

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**РЕЙТІЙ О.К.**

# **ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА**

**(методичний посібник з лабораторних робіт)**

**Частина III. Динаміка матеріальної системи**

**Ужгород – 2007**

**Рейтій О.К.** Теоретична механіка (методичний посібник з лабораторних робіт). Частина III. Динаміка матеріальної системи. – Ужгород: Видавництво УжНУ „Говерла”, 2007. – 76 с.

**Рецензент:**

доктор фізико-математичних наук, професор,  
декан фізичного факультету, завідувач кафедри теоретичної фізики  
Лазур В.Ю.

**Відповідальний за випуск:**

доктор фізико-математичних наук, професор,  
завідувач кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики  
Маринець В.В.

Дане видання є останньою частиною методичного посібника з лабораторних робіт для курсу „Теоретична механіка”, який читається на математичному факультеті УжНУ. В посібнику наведено завдання для чотирьох лабораторних робіт з динаміки матеріальної системи та твердого тіла, кожне з яких містить по 40 варіантів. Як і в попередніх частинах, до кожної лабораторної роботи подано необхідні теоретичні відомості, а також приклад виконання типового завдання.

Посібник розрахований на студентів-математиків, також може бути корисний студентам технічних спеціальностей, аспірантам, викладачам та інженерно-технічним працівникам для поглиблення знань з теоретичної механіки.

*Рекомендовано до друку Вченою радою математичного факультету  
(протокол № 3 від 24 листопада 2007 року)*

## ЗМІСТ

Вступ.....	4
Розділ 1. Застосування теореми про зміну кінетичного моменту до визначення кутової швидкості твердого тіла .....	7
1.1. ....	7
1.2. ....	8
Завдання для лабораторної роботи №5 .....	10
Приклад виконання завдання.....	14
Розділ 2. Застосування теореми про зміну кінетичної енергії до вивчення руху механічної системи.....	18
2.1. Вільні коливання.....	18
2.2. Рух точки під дією в'язкого опору.....	21
2.3. Змушені коливання.....	24
2.4. Змушені коливання при наявності в'язкого опору.....	28
Завдання для лабораторної роботи №6.....	31
Приклад виконання завдання.....	43
Розділ 3. Дослідження плоского руху твердого тіла.....	46
3.1. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки.....	46
3.2. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки .....	47
3.3. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки.....	49
3.4. Робота сили. Потужність.....	51
3.5. Метод кінетостатики (принцип Д'Аламбера) .....	53
Завдання для лабораторної роботи №7.....	54
Приклад виконання завдання.....	60
Розділ 4. Принцип Д'Аламбера.....	63
4.1. Переносна і коріолісова сили інерції.....	63
4.2. Умови відносного спокою.....	65
Завдання для лабораторної роботи №8 .....	66
Приклад виконання завдання.....	73
Література.....	76

## **ВСТУП**

212-231, 240-246, 279-286

# РОЗДІЛ 1. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ПРО ЗМІНУ МОМЕНТУ КІЛЬКОСТІ РУХУ ДО ВИЗНАЧЕННЯ КУТОВОЇ ШВИДКОСТІ ТВЕРДОГО ТІЛА

## Завдання для лабораторної роботи №9

Тіло  $H$  масою  $m_1$  обертається навколо вертикальної осі  $z$  зі сталою кутовою швидкістю  $\omega_0$ ; при цьому в точці  $O$  жолоба  $AB$  тіла  $H$  на відстані  $AO$  від точки  $A$ , яка відраховується вздовж жолоба, знаходиться матеріальна точка  $K$  масою  $m_2$ . В деякий момент часу ( $t = 0$ ) на систему починає діяти пара сил з моментом  $M_z = f_1(t)$ . При  $t = \tau$  дія пари сил припиняється; одночасно точка  $K$  починає відносний рух з точки  $O$  уздовж жолоба  $AB$  (в напрямку до  $B$ ) за законом  $OK = s = f_2(t - \tau)$  для  $t > \tau$ .

Визначити кутову швидкість тіла  $H$  при  $t = \tau$  і при  $t = T$ , нехтуючи опором обертанню тіла  $H$ . Тіло  $H$  розглядати як пластинку, що має форму, вказану на рис. 1.1-1.4. Необхідні для розв'язання дані приведені в табл. 1.1, 1.2.

В тих варіантах, в яких пластинка  $H$  розташована у вертикальній площині, відносний рух точки  $K$  викликається силою, що діє в тій же площині; в інших варіантах під точкою  $K$  розуміється самохідний візок.

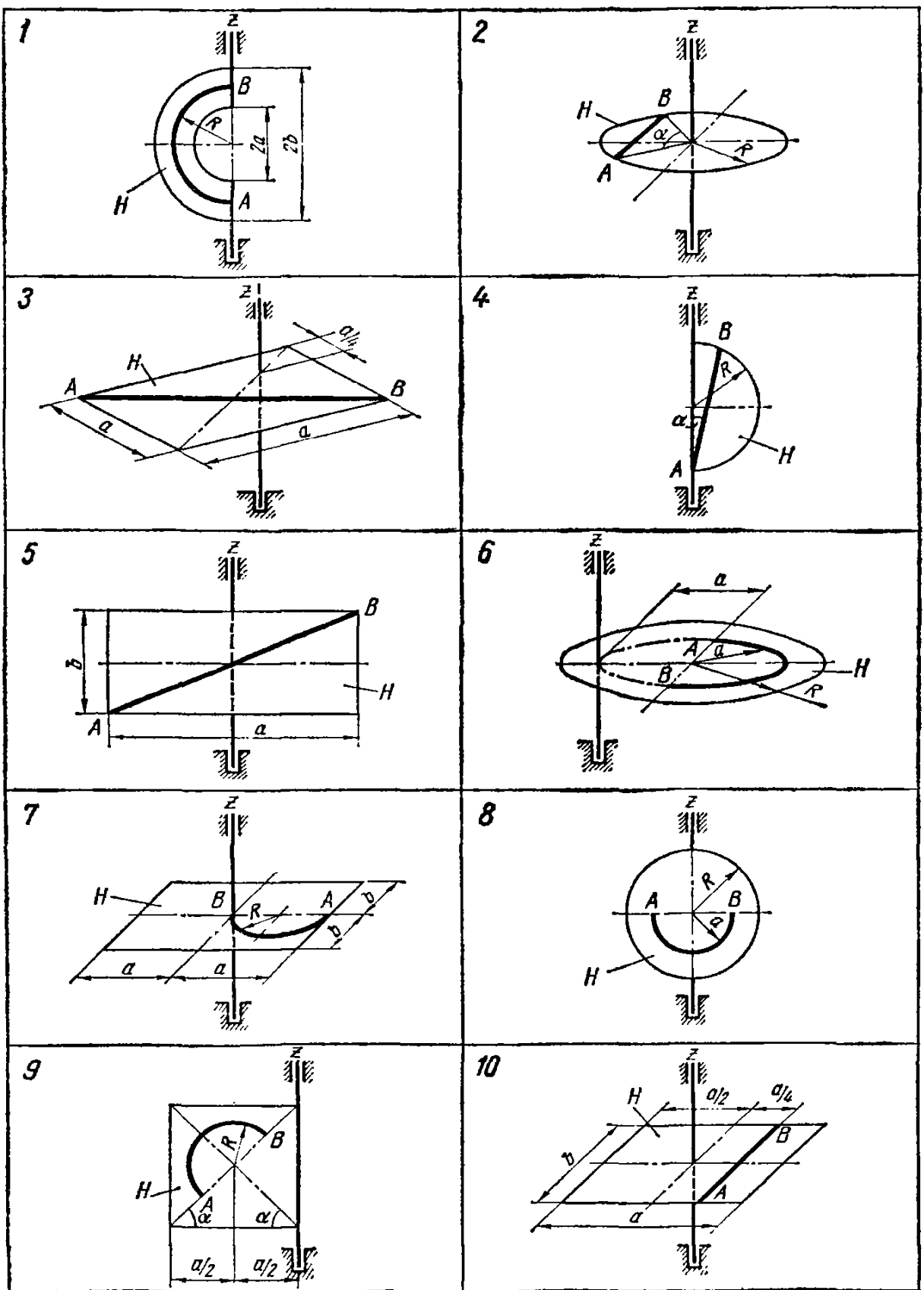


Рис. 1.1

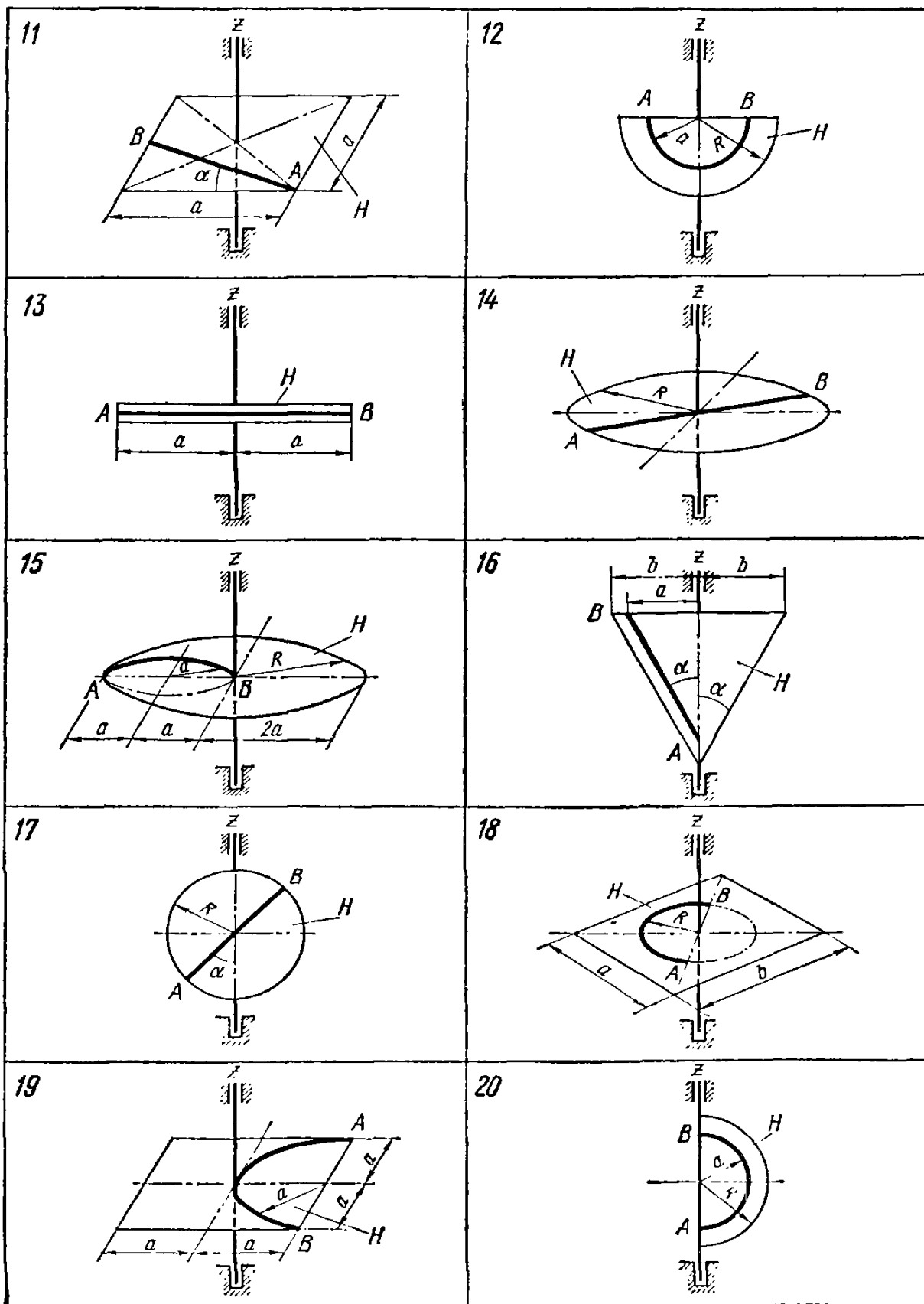


Рис. 1.2

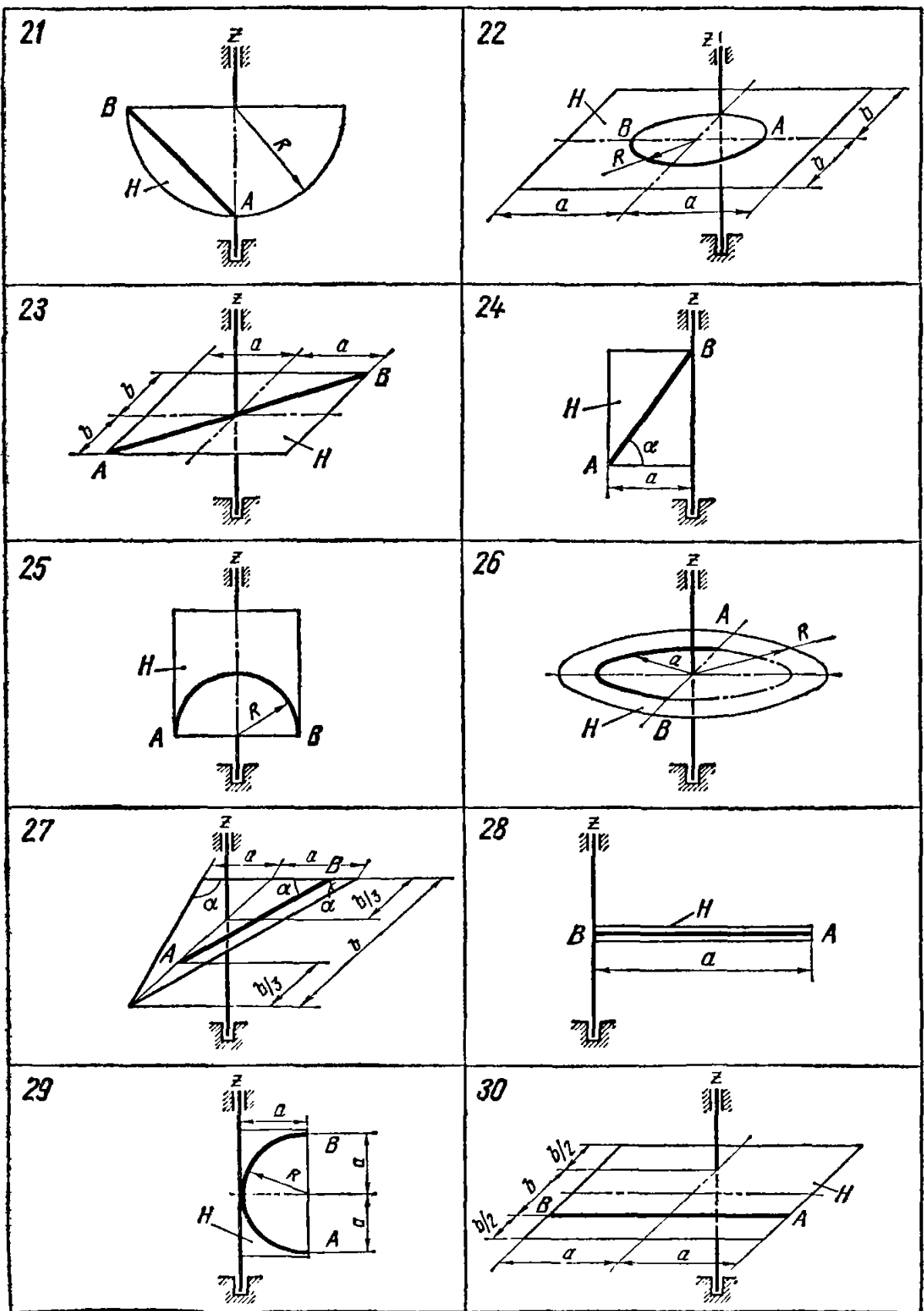


Рис. 1.3



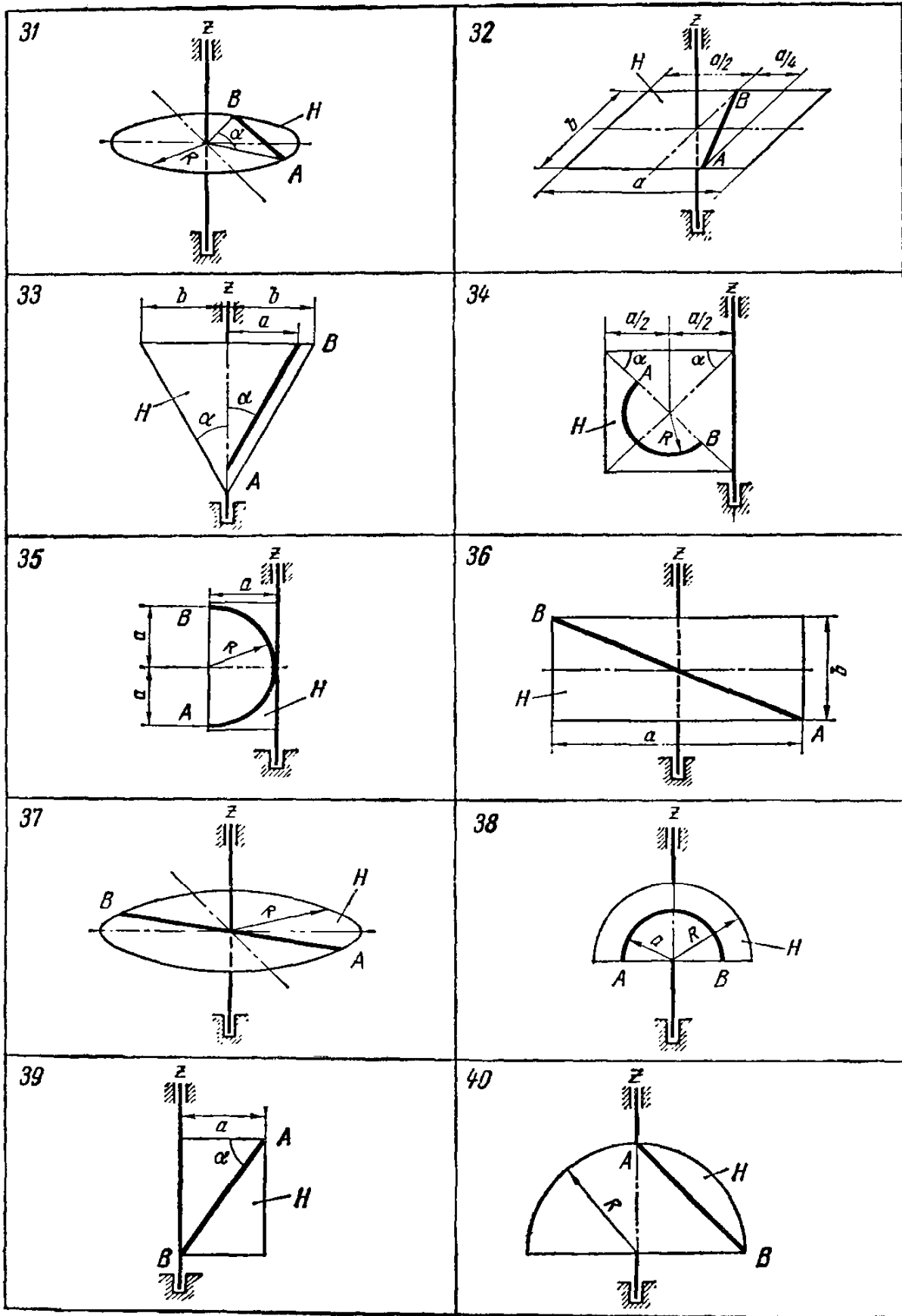


Рис. 1.4

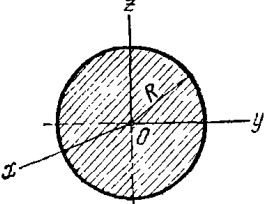
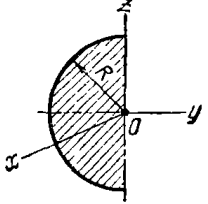
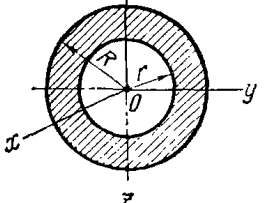
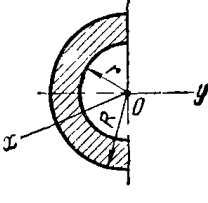
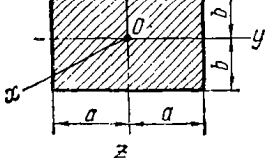
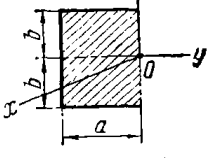
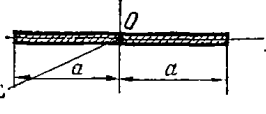
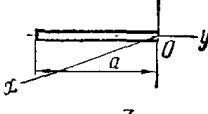
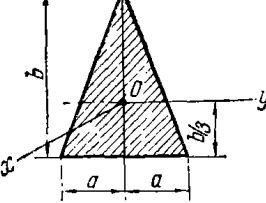
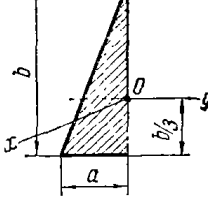
Таблиця 1.1

Номер варіанта (рис. 1.1- 1.2)	$m_1,$ кг	$m_2,$ кг	$\omega_0,$ $c^{-1}$	$a,$ м	$b,$ м	$R,$ м	$\alpha,$ град	$AO,$ м	$M_z = f_1(t),$ Нм	$\tau,$ с	$T,$ с	$OK = s = f_2(t - \tau),$ м
1	32	10	-1	1	1,5	1,2	-	$\pi R/6$	$-29,6t^2$	3	4	$(5\pi R/12)(t - \tau)$
2	200	60	-2	-	-	2	120	$\sqrt{3}/2$	101	5	6	$\sqrt{3}(t - \tau)^2$
3	120	40	0	2	-	-	-	0	$-120t$	4	6	$(\sqrt{2}/4)(t - \tau)^2$
4	16	5	-3	-	-	1	30	0,4	$21t$	2	6	$0,6\sqrt{t - \tau}$
5	66	10	1,5	2	1,5	-	-	0	$15\sqrt{t}$	4	6,5	$0,5(t - \tau)$
6	160	80	-1,25	1,5	-	2,5	-	$\pi a/6$	$-700t$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$(5\pi a/18)(t - \tau)^2$
7	300	50	-2	1,6	1	0,8	-	0	968	1	2	$(\pi R/2)(t - \tau)^2$
8	80	20	0	1,2	-	2	-	$\pi a/2$	$240\sqrt{t}$	4	8	$(\pi a/4)\sqrt{t - \tau}$
9	20	5	5	1,2	-	0,4	45	$\pi R/4$	$-29,2t$	3	4	$(3\pi R/4)(t - \tau)^2$
10	100	40	2	2	$\sqrt{2}$	-	-	$\sqrt{2}/2$	$-90\sqrt{t}$	4	5	$(\sqrt{2}/4)(t - \tau)$
11	60	20	-1	2	-	-	15	0	$40t$	2	4	$0,4(t - \tau)^2$
12	40	10	-3	1	-	2	-	0	$50t^2$	3	5	$(\pi a/3)(t - \tau)$
13	24	4	4	1	-	-	-	0,5	$-27\sqrt{t}$	1	3	$0,3(t - \tau)$
14	40	10	2	-	-	1	-	0	$120t$	1	4	$0,5(t - \tau)$
15	120	50	-4	1	-	2	-	0	$330t^2$	2	3	$(\pi a/2)(t - \tau)^2$
16	60	10	-5	1	1,2	-	30	0,4	74	2	6	$0,3\sqrt{t - \tau}$
17	50	10	-2	-	-	1,6	30	0,6	$69t$	4	6	$0,6(t - \tau)$
18	120	50	3	2	3	0,8	-	$\pi R/2$	324	3	5	$(\pi R/8)(t - \tau)^2$
19	90	30	1	1,5	-	-	-	0	$-135t$	2	3	$(\pi a/4)(t - \tau)$
20	50	12	3	1	-	1,2	-	$\pi a/6$	$-14t^2$	3	5	$(\pi a/12)(t - \tau)^2$

Номер варіанта (рис. 1.3- 1.4)	$m_1,$ кг	$m_2,$ кг	$\omega_0,$ $c^{-1}$	$a,$ м	$b,$ м	$R,$ м	$\alpha,$ град	$AO,$ м	$M_z = f_1(t),$ Нм	$\tau,$ с	$T,$ с	$OK = s = f_2(t - \tau),$ м
21	40	10	-6	-	-	1	-	$\sqrt{2}/2$	$75\sqrt{t}$	1	3	$(\sqrt{2}/16)(t - \tau)^2$
22	150	50	-1	1,6	1,2	0,6	-	$\pi R/2$	163	4	5	$\pi R/2 \sqrt{t - \tau}$
23	90	20	2	$\sqrt{2}$	1	-	-	$\sqrt{3}/2$	-210	2	3	$(\sqrt{3}/2)(t - \tau)$
24	50	12	-3	0,6	-	-	60	0,2	$27t^2$	2	6	$0,4\sqrt{t - \tau}$
25	36	8	-5	-	-	0,5	-	0	$20t$	2	4	$(\pi R/6)(t - \tau)^2$
26	150	40	-4	1,5	-	2	-	$\pi a/6$	$1170\sqrt{t}$	1	2	$(\pi a/2)(t - \tau)^2$
27	120	30	0	1	-	-	60	0	$-25t$	2	3	$(t - \tau)^2$
28	15	4	-2	0,6	-	-	-	0,1	$5,6t$	3	4	$0,4\sqrt{t - \tau}$
29	20	5	5	0,6	-	0,6	-	0	$-6,3\sqrt{t}$	4	5	$(5\pi R/6)(t - \tau)$
30	150	50	0	1,6	1,2	-	-	1,6	$652t$	2	4	$0,2(t - \tau)^2$
31	200	60	-2	-	-	2	120	$\sqrt{3}/2$	101	5	6	$\sqrt{3}(t - \tau)^2$
32	100	40	2	2	$\sqrt{2}$	-	-	$\sqrt{2}/2$	$-90\sqrt{t}$	4	5	$(\sqrt{2}/4)(t - \tau)$
33	60	10	-5	1	1,2	-	30	0,4	74	2	6	$0,3\sqrt{t - \tau}$
34	20	5	5	1,2	-	0,4	45	$\pi R/4$	$-29,2t$	3	4	$(3\pi R/4)(t - \tau)^2$
35	20	5	5	0,6	-	0,6	-	0	$-6,3\sqrt{t}$	4	5	$(5\pi R/6)(t - \tau)$
36	66	10	1,5	2	1,5	-	-	0	$15\sqrt{t}$	4	6,5	$0,5(t - \tau)$
37	40	10	2	-	-	1	-	0	$120t$	1	4	$0,5(t - \tau)$
38	40	10	-3	1	-	2	-	0	$50t^2$	3	5	$(\pi a/3)(t - \tau)$
39	50	12	-3	0,6	-	-	60	0,2	$27t^2$	2	6	$0,4\sqrt{t - \tau}$
40	40	10	-6	-	-	1	-	$\sqrt{2}/2$	$75\sqrt{t}$	1	3	$(\sqrt{2}/16)(t - \tau)^2$

*Примітка.* Знак мінус перед  $M_z$  і  $\omega$  відповідає напрямку обертання годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі  $z$ .

## Осьові моменти інерції однорідних пластинок

Тіло	$J_x$	$J_y$	$J_z$	Тіло
	$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{mR^2}{4}$	$\frac{mR^2}{4}$	
	$\frac{m(R^2 + r^2)}{2}$	$\frac{m(R^2 + r^2)}{4}$	$\frac{m(R^2 + r^2)}{4}$	
	$\frac{m(a^2 + b^2)}{3}$	$\frac{mb^2}{3}$	$\frac{ma^2}{3}$	
	$\frac{ma^2}{3}$	0	$\frac{ma^2}{3}$	
	$\frac{m(3a^2 + b^2)}{18}$	$\frac{mb^2}{18}$	$\frac{ma^2}{6}$	

### Приклад виконання завдання (рис. 1.5)

Дано:  $m_1 = 200 \text{ кг}$ ;  $m_2 = 80 \text{ кг}$ ,  $M_z = 592t \text{ Нм}$ ,  $\omega_0 = -2 \text{ с}^{-1}$ ,  $AO = 0,8 \text{ м}$ ,  
 $R = 2,4 \text{ м}$ ,  $a = 1,2 \text{ м}$ ,  $\tau = 4 \text{ с}$ ,  $T = 6 \text{ с}$ ,  $OK = 0,5(t - \tau)^2 \text{ м}$ .

Визначити  $\omega_\tau$  і  $\omega_T$ , вважаючи тіло  $H$  однорідної круглою пластинкою.

#### Розв'язання

До розв'язання задачі застосуємо теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи, яка виражається рівнянням:

$$dK_z/dt = \sum_i M_{iz}^{ex},$$

де  $K_z$  – кінетичний момент системи, що складається в даному випадку з тіла  $H$  і точки  $K$ , відносно осі  $z$ ;  $\sum_i M_{iz}^{ex} = M_z^{ex}$  – головний момент зовнішніх сил, прикладених до системи, відносно осі  $z$ .

На систему за час від  $t = 0$  до  $t = \tau$  діють такі сили: вага  $\vec{P}_1$  тіла  $H$ , вага  $\vec{P}_2$  точки  $K$ , пара сил з моментом  $M_z$  і реакції підп'ятника і підшипника (рис. 1.5, а).

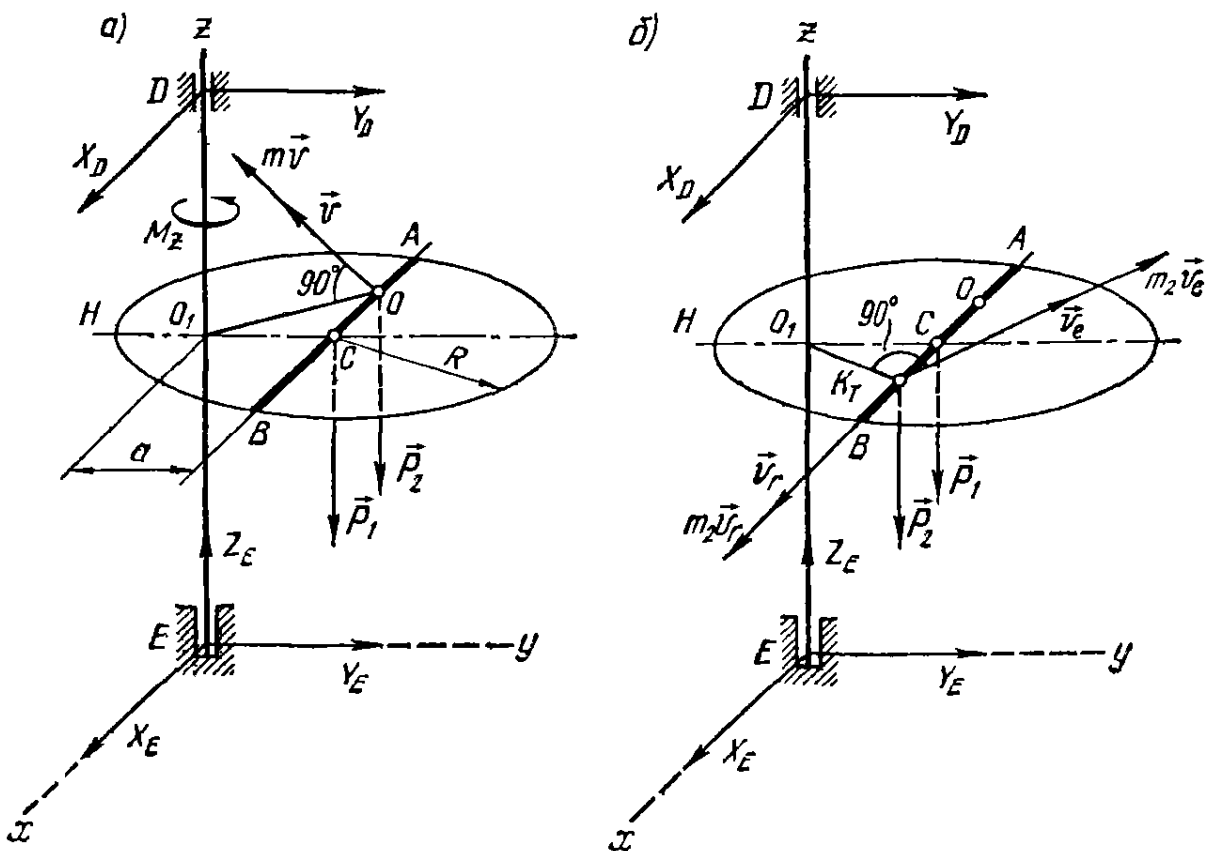


Рис. 1.5

Припускаючи, що обертання тіла  $H$  відбувається проти руху годинникової стрілки, знайдемо значення кінетичного моменту системи, який складається з кінетичного моменту тіла  $J_z \omega$  і моменту кількості руху точки  $K$ , яка знаходиться в точці  $O$  тіла  $H$  і має швидкість  $v = \omega \cdot O_1O$ :

$$m_2 v \cdot O_1O = m_2 \omega \cdot O_1O^2.$$

Таким чином,

$$K_z = J_z \omega + m_2 \omega \cdot O_1O^2 = (J_z + m_2 \cdot O_1O^2) \omega.$$

Головний момент зовнішніх сил рівний обертальному моменту  $M_z$ , так як інші сили моменту відносно осі  $z$  не створюють.

Рівняння, яке виражає теорему про зміну кінетичного моменту, матиме вигляд

$$\frac{d \left[ (J_z + m_2 \cdot O_1O^2) \omega \right]}{dt} = M_z, \quad (1.1)$$

де  $M_z = ct$  ( $c = 592 \text{ Нм/с}$ ).

Відокремимо в рівнянні (1.1) змінні і зінтегруємо ліву і праву частини рівняння:

$$(J_z + m_2 \cdot O_1O^2) \int_{\omega_0}^{\omega_\tau} d\omega = \int_0^\tau ct \, dt.$$

Тоді

$$(J_z + m_2 \cdot O_1O^2)(\omega_\tau - \omega_0) = c\tau^2/2. \quad (1.2)$$

Знайдемо числові значення величин, які входять в рівняння (1.2).

Момент інерції тіла  $H$  відносно осі  $z$  знайдемо, використовуючи теорему Гюйгенса-Штейнера про залежність між моментами інерції відносно паралельних осей:

$$J_z = J_{Cz} + m_1 a^2,$$

де  $J_{Cz}$  – момент інерції тіла  $H$  – однорідної круглої пластинки відносно вертикальної осі, що проходить через центр мас  $C$  тіла паралельно осі  $z$ :

$$J_{Cz} = m_1 R^2 / 2.$$

Тоді

$$J_z = m_1 R^2 / 2 + m_1 a^2,$$

тобто

$$J_z = 200 \cdot 2,4^2 / 2 + 200 \cdot 1,2^2 = 864 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Із рисунка (рис. 1.5, а)

$$O_1O^2 = OC^2 + O_1C^2 = 1,6^2 + 1,2^2 = 4 \text{ м}^2,$$

тому

$$J_z + m_2 \cdot O_1O^2 = 864 + 80 \cdot 4 = 1184 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Таким чином, з рівняння (1.2)

$$1184[\omega_\tau - (-2)] = (592 \cdot 4^2)/2$$

маємо

$$\omega_\tau = 2 \text{ c}^{-1}.$$

На протязі відрізка часу від  $t = \tau$  до  $t = T$  на систему діють сили  $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ , реакції підп'ятника і підшипника (рис. 1.5, б). Оскільки обертаючий момент  $M_z$  знімається, тобто  $\sum_i (M_i^{ex})_z = 0$ , то

$$dK_z/dt = 0, \quad K_z = const.$$

Визначимо значення кінетичних моментів  $K_{z\tau}$  при  $t = \tau$  і  $K_{zT}$  при  $t = T$  і прирівняємо ці значення.

Для  $t = \tau$

$$K_{z\tau} = (J_z + m_2 \cdot O_1O^2)\omega_\tau = 1184 \cdot 2 = 2368 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}.$$

При  $t > \tau$  швидкість точки  $K$  складається з відносної швидкості  $\vec{v}_r$  по відношенню до тіла  $H$  і переносної швидкості  $\vec{v}_e$  в русі разом з тілом  $H$ . Тому для  $t = T$  покажемо (рис. 1.5, б) два вектора кількості руху точки:  $m_2\vec{v}_r$  і  $m_2\vec{v}_e$ .

Для  $t = T$

$$K_{zT} = J_z\omega_T + m_2\omega_\tau \cdot O_1K_T^2 - m_2v_r \cdot O_1C.$$

Знайдемо

$$O_1K_T^2 = O_1C^2 + CK_T^2,$$

де

$$CK_T = OK_T - OC, \quad OK_T = s(t = T) = 0,5(T - \tau)^2 = 0,5(6 - 4)^2 = 2 \text{ м},$$

тобто

$$CK_T = 2 - 1,6 = 0,4 \text{ м}, \quad O_1K_T^2 = 1,2^2 + 0,4^2 = 1,6 \text{ м}^2.$$

Відносна швидкість

$$v_r = ds/dt = 2 \cdot 0,5(t - \tau)$$

при  $t = T$

$$v_r = 2 \cdot 0,5(6 - 4) = 2 \text{ м/с}.$$

Тому

$$K_{zT} = 864\omega_T + 80\omega_T \cdot 1,6 - 80 \cdot 2 \cdot 1,2 = 992\omega_T - 192.$$

Прирівнюючи  $K_{z\tau}$  і  $K_{zT}$

$$2368 = 992\omega_T - 192,$$

знаходимо  $\omega_T = 2,59 \text{ c}^{-1}$ .

## РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ ДО ВИВЧЕННЯ РУХУ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

### Завдання для лабораторної роботи №10

Механічна система під дією сил тяжіння починає рухатися зі стану спокою; початкове положення системи показано на рис. 2.1-2.4. З огляду на тертя ковзання тіла  $1$  (варіанти 1-3, 5, 6, 8-12, 17-23, 28-30) і опір коченню тіла  $3$ , що котиться без ковзання (варіанти 2, 4, 6-9, 11, 13-15, 20, 21, 24, 27, 29), нехтуючи іншими силами опору і масами ниток, які вважаються нерозтяжними, визначити швидкість тіла  $1$  у той момент, коли пройдений ним шлях стане рівним  $s$ .

У завданні прийнято наступні позначення:  $m_1, m_2, m_3, m_4$  – маси тіл  $1, 2, 3, 4$ ;  $R_2, r_2, R_3, r_3$  – радіуси великих і малих кіл;  $i_{2x}, i_{3\xi}$  – радіуси інерції тіл  $2$  і  $3$  щодо горизонтальних осей, які проходять через їхні центри мас;  $\alpha, \beta$  – кути нахилу площин до горизонту;  $f$  – коефіцієнт тертя ковзання;  $\delta$  – коефіцієнт тертя кочення.

Необхідні для розв'язання дані приведені в табл. 2.1. Блоки і катки, для яких радіуси інерції в таблиці не зазначені, вважати суцільними однорідними циліндрами.

Похилі ділянки ниток паралельні відповідним похилим площинам.

Т а б л и ц я 2.1

Номер варіанта (рис. 2.1-2.2)	$m_2,$ кг	$m_3,$ кг	$m_4,$ кг	$R_2,$ см	$R_3,$ см	$i_{2x},$ см	$i_{3\xi},$ см	$\alpha,$ град	$\beta,$ град	$f$	$\delta,$ см	$s,$ м
1	$4m$	$1/5m$	$4/3m$	–	–	–	–	60	–	0,10	–	2
2	$1/2m$	$1/3m$	–	–	30	–	20	30	45	0,22	0,20	2
3	$m$	$1/10m$	$m$	–	–	–	–	45	–	0,10	–	2
4	$2m$	$40m$	$m$	20	40	18	–	–	–	–	0,30	$0,1\pi$
5	$2m$	$m$	–	20	15	18	–	60	–	0,12	–	$0,28\pi$
6	$3m$	$m$	–	–	28	–	–	30	45	0,10	0,28	1,5
7	$2m$	$2m$	–	16	25	14	–	30	–	–	0,20	2
8	$1/2m$	$1/3m$	–	–	30	–	–	30	45	0,15	0,20	1,75
9	$2m$	$9m$	–	–	30	–	20	30	–	0,12	0,25	1,5
10	$1/4m$	$1/4m$	$1/5m$	–	–	–	–	60	–	0,10	–	3
11	$1/2m$	$1/4m$	–	–	30	–	25	30	45	0,17	0,20	2,5



Номер варіанта (рис. 2.1-2.2)	$m_2,$ кг	$m_3,$ кг	$m_4,$ кг	$R_2,$ см	$R_3,$ см	$i_{2x},$ см	$i_{3\xi},$ см	$\alpha,$ град	$\beta,$ град	$f$	$\delta,$ см	$s,$ м
12	1/2m	1/5m	m	30	–	20	–	30	–	0,20	–	2,5
13	2m	5m	2m	30	20	26	–	30	–	–	0,24	2
14	1/2m	5m	4m	–	25	–	–	–	–	–	0,20	2
15	1/2m	4m	1/2m	20	15	18	–	60	–	–	0,25	1,5
16	1/10m	1/20m	1/10m	10	12	–	–	–	–	–	–	0,05π
17	1/4m	1/5m	1/10m	20	–	15	–	60	–	0,10	–	0,16π
18	3m	m	–	35	15	32	–	60	–	0,15	–	0,2π
19	1/3m	1/10m	m	24	–	20	–	60	–	0,15	–	1,5
20	2m	20m	–	20	15	16	–	30	–	0,10	0,20	0,2π
21	m	2m	–	20	20	16	–	30	45	0,20	0,32	1,2
22	1/2m	1/4m	–	20	10	–	–	60	–	0,17	–	0,1π
23	m	1/10m	4/5m	20	–	18	–	30	–	0,10	–	1
24	3m	20m	–	20	30	18	–	–	–	–	0,60	0,08π
25	1/3m	1/4m	–	16	20	–	–	–	–	–	–	0,04π
26	1/2m	m	1/3m	30	–	20	–	–	–	–	–	0,6π
27	m	6m	1/2m	20	20	16	–	30	–	–	0,20	2
28	2m	3m	–	20	–	14	–	60	–	0,10	–	0,1π
29	1/4m	1/8m	–	20	35	–	–	15	30	0,20	0,20	2,4
30	1/2m	3/10m	3/2m	26	20	20	18	30	–	0,12	–	2
31	2m	35m	m	20	40	18	–	–	–	–	0,30	0,1π
32	2m	5m	2m	30	20	26	–	30	–	–	0,24	2
33	1/2m	4m	1/2m	20	15	18	–	60	–	–	0,25	1,5
34	2m	m	–	20	15	18	–	60	–	0,12	–	0,28π
35	1/4m	1/5m	1/10m	16	–	15	–	60	–	0,10	–	0,16π
36	2m	2m	–	16	25	14	–	30	–	–	0,20	2
37	3m	20m	–	20	30	18	–	–	–	–	0,60	0,08π
38	m	6m	1/2m	20	20	16	–	30	–	–	0,20	2
39	1/2m	3/10m	3/2m	26	20	20	18	30	–	0,12	–	2
40	2m	20m	–	20	15	16	–	30	–	0,10	0,20	0,2π

Примітка. У всіх варіантах  $m_1 = m$  кг. У варіантах 4, 20, 24, 31, 37, 40 масами ланок  $AB$ ,  $BC$  і повзуна  $B$  знехтувати; у варіантах 5, 16, 18, 22, 25, 34 масою водила знехтувати; у варіанті 14 маси кожного з чотирьох коліс возика однакові; у варіантах 17 і 26 шатун 3 розглядати як тонкий однорідний стержень; у варіанті 26 маси і моменти інерції блоків 2 і 5 однакові.

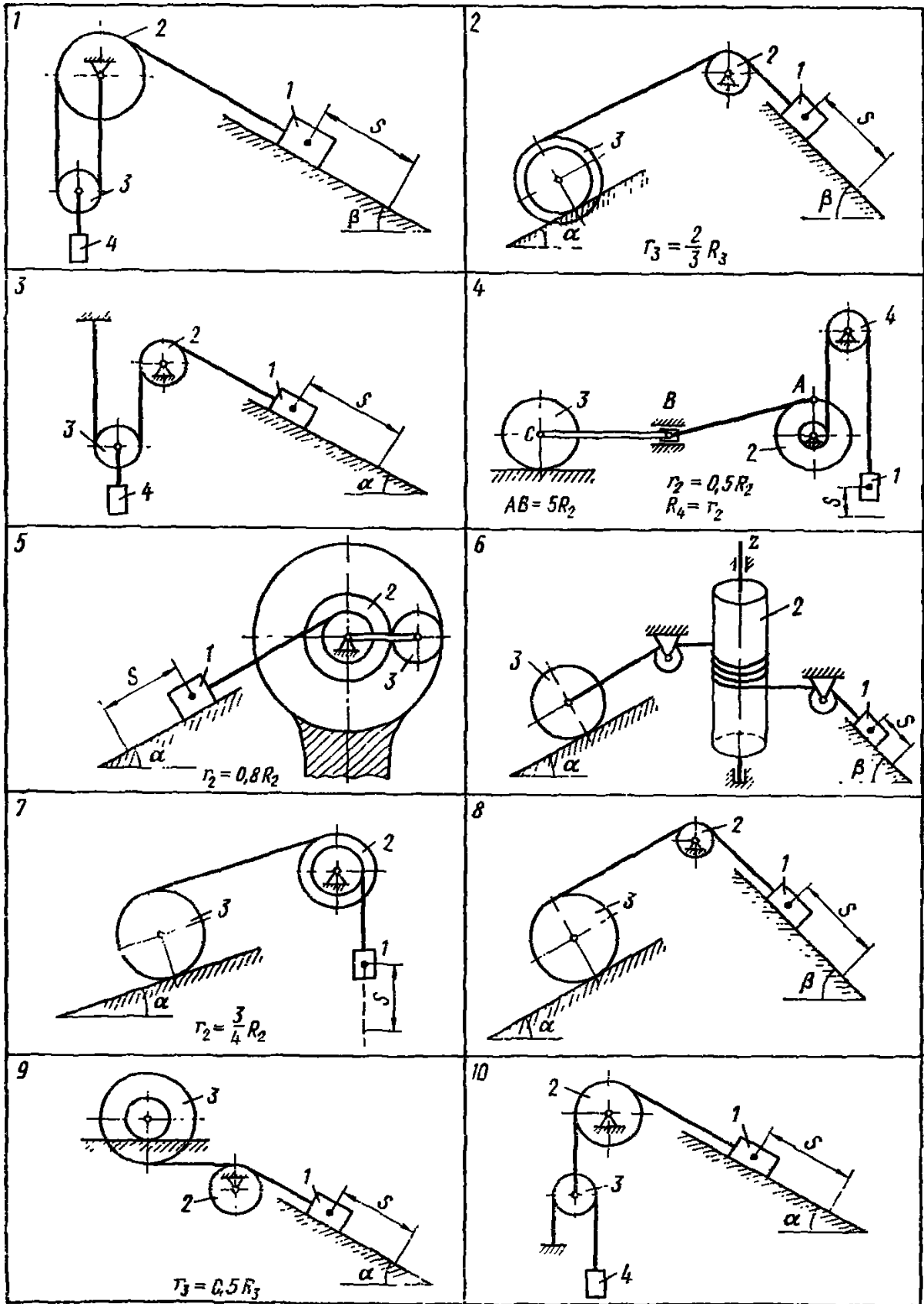


Рис. 2.1

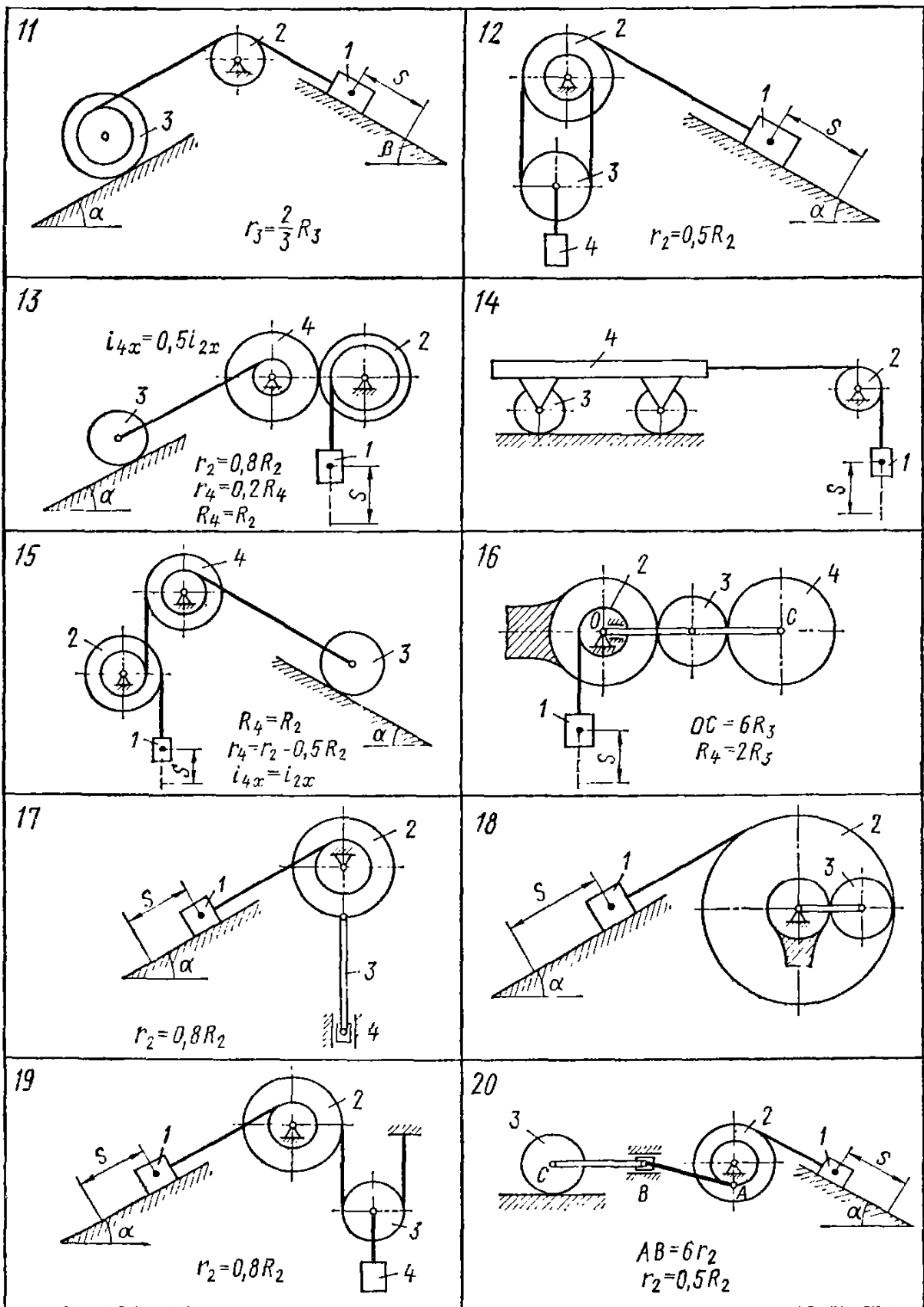


Рис. 2.2

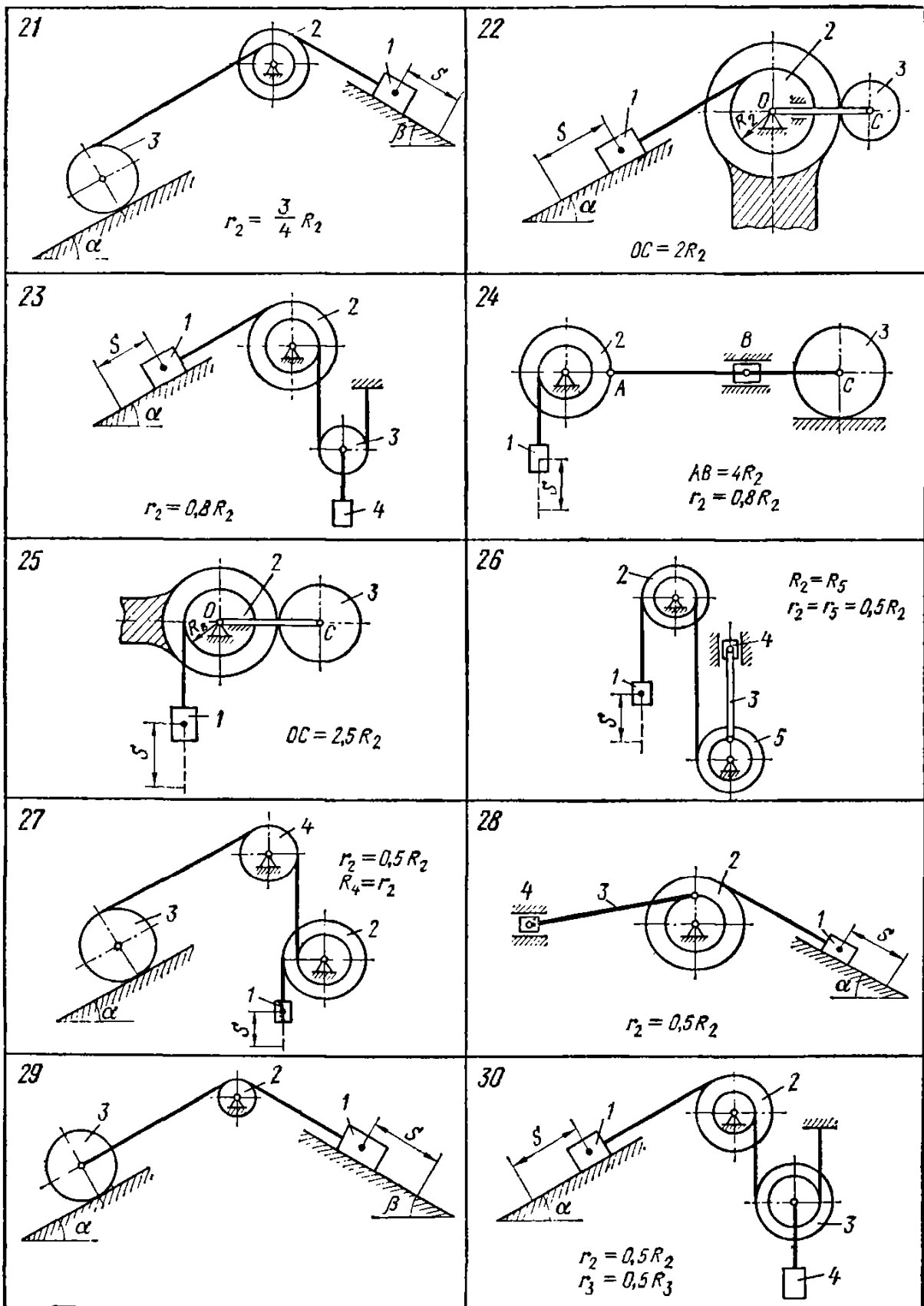


Рис. 2.3

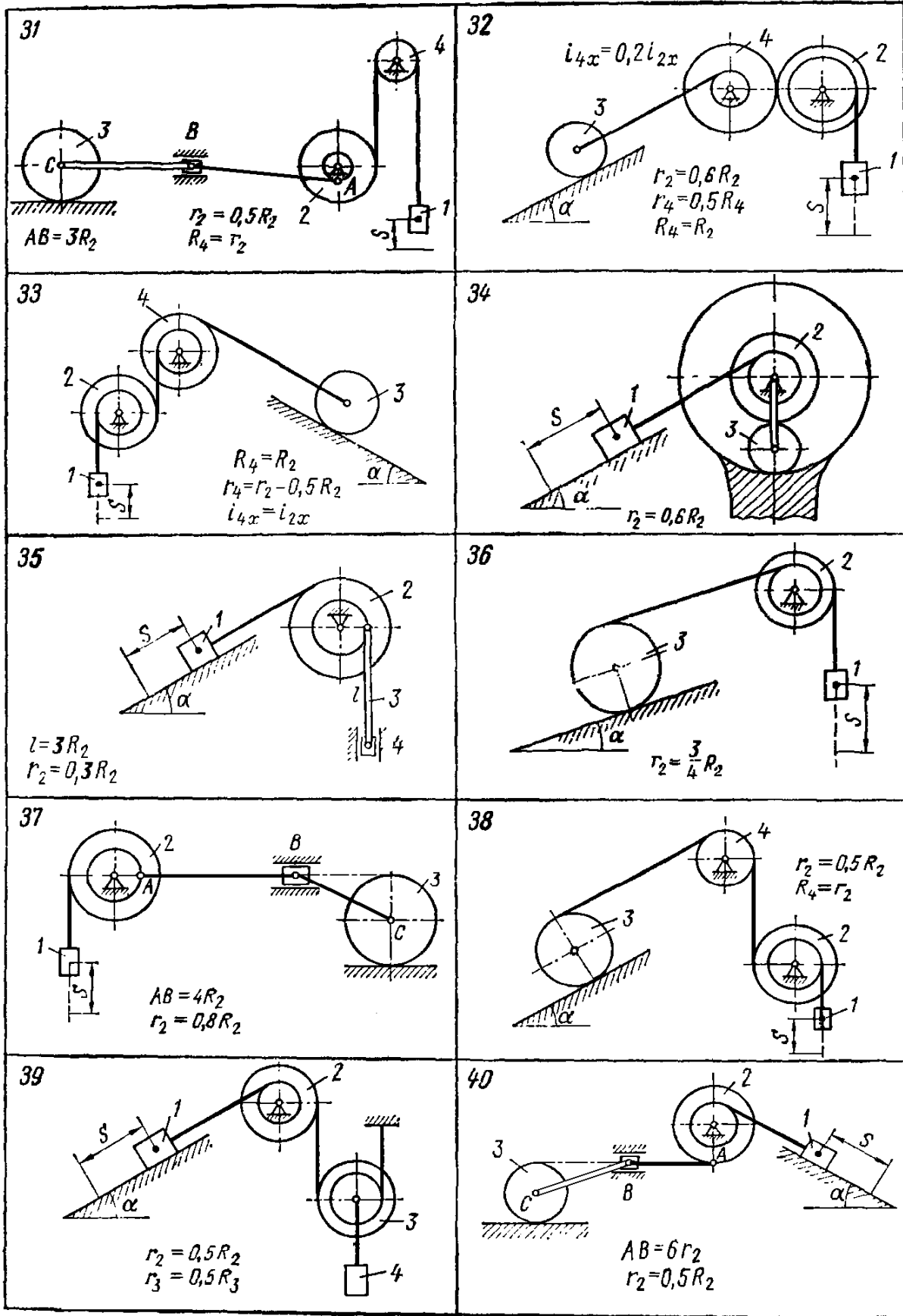


Рис. 2.4

## Приклад виконання завдання

Дано:  $m_1$  – маса вантажу 1,  $m_2 = 2m_1$ ,  $m_3 = m_1$ ,  $m_4 = 0,5m_1$ ,  $m_5 = 20m_1$ ,  $R_2 = R_3 = 12 \text{ м}$ ,  $r_2 = 0,5R_2$ ,  $r_3 = 0,75R_3$ ,  $R_5 = 20 \text{ м}$ ,  $AB = l = 4R_3$ ,  $i_{2\xi} = 8 \text{ м}$ ,  $i_{3x} = 10 \text{ м}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $f = 0,1$ ,  $\delta = 0,2 \text{ м}$ ,  $s = 0,06\pi i$ . Опір коченню тіла 2 не враховувати. Шатун 4 вважати тонким однорідним стрижнем; каток 5 – однорідний суцільний циліндр. Масами ланки  $BC_5$  і повзуна  $B$  знехтувати.

На рис. 2.5, а показано механічну систему в початковому положенні.

Знайти  $v_1$  – швидкість вантажу 1 у кінцевому положенні.

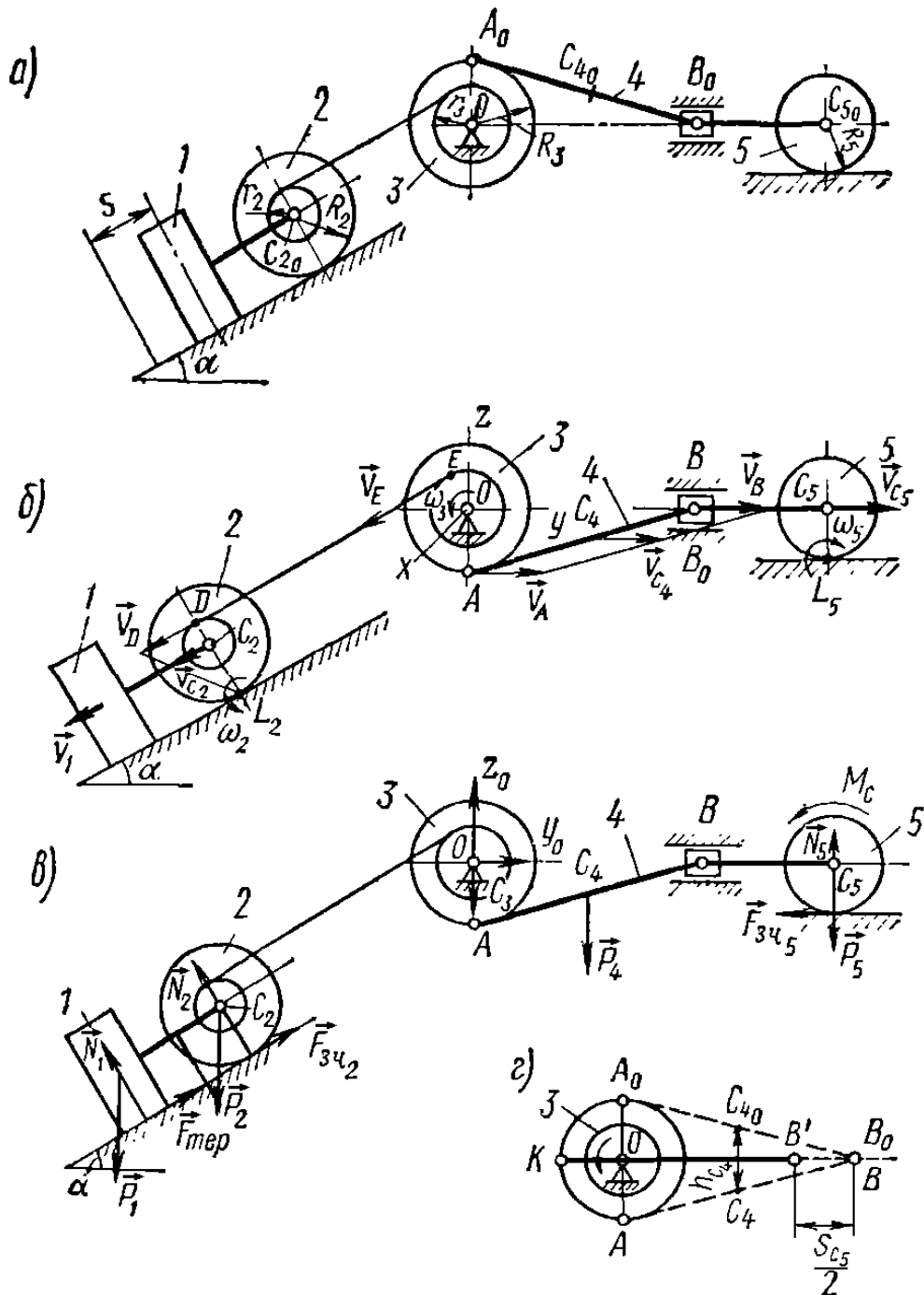


Рис. 2.5

## Р о з в ' я з а н н я

Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії системи:

$$T - T_0 = \sum_i A_i^{ex} + \sum_i A_i^{in}, \quad (2.1)$$

де  $T_0$  і  $T$  – кінетична енергія системи в початковому і кінцевому положеннях;  $\sum_i A_i^{ex}$  – сума робіт зовнішніх сил, прикладених до системи;  $\sum_i A_i^{in}$  – сума робіт внутрішніх сил системи.

Для розглянутих систем, що складаються з абсолютно твердих тіл, з'єднаних нерозтяжними нитками і стержнями,

$$\sum_i A_i^{in} = 0.$$

Оскільки в початковому положенні система знаходиться в стані спокою, то  $T_0 = 0$ .

Отже, рівняння (2.1) набуває вигляду:

$$T = \sum_i A_i^{ex}. \quad (2.2)$$

Кінетична енергія розглянутої системи  $T$  в кінцевому її положенні (рис. 2.5, б) дорівнює сумі кінетичних енергій тіл 1, 2, 3, 4, 5:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5. \quad (2.3)$$

Кінетична енергія вантажу 1, що рухається поступально,

$$T_1 = m_1 v_1^2 / 2. \quad (2.4)$$

Кінетична енергія катка 2, що здійснює плоский рух,

$$T_2 = m_2 v_{C_2}^2 / 2 + J_{2\xi} \omega_2^2 / 2. \quad (2.5)$$

де  $v_{C_2}$  – швидкість центра мас  $C_2$  катка 2

$$v_{C_2} = v_1, \quad (2.6)$$

$J_{2\xi}$  – момент інерції катка 2 відносно його поздовжньої центральної осі  $C_2\xi$

$$J_{2\xi} = m_2 i_{2\xi}^2, \quad (2.7)$$

$\omega_2$  – кутова швидкість катка 2.

Так як каток котиться без ковзання, то миттєвий центр швидкостей катка знаходиться в точці  $L_2$ . Тому

$$\omega_2 = v_{C_2} / C_2 L_2 = v_1 / R_2. \quad (2.8)$$

Підставляючи (2.6)-(2.8) у формулу (2.5), одержуємо

$$T_2 = \frac{m_2 v_1^2}{2} + \frac{m_2 i_{2\xi}^2 v_1^2}{2 R_2^2} = \frac{1}{2} m_2 \left( 1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2} \right) v_1^2. \quad (2.9)$$

Кінетична енергія барабанів 3, що обертаються навколо нерухомої осі  $Ox$ ,

$$T_3 = J_{3x} \omega_3^2 / 2, \quad (2.10)$$

де  $J_{3x}$  – момент інерції барабанів 3 відносно їхньої спільної осі  $Ox$ :

$$J_{3x} = m_3 i_{3x}^2, \quad (2.11)$$

$\omega_3$  – кутова швидкість барабанів 3:

$$\omega_3 = v_E / r_3. \quad (2.12)$$

Швидкість точки  $E$  барабана дорівнює швидкості точки  $D$  катка, яку можна знайти зі співвідношення:

$$v_D / v_{C2} = (r_2 + R_2) / R_2;$$

а оскільки

$$v_{C2} = v_1, \quad R_2 = 2r_2, \quad \text{то } v_D / v_1 = 3/2.$$

Отже,

$$v_E = v_D = (3/2)v_1. \quad (2.13)$$

Підставляючи (2.13) в (2.12), отримуємо

$$\omega_3 = (3/2) \cdot v_1 / r_3. \quad (2.14)$$

Після підстановки (2.11) і (2.14) в (2.10) вираз для кінетичної енергії барабанів 3 набуває вигляду:

$$T_3 = \frac{m_3 i_{3\xi}^2}{2} \left( \frac{3v_1}{2r_3} \right)^2$$

або

$$T_3 = \frac{9}{8} m_3 \frac{i_{3\xi}^2 v_1^2}{r_3^2}. \quad (2.15)$$

Кінетична енергія шатуна 4, що здійснює плоский рух

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 v_{C4}^2 + \frac{1}{2} J_{4\xi} \omega_4^2,$$

де  $v_{C4}$  – швидкість центра мас  $C_4$  шатуна 4,  $J_{4\xi}$  – момент інерції шатуна відносно центральної осі  $C_4\xi$ ,  $\omega_4$  – кутова швидкість шатуна 4.

Для визначення швидкості  $v_{C4}$  і кутової швидкості  $\omega_4$  знайдемо кінцеве положення шатуна 4.

Коли вантаж 1 пройде шлях  $s = 0,06\pi$  м, барабан 3 повернеться на кут  $\varphi_3$ . Цей кут  $\varphi_3$  можна визначити за допомогою формули (2.14); замінюючи в ній  $\omega_3 = d\varphi_3/dt$ ,  $v_1 = ds/dt$ , одержуємо

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{3}{2r_3} \cdot \frac{ds}{dt} \quad \text{або} \quad d\varphi_3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{ds}{r_3};$$



після інтегрування (при нульових початкових умовах)

$$\varphi_3 = (3/2) \cdot s/r_3.$$

З отриманого видно, що лінійні і кутові переміщення знаходяться в такій же залежності, як відповідні лінійні і кутові швидкості.

Обчислимо кут

$$\varphi_3 = 3 \cdot 0,06\pi / (2 \cdot 0,09) = \pi.$$

Це значить, що барабан 3 повернеться на  $180^\circ$ , при цьому шатун 4 з початкового положення  $A_0B_0$  перейде в кінцеве положення  $AB$  (рис. 2.5, б).

Так як швидкості точок  $A$  і  $B$  шатуна в цей момент паралельні, то миттєвий центр швидкостей шатуна знаходиться на нескінченності.

Отже, кутова швидкість шатуна в цей момент  $\omega_4 = 0$ , а швидкості всіх його точок рівні між собою.

Таким чином, кінетична енергія шатуна

$$T_4 = m_4 v_{C4}^2 / 2, \quad (2.16)$$

де

$$v_{C4} = v_A. \quad (2.17)$$

Обертальна швидкість точки  $A$  тіла 3  $v_A = \omega_3 R_3$  або з врахуванням (2.14)

$$v_A = (3/2) R_3 v_1 / r_3.$$

Оскільки  $r_3 = (3/4) R_3$ , одержимо  $v_A = 2v_1$ .

Згідно (2.17)

$$v_{C4} = v_A.$$

Отже,

$$v_{C4} = 2v_1. \quad (2.19)$$

Після підстановки (2.19) в (2.16) вираз кінетичної енергії шатуна 4 набуває вигляду:

$$T_4 = (1/2) m_4 (2v_1)^2 = 2m_4 v_1^2. \quad (2.20)$$

Кінетична енергія катка 5, що здійснює плоский рух:

$$T_5 = m_5 v_{C5}^2 / 2 + J_{5\xi} \omega_5^2 / 2,$$

де  $v_{C5}$  – швидкість центра мас  $C_5$  катка 5;  $J_{5\xi}$  – момент інерції катка 5 (однорідного суцільного циліндра) відносно його центральної поздовжньої осі  $C_5\xi$ ,  $J_{5\xi} = m_5 R_5^2 / 2$ ;  $\omega_5$  – кутова швидкість катка 5.

Оскільки каток котиться без ковзання, то миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці  $L_5$ . Тому

$$\omega_5 = v_{C5} / R_5.$$

Отже,

$$T_5 = \frac{m_5 v_{C5}^2}{2} + \frac{m_5 R_5^2 v_{C5}^2}{2 \cdot 2 R_5^2} = \frac{3}{4} m_5 v_{C5}^2.$$

Оскільки ланка  $BC_5$  здійснює поступальний рух, то  $v_{C5} = v_B$ , але  $v_B = v_{C4} = 2v_1$ . Отже,  $v_{C5} = 2v_1$ .

Тому вираз для кінетичної енергії катка 5 набуває вигляду:

$$T_5 = (3/4)m_5(2v_1)^2 = 3m_5v_1^2. \quad (2.21)$$

Кінетична енергія всієї механічної системи визначається за формулою (2.3) з врахуванням (2.4), (2.9), (2.15), (2.20), (2.21):

$$T = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{1}{2}m_2 \left( 1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2} \right) v_1^2 + \frac{9}{8}m_3 \frac{i_{3x}^2}{r_3^2} v_1^2 + 2m_4v_1^2 + 3m_5v_1^2.$$

Підставляючи сюди задані значення мас, одержуємо

$$T = \frac{m_1v_1^2}{2} \left[ 1 + 2 \left( 1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2} \right) + \frac{9}{4} \frac{i_{4C}^2}{r_3^2} + 2 + 120 \right]$$

або

$$T = 129 \cdot m_1v_1^2 / 2. \quad (2.22)$$

Знайдемо суму робіт всіх прикладених до системи зовнішніх сил при її переміщенні (рис. 2.5, в).

Робота сили тяжіння  $\vec{P}_1$ :

$$A_{P1} = P_1h_1 = m_1gs \sin \alpha. \quad (2.23)$$

Робота сили тертя ковзання  $\vec{F}_{\delta \dot{\alpha}\delta}$ :

$$\begin{aligned} A_{\delta \dot{\alpha}\delta} &= -F_{\delta \dot{\alpha}\delta}s, \quad F_{\delta \dot{\alpha}\delta} = fN_1 = fm_1g \cos \alpha, \\ A_{\delta \dot{\alpha}\delta} &= -fm_1gs \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Робота сили тяжіння  $\vec{P}_2$ :

$$A_{P2} = P_2h_{C2} = m_2gs \sin \alpha. \quad (2.25)$$

Робота сил зчеплення  $\vec{F}_{\zeta+2}$ ,  $\vec{F}_{\zeta+5}$  катків 2 і 5 дорівнює нулю, тому що ці сили прикладені в миттєвих центрах швидкостей цих катків.

Робота сили тяжіння  $\vec{P}_4$ :

$$A_{P4} = P_4h_{C4},$$

де  $h_{C4}$  – вертикальне переміщення центра мас  $C_4$  шатуна 4 з початкового положення в його кінцеве положення (рис. 2.5, з):

$$\begin{aligned} h_{C4} &= R_3, \\ A_{P4} &= m_4gR_3. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Робота пари сил опору коченню катка 5:

$$A_{M_C} = -M_C\varphi_5, \quad (2.27)$$

де  $M_C = \delta N_5 = \delta P_5$  – момент пари сил опору коченню катка 5;  $\varphi_5$  – кут повороту катка 5. Оскільки каток 5 котиться без ковзання, то кут його повороту:

$$\varphi_5 = s_{C5}/R_5, \quad (2.28)$$

де  $s_{C_5}$  – переміщення центра мас  $C_5$  катка 5.

У даному прикладі роботу пари сил опору обчислимо як суму робіт цієї пари при коченні катка 5 вліво при повороті тіла 3 на кут  $\pi/2$  і коченні вправо, коли тіло 3 повернеться ще на кут  $\pi/2$ .

Переміщення центра мас  $C_5$  катка 5 дорівнює переміщенню повзуна  $B$  вліво і вправо:

$$s_{C_5} = 2(B_0B'). \quad (2.29)$$

Визначимо переміщення  $B_0B'$  при повороті тіла 3 на кут  $\pi/2$ . За початок відліку координати точки  $B$  виберемо нерухому точку  $K$  площини (мал. 2.5, з). При цьому повороті тіла 3 шатун з положення  $A_0B_0$  перейде в положення  $KB'$ . Тоді

$$B_0B' = KB_0 - KB',$$

де

$$KB_0 = KO + OB_0 = R_3 + \sqrt{(A_0B_0)^2 - (A_0O)^2} = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2}, \quad KB' = l = 4R_3.$$

Отже,

$$B_0B' = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2} - l = R_3 + \sqrt{(4R_3)^2 - R_3^2} - 4R_3 = 0,88R_3. \quad (2.30)$$

Підставляючи (2.30) в (2.29), а потім у (2.28), знаходимо повний кут повороту катка 5:

$$\varphi_5 = 1,76 R_3 / R_5. \quad (2.31)$$

Робота пари сил опору коченню згідно (2.27):

$$A_{M_c} = -\delta m_5 g \cdot 1,76 R_3 / R_5. \quad (2.32)$$

Сума робіт зовнішніх сил визначиться додаванням робіт, що обчислюються за формулами (2.23)-(2.26) і (2.32):

$$\sum A_i^{ex} = m_1 g s \cdot \sin \alpha - f m_1 g s \cdot \cos \alpha + m_2 g s \cdot \sin \alpha + m_4 g R_3 - \delta m_5 g \cdot 1,76 R_3 / R_5.$$

Підставляючи задані значення мас, одержуємо

$$\sum A_i^{ex} = m_1 g s \left( \sin \alpha - f \cos \alpha + 2 \sin \alpha + \frac{R_3}{2s} - \frac{\delta \cdot 20 \cdot 1,76 R_3}{R_5 s} \right)$$

або

$$\sum A_i^{ex} = 1,51 m_1 g s. \quad (2.33)$$

Відповідно до теореми (2.2) дорівнюємо значення  $T$  і  $\sum A_i^{ex}$ , які знаходяться за формулами (2.22) і (2.33):

$$129 \cdot m_1 v_1^2 / 2 = 1,51 m_1 g s,$$

звідки

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,51 g s}{129}} = \sqrt{\frac{3,02}{129}} \cdot 9,81 \cdot 0,06 \pi = 0,2 \text{ м/с}.$$

## РОЗДІЛ 3. ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛОСКОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

### Завдання для лабораторної роботи №11

Визначити максимальну величину сталої сили  $F$ , під дією якої колесо масою  $m$  котиться без ковзання.

Знайти також для цього випадку рівняння руху центра мас колеса  $C$ , якщо в початковий момент часу його координата  $x_{C0} = 0$  і швидкість  $v_{C0} = 0$ .

Варіанти завдання показані на рис. 3.1-3.4, а необхідні для розв'язання дані приведені в табл. 3.1.

У завданні прийнято наступні позначення:  $i_C$  – радіус інерції колеса відносно центральної осі, перпендикулярної до його площини;  $R$  і  $r$  – радіуси великого і малого кіл;  $f_{\varphi\pm}$  – коефіцієнт зчеплення (коефіцієнт тертя спокою);  $\delta$  – коефіцієнт тертя кочення.

Т а б л и ц я 3.1

Номер варіанта (рис. 3.1-3.2)	$m, \text{кг}$	$i_C, \text{см}$	$R, \text{см}$	$r, \text{см}$	$\alpha, \text{град}$	$\beta, \text{град}$	$f_{\varphi\pm}$	$\delta, \text{см}$
1	300	50	80	40	20	–	0,35	1,0
2	200	40	60	30	–	–	0,20	0,8
3	180	50	60	20	30	–	0,10	0
4	220	30	70	25	30	30	0,20	0
5	240	40	60	15	–	–	0,10	1,0
6	200	–	50	–	15	–	0,20	0,5
7	200	45	60	25	30	15	0,25	0
8	150	40	70	25	15	–	0,50	0
9	250	–	–	–	–	30	0,15	0
10	150	40	50	15	20	–	0,30	0,7
11	200	30	50	20	30	–	0,20	0,6
12	220	–	–	–	30	30	0,25	0
13	140	–	–	–	–	30	0,10	0
14	300	–	–	–	30	–	0,15	0

Номер варіанта (рис. 3.2-3.4)	$m, \text{ кг}$	$i_C, \text{ см}$	$R, \text{ см}$	$r, \text{ см}$	$\alpha, \text{ град}$	$\beta, \text{ град}$	$f_{\xi}$	$\delta, \text{ см}$
15	180	20	50	20	–	15	0,15	0
16	180	30	50	35	–	–	0,15	0,9
17	160	50	60	20	15	20	0,30	0
18	260	–	50	–	–	–	0,10	1,0
19	200	50	60	20	–	20	0,10	0
20	250	40	50	30	20	–	0,25	0
21	200	–	40	–	30	–	0,25	1,2
22	150	30	50	20	–	–	0,25	1,2
23	200	30	60	30	30	15	0,40	0
24	240	30	70	30	15	–	0,15	0
25	100	–	–	–	–	60	0,10	0
26	150	–	–	–	30	15	0,15	0
27	120	–	30	–	–	–	0,40	1,5
28	150	30	60	25	15	–	0,30	0,8
29	200	–	–	–	–	20	0,30	0
30	160	–	40	–	20	–	0,20	0,7
31	150	40	70	25	15	–	0,50	0
32	200	30	50	20	30	–	0,20	0,6
33	180	30	50	35	–	–	0,15	0,9
34	250	–	–	–	–	30	0,15	0
35	200	30	60	30	30	15	0,40	0
36	160	–	40	–	20	–	0,20	0,7
37	250	40	50	30	20	–	0,25	0
38	180	50	60	20	30	–	0,10	0
39	160	50	60	20	15	20	0,30	0
40	150	–	–	–	30	15	0,15	0

*Примітка.* Колеса, для яких радіуси інерції не зазначені, вважати суцільними однорідними дисками.

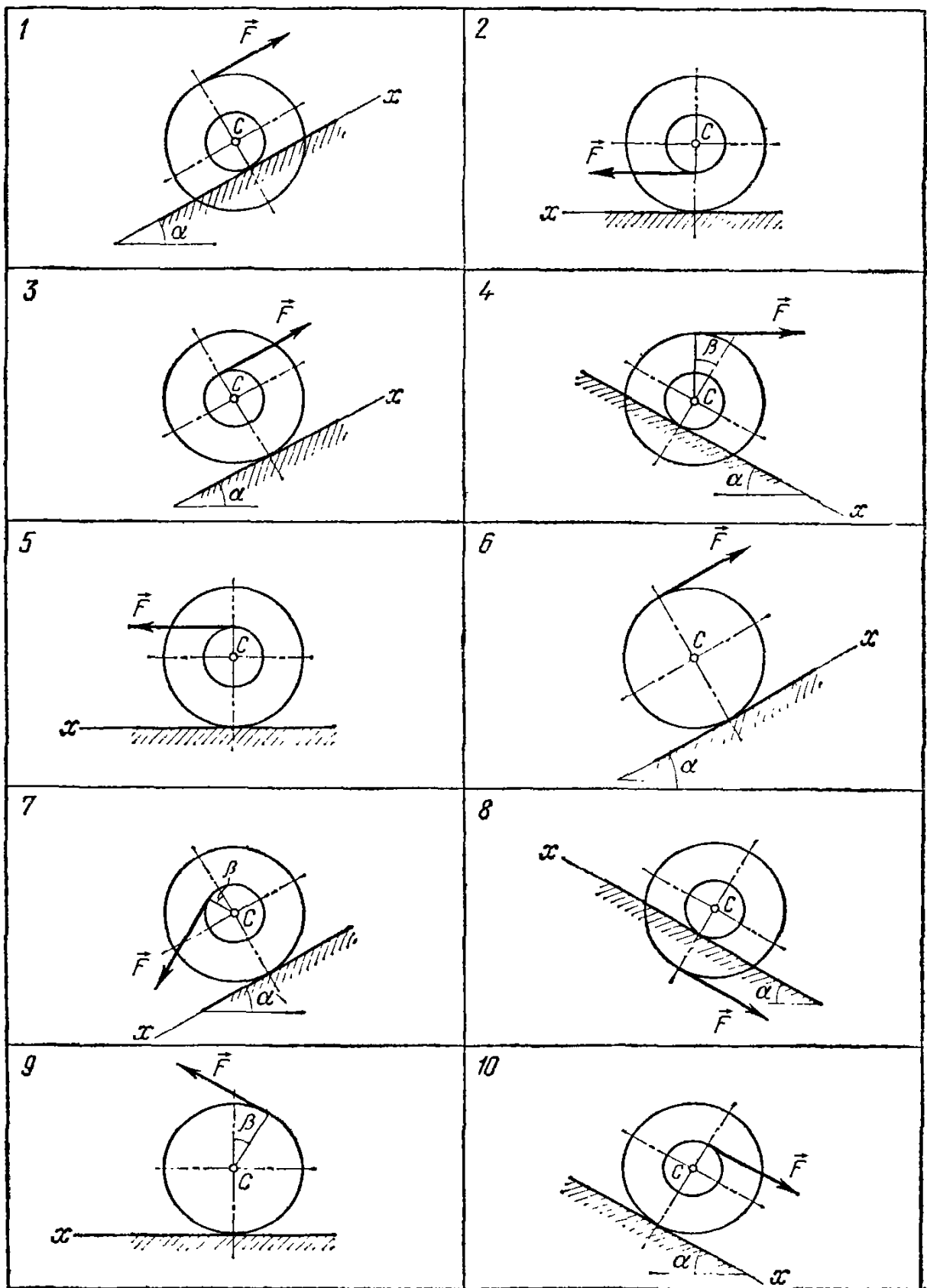


Рис. 3.1

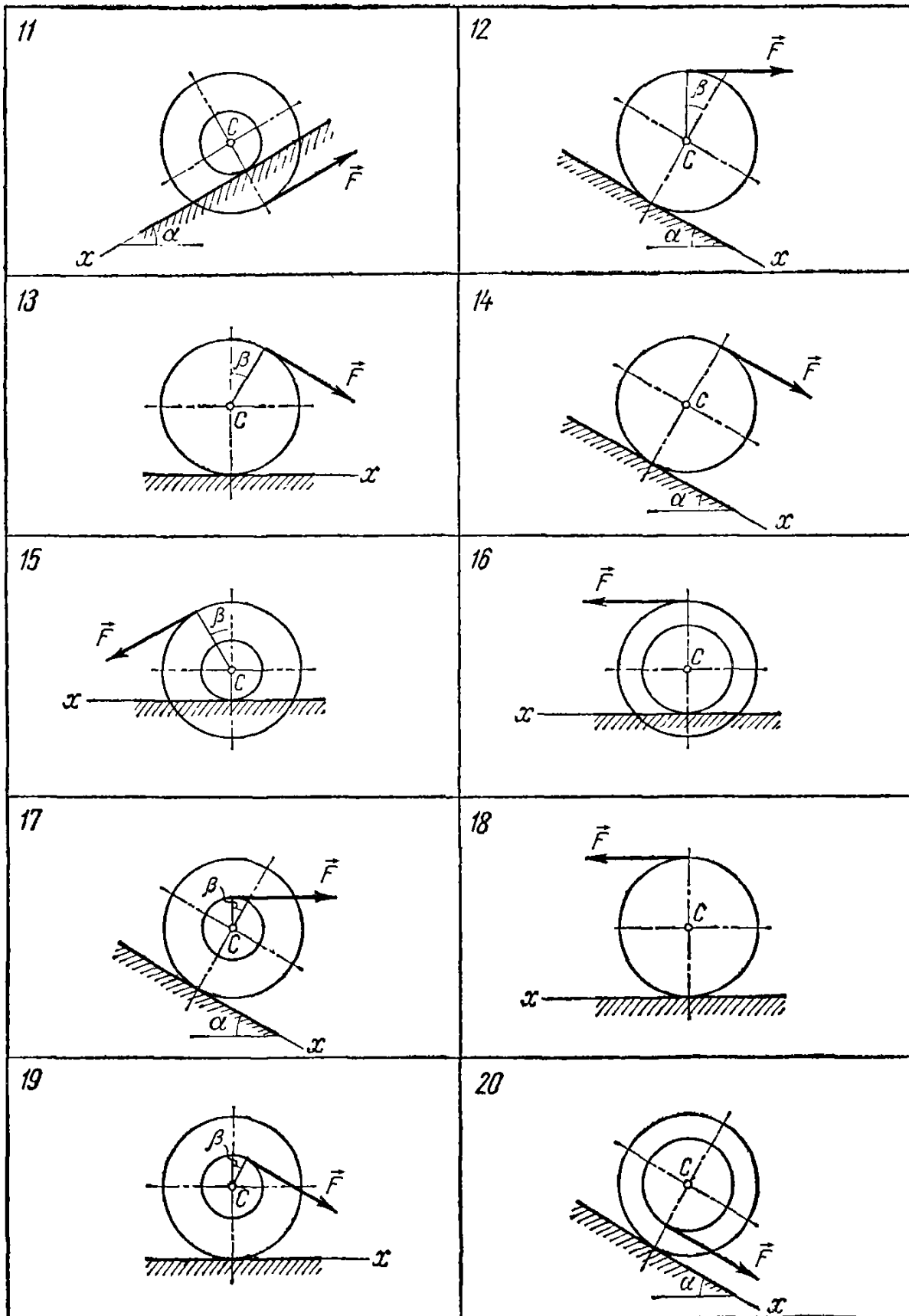


Рис. 3.2

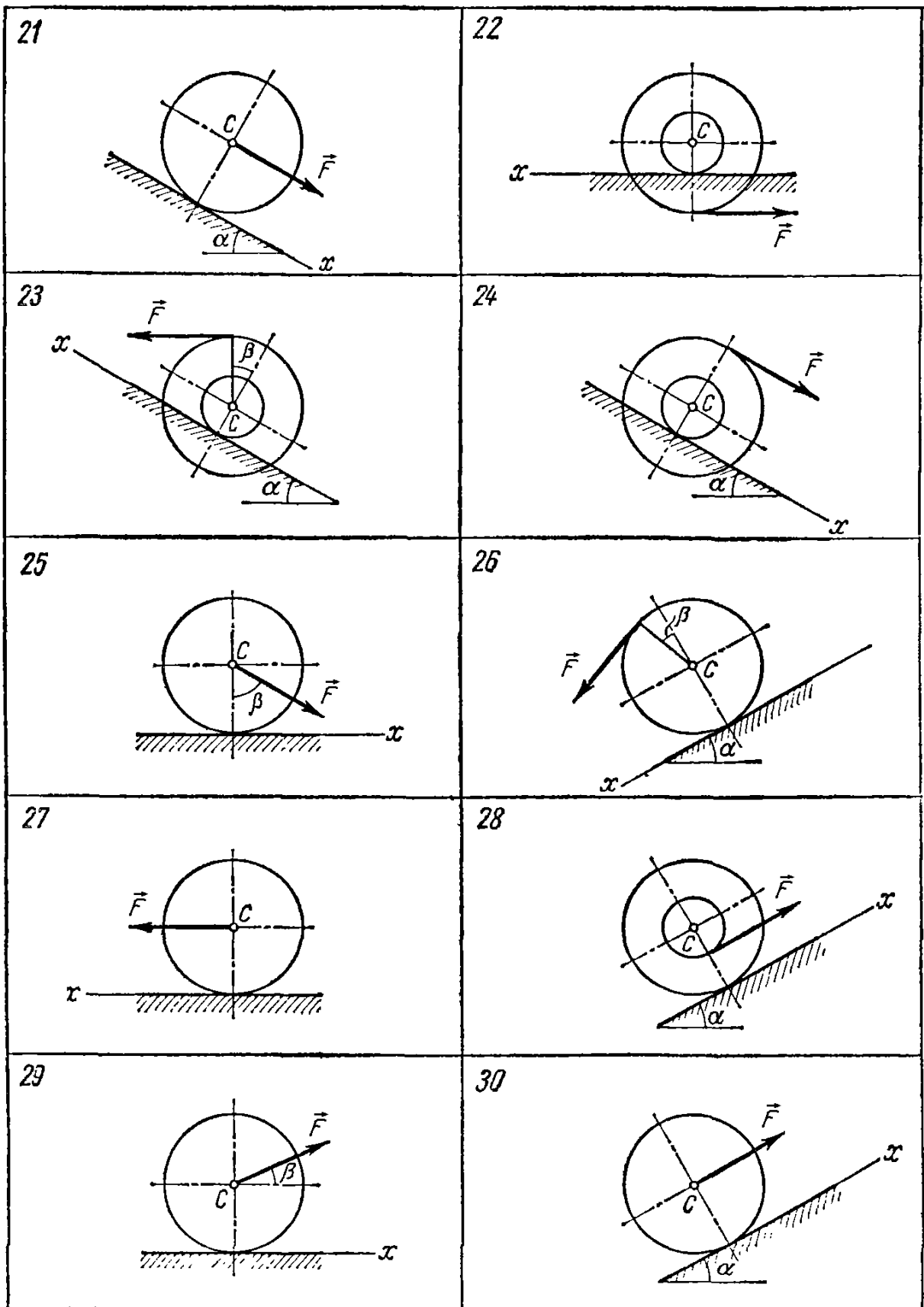


Рис. 3.3



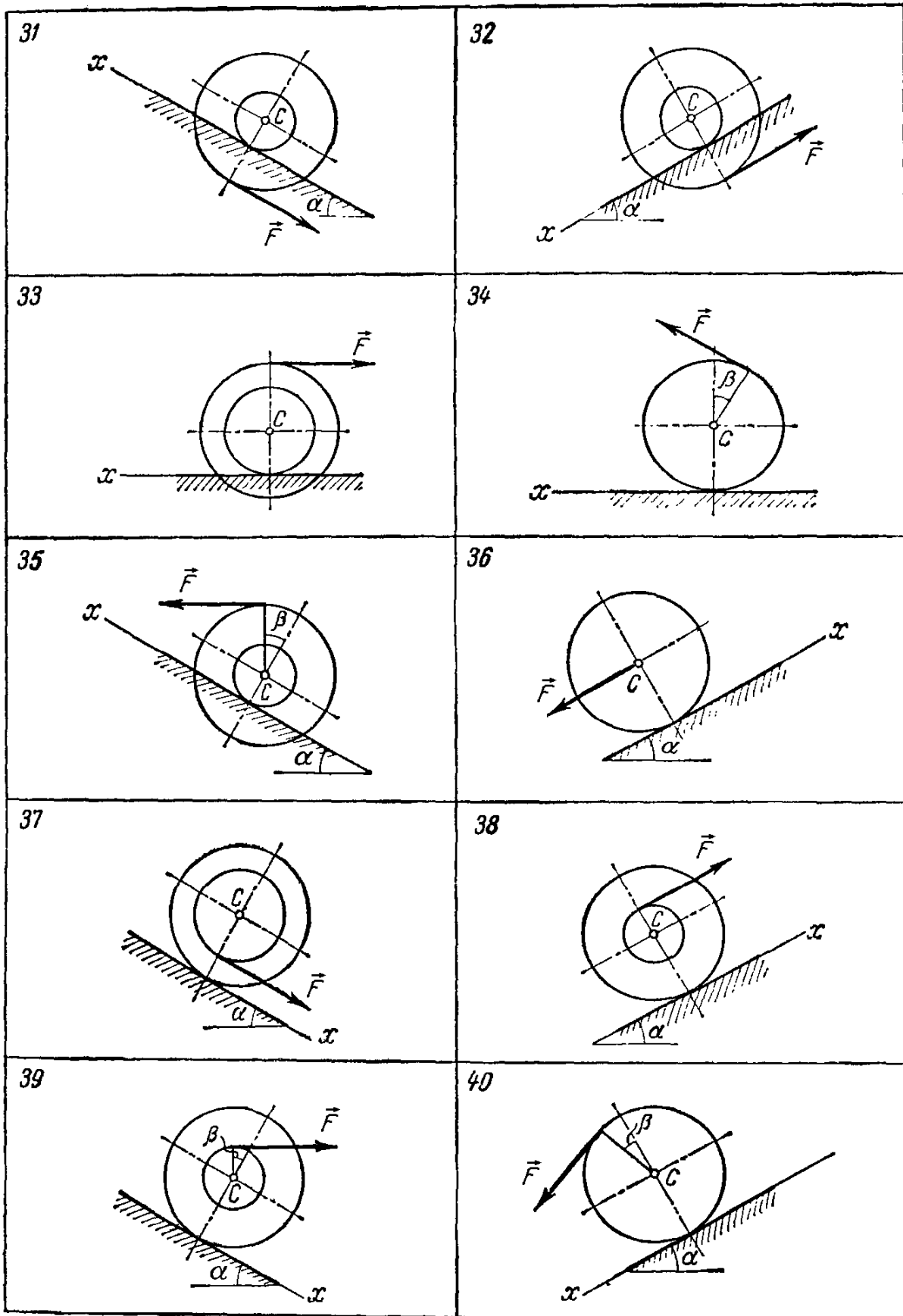


Рис. 3.4

## Приклад виконання завдання

Дано (рис. 3.5, а):  $m = 200 \text{ êã}$ ;  $R = 60 \text{ ñì}$ ;  $r = 10 \text{ ñì}$ ;  $i_C = 50 \text{ ñì}$ ;  $\alpha = 15^\circ$ ;  $\beta = 30^\circ$ ;  $f_{\zeta^\pm} = 0,10$ ;  $\delta = 0$ .

### Розв'язання

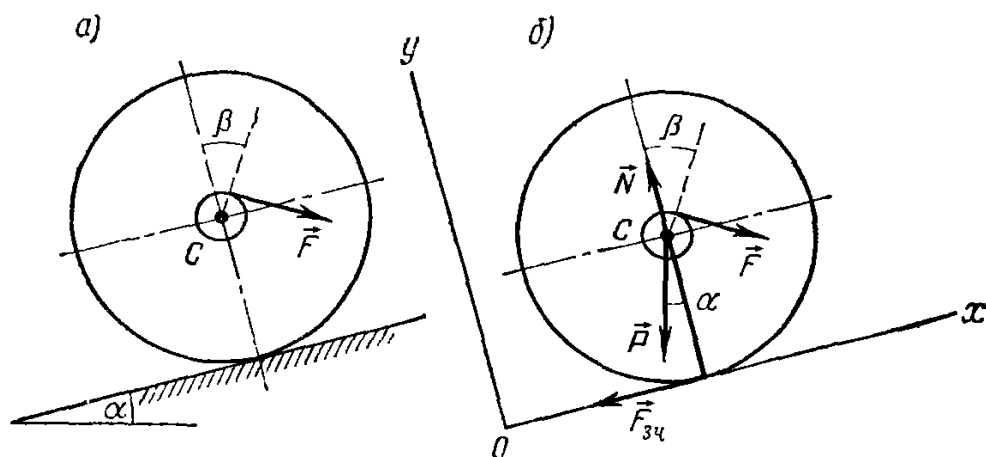


Рис. 3.5

На колесо діють сили: вага колеса  $\vec{P}$ , нормальна реакція опори  $\vec{N}$ , сила  $\vec{F}$  і сила зчеплення  $\vec{F}_{\zeta^\pm}$  (рис. 3.5, б) (у випадку, якщо  $\delta \neq 0$ , необхідно показати момент пари сил опору коченню).

Відповідно до напрямку сили  $\vec{F}$  обертання колеса відбувається за годинниковою стрілкою, тобто колесо котиться вгору по похилій площині. Припустимо, що силу  $\vec{F}_{\zeta^\pm}$  напрямлена так, як показано на рисунку. Справжній напрямок цієї сили встановлюється в процесі розв'язання задачі. Осі координат вибираємо так, щоб вісь  $x$  була напрямлена в бік руху колеса (рис. 3.5).

Диференціальні рівняння плоского руху колеса:

$$m\ddot{x}_C = \sum_i F_{ix}^{ex}; \quad m\ddot{y}_C = \sum_i F_{iy}^{ex}; \quad J_C\ddot{\varphi} = \sum_i M_{iCz}^{ex}$$

або в даному випадку

$$m\ddot{x}_C = F \cos \beta - P \sin \alpha - F_{\zeta^\pm}, \quad (3.1)$$

$$m\ddot{y}_C = N - F \sin \beta - P \cos \alpha, \quad (3.2)$$

$$J_C\ddot{\varphi} = Fr + F_{\zeta^\pm}R. \quad (3.3)$$

Знак у моменту сили в рівнянні (3.3) вибираємо додатним, якщо момент сприяє обертанню колеса, і від'ємним – у протилежному випадку.

З рівняння (3.2) випливає, що, оскільки  $y = R = \text{const}$ ,  $\ddot{y}_C = 0$ , то

$$N = F \sin \beta + P \cos \alpha.$$

При коченні колеса без ковзання кутова швидкість  $\omega = v_C/R$  або  $\dot{\varphi} = \dot{x}_C/R$ , звідки  $\ddot{\varphi} = \ddot{x}_C/R$ .

Таким чином, рівняння (3.3) набуває наступного вигляду:

$$mi_C^2 \cdot \ddot{x}_C / R = Fr + F_{\zeta^+} R. \quad (3.3')$$

Для виключення  $\ddot{x}_C$  поділимо рівняння (3.1) на (3.3'):

$$\frac{R}{i_C^2} = \frac{F \cos \beta - P \sin \alpha - F_{\zeta^+}}{Fr + F_{\zeta^+} R} \Rightarrow F = \frac{F_{\zeta^+} (R^2 + i_C^2) + Pi_C^2 \sin \alpha}{i_C^2 \cos \beta - Rr}. \quad (3.4)$$

Зауважимо, що вираз (3.4) дає можливість судити про правильність обраного напрямку сили зчеплення. Наближення сили  $F$  до свого граничного значення (шуканої величини) супроводжується, звичайно, зростанням сили зчеплення. Тому у виразі (3.4), зведеному до вигляду

$$F = aF_{\zeta^+} + b,$$

коефіцієнт  $a$  повинний бути додатним. У протилежному випадку варто змінити напрямок  $\vec{F}_{\zeta^+}$  на зворотний і внести відповідні зміни в диференціальні рівняння (3.1)-(3.3).

Максимальне значення сили зчеплення:

$$F_{\zeta^+}^{\max} = f_{\zeta^+} N = f_{\zeta^+} (F \sin \beta + P \cos \alpha).$$

Підставляючи максимальне значення  $F_{\zeta^+}$  в рівняння (3.4) і розв'язуючи його відносно  $F$ , знайдемо максимальне значення цієї сили, при дії якої колесо котиться без ковзання:

$$F = \frac{P \left[ (R^2 + i_C^2) f_{\zeta^+} \cos \alpha + i_C^2 \sin \alpha \right]}{i_C^2 \cos \beta - Rr - (R^2 + i_C^2) f_{\zeta^+} \sin \beta}$$

$$F = \frac{200 \left[ (0,6^2 + 0,5^2) \cdot 0,1 \cdot 0,966 + 0,5^2 \cdot 0,259 \right] \cdot 9,81}{0,5^2 \cdot 0,866 - 0,6 \cdot 0,1 - (0,6^2 + 0,5^2) \cdot 0,1 \cdot 0,5} = 196 \cdot 9,81 = 1920 \text{ Н.}$$

Сила зчеплення

$$F_{\zeta^+}^{\max} = f_{\zeta^+} (F \sin \beta + P \cos \alpha) = 0,1 \cdot (200 \cdot 0,966 + 196 \cdot 0,5) \cdot 9,81 = 29 \cdot 9,81 = 284 \text{ Н.}$$

Диференціальне рівняння руху центра колеса

$$m\ddot{x}_C = F \cos \beta - P \sin \alpha - F_{\zeta^+}^{\max}$$

або

$$200\ddot{x}_C = 1920 \cdot 0,866 - 200 \cdot 9,81 \cdot 0,259 - 284,$$

звідки

$$\ddot{x}_C = 4,4 \text{ м/с}^2.$$

Двічі інтегруючи це диференціальне рівняння, знаходимо:

$$\dot{x}_C = 4,4t + C_1; \quad x_C = 2,2t^2 + C_1t + C_2.$$

Маючи на увазі, що при  $t = 0$   $x_{C0} = 0$  і  $\dot{x}_{C0} = 0$ , визначаємо:  $C_1 = 0$  і  $C_2 = 0$ .

Отже, рівняння руху центра колеса

$$x_C = 2,2t^2 \text{ (м)}.$$

## РОЗДІЛ 4. ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ ДАЛАМБЕРА ДО ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ В'ЯЗЕЙ

### Завдання для лабораторної роботи №12

Визначити реакції зовнішніх в'язей механічної системи:

а) у довільний момент часу – для варіантів 4, 5, 10, 12-18, 21-30 (рис. 4.1-4.4);

б) у момент часу  $t = t_1$  – для варіантів 1, 8, 9, 11, 20 при нульових початкових умовах;

в) у той момент часу, коли кут повороту  $\varphi = \varphi_1$  – для варіантів 2, 3, 6, 7;

г) у положенні, вказаному на рисунку для варіантів 15 і 19.

На схемах (рис. 4.1-4.4) площина  $xOy$  ( $xAy$ ) горизонтальна, площина  $yOz$  ( $yAz$ ) вертикальна. Необхідні для розв'язання дані наведено в табл. 4.1, у якій  $\omega$  – кутова швидкість,  $\varphi_0$  і  $\omega_0$  – значення кута повороту і кутової швидкості в початковий момент часу.

Т а б л и ц я 4.1

Номер варіанта (рис. 4.1-4.2)	$m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$l$ , см	$R$ , см	$M$ , Нм	$\omega$ , $c^{-1}$	$t_1$ , с	$\varphi_1$ , град	$\varphi_0$ , град	$\omega_0$ , $c^{-1}$	Примітка
1	20	–	60	–	10	–	10	–	0	0	Обертання йде в горизонтальній площині
2	25	–	50	–	–	–	–	60	0	0	
3	40	–	80	–	–	–	–	60	0	6,3	
4	20	–	80	–	–	–	–	–	–	–	
5	30	14,4	60	–	–	6	–	–	–	–	
6	40	–	–	30	–	–	–	30	0	0	
7	20	–	–	25	–	–	–	60	0	5,5	
8	50	–	–	30	4,0	–	5	–	0	0	
9	20	30	50	10	$20 - 0,1t$	–	200	–	–	0	При $t = t_1$ координати центрів мас шківів $C_1$ і $C_2$ , $x_{C1} = 0$ , $y_{C1} = -0,1$ см; $z_{C1} = a + b$ , $x_{C2} = 0,1$ см; $y_{C2} = 0$ , $z_{C2} = a$
10	20	5	25	–	–	–	–	–	–	–	
11	25	40	30	–	$5 - 0,1t$	–	50	–	–	0	При $t = t_1$ вісь стержня 1 паралельна $y$ , а вісь стержня 2 паралельна осі $x$ , $l_1 = 25$ см, $l_2 = 40$ см

Номер варіанта (рис. 4.2-4.4)	$m_1,$ <i>кг</i>	$m_2,$ <i>кг</i>	$l,$ <i>см</i>	$R,$ <i>см</i>	$M,$ <i>Нм</i>	$\omega,$ $c^{-1}$	$t_1,$ <i>с</i>	$\varphi_1,$ <i>град</i>	$\varphi_0,$ <i>град</i>	$\omega_0,$ $c^{-1}$	Примітка
12	30	—	40	—	—	10	—	—	—	—	
13	25	25	40	—	—	15	—	—	—	—	
14	20	20	40	—	—	—	—	—	—	—	
15	20	45	20	—	—	8	—	—	—	—	
16	80	20	—	10	65	—	—	—	—	—	
17	100	10	150	—	160	—	—	—	—	—	Радіус інерції ро- тора 2 двигуна 3 $i_x = 10$ см
18	30	—	40	—	—	12	—	—	—	—	
19	40	—	60	—	—	9	—	—	—	—	
20	40	—	—	30	3,0	—	4	—	0	2,0	
21	80	10	120	15	124	—	—	—	—	—	Радіус інерції ро- тора 2 двигуна 3 $i_x = 12$ см
22	100	40	—	20	216	—	—	—	—	—	
23	30	—	60	—	—	9	—	—	—	—	
24	60	20	50	—	—	—	—	—	—	—	
25	50	70	—	20	—	—	—	—	—	—	Радіус інерції шкі- ва 3 $i_x = 18$ см
26	80	200	150	25	—	—	—	—	—	—	Радіус інерції шкі- ва 3 $i_x = 22$ см
27	100	150	120	20	—	—	—	—	—	—	Радіус інерції шкі- ва 3 $i_x = 15$ см
28	80	40	—	—	—	—	—	—	—	—	$F = 1300$ Н
29	20	20	42	—	—	—	—	—	—	—	
30	50	—	60	—	—	12	—	—	—	—	
31	40	14,4	70	—	—	8	—	—	—	—	
32	60	—	—	40	5	—	5	—	0	0	
33	50	—	—	20	—	—	—	40	0	0	
34	35	25	50	—	—	25	—	—	—	—	
35	50	—	70	—	—	10	—	—	—	—	
36	90	50	—	10	200	—	—	—	—	—	
37	100	20	110	25	140	—	—	—	—	—	Радіус інерції ро- тора 2 двигуна 3 $i_x = 10$ см
38	40	—	30	—	—	15	—	—	—	—	
39	60	—	50	—	—	10	—	—	—	—	
40	90	50	—	—	—	—	—	—	—	—	$F = 1200$ Н

*Примітки.* 1. Тіла, що входять до складу механічної системи, для яких не вказано радіус інерції, розглядати як тонкі однорідні стержні (варіанти 1-5, 10, 11-15, 18, 19, 23, 24, 29, 30) або суцільні однорідні диски (варіанти 6-9, 16, 20, 22, 28); в варіанті 10 тіло 2 розглядати як матеріальну точку.

2. На схемах 1, 8, 9, 11, 16, 17, 20-22 вказано зовнішні моменти  $M$ .

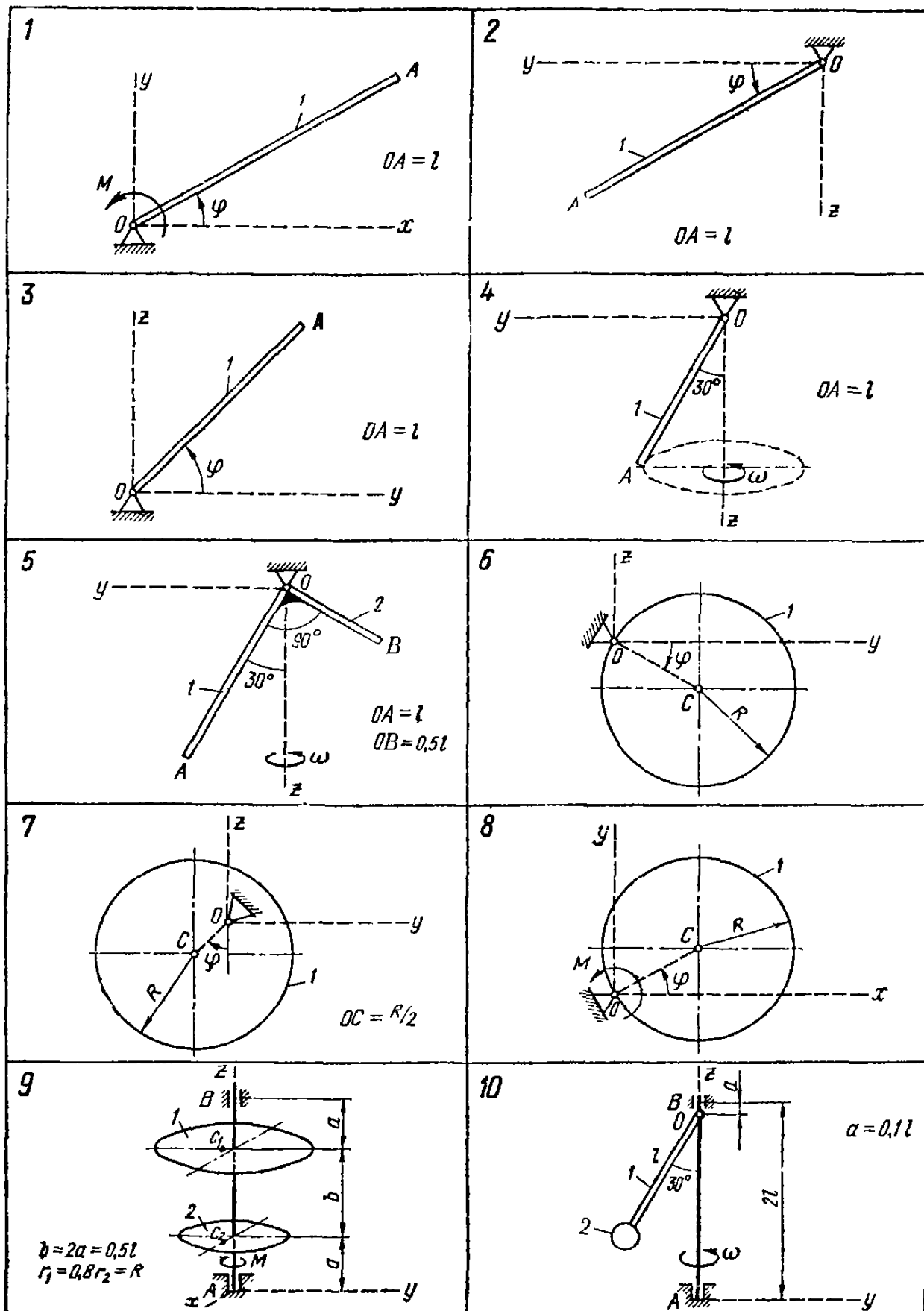


Рис. 4.1

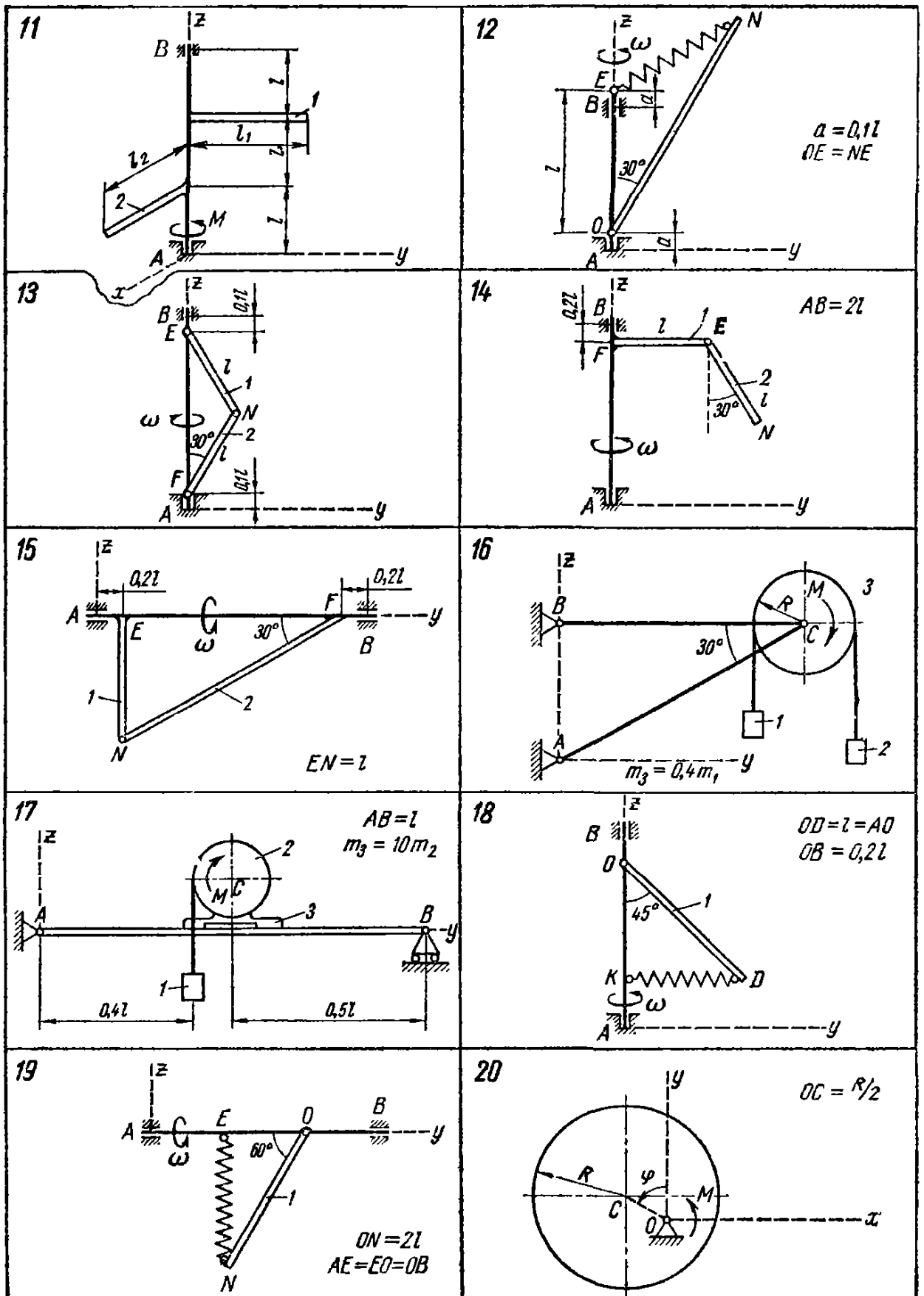


Рис. 4.2

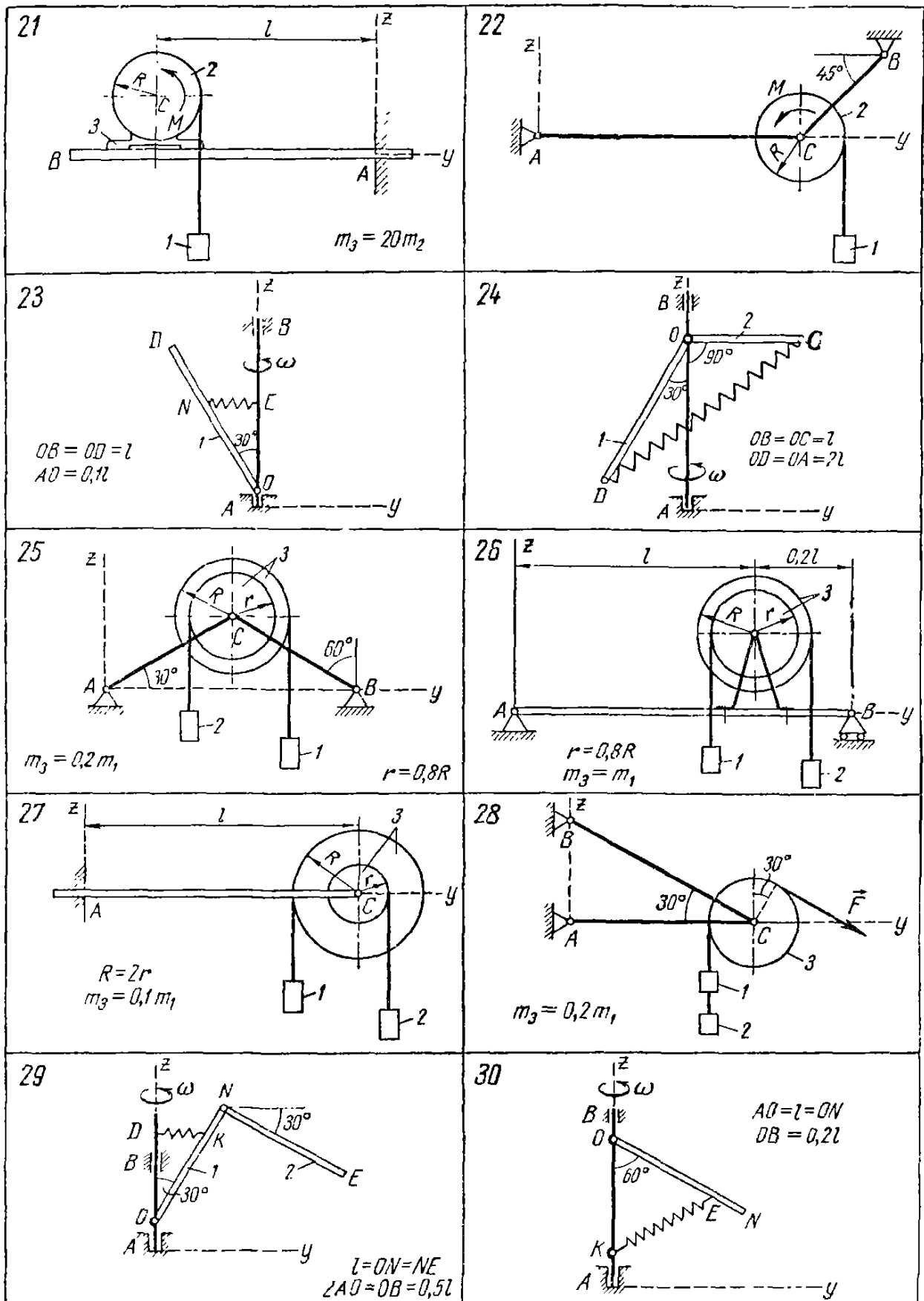


Рис. 4.3



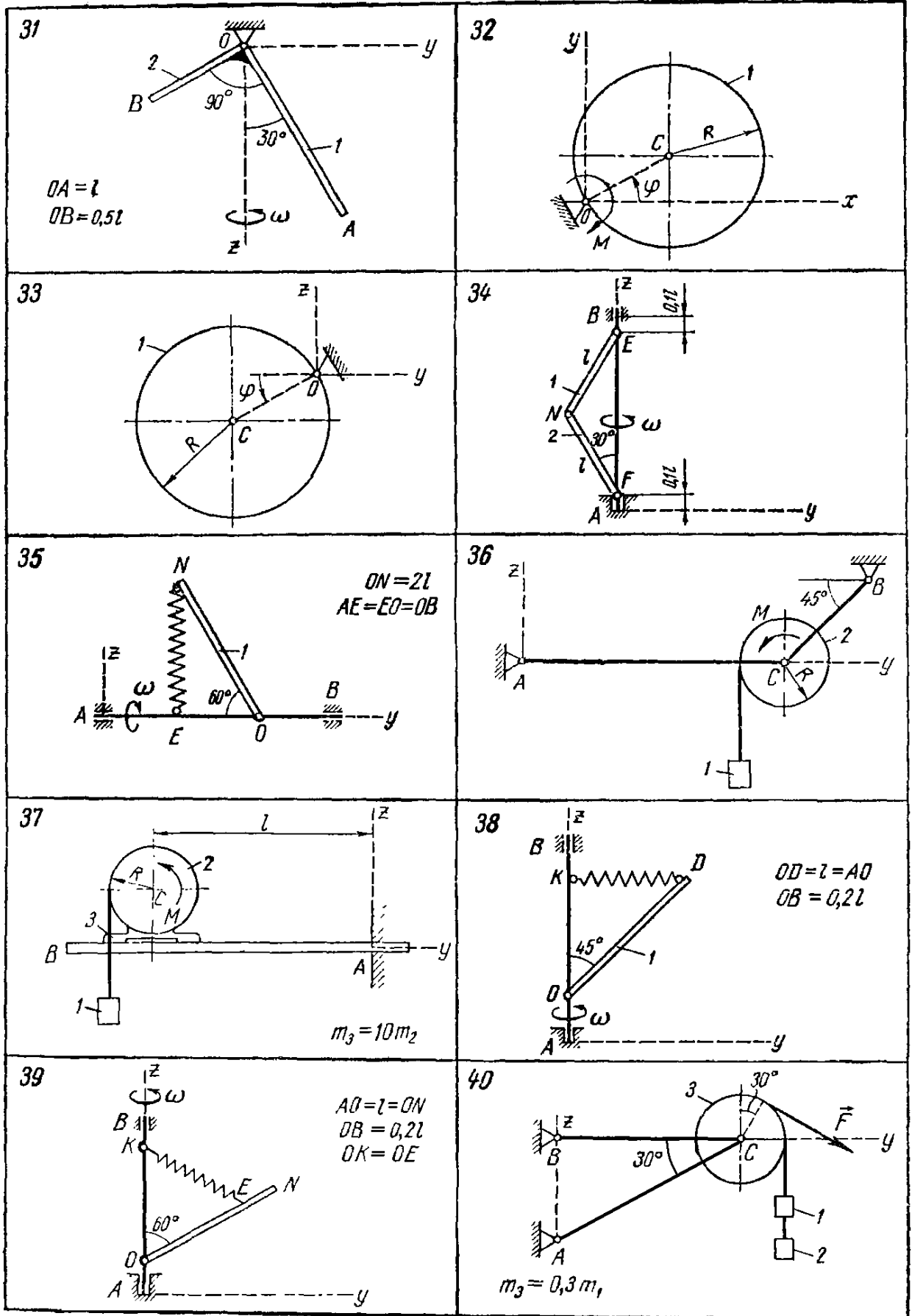


Рис. 4.4

## Приклад виконання завдання

Дано:  $m_1 = 3 \text{ êã}$ ;  $m_2 = 2 \text{ êã}$ ;  $m_3 = 5 \text{ êã}$ ;  $l_1 = 30 \text{ ñì}$ ;  $l_2 = 20 \text{ ñì}$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ;  
 $\omega = 120 \text{ c}^{-1} = \text{const}$ . Схема системи і необхідні розміри наведено на рис. 4.5,а.

Знайти реакції підп'ятника  $A$ , підшипника  $B$ , а також пружини  $DN$ . Поперечними розмірами стержнів 1, 2 і 3 та масою пружини знехтувати.

### Розв'язання

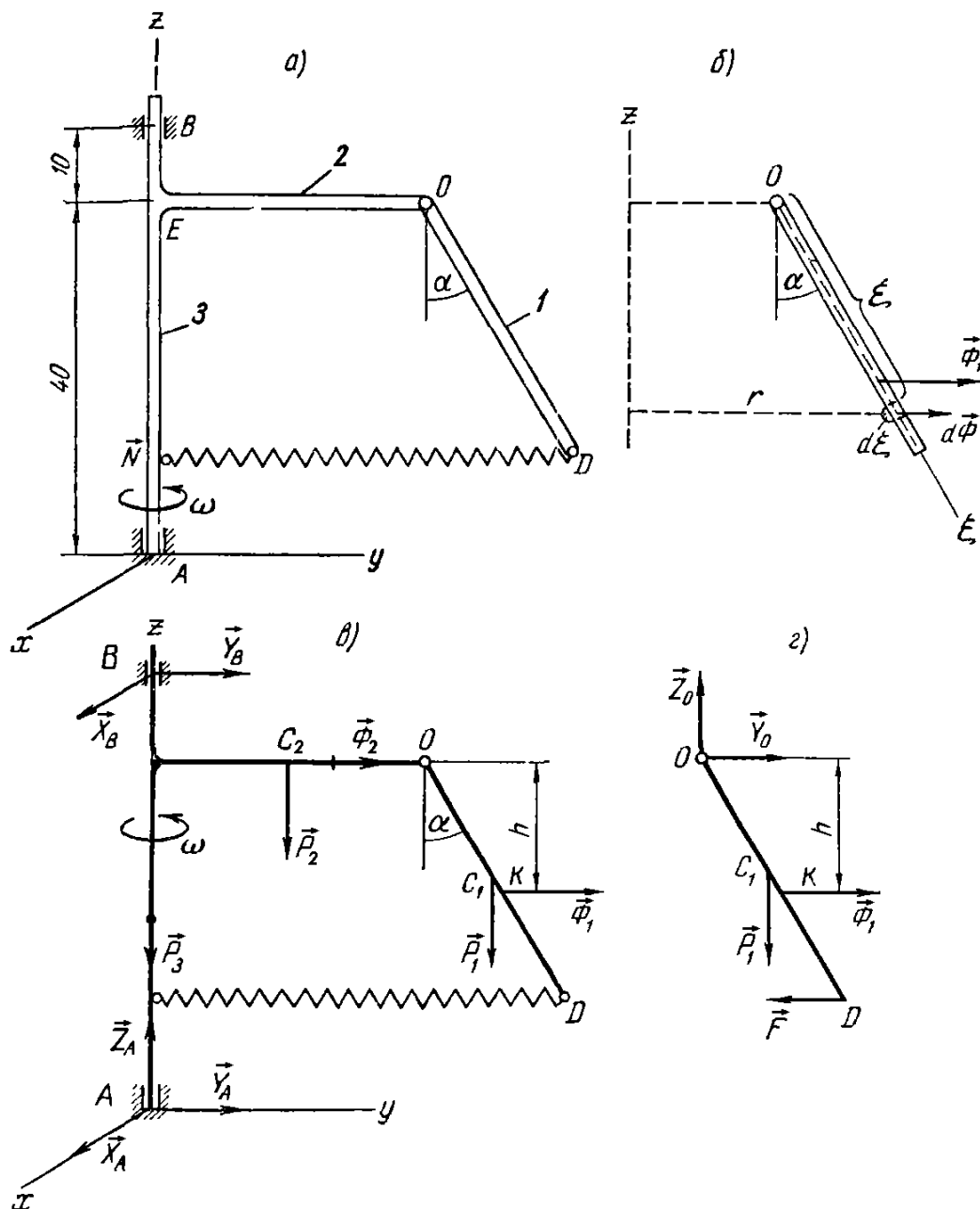


Рис. 4.5

Для визначення реакції в'язей скористаємося принципом Даламбера. Оскільки  $\omega = \text{const}$ , розглянемо тільки відцентрові сили інерції частинок кожного стержня. Відомо, що головний вектор сил інерції точок тіла при обертальному русі визначається за формулою

$$\vec{\Phi} = -m\vec{w}_C,$$

де  $m$  – маса тіла, а  $\vec{w}_C$  – прискорення центра мас тіла.

Рівнодійна сил інерції точок тіла дорівнює їхньому головному вектору. Тому для стержнів 1 і 2

$$\Phi_1 = m_1 w_{C1} = m_1 \omega^2 (0,5l_1 \sin \alpha + l_2);$$

$$\Phi_2 = m_2 w_{C2} = m_2 \omega^2 \cdot 0,5l_2.$$

Для визначення реакцій опор необхідно знати точку прикладання сили  $\vec{\Phi}_1$  (лінія дії сили  $\vec{\Phi}_2$  збігається з віссю стержня 2 і тому визначена). Оскільки сума моментів паралельних сил інерції точок стержня відносно точки  $O$  дорівнює моменту рівнодійної цих сил, то

$$\Phi_1 h = \int_0^{l_1} \xi \cos \alpha d\Phi,$$

де  $h$  – плече сили  $\vec{\Phi}_1$  відносно точки  $O$ ;  $d\Phi$  – сила інерції елемента стержня довжиною  $d\xi$ ,  $\xi$  – координата елемента стержня (мал. 4.5, б).

Використовуючи значення сили  $\vec{\Phi}_1$  і з огляду на те, що

$$d\Phi = (l_2 + \xi \sin \alpha) \omega^2 \gamma d\xi,$$

де  $\gamma$  – маса ділянки стержня одиничної довжини, одержуємо

$$m_1 \omega^2 (0,5l_1 \sin \alpha + l_2) h = \int_0^{l_1} (l_2 + \xi \sin \alpha) \omega^2 \gamma \xi \cos \alpha d\xi,$$

звідки після інтегрування

$$h = \frac{l_1 (l_2 + 2/3 \cdot l_1 \sin \alpha) \cos \alpha}{l_1 \sin \alpha + 2l_2} = \frac{30(20 + 2/3 \cdot 30 \cdot 0,5)}{30 \cdot 0,5 + 2 \cdot 20} \cos \alpha = 16,4 \cos \alpha.$$

Показуємо складові реакцій підп'ятника  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$  і підшипника  $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$  сили тяжіння стержнів  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$  і сили інерції  $\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2$  (мал. 4.5, б). Ці сили повинні задовольняти рівняння, що випливають із принципу Даламбера

$$\sum M_{ix} = 0; -Y_B \cdot 50 - \Phi_2 \cdot 40 - P_2 \cdot 10 - P_1 \cdot 27,5 - \Phi_1 (40 - 16,4 \cos \alpha) = 0 \Rightarrow Y_B = -8,47 \text{ êH};$$

$$\sum Y_i = 0; Y_A + Y_B + \Phi_1 + \Phi_2 = 0 \Rightarrow Y_A = -6,28 \text{ êH};$$

$$\sum Z_i = 0; Z_A - P_1 - P_2 - P_3 = 0; \Rightarrow Z_A = 0,098 \text{ êH}.$$

Оскільки розглянуті сили розташовані в площині  $yAz$ , то  $X_B = X_A = 0$ .

Для визначення реакції пружини  $DN$  складемо рівняння  $\sum M_{iO} = 0$ , розглядаючи сили, прикладені до стержня 1 (мал. 4.5, з)

$$-P_1 \cdot (l_1/2) \cdot \sin \alpha + \Phi_1 h - Fl_1 \cos \alpha = 0,$$

звідки  $F = 6,47 \text{ êH}$ .

Підписано до друку 24.11.07. Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк.  
Облік.-вид. арк. Друк офсетний. Зам. № Наклад 200 прим.

Видавництво УжНУ «Говерла»  
м. Ужгород, вул. Капітульна, 18.

*Свідоцтво про внесення до державного реєстру видавців, виготовників  
і розповсюджувачів видавничої продукції – Серія 3т №32*