

Завдання 1. Визначити, які з функцій f мають обмежену варіацію та знайти її повну варіацію:

$$1. f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{при } 0 \leq x < 1; \\ 10, & \text{при } x = 1; \\ x^2, & \text{при } 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} |x|^{-1}, & \text{при } 0 < |x| \leq 1; \\ 0, & \text{при } x = 0; \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & \text{при } x \in (0, 1]; \\ 0, & \text{при } x = 0; \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x}, & \text{при } x \in (0, 1]; \\ 0, & \text{при } x = 0; \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{при } x \in (0, 1]; \\ 0, & \text{при } x = 0; \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{при } x \in [0, 1); \\ 0, & \text{при } x = 1; \\ 1, & \text{при } x \in (1, 2]; \end{cases}$$

$$7. f(x) = e^{-|x|}, \quad x \in [-2; 2];$$

$$8. f(x) = e^{|x|}, \quad x \in [-3; 3];$$

$$9. f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{при } x \in [0, 1); \\ 5, & \text{при } x = 1; \\ x + 3, & \text{при } x \in (1, 2]; \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{при } x \in (0, \frac{\pi}{2}]; \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Завдання 2. Знайти $F(x) = V(f, [a, x])$, $x \in [a, b]$, якщо:

$$1. f(x) = \max(x, 2 - x^2), \quad 0 \leq x \leq 2;$$

$$2. f(x) = |\sin x|, \quad 0 \leq x \leq 2\pi;$$

$$3. f(x) = |\sin 2x|, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

$$4. f(x) = |\cos 2x|, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

$$5. f(x) = \max(0, 1 - |x|), \quad 0 \leq x \leq 2;$$

$$6. f(x) = \max\left(\frac{5}{2}x, 9 - x^2\right), \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Нехай A - довільна множина з \mathbf{R} . Знайти $\mu_F(A)$, якщо:

$$7. F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 1/2]; \\ -[-2x], & x \in (1/2; 3/2]; \\ 4, & x \in (3/2; \infty); \end{cases}$$

$$8. F(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty; 0]; \\ -[-e^x], & x \in (0; 1]; \\ 5, & x \in (1; \infty); \end{cases}$$

$$9. F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 1]; \\ 2, & x \in (1; 3]; \\ 5, & x \in (3; \infty); \end{cases}$$

$$10. F(x) = \begin{cases} -2, & -\infty \leq x \leq e; \\ 3, & e < x < \infty. \end{cases}$$

Завдання 3. Обчислити інтеграл $\int_{\mathbf{R}} f(x)dF(x)$, якщо:

$$1. f(x) = \sin x, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0); \\ [x], & x \in [0; 100); \\ 100, & x \in [100; +\infty); \end{cases}$$

$$2. f(x) = F^2(x), \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0); \\ [x], & x \in [0; 100); \\ 100, & x \geq 100; \end{cases}$$

$$3. f(x) = x^2, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0); \\ [x^2], & x \in [0; 100); \\ 10^4, & x \geq 100; \end{cases}$$

$$4. f(x) = x^4, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0); \\ [x^2], & x \in [0; 100); \\ 10^4, & x \geq 100; \end{cases}$$

$$5. f(x) = F(x), \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0); \\ [2x], & x \in [0; 10); \\ 20, & x \geq 10; \end{cases}$$

$$6. f(x) = \sin 2x, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \frac{1}{2}(1+x), & x \in (0; \pi); \\ \frac{x^2}{2}, & x \in (\pi; \frac{3\pi}{2}); \\ 20, & x \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]. \end{cases}$$

$$7. f(x) = F(x), F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\infty; 0); \\ [2x], & \text{якщо } x \in [0; 10); \\ 20, & \text{якщо } x \in [10; +\infty); \end{cases}$$

$$8. f(x) = x^4, F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\infty; 0); \\ [x^2], & \text{якщо } x \in [0; 100); \\ 10^4, & \text{якщо } x \in [100; +\infty). \end{cases}$$

Обчислити інтеграли :

$$9. \int_{-1}^1 (x^2 + 1)dF(x), F(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0; \\ \arctan \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

$$10. \int_0^a x^2 d \ln(1+x), \quad a > 0.$$

Завдання 4. Обчислити інтеграл $\int_{[a;b]} f(x)dF(x)$, якщо:

$$1. f(x) = x, \quad F(x) = \cos x, \quad [a, b] = [0; \frac{\pi}{2}];$$

$$2. f(x) = \sin x, \quad F(x) = |x|, \quad [a, b] = [-1; 1];$$

$$3. f(x) = x^3 + 1, \quad F(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{якщо } x \in [-2; -1]; \\ 2, & \text{якщо } x \in (-1; 0); \\ x^2 + 3, & \text{якщо } x \in [0; 2]; \end{cases} \quad [a, b] = [-2, 2];$$

$$4. f(x) = 2^x, \quad F(x) = \text{sign} \cos x, \quad [a, b] = [0; 2\pi];$$

$$5. f(x) = x^2 + 1, \quad F(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [-1; 0]; \\ \text{arctg} \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \in (0; 1]; \end{cases} \quad [a, b] = [-1, 1];$$

$$6. f(x) = \frac{1}{[x]!}, \quad F(x) = x, \quad [a, b] = [1, \infty);$$

$$7. f(x) = x^2, F(x) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < -\frac{\pi}{2}; \\ \sin x, & \text{якщо } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}; \\ 1, & \text{якщо } x \geq \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad (a, b) = (-\infty, +\infty).$$

Зобразити функцію обмеженої варіації $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ у вигляді різниці двох зростаючих функцій:

$$8. f(x) = \cos x, \quad a = 2\pi, \quad b = 4\pi;$$

$$9. f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{при } x \in [0; 1); \\ 0, & \text{при } x = 1; \\ 1, & \text{при } x \in (1; 2], \end{cases} \quad a = 0, \quad b = 2.$$

10. Довести, якщо $V(f, [a; b]) < \infty$, то $V(|f|, [a; b]) < \infty$. Чи має місце обернене твердження? Навести приклад.