) $(x, y) = |x_1 + y_1| |x_2 + y_2|$;

б) $(x, y) = \sqrt{x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2}$.

Розв'язання. У кожному випадку скалярний добуток (x, y) як функція є визначеною на всій множині \mathbf{R}^2 , тому необхідно перевірити аксіоми скалярного добутку.

а)

$$(x, x) = |2x_1| |2x_2| = 4 |x_1 x_2| \geq 0.$$

Але для того, щоб $(x, x) = 0$ в нашому прикладі достатньо, щоб виконувалась лише одна із умов: $x_1 = 0$ або $x_2 = 0$. Тобто, можливо, що $(x, x) = 0$, але $x \neq \theta$. Отже, функція (x, y) не задає скалярного добутку на \mathbf{R}^2 .

б)

$$(x, x) = \sqrt{x_1^2 x_1^2 + x_2^2 x_2^2} = \sqrt{x_1^4 + x_2^4} \geq 0.$$

Якщо $(x, x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x_1^4 + x_2^4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow x = \theta$. Навпаки, при $x = \theta$ $(x, x) = 0$.

$$(x, y) = \sqrt{x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2} = \sqrt{y_1^2 x_1^2 + y_2^2 x_2^2} = (y, x).$$

$$\begin{aligned} (\alpha x, y) &= \sqrt{(\alpha x_1)^2 y_1^2 + (\alpha x_2)^2 y_2^2} = \sqrt{\alpha^2 (x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2)} = \\ &= |\alpha| \sqrt{(x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2)} = |\alpha| (x, y) \neq \alpha (x, y), \end{aligned}$$

тобто дана функція не задає скалярний добуток на \mathbf{R}^2 .

Завдання 2. Нехай H – гільбертів простір, норма в якому породжується скалярним добутком. Довести, що $\forall x, y \in H$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

(рівність паралелограма).

Розв'язання. Насамперед варто звернути увагу на те, що справжній паралелограм довелося б розглядати лише у просторах \mathbf{R}^2 та \mathbf{R}^3 (на площині та у просторі). Тут вона більш звична нам у геометричній інтерпретації, відомій зі шкільного курсу математики: у будь-якому паралелограмі сума квадратів довжин сторін дорівнює сумі квадратів довжин діагоналей. Для всіх інших множин H паралелограм суто умовний.

Той факт, що норма в H породжена скалярним добутком, означає, що $\forall x \in H \quad \|x\| = \sqrt{(x, x)}$. З огляду на цю властивість, запишемо $\forall x, y \in H$

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) = \\ &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = \\ &= 2 ((x, x) + (y, y)) = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Рівність доведено.

Завдання 3. Довести, що норма не породжується скалярним добутком в просторах:

а) $C_{[a,b]}$,

б) $l_p, \quad 1 \leq p \neq 2$.

Розв'язання. Використаємо результат попередньої задачі, і в обох випадках підберемо елементи x та y так, щоб рівність паралелограма не виконувалась.

а) Розглянемо конкретний простір, наприклад, $C_{[0,1]}$. Функції $x(t)$ і $y(t)$ із $C_{[0,1]}$ виберемо так, щоб одна з них була сталою, а друга – лінійною, наприклад, нехай $x(t) = 1$, $y(t) = t$. При цьому $x(t) + y(t) = t + 1$, $x(t) - y(t) = 1 - t$.

В просторі $C_{[a,b]}$ – множині неперервних на $[a, b]$ функцій, ми вводили норму $\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$. Тоді норми одержаних функцій: $\|x(t)\| = 1$, $\|y(t)\| = 1$, $\|x(t) + y(t)\| = 2$, $\|x(t) - y(t)\| = 1$. Підставимо одержані числа у рівність паралелограма, і одержимо: $2^2 + 1^2 \neq 2(1^2 + 1^2)$. Оскільки рівність паралелограма не виконується принаймні для однієї пари функцій, то норма не породжується скалярним добутком.

Доцільно зауважити, що ми довели потрібне твердження, не задаючи на множині $C_{[a,b]}$ скалярного добутку. З огляду на це, задачу можна було сформулювати так: довести, що на просторі $C_{[a,b]}$ не можна задати скалярний добуток так, щоб він породжував норму.

б) На просторах l_p виберемо наступні елементи:

$$x = (1, 1, 0, 0, \dots), \quad y = (1, -1, 0, 0, \dots).$$

При цьому одержимо $x + y = (2, 0, 0, \dots)$, $x - y = (0, 2, 0, 0, \dots)$, а норми елементів x , y , $x + y$, $x - y$ (враховуючи визначення $\|x\| = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p}$) дорівнюватимуть

$$\|x\| = \sqrt[p]{2}, \quad \|y\| = \sqrt[p]{2}, \quad \|x + y\| = 2, \quad \|x - y\| = 2.$$

Підставляючи одержані значення в рівність паралелограма, одержимо співвідношення,

$$\begin{aligned} 2^2 + 2^2 &= 2 \left(2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}} \right), \\ 8 &= 4 \cdot 2^{\frac{2}{p}}, \end{aligned}$$

що справедливе лише при $p = 2$. Тобто скалярний добуток не породжує норми на l_p .

Завдання 4. У гільбертовому просторі H визначити ортогональне доповнення L^\perp , якщо:

а) $H = l_2$, $L = \{x \in l_2 : x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots), \quad \xi_i \in \mathbf{R}^+\}$ (n – фіксоване);

б) $H = L_2[-1, 1]$, $L = \left\{ x(t) : x(t) = 0, t \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right] \right\}$.

Розв'язання. а) Якщо $y \in L^\perp$, то $\forall x \in L \quad (x, y) = 0$. Крім того, за визначенням скалярний добуток

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \dots + \xi_n y_n = 0,$$

якщо тільки $y_k = 0 \quad \forall k = \overline{1, n}$. Тобто

$$L^\perp = \left\{ y \in l_2 : y = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots \right), y_{n+1}, y_{n+2}, \dots - \text{будь-які.} \right\}$$

б) Скалярний добуток в просторі $L_2[-1, 1]$

$$\begin{aligned}(x, y) &= \int_{-1}^1 x(t)y(t)dt = \int_{-1}^{-\frac{1}{3}} x(t)y(t)dt + \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} x(t)y(t)dt + \int_{\frac{1}{3}}^1 x(t)y(t)dt = \\ &= \int_{-1}^{\frac{1}{3}} x(t)y(t)dt + \int_{\frac{1}{3}}^1 x(t)y(t)dt = 0\end{aligned}$$

якщо виконується умова $y(t) = 0 \quad \forall t \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; 1\right]$. Тобто

$$L^\perp = \left\{ y \in L_2[-1; 1] : y(t) = 0 \quad \forall t \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; 1\right] \right\}.$$

Завдання 5. Знайти проекцію елемента $x(t) = \sin \frac{\pi}{2}t$ із простору $L_2[0, 1]$ на підпростір L цього простору, породжений елементами $a_1(t) = 1$, $a_2(t) = t$, $a_3(t) = t^2$.

Розв'язання. Кожен елемент простору L зображається у вигляді $u = c_0 + c_1t + c_2t^2$, де c_0, c_1, c_2 — дійсні числа. Щоб різниця $x - u$ була ортогональна до будь-якого елемента $v \in L$, достатньо щоб ця різниця була ортогональною до базисних елементів підпростору L , тобто до елементів $1, t, t^2$. Тому розглянемо систему скалярних добутків:

$$\begin{cases} \left(\sin \frac{\pi}{2}t - c_0 - c_1t - c_2t^2, 1 \right) = 0; \\ \left(\sin \frac{\pi}{2}t - c_0 - c_1t - c_2t^2, t \right) = 0; \\ \left(\sin \frac{\pi}{2}t - c_0 - c_1t - c_2t^2, t^2 \right) = 0. \end{cases}$$

Користуючись властивостями скалярного добутку, запишемо дану систему у вигляді

$$\begin{cases} (c_0 + c_1t + c_2t^2, 1) = \left(\sin \frac{\pi}{2}t, 1 \right); \\ (c_0 + c_1t + c_2t^2, t) = \left(\sin \frac{\pi}{2}t, t \right); \\ (c_0 + c_1t + c_2t^2, t^2) = \left(\sin \frac{\pi}{2}t, t^2 \right). \end{cases}$$

Звідси одержимо

$$\begin{cases} c_0 \int_0^1 dt + c_1 \int_0^1 t dt + c_2 \int_0^1 t^2 dt = \int_0^1 \sin \frac{\pi}{2}t dt; \\ c_0 \int_0^1 t dt + c_1 \int_0^1 t^2 dt + c_2 \int_0^1 t^3 dt = \int_0^1 t \sin \frac{\pi}{2}t dt; \\ c_0 \int_0^1 t^2 dt + c_1 \int_0^1 t^3 dt + c_2 \int_0^1 t^4 dt = \int_0^1 t^2 \sin \frac{\pi}{2}t dt. \end{cases}$$

Обчислимо всі інтеграли, які фігурують у цій системі: $\int_0^1 dt = 1$, $\int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$, $\int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}$, $\int_0^1 t^4 dt = \frac{1}{5}$, $\int_0^1 \sin \frac{\pi}{2} t dt = \frac{2}{\pi}$, $\int_0^1 t \sin \frac{\pi}{2} t dt = \frac{4}{\pi^2}$, $\int_0^1 t^2 \sin \frac{\pi}{2} t dt = \frac{8\pi - 16}{\pi^3}$.

Таким чином, система набуде вигляду системи лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів c_0, c_1, c_2 :

$$\begin{cases} c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = \frac{2}{\pi}; \\ \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{4}c_2 = \frac{4}{\pi^2}; \\ \frac{1}{3}c_0 + \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{5}c_2 = \frac{8\pi - 16}{\pi^3}. \end{cases}$$

Розв'яжемо її методом Гаусса:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{\pi} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{4}{\pi^2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{8\pi - 16}{\pi^3} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{\pi} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{4}{\pi^2} - \frac{\pi}{\pi^2} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{45} & \frac{8\pi - 16 - 2\pi^2}{\pi^3} \end{array} \right) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{\pi} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{4}{\pi^2} - \frac{\pi}{\pi^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{4\pi - 16 - \pi^2}{\pi^3} \end{array} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = \frac{2}{\pi}; \\ \frac{1}{12}c_1 + \frac{1}{12}c_2 = \frac{4}{\pi^2} - \frac{\pi}{\pi^2}; \\ \frac{1}{180}c_2 = \frac{4\pi - 16 - \pi^2}{\pi^3}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{180(4\pi - 16 - \pi^2)}{\pi^3}; \\ c_1 = \frac{168\pi^2 - 472\pi + 2080}{\pi^3}; \\ c_0 = \frac{66\pi^2 - 256\pi + 960}{\pi^3}. \end{cases}$$

Таким чином, проекція елемента $\sin \frac{\pi}{2} t$ на підпростір, породжений елементами $1, t, t^2$ визначається так:

$$u(t) = \frac{180(4\pi - 16 - \pi^2)}{\pi^3} t^2 + \frac{168\pi^2 - 472\pi + 2080}{\pi^3} t + \frac{66\pi^2 - 256\pi + 960}{\pi^3}.$$

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. Чи задає скалярний добуток в просторі \mathbf{R}^2 наступна функція:

1. $(x, y) = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2)$;
2. $(x, y) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$;
3. $(x, y) = |x_1 + x_2||y_1 + y_2|$;
4. $(x, y) = x_1y_2$;
5. $(x, y) = (x_1 + y_1)^2(x_2 + y_2)^2$;
6. $(x, y) = |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|$;
7. $(x, y) = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2$;
8. $(x, y) = \sqrt{x_1y_1 + x_2y_2}$;
9. $(x, y) = x_1 + y_2$;
10. $(x, y) = x_1x_2 + y_1y_2$.

Завдання 2. У просторі H знайти L^\perp , якщо:

1. $H = L_2[-1, 1]$, $L = \{x(t) = ct, c \in \mathbf{R}\}$;
2. $H = l_2$, $L = \left\{ \left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n, 0, 0, \dots \right) \right\}$ (n – фіксоване число);
3. $H = L_2[-1, 1]$, $L = \left\{ x(t) : x(t) = 0 \quad \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\}$;
4. $H = l_2$, $L = \{x \in l_2 : x = (\xi_1, 0, \xi_3, 0, \xi_5, \dots), \xi_{2n-1} \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}\}$;
5. $H = l_2$, $L = \{x \in l_2 : x = (\xi_1, 0, 0, 0, \dots), \xi_1 \in \mathbf{R}\}$;
6. $H = L_2[-\pi, \pi]$, $L = \{x(t) = \cos nt, n \in \mathbf{N}\}$;
7. $H = l_2$, $L = \left\{ \left(\underbrace{1, 0, 0, \dots, 1}_{2n+1}, 0, 0, \dots \right), n \in \mathbf{N} \right\}$;

$$8. H = l_2, L = \left\{ \left(\underbrace{1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0}_{2n}, \xi_{2n+1}, \xi_{2n+2}, \dots \right), \xi_{2n+1}, \xi_{2n+2}, \dots \in \mathbf{R}, \right. \\ \left. n \in \mathbf{N} \right\};$$

$$9. H = l_2, L = \{x \in l_2 : x = (\xi_1, 0, 0, 0, \dots), \xi_1 \in \mathbf{R}\};$$

$$10. H = L_2[-\pi, \pi], L = \{x(t) = \sin nt, n \in \mathbf{N}\}.$$

Завдання 3. Знайти проекцію елемента x із гільбертового простору H на його підпростір, породжений елементами a_1, a_2, a_3 , якщо:

$$1. x(t) = \sqrt[3]{1+t}, H = L_2[0, 1], a_1(t) = 1, a_2(t) = t, a_3(t) = t^2;$$

$$2. x(t) = \sin \pi t, H = L_2[0, 1], a_1(t) = 1, a_2(t) = t, a_3(t) = t^2;$$

$$3. x(t) = e^t - 2, H = L_2[0, 1], a_1(t) = 1, a_2(t) = t, a_3(t) = t^2;$$

$$4. x = (1, 1, 2, 1, 0, 0, \dots), H = l_2, a_1 = (3, 0, 0, \dots), a_2 = (1, 1, 0, 0, \dots), \\ a_3 = (2, 1, 2, 0, 0, \dots);$$

$$5. x = (2, 3, 2, 3, 0, 0, \dots), H = l_2, a_1 = (1, 0, 0, 0, \dots), \\ a_2 = (1, 1, 1, 0, 0, \dots), a_3 = (0, -1, 1, 0, 0, \dots);$$

$$6. x = (5, 4, 3, 2, 0, 0, \dots), H = l_2, a_1 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots), \\ a_2 = (0, 1, 1, 0, 0, \dots), a_3 = (1, 0, 2, 0, 0, \dots);$$

$$7. x(t) = (t-1)^2, H = L_2[0, 1], a_1(t) = 1, a_2(t) = t, a_3(t) = t^2;$$

$$8. x(t) = \operatorname{ch} t, H = L_2[0, 1], a_1(t) = 1, a_2(t) = t, a_3(t) = t^2;$$

$$9. x = (-2, 2, -2, 2, 0, 0, \dots), H = l_2, a_1 = (0, 1, 2, 3, 0, 0, 0, \dots), \\ a_2 = (0, 0, -1, 3, 0, 0, \dots), a_3 = (0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, \dots);$$

$$10. x = (5, 4, 3, 2, 0, 0, \dots), H = l_2, a_1 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots), a_2 = (0, 1, 1, 0, 0, \dots), \\ a_3 = (1, 0, 2, 0, 0, \dots).$$

4 Лінійні функціонали і лінійні оператори. Простори операторів

Перелік необхідних питань теорії

1. Лінійні неперевні функціонали. Норма функціонала.
2. Лінійні неперевні оператори. Норма оператора.
3. Спряжені простори. Сильна топологія в спряженому просторі.
4. Слабка топологія і слабка збіжність в лінійному топологічному просторі.
5. Слабка топологія в спряженому просторі.
6. Приклади лінійних функціоналів і лінійних операторів.
7. Простір операторів. Обернений оператор, оборотність.

Теоретичні відомості

Числова функція f , визначена на деякому лінійному просторі L , називається *функціоналом*. Функціонал, визначений в дійсному лінійному просторі називається *лінійним*, якщо $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ для $\forall x, y \in L, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Функціонал f , визначений на топологічному лінійному просторі E , називається *неперервним* на E , якщо $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x_0 \in E$ знайдеться окіл U елемента x_0 такий, що $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для $\forall x \in U$.

Для неперервного лінійного функціонала f в нормованому просторі E число $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$ називається *нормою функціонала f* .

Відображення $A : X \rightarrow Y$ називається *лінійним оператором*, що діє із лінійного топологічного простору X в лінійний топологічний простір Y , якщо виконуються такі умови:

1. $(\forall x, y \in X) \quad A(x + y) = Ax + Ay;$
2. $(\forall x \in X) (\forall \alpha \in \mathbf{R}) \quad A(\alpha x) = \alpha Ax.$

Іноді ці дві умови замінюють на одну, більш загальну:

$$(\forall x, y \in X) (\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}) \quad A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Областю визначення оператора A є сукупність D всіх тих $x \in X$, для яких оператор A заданий. Вважають, що D – лінійний многовид, причому не вимагається виконання рівності $D = X$.

Оператор $A : X \rightarrow Y$ називається *обмеженим*, якщо

$$(\exists C \in \mathbf{R}^+) (\forall x \in X) \|Ax\| \leq C \|x\|.$$

Оператор $A : X \rightarrow Y$ називається *неперервним* у точці $x_0 \in X$, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta_\varepsilon > 0) (\forall x \|x - x_0\| < \delta) \Rightarrow (\|A(x - x_0)\| < \varepsilon).$$

Якщо оператор є лінійним і обмеженим, то він неперервний.

Для будь-якого обмеженого оператора A , що діє із нормованого простору в нормований

$$\|A\| = \sup_{x \in X: \|x\| < 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \in X: \|x\| > 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Таким чином, *лінійним неперервним функціоналом* називається лінійний неперервний оператор $f : X \rightarrow R$. Оскільки функціонал – особливий вид оператора, то всі твердження, сформульовані для операторів, справедливі і для функціоналів.

Для лінійних функціоналів, заданих в лінійному просторі E , визначають операції додавання і множення їх на число так: *сумою* $f_1 + f_2$ двох лінійних функціоналів f_1 і f_2 на лінійному просторі E називають такий функціонал $f = f_1 + f_2$, для якого $\forall x \in E$ справедлива рівність $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а *добутком* $\alpha \cdot f$ лінійного функціонала f на число α називається функціонал $f(x) = \alpha \cdot f(x) \quad \forall x \in E$.

Зауважимо, що рівності, якими визначається сума двох функціоналів і добуток функціонала на число α , можуть бути записані так:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Сукупність всіх неперервних лінійних функціоналів, заданих на деякому топологічному лінійному просторі E , утворюють лінійний простір. Цей лінійний простір називається *спряженим* до простору E і позначається символом E^* .

Серед різних способів введення топології в спряженому просторі E^* важливими є *сильна* і *слабка* топології.

Для неперервних лінійних функціоналів, визначених в нормованих просторах E , норма функціонала $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$ задовольняє всім

вимогам, що містяться у визначенні нормованого простору. Тобто, спряженому простору E^* притаманна структура нормованого простору. Топологія в E^* , що відповідає введеній вище нормі, називається *сильною* топологією в E^* .

Структура простору H^* , спряженого до гільбертового H , стає очевидною, сформулювавши таку теорему: для кожного неперервного лінійного функціонала f , заданого в дійсному гільбертовому просторі H , існує єдиний елемент $x_0 \in H$, такий, що $f(x) = (x, x_0) \quad \forall x \in H$, причому $\|f\| = \|x_0\|$. І навпаки. Якщо $x_0 \in H$, тоді формула $f(x) = (x, x_0)$ визначає такий неперервний лінійний функціонал f , що $\|f\| = \|x_0\|$.

Нехай E – лінійний топологічний простір, на якому задана сукупність всіх неперервних функціоналів $\{f\}$. Виберемо скінченне число функціоналів: $f_1, f_2, \dots, f_n, n \in \mathbf{N}$. Для $\forall \varepsilon > 0$ множина $\{x \in E \mid |f_i(x)| < \varepsilon\}, i = 1, 2, \dots, n$, є відкритою в просторі E і, очевидно, є деяким оточенням нульового елемента E . Топологія в E , для якої сукупність $\{x \in E \mid |f_i(x)| < \varepsilon\}, i = 1, 2, \dots, n$, є визначальною системою оточень нуля, називається *слабкою* топологією в просторі E . Якщо E нормований простір, то слабка топологія в E задовольняє аксіомі віддільності Хаусдорфа. Збіжність в E , що визначається слабкою топологією, називається *слабкою збіжністю*. Інакше поняття слабкої збіжності формулюється так: послідовність (x_n) елементів із E називається *слабко збіжною* до елемента $x_0 \in E$, якщо для будь-якого неперервного лінійного функціонала $\varphi(x)$, заданого на E , числова послідовність $(\varphi(x_n))$ збіжна до $\varphi(x_0)$. Кожна слабка збіжна послідовність елементів у нормованому просторі є обмеженою. Приймаючи за систему оточень нуля сукупність множин виду $\{f \mid |f(x)| < \varepsilon, x \in A\}$, де A – довільна обмежена множина в E , а ε – будь-яке додатне число, тоді в спряженому просторі E^* ми дістанемо топологію, яка називається *сильною*. Якщо ж замість всіх обмежених множин в E розглядати всі скінченні підмножини $A \subset E$, тоді ми матимемо *слабку топологію в спряженому просторі E^** . Оскільки кожна скінченна множина $A \subset E$ обмежена (але не навпаки), тому слабка топологія простору E^* є слабшою ніж сильна топологія.

Слабка збіжність послідовності (φ_n) лінійних функціоналів у спряженому просторі E^* є збіжністю на кожному фіксованому елементі із E :

$$\varphi_n(x) \xrightarrow{x \in E} \varphi(x) \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ де } \varphi_n, \varphi \in E^*.$$

В спряженому просторі E^* послідовність (φ_n) , яка є збіжною в сильній топології, є збіжною і в слабкій топології (але не навпаки).

Розглянемо приклади лінійних неперервних функціоналів в основних просторах:

1. $\mathbf{R} : f(x) = ax, a \in \mathbf{R}$. При цьому $\|f\| = |a|$.
2. $\mathbf{R}^n : f(x) = \sum_{k=1}^n a_k x_k, (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$. $\|f\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}$.
3. $l_p (p > 1) : \text{будь-який неперервний лінійний функціонал визначений в просторі } l_p \text{ зображується у вигляді } f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in l_q, \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. $\|f\| = \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q}$, де $q = \frac{p}{1-p}$. Простір, спряжений до простору l_p , є ізометричним простору l_q .
4. $l_1 : \text{Кожний неперервний лінійний функціонал } f \text{ в просторі } l_1 \text{ зображується у виді } f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \text{ – обмежена послідовність. Тоді } \|f\| = \sup_{n \in \mathbf{N}} |a_n| < +\infty$. Спряжений простір до l_1 є ізометричним простору m (простір m – це множина, що утворена зі всіляких обмежених числових послідовностей).
5. $L_p[a, b] (p > 1) : f(x) = \int_a^b a(t) x(t) dt, x(t) \in L_p[a, b] a(t) \in L_q[a, b], \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. При цьому $\|f\| = \sqrt[q]{\int_a^b |a(t)|^q dt}$. Спряжений простір до $L_p[a, b]$ ізометричний простору $L_q[0, 1]$.
6. $L_1[a, b] : \text{неперервний лінійний функціонал в цьому просторі зображується у вигляді } f(x) = \int_a^b a(t) x(t) dt, a(t) \text{ – обмежена функція майже скрізь на } [a, b]$. $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |a(t)|$. Спряжений простір до простору $L_1[0, 1]$ ізометричний простору $M[a, b]$ – сукупності всіх вимірних і обмежених майже скрізь на $[a, b]$ функцій.
7. $C_{[a, b]} : \text{неперервний лінійний функціонал в даному просторі визначається так: } f(x) = \int_{[a, b]} x(t) d(g(t))$ (в розумінні інтеграла Стільтьєса), де $g(t)$ – функція обмеженої варіації. У цьому випадку $\|f\| = Var_a^b |a(t)|$. Спряжений простір до простору $C_{[a, b]}$ ізометричний підпростору $V_0[a, b] \subset V[a, b]$ – множина всіх функцій обмеженої варіації, причому $\forall g(t) \in V_0[a, b]$ виконуються такі умови: $g(0) = 0, g(t) = \frac{1}{2} [g(t+0) + g(t-0)]$ при $t \in [a, b]$.

Розглянемо приклади лінійних операторів.

1. Нехай E – лінійний топологічний простір. Покладемо $Ax = x$ для кожного $x \in E$. Такий оператор, що відображає кожен елемент простору в себе, називається *одичним*.

2. Нехай E_1 і E_2 – довільні лінійні топологічні простори. І нехай $Ox = \theta$ для всіх $x \in E_1$, де θ – нильовий елемент простору E_2 . Тоді O називається *нульовим оператором*.

3. Розглянемо загальний вигляд лінійного оператора, що відображає скінченновимірний простір в скінченновимірний: $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ (відповідно в \mathbf{R}^n базисом є сукупність елементів e_1, e_2, \dots, e_n , а в просторі \mathbf{R}^m – базис f_1, f_2, \dots, f_m .) Кожен вектор x із \mathbf{R}^n зображується у вигляді: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, де x_i – якісь коефіцієнти. Із лінійності

оператора A $Ax = \sum_{i=1}^n x_i A e_i$. Таким чином, якщо відомо, що є

образами базисних векторів e_1, e_2, \dots, e_n при відображенні A , тоді оператор A визначений. Розглянемо далі зображення векторів $A e_i$ за базисом f_1, f_2, \dots, f_m : $A e_i = \sum_{k=1}^m a_{ki} \cdot f_k$, де $i = 1, 2, \dots, n$, a_{ki} – якісь числа. Таким чином оператор A визначається матрицею коефіцієнтів

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Звідси робимо висновок: образом простору \mathbf{R}^n в просторі \mathbf{R}^m є лінійний підпростір, розмірність якого дорівнює рангу матриці (2) (у будь-якому випадку розмірність підпростору в \mathbf{R}^m є не вищою n .)

Очевидно, кожен лінійний оператор, що задається в скінченновимірному просторі, є неперервним оператором.

4. Нехай H_1 – деякий підпростір гільбертового простору H . Кожен елемент $h \in H$ зобразимо у вигляді суми $h = h_1 + h_2$, де $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_1^\perp$ – ортогональному доповненню підпростору H_1 . Іншими словами, зображуємо простір H у вигляді прямої суми підпростору H_1 та його ортогонального доповнення. Позначимо символом P оператор, який відображає кожен елемент $h \in H$ в елемент $h_1 \in H_1$, тобто $Ph = h_1$. Цей оператор називається оператором *ортогонального проектування* або *ортoprojectором* простору H на підпростір H_1 .

Лінійність і неперервність цього оператора P перевіряється безпосередньо.

5. Розглянемо в просторі $C_{[a,b]}$ оператор, що визначається формулою $\phi(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt$, де $\varphi(t) \in C_{[a,b]}$, $K(x,t)$ – фіксована неперервна функція від $(x,t) \in [a,b] \times [a,b]$. Очевидно, що цей оператор неперервний у випадках коли в просторі $C_{[a,b]}$ визначається норма $\|\varphi\| = \max_{a \leq t \leq b} |\varphi(t)|$, або коли в просторі $C_{[a,b]}^2$ норма вводиться так:
- $$\|\varphi\| = \left(\int_a^b \varphi^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$
6. Важливим прикладом є диференціальний оператор, який визначений, очевидно, не на всьому просторі $C_{[a,b]}$, а лише на лінійному многовиді неперервно-диференційовних на $[a,b]$ функцій. Оператор диференціювання можемо розглядати як оператор, що відображає простір D_1 – простір неперервно-диференційовних на $[a,b]$ функцій в простір $C_{[a,b]}$. В просторі D_1 задаємо норму так: $\|\varphi\|_1 = \max_{t \in [a,b]} |\varphi(t)| + \max_{t \in [a,b]} |\varphi'(t)|$. Очевидно, що в цьому просторі D_1 оператор диференціювання D є лінійним і неперервним. Він відображає простір D_1 на весь простір $C_{[a,b]}$.

Якщо ж оператор D визначати в підпросторі неперервно-диференційовних функцій із $C_{[a,b]}$, то, очевидно, він є лінійним, але не є неперервним. Наприклад, розглянувши збіжну до нуля в метриці простору $C_{[a,b]}$ функціональну послідовність $\varphi_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$, маємо відповідну послідовність функцій $D\varphi_n(t) = \cos nt$, яка не є збіжною на $[a,b]$. Оператор D , що діє з простору D_1 в простір $C_{[a,b]}$, визначений на всьому просторі D_1 і є неперервним, але не до кожної функції $\varphi(t) \in D_1$ можемо застосувати цей оператор D двічі. Тому розглядають оператор D в просторі нескінченно диференційовних функцій на $[a,b]$, який позначають символом D_∞ . В просторі D_∞ топологія визначається системою норм:

$$\|\varphi\|_n = \sup_{t \in [a,b]} \left\{ |\varphi(t)|, |\varphi'(t)|, \dots, |\varphi^{(n)}(t)| \right\}.$$

Оператор диференціювання відображає простір D_∞ в себе.

Зауважимо, що простір D_∞ є достатньо вузьким в порівнянні з простором D_1 .

Можливість розглядати оператор диференціювання D в значно ширших просторах і поряд з цим забезпечувати неперервність цього оператора D з'являється при вивченні узагальнених функцій, в просторі яких теж визначається диференціювання функцій.

Лінійні неперервні оператори $A : X \rightarrow Y$ утворюють лінійний простір, на якому операції додавання і множення на число визначаються так:

$$(A + B)x = Ax + Bx \quad (\forall x \in X),$$

$$(\alpha A)x = \alpha Ax \quad (\forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbf{R}).$$

При цьому виконуються всі аксіоми лінійного простору.

Розглянемо послідовність операторів $A_n : X \rightarrow Y$. Така послідовність називається *збіжною* до $A : X \rightarrow Y$, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}) (\forall n \geq n_\varepsilon) : (\|A_n - A\| < \varepsilon).$$

Нехай $A : X \rightarrow Y$ – оператор, що діє із простору X в простір Y , D_A – область визначення оператора A , R_A – область значень оператора A . Очевидно, $D_A \subset X$, $R_A \subset Y$. Оператор A називається *оборотним*, якщо для будь-якого $y \in R_A$ операторне рівняння $Ax = y$ має єдиний розв'язок.

Оператор $A^{-1} : Y \rightarrow X$ називається *оберненим* до $A : X \rightarrow Y$, якщо $\forall x \in X \quad A^{-1}(Ax) = x$.

Множина $\text{Ker} A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : Ax = \theta\}$ називається *ядром* оператора A .

Обернений оператор A^{-1} до оператора A існує тоді і тільки тоді, коли $\text{Ker} A = \{\theta\}$.

Розв'язання типових задач

Завдання 1. *Перевірити лінійність, неперервність і знайти норму оператора A (якщо він є лінійним і неперервним):*

- а) $A : C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}$, $Ax(t) = \int_0^1 e^{3t-2s} x(s) ds$;
- б) $A : l_2 \rightarrow l_2$, $Ax = (x_1 + x_2, 0, x_3 + x_4, 0, x_5 + x_6, 0, \dots)$;
- в) $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$, $Ax(t) = tx(t)$.

Розв'язання. а) Перевіримо умову лінійності: $\forall x(t), y(t) \in C_{[0,1]}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$

$$A(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \int_0^1 e^{3t-2s} (\alpha x(s) + \beta y(s)) ds =$$

$$= \alpha \int_0^1 e^{3t-2s} x(s) ds + \beta \int_0^1 e^{3t-2s} y(s) ds = \alpha Ax(t) + \beta Ay(t),$$

тобто оператор є лінійним.

Щоб довести неперервність оператора, скористаємося відомою властивістю, згідно якої лінійний обмежений оператор є неперервним. Перевіримо обмеженість оператора A :

$$\begin{aligned} \|Ax(t)\| &= \max_{t \in [0,1]} \left| \int_0^1 e^{3t-2s} x(s) ds \right| \leq \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 |e^{3t-2s}| \cdot |x(s)| ds \leq \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 e^{3t-2s} \max_{s \in [0,1]} |x(s)| ds = \|x(t)\| \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 e^{3t-2s} ds = \\ &= \|x(t)\| \max_{t \in [0,1]} e^{3t} \frac{e^{-2s}}{-2} \Big|_0^1 = \frac{1 - e^{-2}}{2} \|x(t)\| \max_{t \in [0,1]} e^{3t} = \frac{e^3 - e}{2} \|x(t)\|. \quad (3) \end{aligned}$$

Таким чином $\forall x(t) \in C_{[0,1]} \|Ax(t)\| \leq \frac{e^3 - e}{2} \cdot \|x(t)\|$, тобто оператор A обмежений.

Якщо тепер нам вдасться підібрати функцію $x^*(t) \in C_{[0,1]}$, для якої остання нестрога нерівність перетворювалася б у рівність, цим самим буде доведено, що $\|A\| = \frac{e^3 - e}{2}$.

Виберемо функцію $x^*(t)$ так, щоб у ланцюжку перетворень (3) зберігалися лише рівності, тобто такою, щоб $\forall t \in [0, 1] \quad x(t) = \|x(t)\|$. Цій умові задовольняє будь-яка додатна стала функція, наприклад, $x^*(t)=1$.

При цьому $\|Ax^*(t)\| = \frac{e^3 - e}{2} \|x^*(t)\|$ і $\|A\| = \frac{e^3 - e}{2} = \frac{1}{2}e(e^2 - 1)$.

б) Очевидні такі рівності(враховуючи відповідні операції в просторі l_2):

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2, 0, \alpha x_3 + \beta y_3 + \alpha x_4 + \beta y_4, 0, \dots) = \\ &= (\alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2), 0, \alpha(x_3 + x_4) + \beta(y_3 + y_4), 0, \dots) = \\ &= \alpha(x_1 + x_2, 0, x_3 + x_4, 0, \dots) + \beta(y_1 + y_2, 0, y_3 + y_4, 0, \dots). \end{aligned}$$

Отже, оператор A – лінійний.

Обмеженість оператора A отримаємо з визначення норми елемента $Ax \in l_2$:

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (x_3 + x_4)^2 + (x_5 + x_6)^2 + \dots} \leq \\ &\leq \sqrt{2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + \dots} \leq \sqrt{2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} = \sqrt{2} \|x\|, \quad (4) \end{aligned}$$

тобто оператор A обмежений, а це й означає його неперервність.

Виберемо в просторі l_2 такий елемент x^* , щоб скрізь у перетвореннях (4) зберігалася рівність: $x^* = (1, 1, 0, 0, \dots)$, тоді $\|x^*\| = \sqrt{2}$, $Ax^* = (2, 0, 0, \dots)$, $\|Ax^*\| = 2$. Таким чином $2 = \|Ax^*\| = \sqrt{2}\|x^*\|$, інакше кажучи, $\|A\| = \sqrt{2}$.

в) Лінійність оператора є очевидною:

$$\forall x(t), y(t) \in L_2[0, 1], \forall \alpha, \beta \in R$$

$$A(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha tx(t) + \beta ty(t) = \alpha Ax(t) + \beta Ay(t).$$

Для доведення неперервності оператора скористаємося тією ж властивістю, що і в попередніх прикладах: з обмеженості лінійного оператора випливає його неперервність.

$$\|Ax(t)\| = \sqrt{\int_0^1 t^2 x^2(t) dt} \leq \sqrt{\int_0^1 x^2(t) dt} = \|x(t)\|. \quad (5)$$

Це означає, що оператор A обмежений, причому $\|A\| \leq 1$.

Знову, як і у попередніх прикладах, підберемо елемент, при якому в перетворенні \mathfrak{B} зберігалася б рівність. Але на відміну від попередніх випадків, підбиратимемо не один елемент $x^*(t)$, а цілу послідовність $x_n^*(t)$ так, щоб виконувалася збіжність $\|Ax_n^*(t)\| - \|x_n^*(t)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Нехай $x_n^*(t) = \sqrt{2n+1}t^n$. Тоді $\|x_n^*(t)\| = \sqrt{\int_0^1 (2n+1)t^{2n} dt} = 1$,

$$\|Ax_n^*(t)\| = \sqrt{\int_0^1 (2n+1)t^{2n+2} dt} = \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Завдання 2. Показати, що оператор $A: X \rightarrow C_{[0,1]}$, де $Ax(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, а X – простір $C'_{[0,1]}$ із нормою $\|x(t)\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$ не є неперервним.

Разом із цим, той самий оператор неперервно діє з $C'_{[0,1]}$ в $C_{[0,1]}$.

Розв'язання. Оскільки неперервність лінійного оператора еквівалентна його обмеженості, то на першому етапі задачі достатньо показати, що оператор A є необмеженим. Для цього можна, наприклад, вказати таку послідовність $\{x_n\} \subset X$, щоб $\|x_n\| = 1$, але $\|Ax_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$; або ж таку, щоб $\|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, але $\|Ax_n\| \geq \text{const} > 0$.

Розглянемо послідовність $x_n(t) = \frac{1}{n} \sin nt$. $\|x_n(t)\|_X = \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{1}{n} \sin nt \right| \leq \frac{1}{n}$, тобто $\|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Але поряд із цим $Ax_n(t) = \cos nt$, і $\|Ax_n(t)\| = \max_{t \in [0,1]} |\cos nt| = 1$. Таким чином, оператор A необмежений.

Нехай тепер оператор A діє з простору $C'_{[0,1]}$, норма на якому, як відомо, дорівнює $\|x(t)\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |x'(t)|$ в $C_{[0,1]}$. Тоді

$$\|Ax(t)\| = \max_{t \in [0,1]} |x'(t)| \leq \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |x'(t)| = \|x(t)\|.$$

Це означає, що $\|A\| \leq 1$. Виберемо послідовність $\left\{ x_n^*(t) = \frac{t^n}{n+1} \right\}$. Для таких функцій

$$\|x_n^*(t)\| = \max_{t \in [0,1]} \frac{t^n}{n+1} + \max_{t \in [0,1]} \frac{n}{n+1} t^{n-1} = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = 1.$$

В той же час

$$\|Ax_n^*(t)\| = \max_{t \in [0,1]} \frac{n}{n+1} t^n = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Отже, у другому випадку оператор A неперервний і $\|A\| = 1$.

Завдання 3. Перевірити лінійність, неперервність і знайти норми наступних функціоналів:

а) $f : L_2[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} tx(t^2)dt$;

б) $f : l_3 \rightarrow R$: $f(x) = 3x_2 + 7x_4$.

Розв'язання. а) Простір $L_p[0, 1]$ є множина всіх функцій $x(t)$, $t \in [0, 1]$, для яких $\int_0^1 |x(t)|^p dt < \infty$, $p \geq 1$. Відомо, що прикладом загального, лінійного, неперервного функціонала в просторі $L_2[a, b]$ є такий:

$$f(x) = \int_a^b x(t)g(t)dt,$$

де $x(t) \in L_2[a, b]$, $g(t)$ – якась обмежена вимірна функція із $L_2[0, 1]$. У данній задачі, де $f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} tx(t^2)dt$, спочатку зробимо у цьому визначеному інтегралі заміну $t^2 = s$. Тоді $t = \sqrt{s}$, $dt = \frac{1}{2\sqrt{s}}ds$, при $t = 0$ $s = 0$,

а при $t = \frac{1}{2}$ $s = \frac{1}{4}$, тобто

$$f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} tx(t^2)dt = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}x(s)ds.$$

Таким чином,

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{якщо } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]; \\ 0, & \text{якщо } t \in \left(\frac{1}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

Інакше кажучи, функціонал є лінійним і неперервним, причому

$$\begin{aligned} \|f\| = \|g(t)\|_{L_2[0,1]} &= \sqrt{\int_0^1 g^2(t) dt} = \sqrt{\int_0^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dt + \int_{\frac{1}{4}}^1 0 dt} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{4}} dt} = \frac{1}{2} \sqrt{t \Big|_0^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

б) У просторі l_p , $p > 1$ усі лінійні неперервні функціонали мають вигляд:

$$f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + \dots,$$

де $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in l_q$ причому $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Оскільки $f(x) = 3x_2 + 7x_4$, то $a = (0, 3, 0, 7, 0, 0, \dots)$. Враховуючи, що $p = 3$, маємо: $\frac{1}{3} + \frac{1}{q} = 1$, $q = \frac{3}{2}$. $a \in l_{\frac{3}{2}}$, тому функціонал f лінійний та

$$\|f\| = \|a\|_{l_{\frac{3}{2}}} = (3^{\frac{3}{2}} + 7^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^3 + 2\sqrt{21}^3 + 7^3} = \sqrt[3]{370 + 2\sqrt{21}^3}.$$

Завдання 4. Нехай X – лінійний простір $C_{[0,1]}$ з нормою $\|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt$. Чи буде неперервним функціонал $f(x) = x(0)$?

Розв'язання. Даний функціонал не буде неперервним, і це можна показати двома способами.

1 спосіб. Покажемо, що функціонал необмежений, тобто що

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists x_n(t) \in X \quad |f(x_n)| > n \|x_n(t)\|.$$

Покладемо

$$x_n(t) = \begin{cases} n(1 - nt), & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{при } \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Очевидно, що функції $x_n(t)$ є неперервними і

$$\|x_n(t)\| = \int_0^{\frac{1}{n}} n(1-nt) dt = -\frac{(1-nt)^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Разом із цим

$$|f(x_n)| = |x_n(0)| = n > \frac{n}{2} = n \|x_n(t)\|.$$

2 спосіб. Заперечення неперервності функціонала означає, що існує така послідовність $\{x_n(t), n \in \mathbf{N}\}$, що $\|x_n(t)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, але $|f(x_n)| \not\rightarrow 0$. Такою буде, наприклад, послідовність функцій

$$x_n(t) = \begin{cases} 1-nt, & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{при } \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Дійсно, $\|x_n(t)\| = \int_0^{\frac{1}{n}} (1-nt) dt = -\frac{1}{n} \frac{(1-nt)^2}{2} \Big|_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Однак

при цьому $|f(x_n)| = x_n(0) = 1$ для всіх n , тобто $f(x_n) \not\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Завдання 5. Дослідити на збіжність послідовність операторів:

а) $A_n : C_{[0, \frac{\pi}{2}]} \rightarrow C_{[0, \frac{\pi}{2}]}, \quad A_n x(t) = \sin^n t \cdot x(t);$

б) $A_n : l_1 \rightarrow l_1, \quad A_n x = (x_{2n+1}, x_{2n+2}, \dots);$

в) $A_n : l_2 \rightarrow l_2, \quad A_n x = \left(\frac{x_1}{e^n}, \frac{x_2}{e^n}, \dots, \frac{x_k}{e^n}, \dots \right).$

Розв'язання. а) Оскільки при $\forall t \in \mathbf{R}$ маємо $\sin t \in [0, 1]$, то поточкова границя

$$Ax(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right); \\ x\left(\frac{\pi}{2}\right), & \text{якщо } t = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Але тоді $Ax(t) \notin C_{[0, \frac{\pi}{2}]}$, тому послідовність операторів не є збіжною навіть поточною.

Відмітимо, що якби $A_n : C_{[0, \frac{\pi}{4}]} \rightarrow C_{[0, \frac{\pi}{4}]}$ то для $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ послідовність операторів A_n була б поточною збіжною до нульового оператора.

б) Знайдемо поточкову границю A_n . Оскільки множина l_1 це сукупність нескінченних абсолютно збіжних послідовностей, то $\forall x \in l_1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$

є збіжним. Тому згідно необхідної умови збіжності ряду $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
А тому і

$$Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = (0, 0, \dots) = \Theta x, \quad \Theta - \text{нульовий оператор.}$$

Знайдемо норму різниці операторів $A_n - \Theta$.

$$\forall x \in l_1, \quad \|A_n x - \Theta x\| = \|A_n x\| = \sum_{k=2n+1}^{\infty} |x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|x\|,$$

тобто $\|A_n - \Theta\| \leq 1$. Але при $x^* = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{2n+1}, 1, 0, 0, \dots \right)$, $\|x^*\| = 1$,

$$A_n x^* - \Theta x^* = (1, 0, 0, \dots), \quad \|A_n x^* - \Theta x^*\| = 1.$$

Інакше кажучи,

$$\|A_n x^* - \Theta x^*\| = 1 = 1 \cdot \|x^*\|,$$

тобто $\|A_n - \Theta\| = 1 \not\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, отже послідовність операторів не є збіжною.

в) Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} = 0$, то поточкова границя

$$Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = (0, 0, \dots) = \Theta x.$$

$$\|A_n x - \Theta x\| = \|A_n x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x_k}{e^n}\right)^2} = \frac{1}{e^n} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} = \frac{\|x\|}{e^n}.$$

Таким чином $\|A_n - \Theta\| = \frac{1}{e^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Отже, послідовність операторів A_n збігається до нульового оператора.

Завдання 6. Знайти оператор, обернений до A , або довести, що його не існує. Якщо A^{-1} існує і є обмеженим, то оцінити $\|A\|$ та $\|A^{-1}\|$:

а) $A : l_2 \rightarrow l_2, \quad Ax = (x_1 + x_2, 3x_1 - x_2, 4x_3 - x_1, x_4, x_5, \dots);$

б) $A : C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}, \quad Ax(t) = (1 - t)x(t);$

в) $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1], \quad Ax(t) = \int_0^1 t^2(s - 2)x(s)ds + (3 + t)x(t).$

Розв'язання. У всіх трьох випадках перед знаходженням оберненого оператора потрібно перевірити достатню умову його існування, тобто чи

$$\ker A = \{x \in X : Ax = \theta\} = \{\theta\}.$$

а) Складемо систему для відшукування ядра оператора:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 3x_1 - x_2 = 0, \\ 4x_3 - x_1 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Очевидно, що всі x_i , починаючи з $i = 4$, рівні нулю. Розв'яжемо перші три рівняння системи. Визначник даної однорідної підсистеми

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -16$$

є відмінним від нуля, а це означає, що вона має тільки тривіальний (нульовий) розв'язок, тому переходимо до відшукування оберненого оператора. Для цього достатньо розв'язати відносно x операторне рівняння $Ax = y$. На просторі l_2 рівняння $Ax = y$ має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1, \\ 3x_1 - x_2 = y_2, \\ 4x_3 - x_1 = y_3, \\ x_4 = y_4, \\ x_5 = y_5, \\ \dots\dots\dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 = y_1 + y_2, \\ 3x_1 - x_2 = y_2, \\ 4x_3 = x_1 + y_3, \\ x_4 = y_4, \\ x_5 = y_5, \\ \dots\dots\dots \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2), \\ x_2 = \frac{3}{4}(y_1 + y_2) + y_2 = \frac{3}{4}y_1 + \frac{7}{4}y_2, \\ x_3 = \frac{1}{4}(y_3 + \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_2), \\ x_4 = y_4, \\ x_5 = y_5, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Тобто

$$A^{-1}y = \left(\frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_2, \frac{3}{4}y_1 + \frac{7}{4}y_2, \frac{1}{16}y_1 + \frac{1}{16}y_2 + \frac{1}{4}y_3, y_4, y_5, \dots \right).$$

Оцінимо норми A та A^{-1} :

$$\begin{aligned} \forall x \in l_2, \quad \|Ax\| &= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (3x_1 - x_2)^2 + (4x_3 - x_1)^2 + x_4^2 + x_5^2 + \dots} \leq \\ &\leq \sqrt{2x_1^2 + 2x_2^2 + 18x_1^2 + 2x_2^2 + 32x_3^2 + 2x_1^2 + x_4^2 + x_5^2 + \dots} = \\ &= \sqrt{22x_1^2 + 4x_2^2 + 32x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + \dots} = \\ &= \sqrt{22x_1^2 + 4x_2^2 + 32x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + \dots} \leq \sqrt{32(x_1^2 + x_2^2 + \dots)} = 4\sqrt{2}\|x\|, \end{aligned}$$

тобто $\|A\| \leq 4\sqrt{2}$;

$$\begin{aligned} \forall x \in l_2, \quad \|A^{-1}y\| &= \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_2\right)^2 + \left(\frac{3}{4}y_1 + \frac{7}{4}y_2\right)^2 + \left(\frac{1}{16}y_1 + \frac{1}{16}y_2 + \frac{1}{16}y_3\right)^2 + y_4^2 + y_5^2 + \dots} \leq \\ &\leq \sqrt{2\frac{1}{16}y_1^2 + 2\frac{1}{16}y_2^2 + 2\frac{9}{16}y_1^2 + 2\frac{49}{16}y_2^2 + \frac{2}{256}(y_1 + y_2)^2 + 2\frac{1}{16}y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + \dots} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{5}{8}y_1^2 + \frac{25}{8}y_2^2 + \frac{2}{128}y_1^2 + \frac{2}{128}y_2^2 + \frac{1}{8}y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + \dots} = \\ &= \sqrt{\frac{41}{64}y_1^2 + \frac{201}{64}y_2^2 + \frac{1}{8}y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + \dots} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{201}{64}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots)} = \frac{\sqrt{201}}{8}\|y\|, \end{aligned}$$

тобто $\|A^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{201}}{8}$.

б) На просторі $C_{[0,1]}$ рівняння $Ax = \theta$ має вигляд

$$(1 - t)x(t) = 0.$$

Звідки або $t = 1$, або $x(t) = 0$ для всіх $t \in [0, 1)$. Оскільки $x(t) \in C_{[0,1]}$, то й $x(1) = 0$. Таким чином $\ker A = \{\theta\}$.

Розв'язком рівняння $y(t) = (1 - t)x(t)$ є функція $x(t) = \frac{y(t)}{1 - t}$, тобто

$$A^{-1}y = \frac{1}{1 - t}y(t).$$

Але при $t \rightarrow 1$, $\frac{1}{1 - t} \rightarrow \infty$ і даний оператор є необмеженим.

в) Перевіримо спочатку, чи дорівнює ядро оператора A нульовому еле-

менту простору $L_2[0, 1]$. Для цього розглянемо рівняння

$$\int_0^1 t^2(s-2)x(s)ds + (3+t)x(t) = 0.$$

Або, позначивши $\int_0^1 (s-2)x(s)ds = c$,

$$t^2 + (3+t)x(t) = 0.$$

Звідки, оскільки $3+t \neq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$,

$$x(t) = -\frac{ct^2}{3+t}.$$

Знайдемо константу c . Для цього останню рівність домножимо на $(t-2)$ та результат проінтегруємо від 0 до 1:

$$c = -c \int_0^1 \frac{t^2(t-1)}{3+t} dt.$$

Останній інтеграл обчислимо окремо:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^2(t-2)}{t+3} dt &= \int_0^1 \left(t^2 - 5t + 15 - \frac{45}{t+3} \right) dt = \\ &= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 15t - 45 \ln|t+3| \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 15 - 45 \ln 4 + 45 \ln 3 = \\ &= \frac{77}{6} - 45 \ln \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$c \left(\frac{83}{6} - 45 \ln \frac{4}{3} \right) = 0, \quad \Rightarrow c = 0.$$

Тоді $x(t) = -\frac{0 \cdot t^2}{3+t} = 0$, або одне й те саме, що $\ker A = \theta$.

Операторне рівняння $Ax(t) = y(t)$ на просторі $L_2[0, 1]$ має вигляд

$$\int_0^1 t^2(s-2)x(s)ds + (3+t)x(t) = y(t).$$

Розв'яжемо його відносно $x(t)$:

$$(3+t)x(t) = y(t) - t^2 \int_0^1 (s-2)x(s)ds;$$

$$x(t) = \frac{1}{3+t} \left(y(t) - t^2 \int_0^1 (s-2)x(s)ds \right).$$

Використавши вже введені позначення $\int_0^1 (s-2)x(s)ds = c$, матимемо, що

$$x(t) = \frac{1}{3+t}(y(t) - t^2c).$$

Для знаходження сталої c домножимо ліву і праву частини останньої рівності на $(t-2)$ і проінтегруємо в межах від 0 до 1:

$$\int_0^1 (t-2)x(t)dt = \int_0^1 \frac{t-2}{3+t}y(t)dt - c \int_0^1 \frac{t^2(t-2)}{t+3}dt.$$

Або ж

$$c = \int_0^1 \frac{t-2}{3+t}y(t)dt - c \int_0^1 \frac{t^2(t-2)}{t+3}dt.$$

Оскільки $\int_0^1 \frac{t^2(t-2)}{t+3}dt = \frac{77}{6} - 45\ln\frac{4}{3}$ (див. вище), то

$$c = \int_0^1 \frac{t-2}{t+3}y(t)dt - \left(\frac{77}{6} - 45\ln\frac{4}{3} \right) c.$$

Остаточно,

$$c = \frac{1}{\frac{83}{6} - 45\ln\frac{4}{3}} \int_0^1 \frac{t-2}{t+3}y(t)dt$$

та

$$x(t) = \frac{1}{3+t}(y(t) - \frac{6t^2}{83 - 270\ln\frac{4}{3}} \int_0^1 \frac{s-2}{s+3}y(s)ds).$$

Таким чином,

$$A^{-1}y(t) = \frac{y(t)}{3+t} - \frac{6t^2}{(3+t)(83-270\ln\frac{4}{3})} \int_0^1 \frac{s-2}{s+3} y(s) ds.$$

Оцінимо норму оператора A .

$$\begin{aligned} \|Ax(t)\| &= \max_{t \in [0,1]} \left| \int_0^1 t^2(s-2)x(s) ds + (3+t)x(t) \right| \leq \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} \left(\int_0^1 |t^2(s-2)x(s)| ds + |3+t||x(t)| \right) = \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 |t^2(s-2)| \max_{0 \leq s \leq 1} |x(s)| ds + \max_{0 \leq t \leq 1} (|3+t||x(t)|) = \\ &= \left(- \int_0^1 (s-2) ds + 4 \right) \|x\| = \left(- \frac{(s-2)^2}{2} \Big|_0^1 + 4 \right) \|x\| = \frac{11}{2} \|x\|. \end{aligned}$$

Отже, $\|A\| \leq \frac{11}{2}$. Норма оператора A^{-1} оцінюється аналогічно.

Завдання 7. Нехай $X = \{x(t) \in C'_{[0,1]} : x(0) = 0\}$ з нормою $\|x(t)\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |x'(t)|$. Оператор $A : X \rightarrow C_{[0,1]}$ визначається формулою

$$Ax(t) = x'(t) - 2tx(t).$$

Довести, що існує неперервний оператор A^{-1} .

Розв'язання. Задача знаходження оберненого оператора A^{-1} зводиться до розв'язання задачі Коші для лінійного диференціального рівняння:

$$\begin{cases} Ax \equiv x'(t) - 2tx(t) = y(t); \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння

$$x'(t) - 2tx(t) = 0.$$

Це рівняння з відокремленими змінними.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2tx(t), \\ \frac{dx}{x} &= 2tdt, \\ \ln|x(t)| &= t^2 + C_1, \\ x(t) &= Ce^{t^2}.\end{aligned}$$

З початкової умови $x(0) = 0$ випливає, що однорідне рівняння має тільки нульовий розв'язок, тому відшукування оберненого оператора має зміст.

Згідно методу варіації сталих, розв'язок неоднорідного рівняння запишеться у вигляді $x(t) = C(t)e^{t^2}$. З початкової умови $x(0) = 0$, і з того факту, що $e^0 = 1$ випливає, що $C(0) = 0$. Знайдемо невідому функцію $C(t)$, підставивши $x(t) = C(t)e^{t^2}$ у початкове рівняння.

$$\begin{aligned}C'(t)e^{t^2} + C(t)e^{t^2} \cdot 2t - 2tC(t)e^{t^2} &= y(t), \\ C'(t) &= y(t)e^{-t^2}, \\ C(t) &= \int_0^t y(s)e^{-s^2} ds.\end{aligned}$$

Нижня межа інтегрування вибрана з метою забезпечення виконання початкової умови $C(0) = 0$. Таким чином,

$$x(t) = e^{t^2} \int_0^t e^{-s^2} y(s) ds = \int_0^t e^{t^2-s^2} y(s) ds.$$

Оскільки ядро $e^{t^2-s^2}$ даного інтегрального оператора є неперервною функцією при $t \in [0, 1]$, $s \in [0, 1]$, то даний оператор є неперервним.

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Перевірити лінійність, неперервність і знайти норму оператора A (якщо він є лінійним і неперервним):*

1. $A : C_{[-1,1]} \rightarrow C_{[-1,1]}$, $Ax(t) = \int_{-1}^1 (t-2s)x(s) ds$;
2. $A : C_{[0, \frac{\pi}{2}]} \rightarrow C_{[0, \frac{\pi}{2}]}$, $Ax(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t+s)x(s) ds$;
3. $A : C_{[0, \frac{\pi}{2}]} \rightarrow C_{[0, \frac{\pi}{2}]}$, $Ax(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t-2s)x(s) ds$;
4. $A : C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}$, $Ax(t) = (t^2+t)x(t)$;

5. $A : l_2 \rightarrow l_2, Ax = (0, 0, 0, x_4, x_5, \dots)$;
6. $A : l_2 \rightarrow l_2, Ax = (x_4, x_4, x_4, x_4, x_5, x_6, \dots)$;
7. $A : l_2 \rightarrow l_2, Ax = (2x_1 - x_2, 2x_2, 3x_3, x_4, x_5, x_6, \dots)$;
8. $A : l_2 \rightarrow l_2, Ax = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_4, x_5, x_6, \dots)$;
9. $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1], Ax(t) = t \int_0^1 x(s) ds$;
10. $A : L_2[-1, 1] \rightarrow L_2[-1, 1], Ax(t) = \int_{-1}^1 (2t - 3s) x(s) ds$.

Завдання 2. *Перевірити лінійність, неперервність і знайти норми функціоналів:*

1. $f : l_2 \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x_5 - x_4$;
2. $f : l_2 \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{\sqrt{k(k+1)}}$;
3. $f : l_2 \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{\pi^{2k}}$;
4. $f : L_2[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{t} x(t^2) dt$;
5. $f : L_2[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \int_0^1 \cos \pi t x(t) dt$;
6. $f : L_2[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \int_0^1 \text{sign}\left(t - \frac{1}{2}\right) x(t) dt$;
7. $f : C_{[-1,1]} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \int_{-1}^1 x(t) \text{signt} dt$;
8. $f : C_{[-1,1]} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2 \int_{-1}^0 x(t) dt + \int_0^1 x(t) dt$;
9. $f : C_{[0,1]} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \int_0^1 (t - 1) x(t) dt$;
10. $f : C_{[0,1]} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \int_0^1 x(t) dt - x(0)$.

Завдання 3. *Дослідити на збіжність послідовність операторів:*

1. $A_n : l_2 \rightarrow l_2, A_n x = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, x_n, 0, 0, \dots \right)$;
2. $A_n : l_2 \rightarrow l_2, A_n x = \left(x_1, x_2, \dots, x_n, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \dots \right)$;

3. $A_n : l_2 \rightarrow l_2, A_n(x) = \left(\frac{x_1}{\sqrt[n]{n}}, \frac{x_2}{\sqrt[n]{n}}, \frac{x_3}{\sqrt[n]{n}}, \dots \right);$
4. $A_n : l_2 \rightarrow l_2, A_n x = \left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots \right);$
5. $A_n : l_1 \rightarrow l_1, A_n x = \left(\underbrace{x_2, x_1, x_4, x_3, \dots, x_{2n}, x_{2n-1}}_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+2}, \dots \right);$
6. $A_n : C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}, A_n x(t) = \int_0^1 \sqrt{(t-s)^2 + \frac{1}{n}} x(s) ds;$
7. $A_n : C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}, A_n x(t) = |t^2 - t|^n x(t);$
8. $A_n : C_{[-1,1]} \rightarrow C_{[-1,1]}, A_n x(t) = (1 - t^2)^n x(t);$
9. $A_n : C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}, A_n x(t) = \operatorname{arctg} ntx(t);$
10. $A_n : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1], A_n x(t) = t^n x(t).$

Завдання 4. Знайти обернений оператор A^{-1} до оператора A або довести, що його не існує. Якщо A^{-1} існує і обмежений, то оцінити норму A та A^{-1} :

1. $A : L_2[-1, 1] \rightarrow L_2[-1, 1], Ax(t) = x(t) - \int_{-1}^1 t^3 s^2 x(s) ds;$
2. $A : L_2[0, \pi] \rightarrow L_2[0, \pi], Ax(t) = 2x(t) + \int_0^\pi \sin tx(s) ds;$
3. $A : L_2[-\pi, \pi] \rightarrow L_2[-\pi, \pi], Ax(t) = x(t) - 2 \int_{-\pi}^\pi \cos t \sin sx(s) ds;$
4. $A : L_2[-\infty, \infty] \rightarrow L_2[-\infty, \infty], Ax(t) = \frac{1}{1+t^2} x(t);$
5. $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1], Ax(t) = x(t) + \int_0^1 t^4 sx(s) ds;$
6. $A : L_2[1, 2] \rightarrow L_2[1, 2], Ax(t) = x(t) + \int_1^2 (t+1)^2 (s-2)^2 x(s) ds;$
7. $A : C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}, Ax(t) = (t^2 + t) x(t);$
8. $A : l_2 \rightarrow l_2, Ax = (x_1 + x_2, x_2, 2x_3 - x_2, x_4, x_5, \dots);$
9. $A : l_2 \rightarrow l_2, Ax = (x_1, 2x_1 - x_2, x_1 + x_4, x_4 - x_3, x_5, x_6, \dots);$
10. $A : l_2 \rightarrow l_2, Ax = (x_3 - x_2, x_2 + x_3, x_3, x_4, \dots).$

5 Спряжені і компактні оператори. Власні значення і власні вектори оператора. Спектр і резольвента

Перелік необхідних питань теорії

1. Спряжені і самоспряжені оператори.
2. Компактні оператори.
3. Власні значення і власні вектори.
4. Резольвента.
5. Спектр. Класифікація точок спектра.

Теоретичні відомості

Розглянемо неперервний лінійний оператор $A : X \rightarrow Y$, де X, Y – евклідові простори. Для лінійного обмеженого оператора A , що діє в евклідовому просторі, згідно загального визначення норми оператора A , маємо:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \in X} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Для $Ax \in Y, y \in Y$ визначений скалярний добуток. Якщо в скалярному добутку (Ax, y) зафіксувати y , тоді отримаємо лінійний функціонал від $x : f(x) = (Ax, y)$, де $x \in X$. Причому $|f(x)| = |(Ax, y)| \leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$. Цей функціонал зображується у вигляді $(Ax, y) = (x, u)$, де $u \in X, x \in X$. Відповідність $y \rightarrow u$ породжує лінійний обмежений оператор $u = A^*y$. Таким чином, оператор $A^* : Y \rightarrow X$ називається *спряженим* до оператора A , якщо

$$(\forall x \in X) (\forall y \in Y) : ((Ax, y) = (x, A^*y)).$$

Якщо $A : X \rightarrow X$ і $(\forall x, y \in X) : ((Ax, y) = (x, Ay))$, то оператор A називається *самоспряженим*.

Відомо, що якщо оператор A є лінійним і неперервним, то і спряжений до нього теж є лінійним і неперервним.

Нехай оператор $A : X \rightarrow Y$, де X, Y – нормовані простори. Оператор A називається *компактним*, якщо довільну обмежену множину він відображає в передкомпактну.

Якщо $A : X \rightarrow X$ і існує таке число λ , що $Ax = \lambda x$, де $x \in X$, $x \neq \theta$, то λ називається *власним значенням* оператора A , а x – відповідним *власним вектором*.

Комплексне число λ називається *регулярною точкою* оператора A , якщо для оператора $A - \lambda I$ існує обернений, що є лінійним неперервним оператором визначеним на X . Сукупність всіх регулярних точок оператора A називається *резольвентною множиною* оператора A і позначається $\rho(A)$.

Якщо $\lambda \in \rho(A)$, то оператор $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ називається *резольвентою* оператора A .

Доповнення до множини $\rho(A)$ в комплексній площині називається *спектром* оператора A і позначається $\sigma(A)$.

Для точок спектра лінійного оператора A є три можливості:

1. для оператора $A - \lambda I$ не існує оберненого. Це означає, що λ є власним значенням оператора A . Множину власних значень оператора A називають ще точковим спектром і позначають $\sigma_p(A)$;
2. для оператора $A - \lambda I$ існує обернений, але замикання множини його значень $\overline{R(A - \lambda I)}$ не співпадає з множиною X . У цьому випадку кажуть, що $\lambda \in \sigma_r(A)$ – залишковому спектру оператора A ;
3. для оператора $A - \lambda I$ існує обернений, і замикання множини його значень $\overline{R(A - \lambda I)}$ співпадає з множиною X , але $R(A - \lambda I) \neq X$. У цьому випадку кажуть, що $\lambda \in \sigma_c(A)$ – неперервному спектру оператора A .

Розв'язання типових задач

Завдання 1. Знайти A^* , оцінити $\|A\|$ та $\|A^*\|$, якщо:

а) $A : L_2[0, \pi] \rightarrow L_2[0, \pi]$, $Ax(t) = x(t) + 2 \int_0^\pi \cos 2t \sin 3s x(s) ds$;

б) $A : l_2 \rightarrow l_2$, $Ax = (3x_2 - x_3, 2x_3, x_3 - 2x_1, 0, 0, \dots)$.

Розв'язання. а) Як відомо, оператор A^* , спряжений до A , визначається формулою: $\forall x, y \in L_2[0, 1]$ $(Ax, y) = (x, A^*y)$. Розглянемо скалярний до-

буток

$$\begin{aligned}
(Ax, y) &= \int_0^\pi \left(x(t) + 2 \int_0^\pi \cos 2t \sin 3sx(s) ds \right) y(t) dt = \\
&= \int_0^\pi x(t)y(t) dt + 2 \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \cos 2t \sin 3sx(s)y(t) ds \right) dt = \\
&\quad (\text{у другому інтегралі змінимо порядок інтегрування}) \\
&= \int_0^\pi x(t)y(t) dt + 2 \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \cos 2t \sin 3sx(s)y(t) dt \right) ds = \\
&= \int_0^\pi x(t)y(t) dt + 2 \int_0^\pi x(s) \left(\int_0^\pi \cos 2t \sin 3sy(t) dt \right) ds = \\
&\quad (\text{у другому інтегралі перепозначимо змінні}) \\
&= \int_0^\pi x(t)y(t) dt + 2 \int_0^\pi x(t) \left(\int_0^\pi \cos 2s \sin 3ty(s) ds \right) dt = \\
&= \int_0^\pi x(t) \left(y(t) + 2 \int_0^\pi \cos 2s \sin 3ty(s) ds \right) dt,
\end{aligned}$$

звідки можна зробити висновок, що

$$A^*y(t) = y(t) + 2 \int_0^\pi \cos 2s \sin 3ty(s) ds.$$

Оцінимо норму оператора A . $\forall x(t) \in L_2[0, 1]$

$$\begin{aligned}
\|Ax(t)\| &= \sqrt{\int_0^\pi \left(x(t) + 2 \int_0^\pi \cos 2t \sin 3sx(s) ds \right)^2 dt} \leq \\
&\quad (\text{згідно нерівності } (a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2) \leq \\
&\leq \sqrt{\int_0^\pi 2x^2(t) dt + 2 \cdot 4 \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \cos 2t \sin 3sx(s) ds \right)^2 dt} \leq
\end{aligned}$$

згідно нерівності Коші-Буняковського

$$\begin{aligned}
&\leq \sqrt{2\|x\|^2 + 8 \int_0^\pi \left(\sqrt{\int_0^\pi \cos^2 2t \sin^2 3s x(s) ds} \sqrt{\int_0^\pi x^2(s) ds} \right)^2 dt =} \\
&= \sqrt{2\|x\|^2 + 8 \int_0^\pi \left(\sqrt{\cos^2 2t \int_0^\pi \frac{1 - \cos 6s}{2} ds} \|x\| \right)^2 dt =} \\
&= \sqrt{2\|x\|^2 + 8\|x\|^2 \int_0^\pi \left(\cos 2t \sqrt{\frac{1}{2} \left(s - \frac{1}{6} \sin 6s \right) \Big|_0^\pi} \right)^2 dt =} \\
&= \sqrt{\|x\|^2 \left(2 + 8 \int_0^\pi \cos^2 2t \cdot \frac{\pi}{2} dt \right)} = \sqrt{\|x\|^2 \left(2 + 8 \int_0^\pi \frac{1 + \cos 4t}{2} \cdot \frac{\pi}{2} dt \right)} = \\
&= \|x\| \sqrt{2 + 2\pi \left(t + \frac{1}{4} \sin 4t \Big|_0^\pi \right)} = \sqrt{2 + 2\pi^2} \|x\|,
\end{aligned}$$

тобто $\|A\| \leq \sqrt{2 + 2\pi^2}$. Аналогічно оцінюється $\|A^*\|$ і отримуємо $\|A^*\| \leq \sqrt{2 + 2\pi^2}$.

б) Оскільки в просторі l_2 $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$, то

$$\begin{aligned}
(Ax, y) &= (3x_2 - x_3)y_1 + 2x_3y_2 + (x_3 - 2x_1)y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 + \dots = \\
&= 3x_2y_1 - x_3y_1 + 2x_3y_2 + x_3y_3 - 2x_1y_3 = \\
&= x_1 \cdot (-2y_3) + x_2 \cdot 3y_1 + x_3(-y_1 + 2y_2 + y_3) = \\
&= x_1 \cdot (-2y_3) + x_2 \cdot 3y_1 + x_3(-y_1 + 2y_2 + y_3) + x_4 \cdot 0 + x_5 \cdot 0 + \dots = (x, A^*y).
\end{aligned}$$

Таким чином, $A^*y = (-2y_3, 3y_1, -y_1 + 2y_2 + y_3, 0, 0, \dots)$.

Далі, $\forall x \in l_2$

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &= \sqrt{(3x_2 - x_3)^2 + (2x_3)^2 + (x_3 - 2x_1)^2} \leq \\
&\leq \sqrt{18x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_3^2 + 2x_3^2 + 8x_1^2} = \sqrt{8x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2} \leq \\
&\leq \sqrt{18} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq \sqrt{18} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} = \sqrt{18} \|x\|,
\end{aligned}$$

тобто $\|A\| \leq \sqrt{18}$.

Аналогічно $\forall y \in l_2$

$$\begin{aligned} \|A^*y\| &= \sqrt{(2y_3)^2 + (3y_1)^2 + (-y_1 + 2y_2 + y_3)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{4y_3^2 + 9y_1^2 + 8y_2^2 + 2(y_3 - y_1)^2} \leq \sqrt{4y_3^2 + 9y_1^2 + 8y_2^2 + 4y_3^2 + 4y_1^2} = \\ &= \sqrt{13y_1^2 + 8y_2^2 + 8y_3^2} \leq \sqrt{13}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} \leq \sqrt{13}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2} = \sqrt{13}\|y\|, \end{aligned}$$

тобто $\|A^*\| \leq \sqrt{13}$.

Завдання 2. У просторі $L_2[a, b]$ розглянемо оператор Фредгольма

$$Ax(t) = x(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) x(s) ds,$$

де функція $K(t, s)$ (ядро оператора) – визначена і обмежена $\forall (x, y) \in [a, b] \times [a, b]$. Довести, що

$$A^*y(t) = y(t) + \lambda \int_a^b K(s, t) y(s) ds.$$

Розв'язання. Утворимо скалярний добуток $(Ax(t), y(t))$ і зобразимо його у вигляді $(x(t), A^*y(t))$, змінивши при цьому у другому доданку порядок інтегрування і перепозначивши змінні:

$$\begin{aligned} (Ax(t), y(t)) &= \int_a^b \left(x(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) x(s) ds \right) y(t) dt = \\ &= \int_a^b x(t) y(t) dt + \lambda \int_a^b \int_a^b K(t, s) x(s) y(t) ds dt = \\ &= \int_a^b x(t) y(t) dt + \lambda \int_a^b \int_a^b K(t, s) x(s) y(t) dt ds = \\ &= \int_a^b x(t) y(t) dt + \lambda \int_a^b \int_a^b K(s, t) x(t) y(s) ds dt = \\ &= \int_a^b x(t) \left(y(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) y(s) ds \right) dt = (x(t), A^*y(t)). \end{aligned}$$

Отже, $A^*y(t) = y(t) + \lambda \int_a^b K(s, t) y(s) ds$, і завдання виконано.

Завдання 3. Дослідити на компактність оператор $A : C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}$, якщо:

а) $Ax(t) = x^2(\sqrt[3]{t})$;

б) $Ax(t) = \int_0^1 t^2 \sqrt{s} x(s) ds$.

Розв'язання. а) Якщо оператор компактний, то він відображає будь-яку обмежену множину M у компактну K . Якщо в ролі множини M розглянути $M = \left\{ x(t) : x(t) = t^{\frac{3}{2}n} \right\}$, де $n \in \mathbf{N}$, то, оскільки $t \in [0, 1]$, маємо, що при $\forall n \in \mathbf{N}$ справедлива нерівність $|x(t)| \leq 1$. Тобто множина M є рівномірно обмеженою. Очевидно,

$$\begin{aligned} K &= \left\{ y(t) : y(t) = x^2 \left(\sqrt[3]{t} \right), \text{ де } x(t) \in M \right\} = \\ &= \left\{ y(t) : y(t) = x^2 \left(\sqrt[3]{t} \right), x(t) = t^{\frac{3}{2}n} \right\} = \\ &= \left\{ y(t) : y(t) = \left(\left(\sqrt[3]{t} \right)^{\frac{3}{2}n} \right)^2 \right\} = \{ y(t) : y(t) = t^n \}. \end{aligned}$$

Але множина $\{t^n\}$ не є компактною в $C_{[0,1]}$. А це означає, що й оператор A не є компактним в $C_{[0,1]}$.

б) Розглянемо довільну обмежену множину $M \in C_{[0,1]}$. Нехай $\forall x(t) \in M$ справджується нерівність $|x(t)| \leq C$. Тоді $\forall y(t) \in K$ (образ множини M) $y(t) = \int_0^1 t^2 \sqrt{s} x(s) ds$. Дослідимо K на компактність за допомогою теореми Арцела:

$$\begin{aligned} \forall y(t) \in K : \quad |y(t)| &= \left| \int_0^1 t^2 \sqrt{s} x(s) ds \right| \leq \int_0^1 t^2 \sqrt{s} |x(s)| ds \leq \\ &\leq Ct^2 \int_0^1 \sqrt{s} ds \leq Ct^2 \frac{2s^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^1 = Ct^2 \cdot \frac{2}{3} \leq \frac{2C}{3}. \end{aligned}$$

Тобто множина K обмежена. Дослідимо її на рівностепеневу неперервність, тобто потрібно перевірити чи виконуються умови визначення рівностепеневої неперервності:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall y(t) \in K \quad \forall t', t'' \in [0, 1] \quad \left(|t' - t''| < \delta \right) \Rightarrow \left(|y(t') - y(t'')| < \varepsilon \right).$$

Перевіримо, чи виконується дана умова.

$$\begin{aligned} |y(t') - y(t'')| &= \left| \int_0^1 (t')^2 \sqrt{s} x(s) ds - \int_0^1 (t'')^2 \sqrt{s} x(s) ds \right| = \\ &= \left| \int_0^1 \left((t')^2 - (t'')^2 \right) \sqrt{s} x(s) ds \right| \leq \int_0^1 \left| (t')^2 - (t'')^2 \right| \sqrt{s} |x(s)| ds \leq \\ &\leq 2|\xi| |t' - t''| C \int_0^1 \sqrt{s} ds \leq 2\delta C \frac{2s^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \delta C. \end{aligned}$$

Таким чином, щоб виконувалася умова $|y(t') - y(t'')| < \varepsilon$ достатньо, щоб $\frac{4}{3}\delta C < \varepsilon$, а це можливо при $\delta < \frac{3\varepsilon}{4C}$.

Отже множина K компактна, тому компактим буде й оператор A .

Завдання 4. При яких значеннях $\alpha, \beta, \gamma > 0$ оператор $A : C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}$, що діє за формулою $Ax(t) = \int_0^1 t^\alpha s^\beta x(s^\gamma) ds$ буде компактим?

Розв'язання. Перетворимо вираз для оператора A , здійснивши заміну $s^\gamma = p$. При цьому $s = p^{\frac{1}{\gamma}}$, $ds = \frac{1}{\gamma} p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} dp$, $s = 0 \Rightarrow p = 0$, $s = 1 \Rightarrow p = 1$.

Тобто інтеграл набуває вигляду

$$Ax(t) = \frac{1}{\gamma} \int_0^1 t^\alpha p^{\frac{\beta}{\gamma}} x(p) p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} dp = \frac{1}{\gamma} \int_0^1 t^\alpha p^{\frac{\beta+1-\gamma}{\gamma}} x(p) dp.$$

Якщо розглянути довільну обмежену множину K , тобто таку, що

$$\exists C \quad \forall x(t) \in K \quad \|x(t)\| \leq C,$$

то її образом буде множина M , для якої

$$\begin{aligned} \|Ax(t)\| &= \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{1}{\gamma} \int_0^1 t^\alpha p^{\frac{\beta+1-\gamma}{\gamma}} x(p) dp \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\gamma} C \max_{t \in [0,1]} |t^\alpha| \left. \frac{p^{\frac{\beta+1-\gamma}{\gamma}+1}}{\frac{\beta+1-\gamma}{\gamma}+1} \right|_0^1 = \frac{1}{\gamma} C \frac{\gamma}{\beta+1} = \frac{C}{\beta+1}. \end{aligned}$$

Інтеграл в останньому перетворенні є збіжним при $\frac{\beta+1-\gamma}{\gamma} > -1$, тобто

при $\frac{\beta+1}{\gamma} > 0$. Враховуючи умову $\gamma > 0$, робимо висновок, що $\beta > -1$.

Поряд із цим зауважимо, що для того, щоб значення виразу $\max_{t \in [0,1]} |t^\alpha|$ було скінченним, необхідно, щоб $\alpha \geq 0$. При виконанні цих умов множина M буде рівномірно обмеженою.

Перевіримо виконання умови рівностепеневості неперервності, тобто доведемо, що

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta_\varepsilon > 0) (\forall t_1, t_2 \in [0, 1] : |t_1 - t_2| < \delta) (\forall x(t) \in K) \Rightarrow |Ax(t_1) - Ax(t_2)| < \varepsilon.$$

Із визначення оператора A маємо

$$\begin{aligned} |Ax(t_1) - Ax(t_2)| &= \left| \frac{1}{\gamma} \int_0^1 t_1^\alpha p^{\frac{\beta+1-\gamma}{\gamma}} x(p) dp - \frac{1}{\gamma} \int_0^1 t_2^\alpha p^{\frac{\beta+1-\gamma}{\gamma}} x(p) dp \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \int_0^1 |t_1^\alpha - t_2^\alpha| p^{\frac{\beta+1-\gamma}{\gamma}} |x(p)| dp \leq \frac{C}{\gamma} |t_1^\alpha - t_2^\alpha| \int_0^1 p^{\frac{\beta+1-\gamma}{\gamma}} dp = \\ &= \frac{C}{\beta+1} |t_1^\alpha - t_2^\alpha| = \frac{C}{\beta+1} |\alpha \xi^{\alpha-1}| |t_1 - t_2|, \end{aligned}$$

де $\xi \in [0, 1]$ (тут використано формулу Лагранжа, а також перетворення аналогічні тим, що проведені при оцінюванні попереднього виразу з тими ж обмеженнями). Оцінюючи отриманий вираз далі, маємо:

$\frac{C}{\beta+1} |\alpha \xi^{\alpha-1}| |t_1 - t_2| < \frac{C\alpha\delta}{\beta+1}$. Причому ця оцінка можлива лише якщо $\alpha - 1 \geq 0$, тобто $\alpha \geq 1$. Таким чином, оператор A буде компактним при таких значеннях параметрів: $\alpha \geq 1$, $\beta > -1$, $\gamma > 0$.

Завдання 5. Знайти власні значення і власні функції(вектори) оператора A , якщо:

а) $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1], \quad Ax(t) = \int_0^1 t^2 e^s x(s) ds;$

б) $A : l_2 \rightarrow l_2, \quad Ax = (x_5 + 3x_1, x_2, x_3, x_4, \dots);$

в) $A : l_2 \rightarrow l_2, \quad Ax = (0, 3x_2 - x_3, 2x_1, x_4, 0, 0, \dots);$

г) $A : C'_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}, \quad Ax(t) = x'(t).$

Розв'язання. У кожному із цих завдань необхідно розв'язати операторне рівняння $Ax = \lambda x$. а) Для даного випадку рівняння $Ax = \lambda x$ набуває вигляду

$$\int_0^1 t^2 e^s x(s) ds = \lambda x(t),$$

або

$$\lambda x(t) = t^2 \int_0^1 e^s x(s) ds.$$

Позначивши $\int_0^1 e^s x(s) ds = C$, матимемо

$$\lambda x(t) = Ct^2.$$

Для обчислення значення сталої C утворимо у лівій частині останньої рівності вираз, що дорівнює C . Для цього домножимо ліву і праву частини рівності на e^t та проінтегруємо від 0 до 1. Одержимо:

$$\lambda \int_0^1 e^t x(t) dt = C \int_0^1 t^2 e^t dt,$$

Неважко переконатись, що $\int_0^1 t^2 e^t dt = e - 2$. Таким чином

$$\lambda C = C(e - 2),$$

звідки

$$C(\lambda - e + 2) = 0.$$

Якщо $C = 0$, то для будь-якого значення λ $x(t) \equiv 0$, а це означає, що $x(t)$ не є власною функцією даного оператора.

Нехай $C \neq 0$, тоді $\lambda - e + 2 = 0$, або $\lambda = e - 2$. Це власне значення даного оператора, і відповідні йому власні функції визначаються так:

$$x(t) = \frac{C}{e - 2} t^2,$$

або, що те саме

$$x(t) = Ct^2.$$

б) В даному випадку операторне рівняння $Ax = \lambda x$ має вигляд

$$(x_5 + 3x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots),$$

що еквівалентно системі рівнянь:

$$\begin{cases} x_5 + 3x_1 = \lambda x_1, \\ x_2 = \lambda x_2, \\ x_3 = \lambda x_3, \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3 - \lambda)x_1 + x_5 = 0, \\ (1 - \lambda)x_2 = 0, \\ (1 - \lambda)x_3 = 0, \\ \dots \end{cases}$$

Розглянемо випадок, коли $\lambda = 1$. Тоді з другого, третього та наступних рівнянь випливає, що x_2, x_3, \dots можуть набувати довільних значень. Разом із цим перша рівність системи матиме вигляд

$$2x_1 = -x_5,$$

а це означає, що $\lambda = 1$ є власним значенням оператора A і відповідний йому власний вектор має вигляд

$$\left(-\frac{x_5}{2}, x_2, x_3, x_4, \dots\right),$$

де x_2, x_3, x_4, \dots – будь-які числа.

Нехай тепер $\lambda \neq 1$. Тоді з другого, третього і наступних рівнянь системи робимо висновок, що $x_2 = x_3 = \dots = 0$ і перше рівняння набуває вигляду

$$(3 - \lambda)x_1 = 0.$$

Якщо $\lambda = 3$, то x_1 може бути довільним, тобто $\lambda = 3$ – власне значення, а

$$(x_1, 0, 0, \dots)$$

відповідний власний вектор.

Якщо $\lambda \neq 3$ і $\lambda \neq 1$, то $x_1 = 0$, тобто $x = \theta$ – нульовий розв'язок. А це означає, що x не може бути власним вектором.

в) Як і в попередньому випадку рівняння $Ax = \lambda x$ має вигляд

$$(0, 3x_2 - x_3, 2x_1, x_4, 0, 0, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots),$$

що еквівалентно системі:

$$\begin{cases} \lambda x_1 = 0, \\ 3x_2 - x_3 - \lambda x_2 = 0, \\ 2x_1 - \lambda x_3 = 0, \\ x_4 - \lambda x_4 = 0, \\ \lambda x_5 = 0, \\ \lambda x_6 = 0, \\ \dots \end{cases}$$

Якщо $\lambda = 0$, то x_1, x_5, x_6, \dots можуть набувати довільних значень і система запишеться у вигляді

$$\begin{cases} 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ 2x_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 3x_2, \\ x_1 = x_4 = 0, \end{cases}$$

тобто

$$(0, x_2, 3x_2, 0, x_5, x_6, \dots)$$

є власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda = 0$.

Якщо $\lambda \neq 0$, то $x_1 = x_5 = x_6 = \dots = 0$ і система набуває вигляду

$$\begin{cases} (3 - \lambda)x_2 - x_3 = 0, \\ -\lambda x_3 = 0, \\ (1 - \lambda)x_4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3 - \lambda)x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ (1 - \lambda)x_4 = 0. \end{cases}$$

Якщо $\lambda = 3$, то x_2 може бути довільним, а $x_4 = 0$. Якщо $\lambda = 1$, то x_4 може бути довільним, а $x_2 = 0$.

Отже, власному значенню $\lambda = 0$ відповідають власні вектори $(0, x_2, 3x_2, 0, x_5, x_6, \dots)$; власному значенню $\lambda = 3$ відповідають власні вектори $(0, x_2, 0, 0, \dots)$; власному значенню $\lambda = 1$ відповідають власні вектори $(0, 0, 0, x_4, 0, 0, \dots)$.

г) Операторне рівняння $Ax(t) = \lambda x(t)$ еквівалентно

$$x'(t) = \lambda x(t).$$

Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda x, \\ \frac{dx}{x} &= \lambda dt, \\ \ln x &= \lambda t + C, \\ x(t) &= Ce^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Тобто будь-яке значення $\lambda \in \mathbf{R}$ є власним значенням оператора A , а відповідні власні функції мають вигляд $x(t) = Ce^{\lambda t}$.

Завдання 6. Знайти власні значення і власні функції симетричного оператора $A : L_2[-1, 1] \rightarrow L_2[-1, 1]$, $Ax(t) = \int_{-1}^1 K(t, s)x(s)ds$, де

$$K(t, s) = \begin{cases} t + 1, & t \leq s \\ s + 1, & s \leq t. \end{cases}$$

Розв'язання. Для даного оператора рівняння $Ax = \lambda x$ набуває вигляду

$$\int_{-1}^t (s + 1)x(s)ds + \int_t^1 (t + 1)x(s)ds = \lambda x(t).$$

Продиференціювавши ліву і праву частини даного рівняння, одержимо:

$$(t + 1)x(t) + \int_t^1 x(s)ds - (t + 1)x(t) = \lambda x'(t),$$

або

$$\int_t^1 x(s)ds = \lambda x'(t).$$

Продиференціювавши отримане рівняння, маємо

$$-x(t) = \lambda x''(t).$$

Це лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Якщо $\lambda = 0$, то $x(t) \equiv 0$, тобто $x(t)$ не може бути власною функцією.

Нехай $\lambda \neq 0$. Тоді характеристичне рівняння має вигляд:

$$\lambda k^2 + 1 = 0.$$

При $\lambda < 0$ визначаємо $k = \pm \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}$, і загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$x(t) = C_1 e^{\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}t} + C_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}t}.$$

Для знаходження сталих C_1 і C_2 необхідно задати крайові умови. Із початкового рівняння

$$\int_{-1}^t (s+1)x(s)ds + \int_t^1 (t+1)x(s)ds = \lambda x(t)$$

робимо висновок, що $x(-1) = 0$, а з рівняння

$$\int_t^1 x(s)ds = \lambda x'(t),$$

що $x'(1) = 0$. Підставимо крайові умови у знайдений розв'язок:

$$\begin{cases} C_1 e^{-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}} + C_2 e^{\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}} = 0, \\ C_1 \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} e^{\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}} - C_2 \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} e^{-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}} = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix} e^{-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}} & e^{\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}} \\ \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} e^{\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}} & -\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} e^{-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} e^{-\frac{2}{\sqrt{-\lambda}}} - \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} e^{\frac{2}{\sqrt{-\lambda}}} \neq 0,$$

що означає, що система рівнянь має тільки тривіальний розв'язок, а саме $C_1 = C_2 = 0$. Тобто $x(t) \equiv 0$, тому $x(t)$ не може бути власною функцією.

Нехай тепер $\lambda > 0$. Тоді $k = \pm \frac{i}{\sqrt{\lambda}}$ та

$$x(t) = C_1 \cos \frac{t}{\sqrt{\lambda}} + C_2 \sin \frac{t}{\sqrt{\lambda}}.$$

Підставимо крайові умови:

$$\begin{cases} C_1 \cos \frac{-1}{\sqrt{\lambda}} + C_2 \sin \frac{-1}{\sqrt{\lambda}} = 0, \\ -C_1 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + C_2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 \cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - C_2 \sin \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0, \\ C_1 \sin \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - C_2 \cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & \sin \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ \sin \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & \cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix} = -\cos^2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \sin^2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Якщо визначник лінійної системи дорівнює нулю, тоді система матиме ненульовий розв'язок:

$$\begin{aligned} -\cos^2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \sin^2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} &= 0, \\ \cos \frac{2}{\sqrt{\lambda}} &= 0, \\ \frac{2}{\sqrt{\lambda}} &= \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ \sqrt{\lambda} &= \frac{4}{\pi + 2\pi n}, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ \lambda &= \frac{16}{(\pi + 2\pi n)^2}, \quad n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Отже, вказані λ – власні значення, а

$$x(t) = C_1 \cos \frac{\pi + 2\pi n}{4} t + C_2 \sin \frac{\pi + 2\pi n}{4} t$$

– власні функції.

Завдання 4. Знайти спектр і резольвенту оператора A , якщо:

а) $A : C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}, \quad Ax(t) = x(0) + tx(1);$

б) $A : C'_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}, \quad Ax(t) = x'(t);$

в) $A : C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}, \quad Ax(t) = tx(t);$

г) $A : L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1], \quad Ax(t) = \int_0^1 t^2(s+1)x(s)ds;$

д) $A : l_2 \rightarrow l_2, \quad Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots).$

Розв'язання. Для знаходження резольвенти оператора A у кожному з випадків необхідно знайти оператор, обернений до $A - \lambda I$, інакше кажучи, розв'язати рівняння $Ax - \lambda x = y$.

а) У даному випадку рівняння $Ax - \lambda x = y$ має вигляд

$$x(0) + tx(1) - \lambda x(t) = y(t).$$

Для його розв'язання відмітимо, що при $\lambda \neq 0$

$$x(t) = \frac{x(0) + tx(1) - y(t)}{\lambda},$$

де $x(0)$, $x(1)$ – деякі сталі числа. Для їх знаходження підставимо у початкове рівняння значення $t = 0$ і $t = 1$. Отримаємо:

$$\begin{cases} x(0) - \lambda x(0) = y(0), \\ x(0) + x(1) - \lambda x(1) = y(1). \end{cases}$$

Розв'яжемо дану систему відносно $x(0)$, $x(1)$:

$$\begin{cases} x(0)(1 - \lambda) = y(0), \\ x(0) + x(1)(1 - \lambda) = y(1), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = \frac{y(0)}{1 - \lambda}, \\ x(1) = \frac{1}{1 - \lambda} \left(y(1) - \frac{y(0)}{1 - \lambda} \right). \end{cases}$$

Таким чином, $x(t) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{y(0)}{1 - \lambda} + \frac{t}{1 - \lambda} \left(y(1) - \frac{y(0)}{1 - \lambda} \right) - y(t) \right)$ і можемо записати

$$\begin{aligned} R_\lambda(A)(y(t)) &= (A - \lambda I)^{-1}(y(t)) = \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{y(0)}{1 - \lambda} + \frac{t}{1 - \lambda} \left(y(1) - \frac{y(0)}{1 - \lambda} \right) - y(t) \right). \end{aligned}$$

Очевидно, резольвента оператора не існує при $\lambda = 0$ і $\lambda = 1$. Тобто, ці значення λ є власними значеннями оператора A і тому належать до точкового спектра $\sigma_p(A)$, а залишковий і неперервний спектри для нього є порожніми множинами.

б) Рівняння

$$x'(t) - \lambda x(t) = y(t)$$

є лінійним неоднорідним рівнянням, для розв'язання якого застосовується метод варіації сталих. Для цього спочатку шукають розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$x'(t) - \lambda x(t) = 0.$$

Оскільки це рівняння з відокремлюваними змінними, то, переписавши його у вигляді $\frac{dx}{dt} = \lambda x$, а потім перетворивши до $\frac{dx}{x} = \lambda dt$ і проінтегрувавши, отримаємо $\ln x = \lambda t + C$, або $x(t) = Ce^{\lambda t}$. Після цього розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді $x(t) = C(t)e^{\lambda t}$. Підставимо $x(t)$ у початкове рівняння і одержимо:

$$\begin{aligned} (C(t)e^{\lambda t})' - \lambda C(t)e^{\lambda t} &= y(t), \\ C'(t)e^{\lambda t} + \lambda C(t)e^{\lambda t} - \lambda C(t)e^{\lambda t} &= y(t), \\ C'(t)e^{\lambda t} &= y(t), \end{aligned}$$

звідки

$$C(t) = \int e^{-\lambda t} y(t) dt.$$

Таким чином, резольвента оператора A має вигляд:

$$R_\lambda(A)(y(t)) = e^{\lambda t} \int e^{-\lambda t} y(t) dt.$$

Вона існує для всіх $\lambda \in \mathbf{R}$.

в) Рівняння

$$tx(t) - \lambda x(t) = y(t)$$

має простий розв'язок $x(t) = \frac{y(t)}{t-\lambda}$. Очевидно, резольвента оператора A

$$R_\lambda(A)(y(t)) = \frac{y(t)}{t-\lambda}$$

існує для всіх дійсних значень λ . Однак при $\lambda \in [0, 1]$ оператор $R_\lambda(A)$ буде необмеженим (враховуючи, що $t \in [0, 1]$). Це означає, що всі $\lambda \in [0, 1]$ є точками спектра оператора A . Відмітимо також, що A не має власних значень, бо рівняння $x(t)(t-\lambda) = 0$ для будь-якого λ має лише тривіальний розв'язок. Разом із цим, множина значень $R(A - \lambda I)$ не співпадає з множиною $C_{[0,1]}$ (наприклад, не містить функцій $y(t) = t^\alpha$, де α – довільне дійсне додатне число, адже їх образом повинні були бути функції $x(t) = \frac{t^\alpha}{t-\lambda} \notin C_{[0,1]}$).

г) Рівняння

$$\int_0^1 t^2 (s+1) x(s) ds - \lambda x(t) = y(t)$$

є інтегральним. Переписавши рівняння у вигляді

$$t^2 \int_0^1 (s+1) x(s) ds - \lambda x(t) = y(t)$$

та ввівши позначення $\int_0^1 (s+1) x(s) ds = C$, отримаємо:

$$\begin{aligned} Ct^2 - \lambda x(t) &= y(t), \\ x(t) &= \frac{1}{\lambda} (Ct^2 - y(t)). \end{aligned}$$

Для знаходження сталої C домножимо ліву і праву частини останньої рівності на $t+1$ і результат проінтегруємо в межах від 0 до 1:

$$\int_0^1 (t+1) x(t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 (Ct^2 - y(t)) (t+1) dt.$$

Врахуємо, що $\int_0^1 (t+1) x(t) dt = C$ і обчислимо $\int_0^1 t^2 (t+1) dt = \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{12}$. Підставимо отримані значення у попередній вираз:

$$C = \frac{C}{\lambda} \cdot \frac{7}{12} - \lambda \int_0^1 y(t) (t+1) dt,$$

звідки

$$\begin{aligned} C \left(1 - \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{7}{12}\right) &= -\lambda \int_0^1 y(t) (t+1) dt, \\ C &= -\frac{12\lambda^2}{12\lambda-7} \int_0^1 y(t) (t+1) dt. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$x(t) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{12\lambda^2 t^2}{7-12\lambda} \int_0^1 (s+1) y(s) ds - y(t) \right) = R_\lambda(A).$$

Оскільки резольвента не існує для $\lambda = 0$ і $\lambda = \frac{7}{12}$, то саме вони і складають спектр оператора, причому $\{0, \frac{7}{12}\} = \sigma_p$.

д) Для знаходження резольвенти розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_1 = y_1, \\ \frac{x_2}{2} - \lambda x_2 = y_2, \\ \frac{x_3}{3} - \lambda x_3 = y_3, \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 (1 - \lambda) = y_1, \\ x_2 \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) = y_2, \\ x_3 \left(\frac{1}{3} - \lambda\right) = y_3, \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{y_1}{1-\lambda}, \\ x_2 = \frac{y_2}{\frac{1}{2}-\lambda}, \\ x_3 = \frac{y_3}{\frac{1}{3}-\lambda}, \\ \dots \end{cases}$$

Отже, $R_\lambda(A) = \left(\frac{y_1}{1-\lambda}, \frac{y_2}{\frac{1}{2}-\lambda}, \frac{y_3}{\frac{1}{3}-\lambda}, \dots\right)$. Зрозуміло, що резольвента не існує для $\lambda = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$. Це означає, що всі ці числа є власними значеннями оператора A , інакше кажучи, $\sigma_p = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}\right\}$. Крім того, при $\lambda = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ $R_\lambda(A) = (y_1, 2y_2, 3y_3, \dots)$, а цей оператор не буде обмеженим у l_2 . Справді, якщо припустити, що $\exists C, \forall x \in l_2 \|Ax\| \leq C \|x\|$,

то підбравши $x = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, 1, 0, \dots\right)$, де $n > C$ (цього можна досягти

враховуючи необмеженість множини натуральних чисел), отримаємо протиріччя: $\|(0, 0, \dots, 0, n, 0, \dots)\| = n > C = C \|(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)\|$. Таким чином, $\lambda = 0$ теж належить спектру оператора A .

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. Знайти оператор A^* , спряжений до A , оцінити $\|A\|$ та $\|A^*\|$, якщо:

1. $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$, $Ax(t) = \int_0^1 (1-t)^2 s^2 x(s) ds$;
2. $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$, $Ax(t) = \int_0^1 t^2 s^2 x(s) ds$;

3. $A : L_2[-1, 1] \rightarrow L_2[-1, 1], \quad Ax(t) = x(t) + \int_{-1}^1 t^3 \sqrt{s} x(s) ds;$
4. $A : L_2[0, \pi] \rightarrow L_2[0, \pi], \quad Ax(t) = x(t) + 2 \int_0^\pi \cos t \sin s x(s) ds;$
5. $A : L_2[0, \pi] \rightarrow L_2[0, \pi], \quad Ax(t) = x(t) - \int_0^1 t^3 \sin(s-1) x(s) ds;$
6. $A : l_2 \rightarrow l_2, \quad Ax = (x_2, x_3 - x_2, x_4, -x_3, 0, 0, \dots);$
7. $A : l_2 \rightarrow l_2, \quad Ax = (0, 0, x_5, -3x_1, 0, 0, \dots);$
8. $A : l_2 \rightarrow l_2, \quad Ax = (2x_3 - x_2, 3x_1, x_1 - x_3, 0, 0, \dots);$
9. $A : l_2 \rightarrow l_2, \quad Ax = (x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_3, 0, 0, \dots);$
10. $A : l_2 \rightarrow l_2, \quad Ax = (0, x_2, 0, x_4, 0, x_6, \dots).$

Завдання 2. Чи є компактним оператор $A : C_{[a,b]} \rightarrow C_{[a,b]}$ якщо:

1. $[a, b] = [0, 1], Ax(t) = tx(0);$
2. $[a, b] = [0, 1], Ax(t) = x(t) + 1;$
3. $[a, b] = [0, 1], Ax(t) = x(\sqrt{t});$
4. $[a, b] = [-\pi, \pi], Ax(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin s x(s) ds;$
5. $[a, b] = [0, 1], Ax(t) = \int_0^1 t^2 s^2 x(s) ds;$
6. $[a, b] = [0, 1], Ax(t) = \int_0^1 e^{ts} x(s) ds;$
7. $[a, b] = [0, 1], Ax(t) = \int_0^1 \sin ts^2 x(s) ds;$
8. $[a, b] = [-1, 1], Ax(t) = x\left(\frac{t^2}{2}\right);$
9. $[a, b] = [0, 1], Ax(t) = x(t^2);$
10. $[a, b] = [0, 1], Ax(t) = t^2 x(t).$

Завдання 3. Знайти власні значення і власні вектори (функції) таких операторів:

1. $A : l_2 \rightarrow l_2, \quad Ax = (0, 3x_2 - x_3, 2x_1, x_5, 0, 0, \dots);$
2. $A : l_2 \rightarrow l_2, \quad Ax = (x_3, x_4, x_5, \dots);$

3. $A : l_2 \rightarrow l_2, Ax = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots), \quad k - \text{фіксоване};$
4. $A : l_2 \rightarrow l_2, Ax = (2x_3 + x_1, 4x_2, x_3, x_4, \dots);$
5. $A : l_2 \rightarrow l_2, Ax = (-x_1 + 4x_2, 2x_1 - 3x_2, x_3, x_4, \dots);$
6. $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1], Ax(t) = \int_0^1 t \sin \pi s x(s) ds;$
7. $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1], Ax(t) = \int_0^1 K(t, s)x(s) ds, \quad K(t, s) = \begin{cases} t, t \leq s; \\ s, s < t; \end{cases}$
8. $A : L_2[-1, 1] \rightarrow L_2[-1, 1], Ax(t) = \int_{-1}^1 K(t, s)x(s) ds, \quad K(t, s) = \begin{cases} (t+1)(1-s), t \leq s; \\ (s+1)(1-t), s < t; \end{cases}$
9. $A : L_2\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow L_2\left[0, \frac{\pi}{4}\right], Ax(t) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} K(t, s)x(s) ds, \quad K(t, s) = \begin{cases} \cos 2t \sin 2s, t \leq s; \\ \sin 2t \cos 2s, s < t; \end{cases}$
10. $A : L_2\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \rightarrow L_2\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], Ax(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 K(t, s)x(s) ds, \quad K(t, s) = \begin{cases} \cos t \sin s, t \leq s; \\ \sin t \cos s, s < t. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти резольвенту та спектр оператора A , якщо:

1. $A : l_2 \rightarrow l_2, \quad Ax = (x_4 - x_1, 2x_1 - x_2, x_3, x_4, 0, 0, \dots);$
2. $A : l_2 \rightarrow l_2, \quad Ax = (-3x_2, x_3, 2x_1, x_4, x_5, \dots);$
3. $A : l_2 \rightarrow l_2, \quad Ax = (x_3 + x_2, x_2 + x_1, x_1 + x_3, x_4, x_5, \dots);$
4. $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1], \quad Ax(t) = \int_0^1 t \sin s x(s) ds;$
5. $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1], \quad Ax(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{\sqrt[4]{t}} ds;$
6. $A : C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}, \quad Ax(t) = \int_0^1 t^2 s x(s) ds;$
7. $A : C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}, \quad Ax(t) = (t-1)x(0) + x(1);$
8. $A : C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}, \quad Ax(t) = x(0) + tx(0);$
9. $A : C_{[1,2]} \rightarrow C_{[1,2]}, \quad Ax(t) = x(1) + t^2 x(2);$
10. $A : C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}, \quad Ax(t) = \int_0^1 s^4 x(s) ds - x(t).$

6 Інтегральні рівняння

Перелік необхідних питань теорії

1. Означення та класифікація інтегральних рівнянь.
2. Повторні ядра та резольвента інтегрального рівняння. Метод резольвент.
3. Метод послідовних наближень розв'язування інтегральних рівнянь.
4. Розв'язування інтегральних рівнянь з виродженими ядрами методом їх зведення до системи алгебраїчних рівнянь.
5. Метод розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерра зведенням їх до диференціальних рівнянь.
6. Симетричні ядра. Власні числа та власні функції симетричного ядра. Розв'язування інтегральних рівнянь з симетричними ядрами.
7. Теорема Фредгольма для інтегральних рівнянь.

Теоретичні відомості

Інтегральним рівнянням називається рівняння, що містить невідому функцію під знаком інтеграла. Наприклад, інтегральним рівнянням відносно функції $\varphi(t)$ є рівняння

$$a(t)\varphi(t) + f(t) = \lambda \int_a^b k(t, s)\varphi(s)ds, \quad (6)$$

де $a(t)$, $f(t)$, $k(t, s)$ - відомі функції, λ - деякий параметр, змінні t і s пробігають деякий фіксований відрізок $[a, b]$.

Функція $k(t, s)$ в рівнянні (6) називається *ядром інтегрального рівняння*.

Рівняння (6) належить до *лінійних* інтегральних рівнянь, оскільки шукана функція входить в рівняння лінійно. Багато задач математичної фізики розв'язуються за допомогою нелінійних інтегральних рівнянь. Наприклад, рівнянь виду $\varphi(t) = \lambda \int_a^b k(t, s)g(\varphi(s), s)ds$, де $k(t, s)$, $g(u, s)$ - задані, $(t, s) \in [a, b] \times [a, b]$, $(u, s) \in [a, b] \times [a, b]$. Надалі обмежимо розглядом лінійних інтегральних рівнянь.

Розглянемо основні класи таких рівнянь.

Якщо невідома функція міститься лише під знаком інтеграла, то рівняння називається *інтегральним рівнянням першого роду*. Інтегральні рівняння, в яких невідома функція міститься також і поза інтегральним доданком, називається *інтегральним рівнянням другого роду*.

Якщо межі інтегрування фіксовані, то інтегральне рівняння називається *рівнянням Фредгольма*. У випадку, коли хоча б одна межа інтегрування змінна, то інтегральне рівняння називається *рівнянням Вольтерра*.

Отже, надалі розглядатимемо такі основні типи інтегральних рівнянь:

а) *інтегральне рівняння Фредгольма другого роду*

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b k(t, s)\varphi(s)ds = f(t); \quad (7)$$

б) *інтегральне рівняння Фредгольма першого роду*

$$\int_a^b k(t, s)\varphi(s)ds = f(t); \quad (8)$$

в) *інтегральне рівняння Вольтерра другого роду*

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^t k(t, s)\varphi(s)ds = f(t), \quad t \in (a, b]; \quad (9)$$

г) *інтегральне рівняння Вольтерра першого роду*

$$\int_a^t k(t, s)\varphi(s)ds = f(t), \quad t \in (a, b]. \quad (10)$$

Слід зауважити, що рівняння Вольтерра є частинним випадком рівняння Фредгольма, якщо вважати $k(t, s) \equiv 0$ при $s > t$. Однак фізичні задачі, що приводять до рівнянь Вольтерра і рівнянь Фредгольма, а також властивості розв'язків цих рівнянь суттєво відрізняються. Тому рівняння Вольтерра доцільно виділити в окремий клас.

Інтегрування в рівняннях (7) – (10) може здійснюватись як по відрізьку $[a, b]$, $a < b$ числової осі, так і на деяких областях більшої розмірності. При цьому класифікація інтегральних рівнянь не змінюється. Наприклад, якщо функції $k(A, B)$, $f(A)$ визначені при $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, де

Ω – область в тривимірному просторі, тоді неоднорідне рівняння Фредгольма другого роду запишеться так:

$$\varphi(A) = \int_{\Omega} k(A, B)\varphi(B)d\sigma(B) + f(A),$$

де $d\sigma(P)$ – елемент об'єму області Ω , що містить точку B .

Якщо в рівняннях (7) – (10) $f(t) \equiv 0$, то рівняння називають *однорідними інтегральними рівняннями*. В іншому випадку – *неоднорідними*.

Розглянемо основні методи розв'язування лінійних інтегральних рівнянь.

6.1 Метод резольвент розв'язування інтегральних рівнянь

Теоретичні відомості

Метод резольвент – це метод розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольтерра другого роду.

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b k(t, s)\varphi(s)ds = f(t), \quad (\lambda \in \mathbb{C}.) \quad (11)$$

Введемо в розгляд послідовність функцій

$$k_1(t, s) \equiv k(t, s);$$

$$k_2(t, s) = \int_a^b k(t, \tau)k_1(\tau, s)d\tau,$$

$$k_3(t, s) = \int_a^b k(t, \tau)k_2(\tau, s)d\tau, \dots$$

$$k_n(t, s) = \int_a^b k(t, \tau)k_{n-1}(\tau, s)d\tau \text{ і т.д.}$$

Послідовність функцій $\{k_n(t, s), n = 1, 2, \dots\}$ називається *послідовністю ітерованих* (або *повторних*) ядер.

Відомо, що якщо ядро $k(t, s)$ при $(t, s) \in [a, b] \times [a, b]$ задовольняє умовам: $k(t, s)$ – дійсна функція тождественно не рівна нулеві, $k(t, s)$ – неперервна функція відносно (t, s) $k(t, s) = k(s, t)$ (тобто ядро $k(t, s)$ симетричне), тоді цими ж властивостями володіють повторні ядра.

Розв'язок рівняння (11) можна представити у вигляді

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t, s, \lambda)f(s)ds, \quad (12)$$

де функція $R(t, s, \lambda)$ називається *резольвентою ядра* $k(t, s)$ і визначається за формулою

$$R(t, s, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_{n+1}(t, s). \quad (13)$$

Розглянемо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^t k(t, s) \varphi(s) ds = f(t). \quad (14)$$

Послідовність ітерованих ядер у цьому випадку визначається за наступною рекурентною формулою:

$$k_1(t, s) \equiv k(t, s);$$

$$k_n(t, s) = \int_s^t k(t, \tau) k_{n-1}(\tau, s) d\tau, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Тоді розв'язок рівняння (14) записується в такому вигляді:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t R(t, s, \lambda) f(s) ds, \quad (15)$$

де резольвента $R(t, s, \lambda)$ визначається як і раніше за формулою (13).

Розв'язання типових задач

Завдання 1. *Методом резольвент розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма:*

$$x(t) = \frac{1}{e^\pi + 1} \int_0^\pi (e^t \cos s) x(s) ds + \frac{t}{4}, \quad t \in [0, \pi].$$

Розв'язання. Побудуємо послідовність ітерованих ядер:

$$k_1(t, s) = k(t, s) = e^t \cos s;$$

$$k_2(t, s) = \int_0^\pi k(t, \tau) k_1(\tau, s) d\tau = \int_0^\pi (e^t \cos \tau) (e^\tau \cos s) d\tau = e^t \cos s \int_0^\pi e^\tau \cos \tau d\tau.$$

Проінтегрувавши два рази частинами маємо, що $\int_0^\pi \cos \tau e^\tau d\tau = -\frac{e^\pi + 1}{2}$.

$$\text{Таким чином } k_2(t, s) = -\frac{e^\pi + 1}{2} e^t \cos s;$$

$$k_3(t, s) = \int_0^\pi k(t, \tau) k_2(\tau, s) d\tau = \int_0^\pi e^t \cos \tau \left(-\frac{e^\pi + 1}{2} e^\tau \cos s \right) d\tau = -\frac{e^\pi + 1}{2} e^t \times$$

$$\times \cos s \int_0^\pi \cos \tau e^\tau d\tau = \left(\frac{e^\pi + 1}{2} \right)^2 e^t \cos s = (-1)^2 \left(\frac{e^\pi + 1}{2} \right)^2 e^t \cos s;$$

$$k_4(t, s) = \int_0^1 k(t, \tau)k_3(\tau, s)d\tau = \int_0^\pi e^t \cos \tau \left(\frac{e^\pi + 1}{2}\right)^2 e^\tau \cos s d\tau = \left(\frac{e^\pi + 1}{2}\right)^2 \times$$

$$\times e^t \cos s \int_0^\pi \cos \tau e^\tau d\tau = -\left(\frac{e^\pi + 1}{2}\right)^3 e^t \cos s = (-1)^3 \left(\frac{e^\pi + 1}{2}\right)^3 e^t \cos s;$$

.....

$$k_n(t, s) = \int_0^1 k(t, \tau)k_{n-1}(\tau, s)d\tau = \int_0^\pi e^t \cos \tau (-1)^{n-2} \left(\frac{e^\pi + 1}{2}\right)^{n-2} e^\tau \cos s d\tau =$$

$$(-1)^{n-2} \left(\frac{e^\pi + 1}{2}\right)^{n-2} e^t \cos s \int_0^\pi \cos \tau e^\tau d\tau = (-1)^{n-1} \left(\frac{e^\pi + 1}{2}\right)^{n-1} e^t \cos s.$$

Отже, резольвента ядра $k(t, s) = e^t \cos s$ запишеться так:

$$R(t, s, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_{n+1}(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^\pi + 1}\right)^n (-1)^n \left(\frac{e^\pi + 1}{2}\right)^n e^t \cos s =$$

$$= e^t \cos s \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = e^t \cos s \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} e^t \cos s.$$

Тому розв'язок $x(t)$ нашого інтегрального рівняння Фредгольма має вигляд:

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^\pi R(t, s, \lambda) f(s) ds = \frac{t}{4} + \frac{1}{e^\pi + 1} \int_0^\pi \frac{2}{3} e^t \cos s \cdot \frac{s}{4} ds =$$

$$= \frac{e^t}{6(e^\pi + 1)} \int_0^\pi s \cos s ds + \frac{t}{4} = \frac{e^t}{6(e^\pi + 1)} \left(s \cdot \sin s \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin s ds \right) + \frac{t}{4} =$$

$$= \frac{e^t}{6(e^\pi + 1)} \cos s \Big|_0^\pi + \frac{t}{4} = -\frac{e^t}{3(e^\pi + 1)} + \frac{t}{4}.$$

Завдання 2. Методом резольвент розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра:

$$x(t) = 2 \int_0^t e^{t-s} x(s) ds + \cos t.$$

Розв'язання. Побудуємо послідовність повторних ядер:

$$k_1(t, s) = k(t, s) = e^{t-s};$$

$$k_2(t, s) = \int_s^t e^{t-\tau} e^{\tau-s} d\tau = \int_s^t e^{t-s} d\tau = e^{t-s} \tau \Big|_s^t = e^{t-s}(t-s);$$

$$k_3(t, s) = \int_s^t e^{t-\tau} e^{\tau-s} (\tau-s) d\tau = e^{t-s} \int_s^t (\tau-s) d\tau = e^{t-s} \frac{(\tau-s)^2}{2} \Big|_s^t =$$

$$= e^{t-s} \frac{(t-s)^2}{2};$$

$$k_4(t, s) = \int_s^t e^{t-\tau} e^{\tau-s} \frac{(\tau-s)^2}{2} d\tau = e^{t-s} \int_s^t \frac{(\tau-s)^2}{2} d\tau = e^{t-s} \frac{(\tau-s)^3}{2 \cdot 3} \Big|_s^t =$$

$$= e^{t-s} \frac{(t-s)^3}{2 \cdot 3};$$

.....

$$k_n(t, s) = e^{t-s} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Тоді резольвента ядра $k(t, s) = e^{t-s}$ зображується так:

$$R(t, s, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n e^{t-s} \frac{(t-s)^n}{n!} = e^{t-s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2(t-s))^n}{n!} = e^{t-s} e^{2(t-s)} = e^{3(t-s)}.$$

Розв'язок нашого інтегрального рівняння Вольтерра запишеться у такому вигляді:

$$x(t) = \cos t + 2 \int_0^t e^{3(t-s)} \cos s ds = \cos t + 2e^{3t} \int_0^t e^{-3s} \cos s ds.$$

Обчислимо інтеграл $\int_0^t e^{-3s} \cos s ds$: маємо $\int_0^t e^{-3s} \cos s ds = \frac{1}{10} (e^{-3t} (\sin t - 3 \cos t) + 3)$.

Тоді шуканий розв'язок нашого інтегрального рівняння Вольтерра

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t + 2e^{3t} \int_0^t e^{-3s} \cos s ds = \cos t + 2e^{3t} \left(\frac{1}{10} (e^{-3t} (\sin t - 3 \cos t) + 3) \right) = \\ &= \frac{1}{5} \sin t + \frac{2}{5} \cos t + \frac{3}{5} e^{3t}. \end{aligned}$$

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. *Методом резольвент розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма:*

$$1. \quad x(t) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos s x(s) ds + \cos t, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}];$$

$$2. \quad x(t) = \frac{e}{3} \int_{-1}^1 t e^s x(s) ds + \frac{3t^2 + 1}{e^t}, \quad t \in [-1, 1];$$

$$3. \quad x(t) = \frac{1}{6\pi} \int_0^{2\pi} (\cos t \cos s + 3 \sin 2t \sin 2s) x(s) ds + 5 \cos t, \quad t \in [0, 2\pi];$$

$$4. \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin t \sin s + \cos 2t \cos 2s) x(s) ds + \cos 2t, \quad t \in [0, 2\pi];$$

$$5. x(t) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos s x(s) ds + \cos t, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}];$$

$$6. x(t) = 2 \int_{-1}^1 t^2 s^2 x(s) ds + e^t, \quad t \in [-1, 1];$$

$$7. x(t) = \int_{-1}^0 (1+t)(1-s)x(s) ds + \pi \cos \pi t, \quad t \in [-1, 0];$$

$$8. x(t) = \int_{-1}^1 (ts + t^2 s^2) x(s) ds + 3(t+1), \quad t \in [-1, 1];$$

$$9. x(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + (2t-1)(2s-1)) x(s) ds + 3t^2, \quad t \in [0, 1];$$

$$10. x(t) = -\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} (2 + \cos t \cos s) x(s) ds + 2t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Завдання 2. *Методом резольвент розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра:*

$$1. x(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} s} x(s) ds + \operatorname{ch} t, \quad t \in [0, T];$$

$$2. x(t) = \int_0^t (t-s)x(s) ds + t, \quad t \in [0, T];$$

$$3. x(t) = \int_0^t \frac{1+s^2}{1+t^2} ds + \frac{1}{1+t^2}, \quad t \in [0, T];$$

$$4. x(t) = 2 \int_0^t e^{t^2-s^2} x(s) ds + e^{t^2+2t}, \quad t \in [0, T];$$

$$5. x(t) = 2 \int_0^t e^{t-s} x(s) ds + \sin t, \quad t \in [0, T];$$

$$6. x(t) = \int_0^t tsx(s) ds + t, \quad t \in [0, T];$$

$$7. x(t) = -\int_0^t 3^{t-s} x(s) ds + t3^t, \quad t \in [0, T];$$

$$8. \quad x(t) = \int_0^t \frac{1+t^2}{1+s^2} x(s) ds + 1 + t^2, \quad t \in [0, T];$$

$$9. \quad x(t) = \int_0^t \frac{2 + \cos t}{2 + \cos s} x(s) ds + e^t \sin t, \quad t \in [0, T];$$

$$10. \quad x(t) = - \int_0^t \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} s} x(s) ds + t \operatorname{ch} t, \quad t \in [0, T].$$

6.2 Метод послідовних наближень розв'язування інтегральних рівнянь

Теоретичні відомості

Метод послідовних наближень використовується для розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольтерра другого роду.

Нехай

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b k(t, s) \varphi(s) ds + f(t), \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \quad (16)$$

причому ядро $k(t, s)$ - неперервна в квадраті $[a, b] \times [a, b]$ функція двох змінних, а вільний член $f(t)$ - неперервна на $[a, b]$ функція. Виберемо довільну неперервну на $[a, b]$ функцію $\varphi_0(t)$ і підставимо її в праву частину (16). Маємо

$$\varphi_1(t) = \lambda \int_a^b k(t, s) \varphi_0(s) ds + f(t),$$

причому $\varphi_1(t)$ також неперервна на $[a, b]$. Отриману функцію $\varphi_1(t)$ знову підставимо в (16). Результатом знову буде неперервна функція

$$\varphi_2(t) = \lambda \int_a^b k(t, s) \varphi_1(s) ds + f(t).$$

Таким же способом, задамо послідовність функцій

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \dots, \varphi_n(t), \dots, \quad (17)$$

яка є збіжна на $[a, b]$ до розв'язку інтегрального рівняння (16). Таким чином, розв'язком рівняння (16) буде границя послідовності функцій (17), тобто

$$\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t).$$

Зауваження 1. Кожна функція послідовності (17) залежить від вибору початкового наближення $\varphi_0(t)$, однак гранична функція $\varphi(t)$ від вибору $\varphi_0(t)$ не залежить.

Зауваження 2. Даний метод застосовують і при розв'язуванні інтегральних рівнянь Вольтера другого роду. Якщо $\varphi_0(t)$ вибрати рівне $f(t)$, то метод послідовних наближень фактично співпадає з методом резольвент.

Розв'язання типових задач

Завдання 1. Розв'язати методом послідовних наближень інтегральне рівняння Фредгольма

$$x(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 tsx(s)ds + \frac{5}{6}t.$$

Розв'язання. За початкове наближення виберемо функцію $x_0(t) = 0$. Тоді

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 ts \cdot 0 ds + \frac{5}{6}t = \frac{5}{6}t,$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 ts \cdot \frac{5}{6}s ds + \frac{5}{6}t = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}t \int_0^1 s^2 ds + \frac{5}{6}t = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}t \left. \frac{s^3}{3} \right|_0^1 + \frac{5}{6}t = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}t + \frac{5}{6}t = \frac{5}{6}t \left(1 + \frac{1}{6} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 ts \cdot \frac{5}{6}s \left(1 + \frac{1}{6} \right) ds + \frac{5}{6}t = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}t \left(1 + \frac{1}{6} \right) \int_0^1 s^2 ds + \frac{5}{6}t = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}t \left(1 + \frac{1}{6} \right) \left. \frac{s^3}{3} \right|_0^1 + \frac{5}{6}t = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}t \left(1 + \frac{1}{6} \right) + \frac{5}{6}t = \frac{5}{6}t \left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} \right), \end{aligned}$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо

$$x_n(t) = \frac{5}{6}t \left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{6^n} \right) = \frac{5}{6}t \sum_{k=0}^n \frac{1}{6^k}.$$

Знайдемо границю отриманої послідовності:

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \frac{5}{6}t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{6^k} = x.$$

Завдання 2. Розв'язати методом послідовних наближень інтегральне рівняння Вольтерра

$$x(t) = \int_0^t \frac{x(s)}{1+s^2} ds + \operatorname{arctg} t.$$

Розв'язання. За початкове наближення виберемо функцію $x_0(t) = 0$.
Тоді

$$x_1(t) = \int_0^t \frac{0}{1+s^2} ds + \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg} t,$$

$$x_2(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{arctg} s}{1+s^2} ds + \operatorname{arctg} t = \frac{\operatorname{arctg}^2 s}{2} \Big|_0^t + \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg} t + \frac{\operatorname{arctg}^2 t}{2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n(t) = \operatorname{arctg} t + \frac{\operatorname{arctg}^2 t}{2} + \dots + \frac{\operatorname{arctg}^n t}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{arctg}^k t}{k!}.$$

Отже, розв'язком рівняння є границя побудованої послідовності

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\operatorname{arctg}^k t}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^k t}{k!} = e^{\operatorname{arctg} t} - 1.$$

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. Розв'язати методом послідовних наближень інтегральне рівняння Фредгольма:

1. $x(t) = 2t - \int_0^1 tsx(s)ds, \quad x_0(t) = 0;$

2. $x(t) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{t-s} x(s)ds, \quad x_0(t) = 0;$

3. $x(t) = 2 \sin t - \frac{\sin t}{2\pi} \int_0^\pi sx(s)ds, \quad x_0(t) = 0;$

4. $x(t) = \cos t - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 2 \cos t \cos sx(s)ds, \quad x_0(t) = 0;$

5. $x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(t-s) + \sin(t+s)) x(s)ds + 1, \quad x_0(t) = 0;$

6. $x(t) = 2 - \int_0^1 sx(s)ds, \quad x_0(t) = 0;$

7. $x(t) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 sx(s)ds, \quad x_0(t) = 0;$

8. $x(t) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 ts^2 x(s)ds, \quad x_0(t) = 0;$

$$9. x(t) = t - \frac{1}{2} \int_0^1 x(s) ds, \quad x_0(t) = 0;$$

$$10. x(t) = \frac{1}{2}(1-t) - \pi \int_0^1 (1-t) \sin 2\pi s x(s) ds, \quad x_0(t) = \frac{1}{2}(1-t).$$

Завдання 2. Розв'язати методом послідовних наближень інтегральне рівняння Вольтерра:

$$1. x(t) = 1 + \int_0^t x(s) ds, \quad x_0(t) = 0;$$

$$2. x(t) = \frac{t^2}{2} + t + \int_0^t x(s) ds, \quad x_0(t) = 0;$$

$$3. x(t) = 1 - t^2 + t \int_0^t x(s) ds, \quad x_0(t) = 1 - t^2;$$

$$4. x(t) = 1 + t \int_0^t x(s) ds, \quad x_0(t) = 1;$$

$$5. x(t) = 1 + t^p \int_0^t x(s) ds, \quad x_0(t) = 1, p = 1, 2, \dots;$$

$$6. x(t) = t - \int_0^t (t-s)x(s) ds, \quad x_0(t) = 0;$$

$$7. x(t) = 2^t + \int_0^t 2^{t-s} x(s) ds, \quad x_0(t) = 1;$$

$$8. x(t) = 1 + \int_0^t (t-s)x(s) ds, \quad x_0(t) = 0;$$

$$9. x(t) = 2 - \int_0^t x(s) ds, \quad x_0(t) = 0;$$

$$10. x(t) = t + \int_0^t s x(s) ds, \quad x_0(t) = 0.$$

6.3 Розв'язування інтегральних рівнянь з виродженими ядрами методом зведення їх до системи алгебраїчних рівнянь

Теоретичні відомості

Широкий клас інтегральних рівнянь розв'язується методом зведення до системи алгебраїчних рівнянь, а саме інтегральні рівняння з виродженими ядрами.

Ядро $k(t, s)$ називається виродженим, якщо його можна зобразити у вигляді скінченної суми $k(t, s) = \sum_{k=1}^n a_k(t)b_k(s)$, де функції $a_k(t)$ і $b_k(s)$ неперервні і лінійно незалежні визначені на $[a, b]$.

Зауважимо, що вироджене ядро має скінченне число власних значень. Якщо ж симетричне ядро має скінченне число власних значень, то воно вироджене.

Розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b k(t, s)\varphi(s)ds + f(t) \quad (18)$$

матиме вигляд

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n c_k a_k(t), \quad (19)$$

де $c_k = \int_a^b b_k(s)\varphi(s)ds$ - невідомі сталі, оскільки функція $\varphi(s)$ невідома.

Отже, розв'язування рівняння (18) зводиться до відшукування сталих c_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Підставляючи (19) в інтегральне рівняння і прирівнюючи коефіцієнти при $a_k(t)$, приходимо до висновку, що сталі c_k повинні визначатися із системи алгебраїчних рівнянь

$$c_m - \lambda \sum_{k=1}^n a_{km}c_k = f_m, \quad m = 1, 2, \dots, n$$

де $a_{km} = \int_a^b a_k(t)b_m(t)dt$, $f_m = \int_a^b b_m(t)f(t)dt$. Нас цікавить нетривіальний розв'язок даної системи алгебраїчних рівнянь. Це можливо, якщо визначник $\Delta(\lambda)$ цієї системи відмінний від 0, тоді рівняння (18) має єдиний розв'язок, що визначається формулою (19).

У випадку неvirодженого ядра можна шукати наближений розв'язок інтегрального рівняння (18), замінюючи в ньому ядро $k(t, s)$ на «близьке» до нього вироджене ядро $\tilde{k}(t, s)$. За $\tilde{k}(t, s)$ можна вибрати, напри-

клад, частинну суму ряду Фур'є ядра $k(t, s)$ по деякій системі ортонормованих функцій $\{\psi_n(t)\}$:

$$\tilde{k}(t, s) = \sum_{n=1}^N \omega_n(s) \psi_n(t),$$

де $\omega_n(s) = \int_a^b k(t, s) \psi_n(t) dt$.

Якщо ядро $k(t, s)$ є аналітичною функцією s , то наближене ядро $\tilde{k}(t, s)$ можна шукати у вигляді частинної суми степеневого ряду

$$\tilde{k}(t, s) = \sum_{n=0}^N c_n(t) (s - q)^n,$$

де $q \in [a, b]$,

$$c_n(t) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n}{\partial s^n} k(t, s) \right|_{s=q}.$$

Розв'язання типових задач.

Завдання 1. Розв'язати інтегральне рівняння

$$x(t) = \lambda \int_{-1}^1 (st + s^2 t^2) x(s) ds + 1.$$

Розв'язання. Ядро даного рівняння вироджене, тому розв'язок $x(t)$ шукатимемо у вигляді

$$x(t) = \lambda at + \lambda bt^2 + 1,$$

де $a = \int_{-1}^1 s x(s) ds$; $b = \int_{-1}^1 s^2 x(s) ds$. Домноживши рівність записану для $x(t)$ на t та t^2 відповідно та проінтегрувавши на проміжку $[-1, 1]$ отримаємо систему рівнянь для відшукування коефіцієнтів a та b :

$$\begin{cases} a = \int_{-1}^1 (\lambda at^2 + \lambda bt^3 + t) dt; \\ b = \int_{-1}^1 (\lambda at^3 + \lambda bt^4 + t^2) dt; \\ a = 2 \int_0^1 (\lambda at^2) dt; \\ b = 2 \int_0^1 (\lambda bt^4 + t^2) dt; \\ a = \frac{2}{3} \lambda a; \\ b = \frac{2}{5} \lambda b + \frac{2}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) = 0; \\ b \left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right) = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Якщо $\lambda \neq \frac{3}{2}$ і $\lambda \neq \frac{5}{2}$, то $a = 0$, $b = \frac{10}{3(5-2\lambda)}$. Отже,

$$x(t) = \lambda \frac{10}{3(5-2\lambda)} t^2 - 1$$

– єдиний розв'язок системи нашого інтегрального рівняння.

Якщо $\lambda = \frac{3}{2}$, то $b = \frac{5}{3}$, a -довільне. В цьому випадку розв'язок інтегрального рівняння запишеться так:

$$x(t) = \frac{3}{2}at - \frac{15}{4}t^2 + 1.$$

Якщо $\lambda = \frac{5}{2}$, то рівняння розв'язків не має.

Завдання 2. Знайти наближений розв'язок інтегрального рівняння

$$x(t) = \int_0^1 t \sin(ts) x(s) ds + \cos t,$$

замінивши його ядро наближенням.

Розв'язання. Замінімо ядро $k(t, s) = t \sin(ts)$ рівняння на близьке виводжене ядро $\tilde{k}(t, s)$. За $\tilde{k}(t, s)$ виберемо

$$\tilde{k}(t, s) = t \left[ts - \frac{1}{6}t^3s^3 \right].$$

Тут ми врахували розвинення функції $\sin(ts)$ в степеневий ряд. Відповідний наближений розв'язок позначимо $x^{(1)}(t)$. Тоді

$$x^{(1)}(t) = \int_0^1 t^2 \left(s - \frac{1}{6}t^2s^3 \right) x^{(1)}(s) ds + \cos t.$$

Розв'язок $x^{(1)}(t)$ шукатимемо у вигляді $x^{(1)}(t) = \cos t + c_1t^2 + c_2t^4$.

Підставивши останній вираз в інтегральне рівняння, отримаємо $\cos t + c_1t^2 + c_2t^4 = \int_0^1 t^2 \left(s - \frac{1}{6}t^2s^3 \right) (\cos s + c_1s^2 + c_2s^4) ds + \cos t$.

Прирівнюючи коефіцієнти при t^2 і t^4 , отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^1 s(\cos s + c_1s^2 + c_2s^4) ds; \\ c_2 = \int_0^1 \left(\frac{1}{6}\right) s^3 (\cos s + c_1s^2 + c_2s^4) ds; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \cos 1 - 1 + \sin 1 - \frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{6}; \\ c_2 = -\frac{1}{6} \left(6 - 3 \cos 1 - 5 \sin 1 + \frac{c_1}{6} + \frac{c_2}{8} \right). \end{cases}$$

Розв'язавши отриману систему двох алгебраїчних рівнянь, отримаємо $c_1 \approx 0.4742$, $c_2 \approx -0.1569$. Таким чином

$$x^{(1)}(t) = \cos t + 0.4742t^2 - 0.1569t^4.$$

Точним розв'язком вихідного інтегрального рівняння, як можна переконатись безпосередньою підстановкою, є функція $x(t) \equiv 1$. На відрізку $[0, 1]$ максимальне відхилення $x^{(1)}(t)$ від $x(t)$ складає 0.14.

Апроксимуємо ядро $k(t, s)$ більш точно ніж в першому випадку, а саме за наближене ядро виберемо

$$\tilde{k}^{(2)}(t, s) = t \left(ts - \frac{t^3 s^3}{6} + \frac{t^5 s^5}{120} \right).$$

Тоді наближений розв'язок шукатимемо у вигляді

$$x^{(2)}(t) = \cos t + c_1 t^3 + c_2 t^4 + c_3 t^6.$$

Повторивши попередні міркування, отримаємо розв'язок

$$x^{(2)}(t) = \cos t + 0.5079t^3 - 1.41 \cdot 10^{-2}t^4 + 3.562 \cdot 10^{-1}t^6.$$

Максимальне відхилення $x^{(2)}(t)$ від точного розв'язку $x(t)$ на відрізку $[0, 1]$ складає 0.034. Тобто похибка обчислень в цьому випадку приблизно в 5 разів менша ніж в попередньому.

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. За допомогою зведення до систем алгебраїчних рівнянь розв'язати інтегральне рівняння ($\lambda \in \mathbb{C}$):

1. $x(t) = \lambda \int_{-1}^1 (t^4 + 5t^3 s) x(s) ds + t^2 - t^4, \quad t \in [-1, 1];$
2. $x(t) = \lambda \int_{-1}^1 (ts^3 + 5t^2 s^2) x(s) ds + 7t^3 - 3, \quad t \in [-1, 1];$
3. $x(t) = \lambda \int_{-1}^1 (t^2 - ts) x(s) ds + t^2 + t, \quad t \in [-1, 1];$
4. $x(t) = \lambda \int_{-1}^1 (s^2 - ts) x(s) ds + t^2 - t, \quad t \in [-1, 1];$
5. $x(t) = \lambda \int_0^\pi \sin(2t + s) x(s) ds + \pi - 2t, \quad t \in [0, \pi];$

6. $x(t) = \lambda \int_0^\pi \sin(t + 2s)x(s)ds + \frac{\pi}{2} - t, \quad t \in [0, \pi];$
7. $x(t) = \lambda \int_0^\pi \cos(2t + s)x(s)ds + \sin t, \quad t \in [0, \pi];$
8. $x(t) = \lambda \int_0^\pi \cos(t - 2s)x(s)ds + \cos t, \quad t \in [0, \pi];$
9. $x(t) = \lambda \int_0^\pi (\sin s + s \cos t)x(s)ds + 1 - \frac{2t}{\pi}, \quad t \in [0, \pi];$
10. $x(t) = \lambda \int_0^\pi (\sin t + t \cos s)x(s)ds + 1 + \frac{2t}{\pi}, \quad t \in [0, \pi].$

6.4 Метод розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерра зведенням їх до диференціальних

Цим методом розв'язують інтегральні рівняння Вольтерра першого та другого роду. Проілюструємо метод зведення інтегральних рівнянь до диференціальних на прикладах.

Розв'язання типових задач.

Завдання 1. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра, звівши його до диференціального:

$$x(t) = -2 \cos t + 2 \int_0^t (s - t)x(s)ds. \quad (20)$$

Розв'язання. Продиференціюємо обидві частини даного рівняння два рази по t :

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2 \sin t - 2 \int_0^t x(s)ds; \\ x''(t) &= 2 \cos t - 2x(t). \end{aligned} \quad (21)$$

Таким чином інтегральне рівняння Вольтерра ми звели до диференціального неоднорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. З рівнянь (20) та (21) випливають початкові умови: $x(0) = -2$, $x'(0) = 0$. Розв'яжемо отримане диференціальне рівняння другого порядку. Розглянемо спочатку відповідне йому однорідне диференціальне рівняння:

$$\begin{aligned} x''(t) + 2x(t) &= 0. \\ k^2 + 2 &= 0, \quad k = \pm i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Тому загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння запишемо у вигляді

$$x_{\text{з.о.}}(t) = C_1 \cos \sqrt{2}t + C_2 \sin \sqrt{2}t.$$

Для знаходження частинного розв'язку відповідного неоднорідного диференціального рівняння, що має вигляд

$$x_{\text{ч.н.}}(t) = A \cos t + B \sin t,$$

знайдемо сталі A та B .

$$\begin{aligned} x'_{\text{ч.н.}}(t) &= -A \sin t + B \cos t; \\ x''_{\text{ч.н.}}(t) &= -A \cos t - B \sin t. \\ -A \cos t - B \sin t + 2A \cos t + 2B \sin t &= 2 \cos t; \\ A \cos t + B \sin t &= 2 \cos t; \\ A = 2, B = 0. \end{aligned}$$

Отже,

$$x_{\text{з.н.}}(t) = x_{\text{з.о.}}(t) + x_{\text{ч.н.}}(t) = C_1 \cos \sqrt{2}t + C_2 \sin \sqrt{2}t + 2 \cos t.$$

$$x'_{\text{з.н.}}(t) = -C_1 \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t + C_2 \sqrt{2} \cos \sqrt{2}t - 2 \sin t.$$

Враховуючи початкові умови,

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + 2 = -2; \\ x'(0) = C_2 \sqrt{2} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = -4; \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Таким чином розв'язок інтегрального рівняння Вольтерра має вигляд:

$$x(t) = -4 \cos \sqrt{2}t + 2 \cos t.$$

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра, звівши його до диференціального:

1. $x(t) = 1 + \int_0^t sx(s)ds;$
2. $x(t) = e^t + \int_0^t x(s)ds;$
3. $x(t) = t^2 + 2t - \int_0^t (t-s)x(s)ds;$
4. $x(t) = t^2 + 2 + \int_0^t sx(s)ds;$
5. $x(t) = 3t + 1 + \int_0^t (3t-3s)x(s)ds;$

6. $x(t) = 4e^t - \int_0^t (t-s)x(s)ds;$
7. $x(t) = t + 4 \int_0^t \sin(t-s)x(s)ds;$
8. $x(t) = 1 + \int_0^t ((t-s)^2 - (t-s))x(s)ds;$
9. $x(t) = \sin t + \frac{1}{2} \int_0^t (t-s)x(s)ds;$
10. $x(t) = e^{-t} \cos t - \int_0^t \cos t \cdot e^{s-t}x(s)ds.$

6.5 Інтегральні рівняння із симетричними ядрами

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds = f(t), \quad (\lambda \in \mathbf{C}). \quad (22)$$

Відповідне однорідне рівняння

$$\varphi(t) - \lambda \int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds = 0 \quad (23)$$

завжди має тривіальний розв'язок $\varphi(t) \equiv 0$. Ті значення λ ($\lambda \neq 0$) при яких це рівняння має ненульові розв'язки називаються *власними (характеристичними) числами* рівняння (23) чи ядра $k(t,s)$, а кожен ненульовий розв'язок цього рівняння називається *власною функцією*, що відповідає характеристичному числу λ . Множина лінійно незалежних власних функцій, що відповідають λ завжди скінченна і називається *рангом характеристичного значення* λ .

Нехай ядро $k(t,s)$ інтегрального рівняння (22) задовольняє такі умови:

$$\int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 dt ds < \infty,$$

$$k(t,s) = k(s,t).$$

Такі інтегральні рівняння називаються *рівняннями з симетричним ядром*, а самі функції $k(t,s)$ - *симетричними ядрами*.

Теорема 1. *Якщо λ не співпадає з характеристичними числами λ_n відповідного однорідного рівняння, то рівняння (22) має для $f(t)$ єдиний неперервний розв'язок, що визначається формулою*

$$\varphi(t) = f(t) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(t),$$

де $\varphi_n(t)$ -ортонормовані власні функції, що відповідають числам λ_n , а

$$a_n = \int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt.$$

Теорема 2. Нехай $\lambda \in \mathbf{C}$ співпадає із λ_k рангу q , тобто $\lambda = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+q-1}$. Тоді для існування розв'язку рівняння (22) необхідно й досить, щоб $f(t)$ була ортогональна всім власним функціям, що відповідають числу λ_k . При цьому (22) має нескінченну кількість розв'язків, що містять q довільних констант і задаються формулою

$$\begin{aligned} \varphi(t) = f(t) - \lambda \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(t) - \lambda \sum_{n=k+q}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(t) + \\ + c_0 \varphi_k(t) + \dots + c_q \varphi_{k+q-1}(t), \end{aligned}$$

де c_0, c_1, \dots, c_q - довільні сталі.

Якщо $f(t)$ ортогональна всім власним функціям $\varphi_n(t)$ ядра $k(t, s)$, то розв'язком рівняння є сама ця функція $\varphi(t) = f(t)$.

Розв'язання типових задач.

Завдання 1. Знайти характеристичні числа, відповідні нормовані власні функції та розв'язки (при кожному λ , при якому вони існують) інтегрального рівняння із симетричним ядром

$$x(t) = \lambda \int_0^1 \min(t, s) x(s) ds + \sin \pi t.$$

Спочатку потрібно знайти ті λ_n , для яких відповідне однорідне рівняння

$$x(t) = \lambda \int_0^1 \min(t, s) x(s) ds \tag{24}$$

має нетривіальний розв'язок та відповідні власні функції $x_n(t)$.

Очевидно, що

$$k(t, s) = \min(t, s) = \begin{cases} t, & t \leq s; \\ s, & t \geq s. \end{cases}$$

Тоді рівняння (24) перепишеться у вигляді

$$x(t) = \lambda \int_0^t sx(s)ds + \lambda \int_t^1 tx(s)ds. \quad (25)$$

Продиференціювавши його двічі по змінній t , отримаємо

$$x'(t) = \lambda tx(t) + \lambda \int_t^1 x(s)ds - \lambda tx(t), \quad (26)$$

$$x''(t) = -\lambda x(t). \quad (27)$$

Із (25) та (26) випливають крайові умови:

$$\begin{cases} x(0) = 0; \\ x'(1) = 0. \end{cases}$$

1. Якщо $\lambda < 0$, то розв'язками відповідного характеристичного рівняння будуть $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$. В такому випадку розв'язок рівняння (27) формуємо у вигляді

$$x(t) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}t} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}t}.$$

Продиференціюємо його:

$$x'(t) = -c_1 \sqrt{-\lambda} e^{-\sqrt{-\lambda}t} + c_2 \sqrt{-\lambda} e^{\sqrt{-\lambda}t}.$$

Врахувавши початкові умови, прийдемо до наступної системи для відшукування сталих c_1, c_2 :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0; \\ -c_1 \sqrt{-\lambda} e^{-\sqrt{-\lambda}} + c_2 \sqrt{-\lambda} e^{\sqrt{-\lambda}} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = -c_1; \\ -c_1 \sqrt{-\lambda} (e^{-\sqrt{-\lambda}} + e^{\sqrt{-\lambda}}) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 0; \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

В такому випадку $x(t) \equiv 0$.

2. Якщо ж $\lambda > 0$, то розв'язками відповідного характеристичного рівняння будуть $k_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$. В такому випадку розв'язок рівняння (27) формуємо у вигляді

$$x(t) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}t + c_2 \sin \sqrt{\lambda}t.$$

Продиференціюємо і цей розв'язок:

$$x'(t) = -c_1\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}t + c_2\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}t.$$

Врахувавши початкові умови, отримаємо таку систему:

$$\begin{cases} c_1 = 0; \\ c_2\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} = 0; \end{cases}$$

Оскільки $c_2 \neq 0$, (в такому випадку $x(t) \equiv 0$) то

$$\begin{aligned} \cos \sqrt{\lambda} &= 0, \\ \sqrt{\lambda} &= \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \lambda_n &= \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Власні функції, відповідні власним числам λ_n мають вигляд

$$x_n(t) = c_n \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) t.$$

Пронормуємо їх, тобто визначимо коефіцієнти c_n із умови

$$\int_0^1 c_n^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) t dt = 1.$$

Обчисливши інтеграл в лівій частині цієї рівності, отримаємо $c_n = \sqrt{2}$. Отже

$$x_n(t) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) t.$$

Таким чином, при $\lambda \neq \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2, n = 0, 1, 2, \dots$ розв'язком інтегрального рівняння є функція

$$x(t) = \sin \pi t - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}a_n}{\lambda - \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) t,$$

де a_n - коефіцієнти Фур'є функції $f(t) = \sin \pi t$:

$$a_n = \sqrt{2} \int_0^1 t \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) t dt = \frac{(-1)^n \sqrt{2}}{\left(\frac{1}{2} - n \right) \left(\frac{3\pi}{2} + \pi n \right)}.$$

Отже, остаточно, розв'язок інтегрального рівняння запишеться так:

$$x(t) = \sin \pi t - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\left(\frac{1}{2} - n \right) \left(\frac{3\pi}{2} + \pi n \right) \left(\lambda - \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right)^2 \right)} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) t.$$

При $\lambda = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right)^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, рівняння розв'язків не має, оскільки його права частина не ортогональна ($a_n \neq 0$) всім розв'язкам відповідного однорідного рівняння.

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. Знайти характеристичні числа, відповідні нормовані власні функції та розв'язки (при кожному λ , при якому вони існують) інтегрального рівняння із симетричним ядром

$$x(t) = \lambda \int_a^b k(t, s) x(s) ds + f(t), \quad t \in [a, b],$$

де:

1. $k(t, s) = \cos^2(t - s)$, $a = -\pi$, $b = \pi$, $f(t) = \sin 2t$;
2. $k(t, s) = \sin t \sin s$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $f(t) = \cos t + \sin t$;
3. $k(t, s) = \begin{cases} \cos t \sin s, & t \leq s, \\ \cos s \sin t, & s \leq t, \end{cases}$ $a = 0$, $b = \pi$, $f(t) = t$;
4. $k(t, s) = \begin{cases} \sin t \cos s, & t \leq s, \\ \sin s \cos t, & s \leq t, \end{cases}$ $a = 0$, $b = \pi$, $f(t) = \sin \frac{3}{2}t$;
5. $k(t, s) = \begin{cases} \sin t \sin(1 - s), & t \leq s, \\ \sin(1 - t) \sin s, & s \leq t, \end{cases}$ $a = 0$, $b = 1$, $f(t) = \cos \pi t$;
6. $k(t, s) = \begin{cases} -t, & t \leq s, \\ -s, & s \leq t, \end{cases}$ $a = 0$, $b = 1$, $f(t) = \sin \pi t \cos \frac{\pi}{2}t$;

$$7. k(t, s) = \begin{cases} t(s-1), & t \leq s, \\ s(t-1), & s \leq t, \end{cases} \quad a = 0, b = 1, f(t) = 1;$$

$$8. k(t, s) = \begin{cases} (t+1)s, & t \leq s, \\ t(s+1), & s \leq t, \end{cases} \quad a = 0, b = 1, f(t) = \sin \pi t + \pi \cos \pi t;$$

$$9. k(t, s) = \begin{cases} (t+1)(1-s), & t \leq s, \\ (1-t)(s+1), & s \leq t, \end{cases} \quad a = -1, b = 1, f(t) = 1;$$

$$10. k(t, s) = \begin{cases} (e^t - e^{-t})(e^s + e^{2-s}), & t \leq s, \\ (e^s - e^{-s})(e^t + e^{2-t}), & s \leq t, \end{cases} \quad a = 0, b = 1, f(t) = t.$$

6.6 Теорема Фредгольма для інтегральних рівнянь

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi(t) = \int_a^b k(t, s)\varphi(s)ds + f(t), \quad (28)$$

ядро якого задовольняє умові Гільберта-Шмідта: $\int_a^b \int_a^b |k(t, s)|^2 ds dt < \infty$,

причому умови виродженості чи симетричності на функцію $k(t, s)$ не накладаються. Вільний член $f(t)$ рівняння (28) – це задана функція із класу $L_2[a, b]$, $\varphi(t)$ – невідома функція із класу $L_2[a, b]$.

Ядра класу $L_2[a, b]$ називають ядрами *Гільберта-Шмідта*.

Запишемо рівняння (28) в операторній формі

$$\varphi = A\varphi + f,$$

де $A\varphi(t) = \int_a^b k(t, s)\varphi(s)ds$ – інтегральний оператор Фредгольма.

Покладемо $T = I - A$, де I – одиничний оператор. Тоді (28) перепишеться у вигляді

$$T\varphi = f. \quad (29)$$

Введемо в розгляд такі рівняння

$$T\varphi = 0 \quad (30)$$

– відповідне (28) однорідне операторне рівняння,

$$T^*\psi = g \quad (31)$$

– спряжене рівняння, де $T^* = I - A^*$, A^* – оператор, спряжений оператору Фредгольма,

$$T^*\psi = 0 \quad (32)$$

– відповідне спряжене однорідне рівняння.

Зв'язок між властивостями розв'язків рівнянь (29)-(32) встановлюють такі теореми Фредгольма.

Перша теорема Фредгольма. *Неоднорідне рівняння (29) має розв'язок при тих і лише тих f , котрі є ортогональними кожному розв'язку спряженого однорідного рівняння (32).*

Друга теорема Фредгольма (Альтернатива Фредгольма). *Або рівняння (29) має для будь-якого $f \in L_2[a, b]$ один і лише один розв'язок, або однорідне рівняння (30) має ненульовий розв'язок.*

Третя теорема Фредгольма. *Однорідні рівняння (30) та (32) мають одну і ту ж кількість (причому скінченну) лінійно незалежних розв'язків.*

Зауважимо, що ці теореми справедливі для інтегральних рівнянь з симетричними ядрами. Оскільки оператори A і A^* співпадають, то третя теорема Фредгольма стає тривіальною. Якщо A – вироджений інтегральний оператор, то відповідні інтегральні рівняння зводяться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Очевидно, що теореми Фредгольма в цьому випадку формулюються у вигляді теорем для відповідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розв'язання типових задач.

Завдання 1. *Встановити, при яких значеннях $\lambda \in \mathbb{C}$ інтегральне рівняння*

$$x(t) = \lambda \int_a^b ts^2 e^{-s^4} x(s) ds + t$$

має розв'язок в просторі $L_2[a; b]$?

Розв'язання. За другою теоремою Фредгольма дане інтегральне рівняння має розв'язок в просторі $L_2[a; b]$ для тих λ , котрі не є власними числами (характеристичними числами) відповідного однорідного рівняння.

Відповідне однорідне рівняння має вигляд

$$x(t) = \lambda \int_a^b ts^2 e^{-s^4} x(s) ds,$$

або

$$x(t) = \lambda ct, \tag{33}$$

де

$$c = \int_a^b s^2 e^{-s^4} x(s) ds. \quad (34)$$

Домножимо обидві частини (33) на $t^2 e^{-t^4}$ та проінтегруємо від a до b .
Отримаємо

$$\int_a^b t^2 e^{-t^4} x(t) dt = \lambda c \int_a^b t^3 e^{-t^4} = -\frac{\lambda c}{4} e^{-t^4} \Big|_a^b = \frac{\lambda c}{4} \frac{e^{b^4} - e^{a^4}}{e^{a^4+b^4}},$$

або ж, врахувавши (34),

$$c \left(1 - \frac{\lambda}{4} \frac{e^{b^4} - e^{a^4}}{e^{a^4+b^4}} \right) = 0.$$

Оскільки $c \neq 0$, то

$$\lambda = \frac{4e^{a^4+b^4}}{e^{b^4} - e^{a^4}}.$$

Отже, для всіх λ таких, що $\lambda \neq \frac{4e^{a^4+b^4}}{e^{b^4} - e^{a^4}}$ дане інтегральне рівняння має розв'язок в просторі $L_2[a; b]$.

Завдання 2. Для яких $f(t) \in L_2[0, 1]$ рівняння

$$x(t) = \int_0^1 t s^2 x(s) ds + f(t)$$

має розв'язок?

Розв'язання. Використаємо першу теорему Фредгольма. Відповідне однорідне спряжене рівняння

$$y(t) = 4 \int_0^1 t^2 s y(s) ds,$$

або

$$y(t) = 4at^2,$$

де

$$a = \int_0^1 s y(s) ds.$$

Отже, власною функцією оператора $A^* \in y(t) = t^2$. Щоб дане рівняння мало розв'язок, $f(t)$ має бути ортогональною до всіх власних функцій спряженого оператора A^* , тобто

$$\int_0^1 t^2 y(t) dt = 0.$$

Очевидно, що $y(t) = \cos \pi t^3$.

Завдання 3. Знайти всі значення параметрів p та q для яких інтегральне рівняння

$$x(t) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (t \sin s + \cos t)x(s)ds + pt + q$$

має розв'язок в просторі $L_2[a, b]$ для довільних $\lambda \in \mathbf{C}$.

Розв'язання. Згідно першої теореми Фредгольма для існування розв'язку інтегрального рівняння достатньо, щоб функція $f(t) = pt + q$ була ортогональна до кожного розв'язку $y(t)$ відповідного однорідного спряженого рівняння:

$$y(t) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (s \sin t + \cos s)y(s)ds.$$

Розв'язок цього спряженого однорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y(t) = \lambda c_1 \sin t + \lambda c_2, \quad (35)$$

де $c_1 = \int_{-\pi}^{\pi} sy(s)ds$, $c_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos sy(s)ds$. Домноживши рівність (35) на t та проінтегрувавши на проміжку $[-\pi, \pi]$, матимемо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} ty(t)dt = \lambda c_1 \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt + \lambda c_2 \int_{-\pi}^{\pi} t dt,$$

або, після обчислень інтегралів, присутніх в останній рівності, отримаємо

$$c_1 = 2\pi \lambda c_1.$$

Домноживши (35) на $\cos t$ та проінтегрувавши на проміжку $[-\pi, \pi]$, матимемо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos ty(t)dt = \lambda c_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t dt + \lambda c_2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt,$$

або, після відповідних обчислень інтегралів, можемо записати, що

$$c_2 = 0.$$

Таким чином маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} c_1(1 - 2\pi\lambda) = 0, \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

Звідси очевидним є такий висновок:

1. при $\lambda \neq \frac{1}{2\pi}$ отримаємо $c_1 = c_2 = 0$. Отже, $y(t) = 0$ і $(y, f) = 0$ для всіх $f(t)$, тобто при довільних p та q ;
2. при $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ матимемо $c_2 = 0$, c_1 - довільне і $y(t) = \frac{c_1}{2\pi} \sin t$. Тому $(y, f) = 0$, якщо

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{c_1}{2\pi} \sin t (pt + q) dt = \frac{c_1}{2\pi} p \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt = 0.$$

В цьому випадку, q - довільне, а $p = 0$.

Завдання 4. Знайти всі значення λ , при яких рівняння

$$x(t) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t+s)x(s)ds + f(t)$$

має єдиний розв'язок для будь-яких функцій f .

Розв'язання. Дане інтегральне рівняння матиме єдиний розв'язок для тих λ , що не є власними значеннями відповідного однорідного рівняння. Відповідне однорідне рівняння

$$x(t) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t+s)x(s)ds,$$

або

$$x(t) = \lambda a \cos t - \lambda b \sin t,$$

де $a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos s)x(s)ds$, $b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin s)x(s)ds$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t) \cos t dt = \lambda a \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t) \cos^2 t dt - \frac{\lambda b}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t) \sin 2t dt,$$

$$a = \lambda a \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\lambda b}{4} \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \lambda a \frac{\pi}{4} - \frac{\lambda b}{2}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t) \sin t dt = \frac{\lambda a}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t) \sin 2t dt - \lambda b \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t) \sin^2 t dt,$$

$$b = -\frac{\lambda a}{4} \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \lambda b \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda a}{2} - \lambda b \frac{\pi}{4}.$$

Таким чином отримуємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно a і b :

$$\begin{cases} a \left(1 - \lambda \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\lambda}{2} b = 0, \\ b \left(1 + \lambda \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\lambda}{2} a = 0. \end{cases}$$

Визначник даної системи

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda \frac{\pi}{4} & -\frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda \frac{\pi}{4} \end{vmatrix} = 1 - \frac{\lambda^2 (\pi^2 - 4)}{16}.$$

Власні числа відповідного однорідного інтегрального рівняння отримуватимемо, коли визначник одержаної однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь буде рівний нулеві, тобто $1 - \frac{\lambda^2 (\pi^2 - 4)}{16} = 0$. Звідси отримаємо: $\lambda = \pm \frac{4}{\sqrt{\pi^2 - 4}}$ – власні числа. Тому для всіх $\lambda \neq \pm \frac{4}{\sqrt{\pi^2 - 4}}$ наше інтегральне рівняння буде мати єдиний розв'язок.

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. Знайти всі значення параметрів p, q, r , для яких інтегральне рівняння

$$x(t) = \lambda \int_a^b k(t, s)x(s)ds + f(t)$$

має розв'язок в просторі $L_2[a, b]$ для довільних $\lambda \in \mathbf{C}$, якщо:

1. $k(t, s) = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{s}$, $f(t) = pt^2 + qt + r$, $t \in [a, b] = [-1, 1]$;
2. $k(t, s) = 1 + ts$, $f(t) = pt^2 + qt + r$, $t \in [a, b] = [-1, 1]$;
3. $k(t, s) = ts + t^2s^2$, $f(t) = pt^2 + qt + r$, $t \in [a, b] = [-1, 1]$;
4. $k(t, s) = t^2 + ts^2$, $f(t) = pt + q$, $t \in [a, b] = [-1, 1]$;
5. $k(t, s) = \frac{1}{2} (ts + t^2s^2)$, $f(t) = pt + q$, $t \in [a, b] = [-1, 1]$;
6. $k(t, s) = t^2s + ts^2$, $f(t) = pt + qt^3$, $t \in [a, b] = [-1, 1]$;
7. $k(t, s) = 3t + ts - 5t^2s^2$, $f(t) = pt$, $t \in [a, b] = [-1, 1]$;
8. $k(t, s) = 3 \sin t + \cos s$, $f(t) = pt + q$, $t \in [a, b] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
9. $k(t, s) = \cos(t + s)$, $f(t) = p \sin t + q$, $t \in [a, b] = [0, \pi]$;

10. $k(t, s) = t \cos s + \sin t \sin s$, $f(t) = p + q \cos t$, $t \in [a, b] = [-\pi, \pi]$.

Завдання 2. Знайти всі значення λ , при яких наступні інтегральні рівняння мають єдиний розв'язок для будь-якої функції f :

1. $x(t) = \lambda \int_0^1 (t^2 s^2 - \frac{2}{45}) x(s) ds + f(t)$, $f(t) \in C_{[0,1]}$;

2. $x(t) = \lambda \int_{-2}^2 (t^2 s + ts^2) x(s) ds + f(t)$, $f(t) \in C_{[-2,2]}$;

3. $x(t) = \lambda \int_{-1}^1 (t^3 - ts^3) x(s) ds + f(t)$, $f(t) \in C_{[-1,1]}$;

4. $x(t) = \lambda \int_{-1}^1 (ts - 2t^2) x(s) ds + f(t)$, $f(t) \in C_{[-1,1]}$;

5. $x(t) = \lambda \int_{-1}^1 (t^2 - s) x(s) ds + f(t)$, $f(t) \in C_{[-1,1]}$

6. $x(t) = \lambda \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} + \cos^2(t + s)) x(s) ds + f(t)$, $f(t) \in C_{[0,2\pi]}$;

7. $x(t) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(2t - s) x(s) ds + f(t)$, $f(t) \in C_{[0,2\pi]}$;

8. $x(t) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(t - s) x(s) ds + f(t)$, $f(t) \in C_{[0,2\pi]}$;

9. $x(t) = \lambda \int_0^\pi \cos(t + s) x(s) ds + f(t)$, $f(t) \in C_{[0,\pi]}$;

10. $x(t) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t + s) x(s) ds + f(t)$, $f(t) \in C_{[0, \frac{\pi}{2}]}$.

7 Узагальнені функції

Перелік необхідних питань теорії

1. Простір основних функцій $D(\mathbf{R})$ та збіжність в ньому.
2. Означення узагальненої функції. Регулярні та сингулярні узагальнені функції.
3. Носії основної та узагальненої функцій.
4. Збіжність в просторі узагальнених функцій $D'(\mathbf{R})$.
5. Простір основних функцій повільного росту $S(\mathbf{R})$ та збіжність в ньому.

Теоретичні відомості

В багатьох фізичних задачах класичне поняття функції в найширшому розумінні (тобто як будь-яке правило, що ставить у відповідність кожному значенню x із області визначення цієї функції деяке число y із множини значень цієї ж функції) виявляється недостатнім. Застосовуючи, наприклад, теорію математичного аналізу до тих чи інших задач, виникають ситуації, коли не можна виконати деякі операції. Функцію, що не має похідної в окремих точках або навіть скрізь в області задання, не можна диференціювати, якщо під похідною розуміти «звичайну» функцію. Звуження множини функцій, обмежившись лише розглядом аналітичних функцій, безумовно не є раціональним. Або розглянемо таку фізичну задачу як розподіл мас вздовж числової прямої. Цей розподіл зручно визначати щільністю цього розподілу. Але якщо ж на прямій існують точки, що мають додатну масу, тоді щільність такого розподілу не описується жодною «звичайною» функцією.

Подібні проблеми, виявляється, вирішуються не шляхом звуження, а шляхом істотного розширення поняття функції, вводячи так звані узагальнені функції. Основою для введення відповідних нових понять є поняття спряженого простору.

Розглянемо ідею побудови поняття узагальненої функції. Нехай f – фіксована функція на числовій прямій, інтегровна на кожному скінченному проміжку цієї прямої. І нехай φ – неперервна функція, що обертається в нуль поза деяким скінченим інтервалом. Такі функції називають фінітними. Інтервали, зовні якого функції φ дорівнюють нулеві, можуть бути різними для різних функцій φ . Кожній такій функції φ

можна за допомогою фіксованої функції f поставити у відповідність число $(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$, причому, очевидно цей інтеграл береться по деякому скінченному інтервалу згідно фінітності функції $\varphi(x)$. Таким чином, цю функцію f можемо розглядати як лінійний функціонал (згідно властивостей інтеграла), визначений на просторі фінітних функцій. Зауважимо, що якщо кожній фінітній функції φ поставити у відповідність значення функції φ в точці $x = x_0$, $x_0 \in [a, b]$, тоді ми теж маємо лінійний функціонал на просторі фінітних функцій. Але останній – це функціонал, що зображується у вигляді інтеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$.

Ми приходимо до висновку, що функції $f(x)$ звичайним способом включаються в деякий ширший клас – клас всіх лінійних функціоналів заданих в просторі фінітних функцій.

Запас функцій φ , визначених на \mathbf{R} , можна вибирати різним способом. Однак, до цього запасу включають лише неперервні та фінітні функції і такі, що нескінченне число разів диференційовні та визначені на всій числовій прямій. Позначимо такий запас функцій φ символом $D(\mathbf{R})$. Очевидно, функції, що належать класу $D(\mathbf{R})$ утворюють лінійний простір зі звичайними операціями додавання функцій та множення їх на числа. В цьому просторі $D(\mathbf{R})$ не вводиться поняття норми, але в ньому звичайним способом вводять поняття збіжності.

Послідовність функцій $(\varphi_n(x))$ із $D(\mathbf{R})$ називається збіжною до функції $(\varphi(x))$ із $D(\mathbf{R})$, якщо:

- 1) існує один інтервал, зовні якого всі φ_n обертаються в нуль;
- 2) послідовність похідних $(\varphi_n^{(k)})$ порядку k ($k = 0, 1, 2, \dots$) збіжна на цьому інтервалі рівномірно до $\varphi^{(k)}(x)$.

Тут рівномірної збіжності відносно $k = 0, 1, 2, \dots$ не вимагається. Похідна нульового порядку – це за визначенням є сама функція.

Лінійний простір $D(\mathbf{R})$ зі збіжністю визначеною вище, називається *основним простором*, а елементи цього простору називаються *основними функціями*.

Узагальненою функцією, визначеною на числовій прямій \mathbf{R} , називається будь-який лінійний неперервний функціонал на класі основних функцій $D(\mathbf{R})$. Значення функціоналу(узагальненої функції) f на основній функції φ будемо записувати у вигляді (f, φ) .

Пояснимо детально всі складові частини узагальненої функції.

1. Узагальнена функція f є функціоналом на $D(\mathbf{R})$, тобто кожній функції $\varphi \in D(\mathbf{R})$ ставиться у відповідність число (f, φ) .

2. Узагальнена функція f є лінійний функціонал на $D(\mathbf{R})$, тобто для довільних $\varphi, \psi \in D(\mathbf{R})$, та $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$

$$(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi).$$

3. Узагальнена функція є неперервний функціонал на $D(\mathbf{R})$, тобто якщо $\varphi_n \rightarrow \varphi$ при $n \rightarrow \infty$ в $D(\mathbf{R})$, то

$$(f, \varphi_n) \rightarrow (f, \varphi) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Очевидно, кожна інтегровна на будь-якому скінченному інтервалі функція $f(x)$ породжує деяку узагальнену функцію, оскільки вираз

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad (36)$$

є неперервним лінійним функціоналом на просторі $D(\mathbf{R})$.

Якщо узагальнена функція зображається у вигляді (36), то вона називається *регулярною*, в протилежному випадку (тобто коли зображення (36) неможливе) – *сингулярною*. Іншими словами, клас узагальнених функцій ділиться на дві частини: одна – це регулярні узагальнені функції (для яких можливе зображення (36)) і друга – це сингулярні узагальнені функції (для яких не є можливим зображення (36)).

Прикладом сингулярної узагальненої функції є функція Дірака (або « δ »-функція):

$$(f, \varphi) = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)).$$

Це є неперервний лінійний функціонал на просторі $D(\mathbf{R})$. Цей функціонал зображують, як правило, в такому вигляді:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx,$$

розуміючи під $\delta(x)$ «функцію», яка дорівнює нулю при всіх $x \neq 0$ та обертається в точці $x = 0$ в нескінченність так, що $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$.

Простір всіх узагальнених функцій позначають $D'(\mathbf{R})$.

Множину всіх точок числової прямої, в кожному околі яких $f \neq 0$, називають *носієм* узагальненої функції та позначають символом $\text{supp } f$.

Послідовність узагальнених функцій (f_n) називається *збіжною* до узагальненої функції f в $D'(\mathbf{R})$, якщо для кожної функції $\varphi \in D(\mathbf{R})$ виконується співвідношення:

$$(f_n, \varphi) \rightarrow (f, \varphi) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Тобто збіжність послідовності узагальнених функцій є збіжністю на кожному елементі із $D(\mathbf{R})$.

До простору основних функцій повільного росту $S(\mathbf{R})$ віднесемо всі нескінченну кількість разів диференційовні функції, які при $|x| \rightarrow \infty$ разом зі всіма своїми похідними прямують до нуля швидше будь-якої степені $\frac{1}{|x|}$. Збіжність в $S(\mathbf{R})$ визначимо наступним чином: $\varphi_n \rightarrow \varphi$ при $n \rightarrow \infty$ в $S(\mathbf{R})$ якщо

$$x^k \varphi_n^{(l)} \Rightarrow \varphi^{(l)} \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad \forall k, l \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Нехай $f \in C^k$, тоді для всіх $\alpha \in \mathbf{N}$, $\alpha \leq k$ та $\varphi(x) \in D(\mathbf{R})$ справедливою є формула диференціювання узагальненої функції f із $D'(\mathbf{R})$:

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^\alpha (f, D^\alpha \varphi).$$

Розв'язання типових задач.

Завдання 1. Чи збігається в $D(\mathbf{R})$ послідовність основних функцій

$$a) \varphi_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(x); \quad б) \varphi_n(x) = \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{x}{n}\right),$$

де φ – неперервна фінітна функція, $\varphi \in D(\mathbf{R})$.

Розв'язання. а) Оскільки $\varphi(x)$ є фінітною, то існує така замкнена обмежена область $B \subset \mathbf{R}$, що $\varphi_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in B$. Очевидно, що k -та похідна

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n} \varphi^{(k)}(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Знайдемо поточкові границі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^{(k)}(x) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Перевіримо, чи є $\varphi(x) = 0$ границею $\varphi_n(x)$ в $D(\mathbf{R})$, тобто чи має місце рівномірна збіжність $\varphi_n^{(k)}(x) \Rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Щоб мала місце рівномірна збіжність функціональних послідовностей $(\varphi_n^{(k)}(x))$, $k = 0, 1, 2, \dots$ до функції $\varphi(x) \equiv 0 \quad \forall x \in B$ потрібно довести, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \forall x \in B \quad \left| \varphi_n^{(k)}(x) - 0 \right| < \varepsilon.$$

Функція $\varphi^{(k)}(x)$ є обмеженою, бо неперервна на замкненій множині B , тобто $\exists L > 0$, що $|\varphi^{(k)}(x)| < L$, тому

$$\left| \varphi_n^{(k)}(x) - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \varphi^{(k)}(x) \right| \leq \frac{L}{n} < \varepsilon.$$

Таким чином як тільки $n > \left[\frac{L}{\varepsilon} \right] + 1$, то $|\varphi_n^{(k)}(x)| < \varepsilon$ при $\forall x \in B$, $\forall k = 0, 1, 2, \dots$. Отже $\varphi_n(x)$ є рівномірно збіжною в $D(\mathbf{R})$ до функції $\varphi(x) = 0$.

б) Нехай $\text{supp } \varphi(x) = [a, b]$, причому $b > a > 0$. Тоді $\text{supp } \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = [2a, 2b], \dots, \text{supp } \varphi\left(\frac{x}{n}\right) = [na, nb]$. Функції $\varphi_n(x)$ не мають спільної області фінітності, тому послідовність $\varphi_n(x)$ не збігається в $D(\mathbf{R})$.

Завдання 2. Користуючись означенням, довести що функціонали f є узагальненими функціями, якщо $\varphi(x) \in D(\mathbf{R})$:

а) $f(\varphi) = \varphi'(0)$; б) $f(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x) dx$.

Розв'язання. В кожному з випадків потрібно перевірити чи є даний функціонал лінійним та неперервним. а) Перевіримо лінійність.

$$f(\alpha\varphi + \beta\psi) = (\alpha\varphi + \beta\psi)'(0) = \alpha\varphi'(0) + \beta\psi'(0).$$

Отже, функціонал f є лінійним. Перевіримо неперервність функціоналу f . Нехай $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ при $n \rightarrow \infty$ в $D(\mathbf{R})$. Функції $\varphi_n(x)$ фінітні, тобто $\exists l > 0$, що $\text{supp } \varphi_n(x) \in U_l$. Тут U_l – скінченний інтервал, поза яким $\varphi_n(x) = 0$.

$$(f, \varphi_n(x)) = \varphi_n'(0) \Rightarrow \varphi'(0) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

бо $\varphi_n^{(k)}(x) \Rightarrow \varphi^{(k)}(x) \quad \forall x \in U_l$.

$\text{supp } f = \{0\}$.

б) Оскільки функціонал $f(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x) dx$ задається інтегралом, то лінійність є очевидною. Нехай $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ при $n \rightarrow \infty$ в $D(\mathbf{R})$. Оскільки $\varphi_n(x)$ збігається до $\varphi(x)$ рівномірно, то справедливим є граничний перехід під знаком інтеграла:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\varphi_n) = \int_{\mathbf{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) dx = f(\varphi).$$

$\text{supp } f = \mathbf{R}$.

Завдання 3. Довести, що функціонал $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, що задається формулою

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x} \right) (\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) = V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

є узагальненою функцією, де $\varphi(x) \in D(\mathbf{R})$.

Розв'язання. Лінійність очевидна:

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)(\alpha\varphi + \beta\psi) &= V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)}{x} dx = V.p. \left(\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \right. \\ &\left. + \beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x)}{x} dx \right) = \alpha \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)(\varphi) + \beta \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)(\psi). \end{aligned}$$

Для доведення неперервності зробимо в інтегралі $\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ заміну x на $-x$.

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)(\varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Зауважимо, що $x = 0$ не є особливою точкою, бо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x) + \varphi'(-x)}{1} = 2\varphi'(0).$$

Нехай $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ при $n \rightarrow \infty$ в $D(\mathbf{R})$, тоді $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$. Оскільки функція $\varphi(x)$ – фінітна, то інтеграл буде братись по обмеженому проміжку U_l , тому згідно рівномірної збіжності послідовності $\varphi_n(x)$, можна здійснити граничний перехід під знак інтегралу, тобто

$$f(\varphi_n) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(-x)}{x} dx \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx = f(\varphi) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отже, функціонал $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ є узагальненою функцією.

Завдання 4. Довести, що в $D'(\mathbf{R})$:

$$a) f_{\varepsilon}(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \delta(x); \quad б) f_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \sqrt{\pi} \delta(x).$$

Розв'язання. а) Згідно означення збіжності в просторі $D'(\mathbf{R})$ необхідно довести, що

$$f_\varepsilon(x) = (f_\varepsilon(x), \varphi(x)) = \int_{\mathbf{R}} \frac{\varepsilon \varphi(x)}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \varphi(0), \quad \varphi(x) \in D(\mathbf{R}).$$

Функція $\varphi(x)$ є неперервною на \mathbf{R} в тому числі і в точці $x = 0$, тому

$$\forall \eta > 0 \quad \exists \delta(\eta) > 0 \quad \forall x \in U_R \quad |x| < \delta \quad |\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{R}} \frac{\varepsilon \varphi(x)}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} dx - \int_{\mathbf{R}} \frac{\varepsilon \varphi(0)}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} dx \right| &\leq \int_{\mathbf{R}} \frac{\varepsilon |\varphi(x) - \varphi(0)|}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} dx \leq \\ &\leq \eta \frac{\operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{x}}{\pi} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \eta \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Збіжність має місце.

б) Аналогічно як і у випадку а) доводимо, що

$$f_\varepsilon(x) = (f_\varepsilon(x), \varphi(x)) = \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} \varphi(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \sqrt{\pi} \varphi(0), \quad \varphi(x) \in D(\mathbf{R}).$$

За рахунок неперервності $\varphi(x)$

$$\forall \eta > 0 \quad \exists \delta(\eta) > 0 \quad \forall x \in U_R \quad |x| < \delta \quad |\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta,$$

тому

$$\begin{aligned} |(f_n, \varphi) - (f, \varphi)| &= \left| \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} \varphi(x) dx - \sqrt{\pi} \varphi(0) \right| = \left| \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} \varphi(x) dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} \varphi(0) dx \right| \leq \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \leq \sqrt{\pi} \eta \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

В процесі обчислень ми використали інтеграл Пуассона: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Завдання 5. Чи належать до простору $S(\mathbf{R})$ функції:

а) e^{-x^2} ; б) $\frac{x^5}{1+x^{10}}$.

Розв'язання Потрібно перевірити, чи належать дані функції до класу C^∞ тобто чи є нескінченну кількість разів диференційовні та чи

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |x^k \varphi^{(l)}(x)| = 0 \quad \forall k, l \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \varphi(x) \in D(\mathbf{R}).$$

а) Оскільки будь-яка степенева функція прямує до нуля повільніше від показникової, то $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 0$.

Знайдемо похідні функції $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= (-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2} \cdot P_1(x); \\ \varphi''(x) &= 4x^2 e^{-x^2} - 2e^{-x^2} = e^{-x^2} \cdot P_2(x). \end{aligned}$$

Продовжуючи цей процес,

$$\varphi^{(l)}(x) = e^{-x^2} \cdot P_l(x),$$

де $P_l(x)$ – многочлен степеня l . Отже $\varphi(x) \in C^\infty$.

Знайдемо границю

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |x^k \varphi^{(l)}(x)| = \lim_{x \rightarrow \infty} |x^k e^{-x^2} \cdot P_l(x)| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{P_{l+k}(x)}{e^{x^2}} \right| = 0,$$

тобто функція e^{-x^2} належить до $S(\mathbf{R})$.

б) Якщо $k = 5$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k \varphi(x) \neq 0$, бо $\lim_{x \rightarrow \infty} x^5 \frac{x^5}{1 + x^{10}} = 1$. Отже, $\varphi(x) = \frac{x^5}{1 + x^{10}} \notin S(\mathbf{R})$.

Завдання 6. Чи збігається в $S(\mathbf{R})$ послідовність:

$$\text{а) } \varphi_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(x); \quad \text{б) } \varphi_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(nx), \quad \varphi(x) \in D(\mathbf{R}).$$

Розв'язання. Для послідовності $\varphi_n(x)$ потрібно перевірити, чи належить гранична функція $\varphi(x)$ до $S(\mathbf{R})$ та чи $x^k \varphi_n^{(l)} \rightrightarrows \varphi^{(l)}$ при $n \rightarrow \infty \quad \forall k, l \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

а) Знайдемо вигляд функції $\varphi(x)$: $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \varphi(x) = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbf{R}} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \left| \frac{1}{n} \varphi(x) - 0 \right| = 0.$$

Знайдемо похідні функцій $\varphi_n(x)$:

$$\varphi_n^{(l)}(x) = \frac{1}{n} \varphi^{(l)}(x), \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Тепер перевіримо, чи буде $x^k \varphi_n^{(l)} \rightrightarrows \varphi^{(l)}$ при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| x^k \varphi_n^{(l)} - \varphi^{(l)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| x^k \frac{1}{n} \varphi^{(l)}(x) \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sup_{x \in X} \left| x^k \varphi^{(l)}(x) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} C_{kl} = 0. \end{aligned}$$

Отже послідовність $\varphi_n(x)$ є збіжною до нуля в $S(\mathbf{R})$.

б) Перевіримо, чи належать простору $S(\mathbf{R})$ функції $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(nx)$.

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \varphi(nx) = 0.$$

Знайдемо похідні функцій $\varphi_n(x)$:

$$\begin{aligned} \varphi_n'(x) &= \varphi'(nx); \\ \varphi_n''(x) &= n \varphi''(nx). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| x \varphi_n''(x) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| x n \varphi''(nx) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbf{R}} \left| t \varphi''(t) \right| \neq 0,$$

якщо тільки $\varphi(t) \neq 0$, тому послідовність $\varphi_n(x)$ не є збіжною в $S(\mathbf{R})$.

Завдання 7. Знайдіть похідні наступних узагальнених функцій:

$$\begin{aligned} \text{а) функції Хевісайда } \theta(x) &= \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases} & \text{б) } \theta(x - a); \\ \text{в) } f(x) = \theta(x) \cos x; & \text{г) } f(x) = [x]; & \text{д) } f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язання а)

$$\begin{aligned} \left(\theta'(x), \varphi(x) \right) &= - \left(\theta(x), \varphi'(x) \right) = - \int_0^{\infty} \varphi' dx = - \int_0^{\infty} \varphi' d\varphi = -\varphi(\infty) + \varphi(0) = \\ &= \varphi(0) = \left(\delta(x), \varphi(x) \right). \end{aligned}$$

Отже, $\theta'(x) = \delta(x)$ – функція Дірака.

$$\text{б) } \theta(x - a) = \begin{cases} 1, & x - a > 0; \\ 0, & x - a < 0; \end{cases} = \begin{cases} 1, & x > a; \\ 0, & x < a. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left(\theta'(x - a), \varphi(x) \right) &= - \left(\theta(x - a), \varphi'(x) \right) = - \int_a^{\infty} d\varphi = -\varphi(\infty) + \varphi(a) = \\ &= \varphi(a) = \left(\delta(x - a), \varphi(x) \right). \end{aligned}$$

Отже, $\theta'(x - a) = \delta(x - a)$.

В)

$$\begin{aligned} \left((\theta(x) \cos x)', \varphi(x) \right) &= - \int_0^{\infty} \cos x d\varphi = - \cos x \varphi(x) \Big|_0^{\infty} + \\ &+ \int_0^{\infty} \varphi(x) (-\sin x) dx = \varphi(a) = (\delta(x), \varphi(x)) - (\theta(x) \sin x, \varphi(x)). \end{aligned}$$

Отже, $(\theta(x) \cos x)' = -\theta(x) \sin x + \delta(x)$.

Г)

$$\begin{aligned} \left([x]', \varphi(x) \right) &= - \left([x], \varphi'(x) \right) = - \int_0^1 0 d\varphi - \int_1^2 1 d\varphi - \int_2^3 2 d\varphi - \dots - \int_k^{k+1} k d\varphi + \dots + \\ &+ \int_{-1}^0 1 d\varphi + \int_{-2}^{-1} 2 d\varphi + \int_{-3}^{-2} 3 d\varphi + \dots + \int_{-k}^{-k+1} k d\varphi + \dots = \\ &= -\varphi(2) + \varphi(1) - 2\varphi(3) + 2\varphi(2) + \dots - k\varphi(k+1) + k\varphi(k) + \dots + \\ &+ \varphi(0) - \varphi(-1) + 2\varphi(-1) - 2\varphi(-2) + 3\varphi(-2) - 3\varphi(-3) + \dots + k\varphi(-k+1) - \\ &- k\varphi(-k) + \dots = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \delta(x - k). \end{aligned}$$

Д)

$$\begin{aligned} \left(f'(x), \varphi(x) \right) &= - \left(f(x), \varphi'(x) \right) = - \int_{-1}^1 x^2 d\varphi = -x^2 \varphi(x) \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 2x \varphi(x) dx = \\ &= -\varphi(1) + \varphi(-1) + \int_{-1}^1 2x \varphi(x) dx = \\ &= -(\delta(x-1), \varphi(x)) + (\delta(x+1), \varphi(x)) + \int_{-\infty}^{\infty} \theta(1 - |x|) \cdot 2x \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

де

$$\theta(1 - |x|) = \begin{cases} 1, & |x| < 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Отже, $f'(x) = \delta(x+1) - \delta(x-1) + 2x\theta(1 - |x|)$.

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. Нехай φ ненульова функція з $D(\mathbf{R})$. Чи збігається в $D(\mathbf{R})$ послідовність:

1. $\varphi_n(x) = \varphi(x + n)$; 2. $\varphi_n(x) = \frac{1}{n!}\varphi(nx)$;
3. $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi(e^{-nx})$; 4. $\varphi_n(x) = \frac{1}{n^2}\varphi(\sqrt{n} + x)$;
5. $\varphi_n(x) = \varphi(x^{2n})$; 6. $\varphi_n(x) = \frac{1}{n^n}\varphi(nx)$;
7. $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi(x + 1)$; 8. $\varphi_n(x) = \frac{1}{2^n}\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$;
9. $\varphi_n(x) = \frac{1}{2^n}\varphi(2^n x)$; 10. $\varphi_n(x) = \frac{1}{2^n}\varphi(x - n)$.

Завдання 2. Користуючись означенням довести, що такі функціонали є узагальненими функціями. Знайти $\text{supp } f$:

1. $f(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} x\varphi(x)dx$; 2. $f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$;
3. $f(\varphi) = \int_{-1}^1 |x|\varphi'(x)dx$; 4. $f(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} |x|\varphi(x)dx$;
5. $f(\varphi) = \int_1^3 x\varphi''(x)dx + \varphi(0)$; 6. $f(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sin x\varphi(x)dx + \varphi(1)$;
7. $f(\varphi) = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x)dx + \varphi(1)$; 8. $f(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} x^2\varphi(x)dx$;
9. $f(\varphi) = \varphi(-1) + \varphi(1)$; 10. $f(\varphi) = \varphi''(0)$.

Завдання 3. Знайти похідні перших двох порядків наступних узагальнених функцій:

1. $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & x \geq \pi; \\ 0, & x < \pi; \end{cases}$ 2. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ (x - 2)^2, & x > -1; \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases}$ 4. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi; \\ 0, & |x| > \pi; \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases}$ 6. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0; \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 1; \\ x^2 + 1, & x \geq 1; \end{cases}$
7. $f(x) = \theta(x)e^{2x}$; 8. $f(x) = \theta(x)(2x + 3)$;
9. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$; 10. $f(x) = x|x|$.

Література

- [1] Антоневи́ч А.Б., Князе́в П.Н., Радыно́ Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – Минск: Вышэйш. шк., 1978. – 205 с.
- [2] Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. – К: Выща школа, 1990. – 600 с.
- [3] Боярищева Т.В. Методичні вказівки до лабораторних занять з курсу функціонального аналізу. Частина 2. Метричні простори. Стискаючі відображення. – Ужгород: 2008. – 50 с.
- [4] Боярищева Т.В. Методичні вказівки до лабораторних занять з курсу функціонального аналізу. Частина 3. Лінійні нормовані простори. Гільбертові простори. – Ужгород: 2011. – 32 с.
- [5] Боярищева Т.В. Методичні вказівки до лабораторних занять з курсу функціонального аналізу. Частина 4. Лінійні неперервні оператори і функціонали. – Ужгород: 2011. – 24 с.
- [6] Боярищева Т.В., Гудивок Т.В. Методичні вказівки до лабораторних занять з курсу функціонального аналізу. Частина 5. Спряжені і компактні оператори. Власні значення і власні вектори оператора. Спектр і резольвента. – Ужгород: 2011. – 24 с.
- [7] Виленкин Н.Я., Горин Е.А., Костюченко А.Г. Функциональный анализ. – М: Наука, 1964. – 424 с.
- [8] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М: Наука, 1979. – 320 с.
- [9] Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу – К: Выща школа, 1990. – 479 с.
- [10] Городній М.Ф., Константінов О.Ю., Нестеренко О.Н., Чайковський А. В. Навчальні завдання до практичних занять з функціонального аналізу. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2006. – 103 с.
- [11] Гуревич А.П., Корнев В.В., Хромов А.П., Сборник задач по функциональному анализу. Изд. 2-рое, испр. – М: Лань, 2012. – 192 с.
- [12] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ – М: Наука, 1977. – 741 с.

- [13] Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа – М: Наука, 1979. – 381 с.
- [14] Колмогоров А.М., Фомін С.В. Элементы теории функций і функціонального аналізу – К: Вища школа, 1974. – 456 с.
- [15] Константинов О.Ю., Кукуш О.Г., Мішура Ю.С., Нестеренко О.Н., Чайковський А. В. Збірник задач з функціонального аналізу. Компактні оператори. Інтегральні рівняння. Узагальнені функції – К.: ВПЦ "Київський університет", 2005. – 126 с.
- [16] Константинов О.Ю., Мішура Ю.С., Нестеренко О.Н., Чайковський А.В. Збірник задач з функціонального аналізу. Частина I. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2004. – 123 с.
- [17] Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу. – М: Просвещение, 1981. – 272 с.
- [18] Рудин У. Функциональный анализ. – М: Мир, 1975. – 443 с.
- [19] Соболева Т.С. Задачи по функциональному анализу. – М: МИНХ, 1984. – 256 с.
- [20] Треногин В.А. Функциональный анализ. – М: Наука, 1980. – 495 с.
- [21] Треногин В.А. Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М: Наука, 1984. – 256 с.

Боярищева Тетяна Валеріївна – кандидат фіз.-мат. наук
Гудивок Тетяна Василівна – кандидат фіз.-мат. наук
Погоріляк Олександр Олександрович – кандидат фіз.-мат. наук

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник для студентів спеціальностей
«математика», «прикладна математика», «статистика»

Відповідальний за випуск завідувач кафедри теорії ймовірностей і
математичного аналізу канд. фіз.-мат. наук, доцент *А.І. Моца*

Коректура: авторська.

Підписано до друку 10.01.2013р.

Формат 60×84 1/16. Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.

Друк ризограф. Умов. друк. арк. 7,8. Обк. вид. арк. 7,9.

Тираж 100 прим. Замовлення № 2

Видавництво ПП «Інватор», Ужгород, вул. Мукачівська, 20.

Тел.: (03122) 3 52 04

Для нотаток

Для нотаток

Для нотаток