

Завдання для індивідуальних, самостійних, лабораторних робіт і семінарських занять

Завдання 1. Довести вимірність наступних функцій $((x; y) \in \mathbf{R}^2)$:

1. $f(x, y) = (|x| + |y|) e^{|y|}$;
2. $f(x, y) = [x]^3 + [y]^2$;
3. $f(x, y) = \operatorname{arctg}([x] + [y])$;
4. $f(x) = \operatorname{ch}[x^2 + y^2]$;
5. $f(x, y) = \operatorname{sign} \sin \pi(x^2 + y^2)$;
6. $f(x, y) = \operatorname{sign} \cos \pi(x^2 + y^2)$;
7. $f(x, y) = (x^2 + y^2)[x]$;
8. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \sin[x^2 + y^2]$;
9. $f(x, y) = \operatorname{arctg} \cos[x^2 + y^2]$;
10. $f(x, y) = \exp[x^2 + y^2]$.

Завдання 2. Нехай X вимірний простір, $f_i : X \rightarrow \mathbf{R}$, $i = \overline{1, n}$, f_i – вимірні функції. Довести вимірність наступних функцій:

1. $\max(f_1, f_2, \dots, f_n)$;
2. $\min(f_1, f_2, \dots, f_n)$;
3. $\sin(|f_1| + |f_2| + \dots + |f_n|)$;
4. $(1 + |f_1|)^{f_2}$.

Довести вимірність функції f , якщо:

5. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x|+n}$, $x \in \mathbf{R}$;
6. $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x^2}$, $x \in \mathbf{R}$;
7. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^4}$, $x \in \mathbf{R}$;
8. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[5]{n^6+[x^5]}}$, $x \in \mathbf{R}$;
9. $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n[x]}{1+n^5[x]^2}$, $x \in \mathbf{R}$;
10. $f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x^2+y^2)}{\sqrt{n^4+[x^2+y^2]}}$, $(x; y) \in \mathbf{R}^2$.

Завдання 3. Визначити таку неперервну на \mathbf{R} або \mathbf{R}^2 функцію g , щоб $g(x) = f(x)$ майже скрізь відносно міри Лебега (відповідно λ_1 або λ_2), якщо:

1. $f(x) = \begin{cases} \arctan x, & x \in \mathbf{Z}; \\ \pi, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}; \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \ln(1 + |x|), & e^x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}; \\ \sin x^2, & e^x \in \mathbf{Q}; \end{cases}$
3. $f(x, y) = \begin{cases} x + y, & (x; y) \in \mathbf{Q}^2; \\ x^2, & (x; y) \notin \mathbf{Q}^2; \end{cases}$

$$4. f(x, y) = \begin{cases} \sin x + \sin y, & (x; y) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{R}; \\ \cos x, & (x; y) \in \overline{\mathbf{Q}} \times \mathbf{R}. \end{cases}$$

Нехай $f_n(x)$ – послідовність функцій, заданих на \mathbf{R} . Визначити таку неперервну на \mathbf{R} функцію g , щоб $f_n(x) \rightarrow g(x)$ при $n \rightarrow \infty$ майже скрізь відносно міри Лебега λ_1 на \mathbf{R} , якщо:

$$5. f_n(x) = \frac{\sin^n x}{2 + \sin^n x}, x \in \mathbf{R};$$

$$6. f_n(x) = \cos^n x, x \in \mathbf{R};$$

$$7. f_n(x) = \cos^n x + \sin^n x, x \in \mathbf{R};$$

$$8. f_n(x) = x^2 \sin^n x^2, x \in \mathbf{R};$$

$$9. f_n(x) = \left(\frac{2}{\pi} \arctg x\right)^n + \sin^n 2x, x \in \mathbf{R};$$

$$10. f_n(x) = \sin^n \frac{1}{x}, x \neq 0, f_n(0) = 0, x \in \mathbf{R}.$$