

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

РЕЙТІЙ О.К.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

(методичний посібник з лабораторних робіт)

Частина II. Динаміка матеріальної точки

Ужгород – 2006

Рейтій О.К. Теоретична механіка (методичний посібник з лабораторних робіт). Частина II. Динаміка матеріальної точки. – Ужгород: Видавництво УжНУ „Говерла”, 2006. – 76 с.

Рецензент:

доктор фізико-математичних наук, професор,
декан фізичного факультету, завідувач кафедри теоретичної фізики
Лазур В.Ю.

Відповідальний за випуск:

доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики
Маринець В.В.

Дане видання є продовженням методичного посібника з лабораторних робіт з курсу „Теоретична механіка”, який читається на математичному факультеті УжНУ. В посібнику наведено завдання для чотирьох лабораторних робіт з динаміки матеріальної точки, кожне з яких містить по 40 варіантів. Як і в попередній частині, до кожної лабораторної роботи подано необхідні теоретичні відомості, а також приклад виконання типового завдання.

Посібник розрахований на студентів-математиків, також може бути корисний студентам технічних спеціальностей, аспірантам, викладачам та інженерно-технічним працівникам для поглиблення знань з теоретичної механіки.

*Рекомендовано до друку Вченою радою математичного факультету
(протокол № 3 від 24 листопада 2006 року)*

ЗМІСТ

Вступ.....	4
Розділ 1. Вступ до динаміки. Диференціальні рівняння динаміки точки	7
1.1. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки	7
1.2. Основні задачі динаміки точки	8
Завдання для лабораторної роботи №5.....	10
Приклад виконання завдання.....	14
Розділ 2. Коливальний рух матеріальної точки	18
2.1. Вільні коливання.....	18
2.2. Рух точки під дією в'язкого опору.....	21
2.3. Змушені коливання.....	24
2.4. Змушені коливання при наявності в'язкого опору.....	28
Завдання для лабораторної роботи №6.....	31
Приклад виконання завдання.....	43
Розділ 3. Основні теореми динаміки матеріальної точки.....	46
3.1. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки	46
3.2. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки	47
3.3. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки.....	49
3.4. Робота сили. Потужність.....	51
3.5. Метод кінетостатики (принцип Д'Аламбера)	53
Завдання для лабораторної роботи №7.....	54
Приклад виконання завдання.....	60
Розділ 4. Динаміка відносного руху матеріальної точки.....	63
4.1. Переносна і коріолісова сили інерції.....	63
4.2. Умови відносного спокою.....	65
Завдання для лабораторної роботи №8	66
Приклад виконання завдання.....	73
Література.....	76

ВСТУП

Динамікою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух матеріальних тіл з урахуванням сил, що діють на них. Тому *сила* вважається в динаміці основним, первинним поняттям; вона є векторною мірою взаємодії між матеріальними тілами.

У динаміці розглядаються дві основні задачі. Перша з них (*пряма задача динаміки*) полягає в тому, щоб за заданим механічним рухом і масою тіла визначити сили, під дією яких здійснюється рух. У другій задачі (*оберненій задачі динаміки*) навпаки – за заданими силами, масою і початковими умовами потрібно визначити рух, спричинений цими силами.

Зазвичай динаміку поділяють на динаміку матеріальної точки, динаміку матеріальної системи і динаміку твердого тіла. В даному посібнику розглядається перша з них.

В основі динаміки лежать закони, вперше у найбільш повному і завершеному вигляді викладені Ісааком Ньютоном в книзі „Математичні начала натуральної філософії” (1687 р.). Їх можна сформулювати наступним чином.

Перший закон Ньютона (принцип інерції Галілея-Ньютона). *Існують такі системи відліку, відносно яких ізольована матеріальна точка знаходиться в стані спокою або рухається рівномірно і прямолінійно.* Такі системи відліку називаються *інерціальними*. Системи відліку, в яких принцип інерції не виконується, називаються *неінерціальними*.

Ізольованою називають матеріальну точку, яка не взаємодіє з іншими тілами, або коли сили, що діють на точку, взаємно компенсуються. Властивість ізольованої матеріальної точки зберігати стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху називається *інертністю*.

Слід відмітити, що всі закони Ньютона справедливі тільки в інерціальних системах відліку. Однак, звідси зовсім не випливає, що в динаміці вивчаються рухи, які відбуваються тільки в інерціальних системах. В розділі 4 ми будемо розглядати рух в неінерціальних системах, однак таких, рух яких відносно інерціальної системи задано (відносний рух).

Із закону інерції випливає, що спонтанна зміна руху матеріальної точки неможлива. Рух точки може змінитися лише внаслідок її взаємодії з іншими тілами, причому мірою цієї взаємодії, як вже відмічалось, є сила. Зв'язок між зміною руху і силою дає наступний закон.

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки). *Швидкість зміни кількості руху матеріальної точки дорівнює силі, що діє на цю точку:*

$$\frac{d(m\dot{\mathbf{v}})}{dt} = \mathbf{F}, \quad (\text{B1})$$

де $m\dot{\mathbf{v}}$ – кількість руху матеріальної точки, m – маса матеріальної точки, яка є мірою її інертності та гравітаційної взаємодії, \mathbf{F} – сила, що діє на точку.

У класичній механіці розглядають рух зі швидкостями, малими порівняно зі швидкістю світла c . При русі з великими (порядку c) швидкостями, згідно спеціальної теорії відносності А. Ейнштейна, маса залежить від швидкості руху: $m = m_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$, де m_0 – маса спокою тіла, v – швидкість руху.

При малих швидкостях ($v = c$) $m \approx m_0$, тому для тіл постійного складу ($m_0 = \text{const}$) основний закон динаміки має добре відомий з курсу шкільної фізики вигляд

$$m\dot{w} = \dot{F}, \quad (\text{B2})$$

де $\dot{w} = dv/dt$ – прискорення точки. Зазначимо, що таке формулювання другого закону Ньютона непридатне у динаміці тіла змінної маси.

Третій закон Ньютона (закон рівності дії і протидії). *Сили взаємодії двох матеріальних точок (дія і протидія) рівні за величиною і напрямлені в протилежні боки по прямій, що з'єднує ці точки:*

$$\dot{F}_{21} = -\dot{F}_{12}, \quad (\text{B3})$$

де \dot{F}_{21} – сила, що діє на першу точку з боку другої, а сила \dot{F}_{12} діє на другу точку з боку першої.

Четвертий закон Ньютона (закон незалежності дії сил або принцип суперпозиції). *Якщо на точку діють кілька сил, то прискорення точки є сумою прискорень, які б мала точка під дією кожної з цих сил окремо.*

Це означає, що при дії на матеріальну точку сил $\dot{F}_1, \dot{F}_2, \dots, \dot{F}_n$, кожна з яких надає точці відповідно прискорення $\dot{w}_1, \dot{w}_2, \dots, \dot{w}_n$, прискорення матеріальної точки буде

$$\dot{w} = \dot{w}_1 + \dot{w}_2 + \dots + \dot{w}_n = (\dot{F}_1 + \dot{F}_2 + \dots + \dot{F}_n) / m.$$

Останню рівність можна переписати у вигляді

$$m\dot{w} = \dot{F},$$

де $\dot{F} = \sum_{k=1}^n \dot{F}_k$ – рівнодійна всіх сил, прикладених до матеріальної точки.

Таким чином, рух матеріальної точки під дією сил $\dot{F}_1, \dot{F}_2, \dots, \dot{F}_n$ буде таким же, як при дії однієї сили, рівної їх геометричній сумі (рівнодійної).

П'ятий закон Ньютона (закон всесвітнього тяжіння). *Два тіла притягуються із силою, що прямо пропорційна добутку їх мас і обернено пропорційна квадрату відстані між ними:*

$$\dot{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\dot{r}}{r}, \quad (\text{B4})$$

де G – гравітаційна стала, $m_{1,2}$ – маси тіл, r – відстань між тілами.

Якщо на рух точки не накладено жодних обмежень, то вона називається *вільною*, а її рух – *вільним рухом*. Матеріальну точку називають *невільною*, якщо вона не може займати довільного положення в просторі. Невільна точка при дії на неї будь-яких сил здійснює рух по строго фіксованій

лінії, поверхні або знаходиться увесь час в строго фіксованій частині простору. Умови, що обмежують свободу руху матеріальної точки, називаються *в'язями*. Сили, з якими в'язі діють на дане тіло називаються *реакціями в'язей*.

В механіці приймають наступне положення, яке має назву *принципу звільнення від в'язей*: *будь-яке невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо дію в'язей замінити їх реакціями, що прикладені до даного тіла.*

Якщо позначити через \mathbf{F} рівнодійну всіх активних сил, прикладених до точки, а через \mathbf{N} – рівнодійну всіх реакцій в'язей, то основне рівняння динаміки матиме вигляд

$$m\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{F} + \mathbf{N}. \quad (\text{B5})$$

Слід мати на увазі, що реакція в'язі невідома і може виникнути задача про визначення цієї сили.

Незалежно від фактичної реалізації тих чи інших в'язей, накладених на матеріальну точку, вони можуть бути задані аналітично *за допомогою рівнянь в'язей*. У загальному випадку ці рівняння встановлюють зв'язки між координатами точки, проекціями швидкості і часом.

В'язі поділяються на *утримуючі* і *неутримуючі*. В'язь називається *утримуючою*, якщо вона обмежує рух як у певному напрямі, так і в протилежному; вона виражається рівнянням

$$f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0. \quad (\text{B6})$$

В'язь називають *неутримуючою*, якщо вона обмежує рух в певному напрямі, але не обмежує в протилежному. Така в'язь визначається нерівністю (строгою чи нестрогою), наприклад,

$$f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \leq 0. \quad (\text{B7})$$

Якщо в рівняння в'язі явно час не входить, то в'язь називають *стаціонарною* (склерономною):

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0, \quad f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \leq 0,$$

в протилежному випадку в'язь називається *нестационарною* (реономною) (див., наприклад, (B6), (B7)).

Розрізняють також в'язі *геометричні* і *кінематичні*. *Геометричні* в'язі накладають обмеження тільки на координати точки: $f(t, x, y, z) = 0$, $f(t, x, y, z) \leq 0$, *кінематичні* – на її швидкість (див. (B6), (B7)).

Голономними (інтегрованими) називаються в'язі, рівняння яких можуть бути зінтегровані за часом. *Неголономними*, або *неінтегрованими*, називаються в'язі, у диференціальні рівняння яких входять похідні за часом або диференціали координат так, що для них не існує інтегрувального множника.

Для точки *ідеальними* в'язями будемо називати в'язі без тертя, реакції яких не мають дотичних складових¹⁾.

¹⁾ Більш повне означення ідеальних в'язей дається за допомогою віртуальних переміщень (див., наприклад, [2], [7]).

РОЗДІЛ 1. ВСТУП ДО ДИНАМІКИ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ ТОЧКИ

1.1. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Положення вільної ($\dot{N} = 0$) матеріальної точки M в інерціальній системі відліку будемо визначати її радіусом-вектором $\dot{\mathbf{r}}$. Сила $\dot{\mathbf{F}}$, що діє на точку, може залежати від положення точки, тобто від радіуса-вектора $\dot{\mathbf{r}}$ (наприклад, сила тяжіння), швидкості $\dot{\mathbf{v}} = d\dot{\mathbf{r}}/dt$ точки (наприклад, сила опору) і часу t . Отже, у загальному випадку $\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{F}}(t, \dot{\mathbf{r}}, d\dot{\mathbf{r}}/dt)$ і основне рівняння динаміки точки (B2) можна записати в наступній формі:

$$m \frac{d^2 \dot{\mathbf{r}}}{dt^2} = \dot{\mathbf{F}} \left(t, \dot{\mathbf{r}}, \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} \right). \quad (1.1)$$

Цю рівність, яка являє собою фізичний закон, що встановлює зв'язок між масою точки, її прискоренням і діючою на точку силою, можна розглядати одночасно як диференціальне рівняння, у якому радіус-вектор $\dot{\mathbf{r}}$ є функцією, а час t – аргументом. Це рівняння називається *диференціальним (динамічним) рівнянням руху матеріальної точки у векторній формі*.

Диференціальне рівняння у векторній формі, звичайно, еквівалентне трьом скалярним рівнянням. Залежно від вибору осей координат, на які проектується основне рівняння динаміки (1.1), можна одержати різні форми скалярних диференціальних рівнянь руху матеріальної точки.

Так, наприклад, якщо спроектувати обидві частини рівняння (1.1) на нерухомі осі декартових координат, то будемо мати

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m \ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m \ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \end{aligned} \quad (1.2)$$

де $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – проекції прискорення точки на координатні осі, F_x, F_y, F_z – проекції сили, що діє на точку, на ті ж осі. Рівняння (1.2) називаються *динамічними рівняннями руху матеріальної точки в координатній формі*.

Якщо користуватися описом руху в натуральній формі, то потрібно спроектувати основне рівняння динаміки (1.1) на осі натурального тригранника; у результаті одержимо *динамічні рівняннями руху матеріальної точки в натуральній формі*

$$m \ddot{s} = F_t(t, s, \dot{s}), \quad \frac{m \dot{s}^2}{r} = F_n(t, s, \dot{s}), \quad 0 = F_b, \quad (1.3)$$

де F_t, F_n, F_b – проекції сили на дотичну, головну нормаль і бінормаль, r – радіус кривизни траєкторії в даній точці. З останнього рівняння впли-

ває, що сила \dot{F} , під дією якої рухається матеріальна точка, лежить у стичній до траєкторії точки площині.

У випадку плоского руху точки, розглядуваного в полярних координатах r, j , маємо

$$m(\ddot{r} - r\dot{j}^2) = F_r(t, r, j, \dot{r}, \dot{j}), \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{j}) = F_j(t, r, j, \dot{r}, \dot{j}),$$

де F_r і F_j – проекції сили на напрямок радіуса-вектора й перпендикулярний до нього трансверсальний напрямок (у бік збільшення полярного кута j).

Ми обмежилися найбільш уживаними випадками; аналогічно можна одержати диференціальні рівняння руху матеріальної точки в інших системах криволінійних координат (циліндричній, сферичній тощо).

1.2. Основні задачі динаміки точки

При дослідженні руху матеріальної точки зустрічаються дві основні задачі динаміки (пряма і обернена).

Перша (пряма) основна задача динаміки. Визначити рівнодійну сил \dot{F} , що діють на матеріальну точку, якщо задано її масу і кінематичні рівняння руху.

Ця задача розв'язується наступним чином.

1. Якщо рух матеріальної точки масою m задано координатним способом

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

то, двічі диференціюючи ці співвідношення за часом і підставляючи їх в рівності (1.2), визначимо проекції сили

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad F_z = m \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Отже, модуль рівнодійної сили

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

Напрямок сили визначається напрямними косинусами

$$\cos(\dot{F}, Ox) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\dot{F}, Oy) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(\dot{F}, Oz) = \frac{F_z}{F}.$$

2. Якщо рух матеріальної точки масою m задано в натуральній формі, то за рівняннями (1.3) знайдемо проекції рівнодійної сил, що діють на матеріальну точку, на натуральні осі. Модуль сили і напрям визначимо за формулами

$$F = \sqrt{F_t^2 + F_n^2}, \quad \operatorname{tg} a = \frac{F_t}{F_n} = \frac{w_t}{w_n},$$

де a – кут між силою \dot{F} і нормальною складовою сили \dot{F}_n .

Друга (обернена) основна задача динаміки. Визначити кінематичні рівняння руху вільної матеріальної точки, якщо задано її масу m , прикладену до неї силу і початкові умови руху. Розв'язання цієї задачі зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки. Знайдемо проекції сили на осі координат, тобто F_x, F_y, F_z , потім зінтегруємо систему диференціальних рівнянь (1.2). Розв'язком цієї системи будуть три функції:

$$\begin{aligned}x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\z &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6).\end{aligned}\tag{1.4}$$

Щоб розв'язати конкретну динамічну задачу, потрібно задати початкові умови руху матеріальної точки для визначення сталих інтегрування $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$. Під початковими умовами слід розуміти значення координат точки і проекції її швидкості в початковий момент часу $t = t_0$, тобто

$$\begin{aligned}x(t_0) &= x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0, \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \quad \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Аналогічно початкові умови руху точки можна задати у векторній $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$ і в натуральній $s(t_0) = s_0, \dot{s}(t_0) = \dot{s}_0$ формах. Диференціюючи (1.4) за часом, знайдемо ще три співвідношення

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),\end{aligned}\tag{1.6}$$

що мають сталі інтегрування. Якщо в (1.4) і в (1.6) підставити початкові умови руху точки (1.5), то одержимо систему шести алгебраїчних рівнянь з шістьма невідомими сталими інтегрування, розв'язуючи яку, знайдемо

$$C_i = C_i(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \quad i = 1, 2, \dots, 6.\tag{1.7}$$

Нарешті, підставивши знайдені значення сталих інтегрування у співвідношення (1.4), одержимо закон руху точки

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).\tag{1.8}$$

Розглядаючи рух у натуральній формі для розв'язання оберненої задачі динаміки застосовують рівняння (1.3). Початковими умовами в цьому випадку є значення дугової координати при $t = t_0$ $s(t_0) = s_0$ і початкової швидкості $v_t(t_0) = \dot{s}_0$.

Загальний розв'язок першого з рівнянь (1.3) має вигляд $s = s(t, C_1, C_2)$. На основі початкових умов руху знаходимо сталі інтегрування $C_i = C_i(t_0, s_0, \dot{s}_0), i = 1, 2$.

Обчислену таким чином дугову координату $s = s(t)$ підставимо в друге рівняння (1.3) і одержимо значення радіуса кривизни r траєкторії рухомої точки.

Завдання для лабораторної роботи №5

Варіанти 1–7 (рис. 1.1, схема 1)

Тіло рухається із точки A по ділянці AB (довжиною l) похилої площини, яка утворює з горизонтом кут a , протягом t с. Початкова швидкість тіла v_A . Коефіцієнт тертя ковзання тіла по площині дорівнює f .

В точці B тіло залишає площину зі швидкістю v_B і попадає зі швидкістю v_C в точку C площини BD , нахиленої під кутом b до горизонту, перебуваючи в повітрі T с.

При розв'язанні задачі тіло прийняти за матеріальну точку; опір повітря не враховувати.

Варіант 1. Дано: $a = 30^\circ$; $v_A = 0$; $f = 0,2$; $l = 10$ м; $b = 60^\circ$.

Визначити t і h .

Варіант 2. Дано: $a = 15^\circ$; $v_A = 2$ м/с; $f = 0,2$; $h = 4$ м; $b = 45^\circ$.

Визначити l і рівняння траєкторії точки на ділянці BC .

Варіант 3. Дано: $a = 30^\circ$; $v_A = 2,5$ м/с; $f \neq 0$; $l = 8$ м; $d = 10$ м; $b = 60^\circ$.

Визначити t і v_B .

Варіант 4. Дано: $v_A = 0$; $t = 2$ с; $f = 0$; $l = 9,8$ м; $b = 60^\circ$.

Визначити a і T .

Варіант 5. Дано: $a = 30^\circ$; $v_A = 0$; $l = 9,8$ м; $t = 3$ с; $b = 45^\circ$.

Визначити f і v_C .

Варіант 6. Дано: $v_A = 4$ м/с; $t = 3$ с; $f = 0,1$; $a = 30^\circ$; $b = 60^\circ$.

Визначити l і T .

Варіант 7. Дано: $a = 30^\circ$; $v_A = 4$; $l = 9,8$ м; $f = 0,1$ с; $b = 45^\circ$.

Визначити t і v_C .

Варіанти 8–14 (рис. 1.1, схема 2)

Лижник підходить до точки A ділянки трампліну AB , що має довжину l і нахилений під кутом a до горизонту, зі швидкістю v_A . Коефіцієнт тертя ковзання лиж на ділянці AB рівний f . Лижник від A до B рухається t с; в точці B зі швидкістю v_B він покидає трамплін. Через T с лижник приземляється зі швидкістю v_C в точці C гори, нахиленої під кутом b до горизонту.

При розв'язанні задачі прийняти лижника за матеріальну точку і не враховувати опір повітря.

Варіант 8. Дано: $a = 20^\circ$; $f = 0,1$; $t = 0,2$ с; $h = 40$ м; $b = 30^\circ$.

Визначити l і v_C .

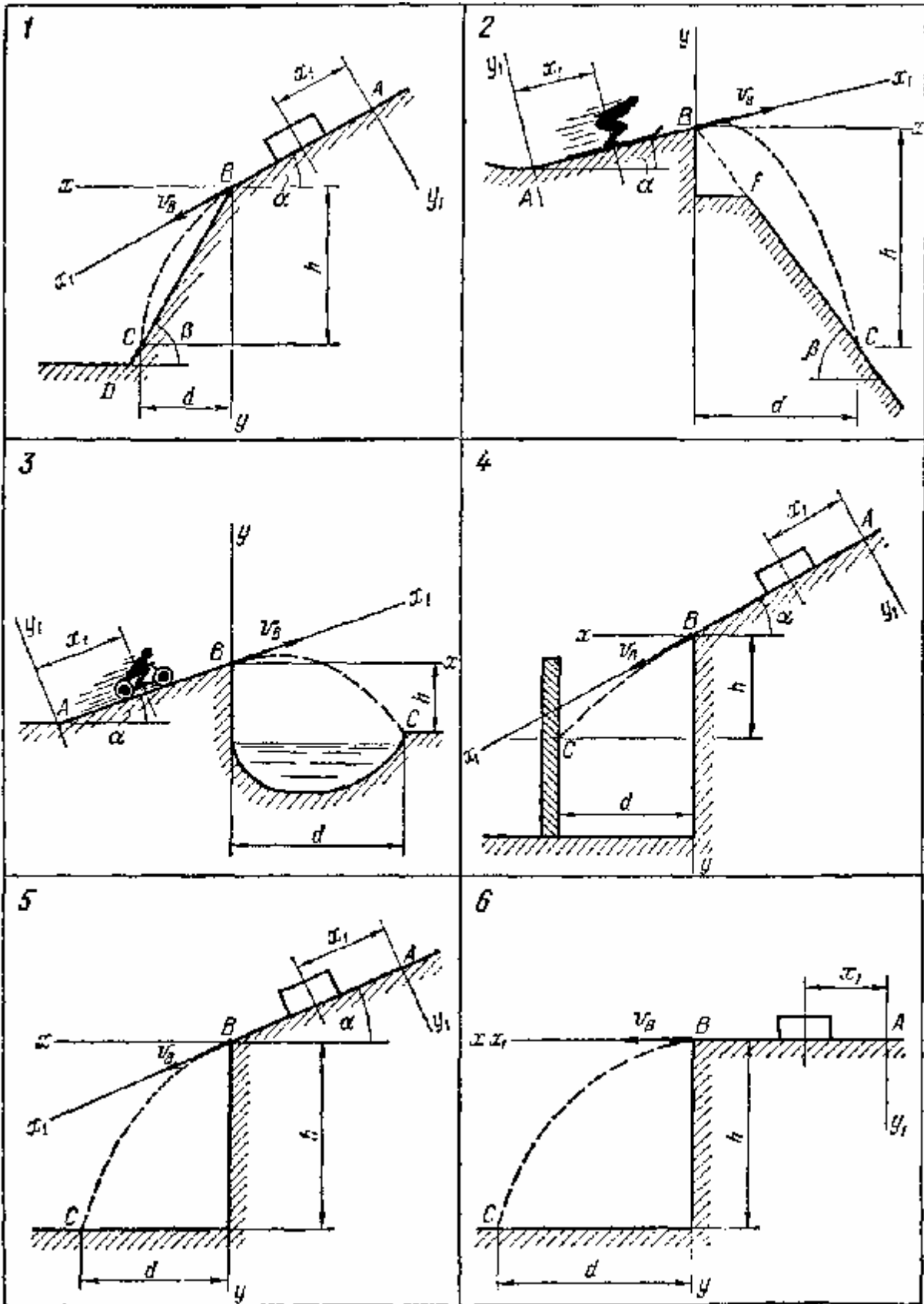


Рис. 1.1

Варіант 9. Дано: $a = 15^\circ$; $f = 0,1$; $v_A = 16$ м/с; $l = 5$ м; $b = 45^\circ$.

Визначити v_B і T .

Варіант 10. Дано: $v_A = 21$ м/с; $f = 0$; $t = 0,3$ с; $v_B = 20$ м/с; $b = 60^\circ$.

Визначити a і d .

Варіант 11. Дано: $a = 15^\circ$; $t = 0,3$ с; $f = 0,1$; $h = 30\sqrt{2}$ м; $b = 45^\circ$.

Визначити v_A і v_B .

Варіант 12. Дано: $a = 15^\circ$; $f = 0$; $v_A = 12$ м/с; $d = 50$ м; $b = 60^\circ$.

Визначити t і рівняння траєкторії лижника на ділянці BC .

Варіант 13. Дано: $a = 30^\circ$; $f = 0,1$; $v_A = 16$ м/с; $l = 5$ м; $b = 45^\circ$.

Визначити v_C і t .

Варіант 14. Дано: $d = 20$ м; $f = 0$; $a = 30^\circ$ с; $v_B = 20$ м/с; $b = 60^\circ$.

Визначити v_A і t .

Варіанти 15–21 (рис. 1.1, схема 3)

Маючи в точці A швидкість v_A , мотоцикл піднімається t с по ділянці AB довжиною l , яка утворює з горизонтом кут a . При постійній на всій ділянці AB рушійній силі $F_{руш}$ мотоцикл в точці B набуває швидкості v_B і перелітає через рів шириною d , знаходячись в повітрі T с і приземляючись в точці C зі швидкістю v_C . Маса мотоцикла з мотоциклістом рівна m .

При розв'язанні задачі прийняти мотоцикл з мотоциклістом за матеріальну точку і не враховувати сил опору руху.

Варіант 15. Дано: $a = 30^\circ$; $F_{руш} \neq 0$; $l = 40$ м; $v_A = 0$; $v_B = 4,5$ м/с; $d = 3$ м.

Визначити t і h .

Варіант 16. Дано: $a = 30^\circ$; $F_{руш} = 0$; $l = 40$ м; $v_B = 20,5$ м/с; $h = 1,5$ м.

Визначити v_A і d .

Варіант 17. Дано: $a = 30^\circ$; $m = 400$ кг; $v_A = 0$; $t = 20$ с; $d = 3$ м; $h = 1,5$ м.

Визначити $F_{руш}$ і l .

Варіант 18. Дано: $a = 30^\circ$; $m = 400$ кг; $F_{руш} = 2,2$ кН; $v_A = 0$; $l = 40$ м; $d = 5$ м.

Визначити v_B і v_C .

Варіант 19. Дано: $a = 30^\circ$; $v_A = 0$; $F_{руш} = 2$ кН; $l = 50$ м; $d = 4$ м; $h = 2$ м.

Визначити T і m .

Варіант 20. Дано: $a = 15^\circ$; $m = 400$ кг; $F_{руш} = 1$ кН; $v_A = 20$ м/с; $v_B = 20,5$ м/с; $h = 3$ м.

Визначити l і d .

Варіант 21. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $m = 400$ кг; $v_A = 0$; $v_B = 20$ м/с; $l = 40$ м; $d = 5$ м.

Визначити $F_{\text{пуш}}$ і рівняння траєкторії мотоцикліста на ділянці BC .

Варіанти 22–28 (рис. 1.1, схема 4)

Камінь сковзає протягом t с по ділянці AB схилу довжиною l , що утворює з горизонтом кут α . Його початкова швидкість v_A . Коефіцієнт тертя ковзання каменя по схилу рівний f . Маючи в точці B швидкість v_B , камінь через T с ударяється в точці C у вертикальну захисну стіну.

При розв'язанні задачі прийняти камінь за матеріальну точку і не враховувати опір повітря.

Варіант 22. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 1$ м/с; $l = 3$ м; $f = 0,2$; $d = 2,5$ м.

Визначити T і h .

Варіант 23. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $l = 6$ м; $v_B = 2v_A$; $t = 1$ с; $h = 6$ м.

Визначити d і f .

Варіант 24. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $l = 2$ м; $f = 0,1$; $d = 3$ м.

Визначити t і h .

Варіант 25. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $l = 3$ м; $v_B = 3$ м/с; $f \neq 0$; $t = 1,5$ с; $d = 2$ м.

Визначити v_A і h .

Варіант 26. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $v_A = 0$; $f = 0,3$; $d = 2$ м; $h = 4$ м.

Визначити t і l .

Варіант 27. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $T = 1$ с; $l = 3$ м; $f = 0,2$; $h = 8$ м.

Визначити v_A і d .

Варіант 28. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $v_A = 1$ м/с; $v_B = 4$ м/с; $f \neq 0$; $t = 1,5$ с; $d = 2$ м.

Визначити l і h .

Варіанти 29–34 (рис. 1.1, схема 5)

Тіло рухається з точки A по ділянці AB (довжиною l) похилої площини, яка утворює з горизонтом кут α . Його початкова швидкість v_A . Коефіцієнт тертя ковзання рівний f . Через t с тіло в точці B зі швидкістю v_B покидає похилу площину і падає в точку C горизонтальної площини зі швидкістю v_C ; при цьому воно перебуває в повітрі T с.

При розв'язанні задачі прийняти тіло за матеріальну точку і не враховувати опір повітря.

Варіант 29. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,1$; $v_A = 1$ м/с; $t = 1,5$ с; $h = 10$ м.

Визначити v_B і d .

Варіант 30. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $v_A = 0$; $l = 10$ м; $t = 2$ с.

Визначити f і рівняння траєкторії на ділянці BC .

Варіант 31. Дано: $f = 0$; $v_A = 0$; $l = 9,81$ м; $t = 2$ с; $h = 20$ м.

Визначити α і T .

Варіант 32. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $f = 0,2$; $l = 10$ м; $d = 12$ м.

Визначити t і h .

Варіант 33. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $f = 0,2$; $l = 6$ м; $h = 4,5$ м.

Визначити t і v_C .

Варіант 34. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $f = 0,1$; $l = 9,81$ м; $t = 1$ с; $h = 20$ м.

Визначити v_A і T .

Варіанти 35–40 (рис. 1.1, схема б)

Маючи в точці A швидкість v_A , тіло рухається по горизонтальній ділянці AB довжиною l протягом t с. Коефіцієнт тертя ковзання тіла по площині рівний f . Зі швидкістю v_B тіло в точці B покидає площину і попадає в точку C зі швидкістю v_C , перебуваючи в повітрі T с.

При розв'язанні задачі прийняти тіло за матеріальну точку; опір повітря не враховувати.

Варіант 35. Дано: $v_A = 7$ м/с; $f = 0,2$; $l = 8$ м; $h = 20$ м.

Визначити d і v_C .

Варіант 36. Дано: $v_A = 4$ м/с; $f = 0,1$; $t = 2$ с; $d = 2$ м.

Визначити v_B і h .

Варіант 37. Дано: $v_B = 3$ м/с; $f = 0,3$; $l = 3$ м; $h = 5$ м.

Визначити v_A і T .

Варіант 38. Дано: $v_A = 3$ м/с; $v_B = 1$ м/с; $l = 2,5$ м; $h = 20$ м.

Визначити f і d .

Варіант 39. Дано: $f = 0,25$; $l = 4$ м; $d = 3$ м; $h = 5$ м.

Визначити t і v_A .

Варіант 40. Дано: $v_A = 2$ м/с; $v_B = 6$ м/с; $h = 8$ м; $d = 6$ м.

Визначити f і t .

Приклад виконання завдання (рис. 1.2)

В залізничних скельних виїмках для захисту кюветів від потрапляння в них зі схилів кам'яних осипів влаштовується "полиця" CD . Враховуючи можливість руху каменя з найвищої точки A схилу і приймаючи при цьому його початкову швидкість v_A рівною нулю, визначити мінімальну ширину

полиці b і швидкість v_C , з якою камінь падає на неї. По ділянці AB схилу, довжиною l , що утворює кут α з горизонтом, камінь рухається t с.

При розв'язанні задачі вважати коефіцієнт тертя ковзання f каменя на ділянці AB сталим, а опором повітря знехтувати.

Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 60^\circ$; $l = 4$ м; $t = 1$ с; $f \neq 0$; $h = 5$ м; $b = 75^\circ$.

Визначити: b і v_C .

Розв'язання

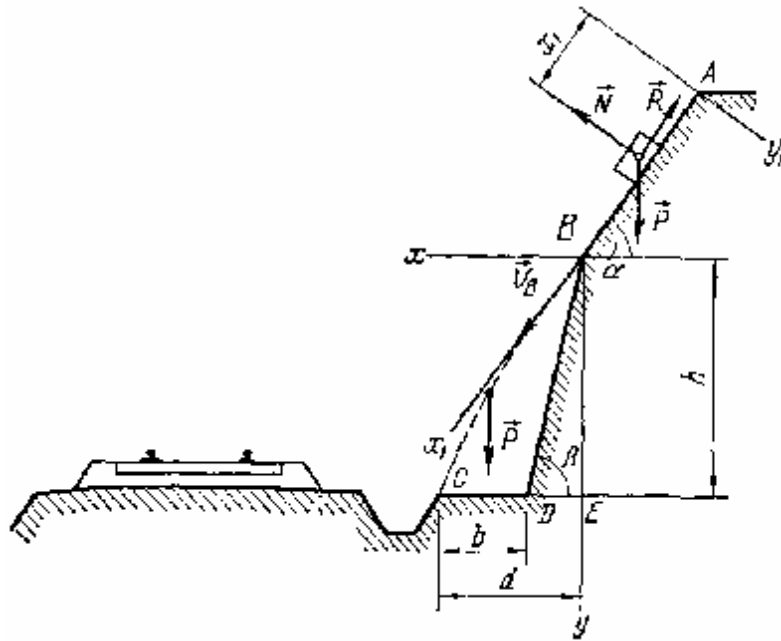


Рис. 1.2

Розглянемо рух каменя на ділянці AB . Приймаючи камінь за матеріальну точку, покажемо (див. рис. 1.2) сили, які діють на нього: вага \vec{P} , нормальна реакція опори \vec{N} і сила тертя ковзання \vec{R} . Складемо диференціальне рівняння руху каменя на ділянці AB :

$$m\ddot{x}_1 = P \sin \alpha - R.$$

Сила тертя

$$R = fN, \quad N = P \cos \alpha.$$

Таким чином,

$$m\ddot{x}_1 = P \sin \alpha - fP \cos \alpha$$

або

$$\ddot{x}_1 = g \sin \alpha - fg \cos \alpha.$$

Двічі зінтегрувавши диференціальне рівняння, отримуємо:

$$\dot{x}_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + C_1,$$

$$x_1 = \frac{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{2}t^2 + C_1t + C_2.$$

Для визначення сталих інтегрування скористаємось початковими умовами задачі: при $t = 0$ $x_{10} = 0$ і $\dot{x}_{10} = 0$. Складши рівняння, отримані при інтегруванні, для $t = 0$

$$\dot{x}_{10} = C_1, \quad x_{10} = C_2,$$

знайдемо сталі:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= g(\sin a - f \cos a)t; \\ x_1 &= \frac{g(\sin a - f \cos a)}{2}t^2. \end{aligned}$$

Для моменту часу t , коли камінь покидає ділянку

$$\dot{x}_1 = v_B, \quad x_1 = l,$$

тобто

$$\begin{aligned} v_B &= g(\sin a - f \cos a)t, \\ l &= \frac{g(\sin a - f \cos a)}{2}t^2, \end{aligned}$$

звідки

$$v_B = \frac{2l}{t} = \frac{2 \cdot 4}{1} = 8 \text{ м/с}.$$

Розглянемо рух каменя від точки B до точки C .

Показавши силу тяжіння \vec{P} , що діє на камінь, складемо диференціальне рівняння його руху:

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = P.$$

Інтегруємо перше з цих рівнянь:

$$\dot{x} = C_3, \quad x = C_3t + C_4.$$

Сталі інтегрування C_3 і C_4 визначимо, використовуючи початкові умови задачі: при $t = 0$ $x_0 = 0$ і $\dot{x}_0 = v_B \cos a$.

За допомогою рівнянь, отриманих при інтегруванні і складених для $t = 0$,

$$\dot{x}_0 = C_3, \quad x_0 = C_4,$$

знайдемо, що

$$C_3 = v_B \cos a; \quad C_4 = 0.$$

Тоді

$$\dot{x} = v_B \cos a, \quad x = v_B t \cos a.$$

Інтегруючи рівняння $m\ddot{y} = P$, маємо:

$$\dot{y} = gt + C_5, \quad y = \frac{gt^2}{2} + C_5t + C_6.$$

Початкові умови: при $t = 0$ $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = v_B \sin a$. Із рівнянь, отриманих інтегруванням і складеним для $t = 0$,

$$\dot{y}_0 = C_5, \quad y_0 = C_6,$$

знайдемо, що

$$C_5 = v_B \sin a, \quad C_6 = 0.$$

Остаточно

$$x = gt + v_B \sin a, \quad y = \frac{gt^2}{2} + v_B t \sin a.$$

Таким чином, рівняння руху каменя мають вигляд

$$x = v_B t \cos a, \quad y = \frac{gt^2}{2} + v_B t \sin a.$$

Рівняння траєкторії каменя знайдемо, виключивши параметр t із рівнянь руху. Визначивши t із першого рівняння і підставивши його значення в друге, отримуємо рівняння параболи:

$$y = \frac{gx^2}{2v_B^2 \cos^2 a} + x \operatorname{tg} a.$$

В момент падіння $y = h = 5$ м, а $x = d$, тобто

$$5 = \frac{9,81d^2}{2 \cdot 8^2 \cdot 0,5^2} + d\sqrt{3},$$

звідки

$$d_{1,2} = -2,82 \pm 4,93,$$

так що $d_1 = 2,11$ м, $d_2 = -7,75$ м.

Оскільки траєкторією руху каменя є вітка параболи з додатними абсцисами її точок, то $d = 2,11$ м.

Мінімальна ширина полиці

$$b = d - ED = d - \frac{h}{\operatorname{tg} 75^\circ} = 2,11 - \frac{5}{3,73} = 0,77 \text{ м.}$$

Використовуючи рівняння руху каменя $x = v_B t \cos a$, знайдемо час T руху каменя від точки B до точки C :

$$2,11 = 8 \cdot 0,5T,$$

звідки

$$T = 0,53 \text{ с.}$$

Швидкість каменя при падінні знайдемо через проекції швидкості на осі координат:

$$x = v_B \cos a, \quad y = gt + v_B \sin a,$$

за формулою

$$v = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Для моменту падіння ($t = T = 0,53$ с)

$$v = \sqrt{(v_B \cos a)^2 + (gT + v_B \sin a)^2} = \sqrt{(8 \cdot 0,5)^2 + (9,81 \cdot 0,53 + 8 \cdot 0,87)^2} = 12,8 \text{ м/с.}$$

РОЗДІЛ 2. КОЛИВАЛЬНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Серед різноманітних сил, які можуть діяти на матеріальну точку, особливе місце займають *відновлювальні сили*, тобто *сили, які намагаються повернути точку в положення рівноваги*. Такі сили залежать від відхилення точки від положення рівноваги і напрямлені до нього.

Як ми побачимо нижче, відновлювальні сили часто надають руху матеріальної точки коливальний характер.

Однак, крім відновлювальних сил одночасно діють, як правило, залежні від швидкості руху *сили опору* $R(\dot{x})$ (наприклад, сила тертя ковзання чи кочення, опір повітря, рідини тощо), а також *збурювальні сили* $Q_x(t)$, які залежать від часу.

Даний розділ присвячено вивченню всіх варіантів поєднання вказаних типів сил у випадку прямолінійного руху матеріальної точки. Хоча ця задача представляє інтерес і сама по собі, але ще більш важливо, що її розв'язок можна майже без змін використовувати для багатьох випадків коливань (коливання вантажу на пружині, малі коливання математичного і фізичного маятника, електромагнітні коливання тощо).

Річ у тім, що різні за своїм фізичним змістом коливальні явища описуються однаковими диференціальними рівняннями, тому висновки, отримані при вивченні коливального руху в якійсь одній області, можуть бути використані і в інших областях.

Найбільш простими для вивчення є ті випадки коливальних рухів, коли відновлювальна сила пропорційна відхиленню точки від положення рівноваги, а сила опору пропорційна швидкості точки. Відповідно проекції відновлювальної сили і сили опору на вісь x мають вигляд

$$F_x = -cx, \quad R_x = -b\dot{x}. \quad (2.1)$$

В цих випадках диференціальні рівняння руху лінійні; відповідно такі коливання також називаються *лінійними*.

В залежності від того, яка комбінація сил $F_x(x)$, $R_x(\dot{x})$ і $Q_x(t)$ діє на матеріальну точку, коливальний рух набуває тих чи інших типових особливостей.

Можливі і більш складні випадки, коли сила, що діє на точку, залежить одночасно від координати x і часу t та не може бути зображена у вигляді суми $F_x(x)$ і $Q_x(t)$, а також коли сила залежить від координати x і швидкості \dot{x} , причому силу не можна подати як суму $F_x(x)$ і $R_x(\dot{x})$. Ці випадки тут не розглядаються.

2.1. Вільні коливання

Нехай на матеріальну точку діє тільки відновлювальна сила, модуль якої пропорційний відхиленню від положення рівноваги:

$$F_x = -cx, \quad (2.2)$$

де c – коефіцієнт пропорційності, а диференціальне рівняння руху точки має вигляд

$$m\ddot{x} = -cx.$$

Поклавши $c/m = w^2$, отримаємо

$$\ddot{x} + w^2 x = 0. \quad (2.3)$$

Таким чином, рух матеріальної точки під дією відновлювальної сили описується лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Характеристичне рівняння цього диференціального рівняння має вигляд

$$l^2 + w^2 = 0.$$

Оскільки його корені – чисто уявні числа: $l_{1,2} = \pm iw$, то загальним розв'язком диференціального рівняння (2.3) буде

$$x = C_1 \cos wt + C_2 \sin wt, \quad (2.4)$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

Для зручності аналізу цього рівняння введемо нові сталі інтегрування a і e , поклавши

$$C_1 = a \sin e, \quad C_2 = a \cos e. \quad (2.5)$$

Тоді сталі a і e визначаються через C_1 і C_2 за допомогою формул

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} e = C_1/C_2,$$

а розв'язок має вигляд

$$x = a \cos e \sin wt + a \sin e \cos wt$$

або

$$x = a \sin(wt + e). \quad (2.6)$$

Сталі a і e (або C_1 і C_2) визначаються заданими початковими умовами – початковим положенням і початковою швидкістю точки, що рухається.

Таким чином, під дією відновлювальної сили матеріальна точка здійснює рух за синусоїдальним законом, тобто гармонічний коливальний рух. Такі коливання називаються *вільними коливаннями*.

З рівняння (2.6) видно, що найбільше відхилення матеріальної точки від положення рівноваги (*амплітуда коливань*) дорівнює a .

Аргумент $(wt + e)$ називається *фазою коливань*, а величина e – *початковою фазою*.

Величина w називається *коловою (кутовою) частотою* коливань і означає число коливань, які здійснює точка за 2π секунд. Надалі величину w для спрощення будемо називати просто *частотою*. Частота коливань w не залежить від початкових умов і визначається тільки параметрами системи (величинами c і m). За цією ознакою частоту вільних коливань називають також *власною частотою*.

Для визначення амплітуди й початкової фази коливань скористаємося *початковими умовами*, які повинні бути задані (у протилежному випадку

коливальний процес не повністю визначений). Нехай у початковий момент $t = 0$ відомі початкове положення матеріальної точки $x = x_0$ і початкова швидкість $\dot{x} = \dot{x}_0$. Тоді, підставивши в рівняння руху (2.6) і у вираз для швидкості

$$\dot{x} = a\omega \cos(\omega t + e) \quad (2.7)$$

$t = 0$, $x = x_0$ і $\dot{x} = \dot{x}_0$, одержимо для визначення a і e два рівняння:

$$x_0 = a \sin e, \quad \dot{x}_0 = a\omega \cos e.$$

Звідси знаходимо¹⁾

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} e = \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0},$$

і закон руху точки визначається наступним рівнянням:

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}} \sin \left(\omega t + \operatorname{arctg} \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0} \right). \quad (2.8)$$

Графік вільних коливань матеріальної точки для випадку $x_0 > 0$, $\dot{x}_0 > 0$ зображено на рис. 2.1; тут вказано початкове відхилення x_0 , амплітуда коливань a , а також проміжок часу T , протягом якого відбувається одне повне коливання. Цей найменший проміжок часу, після закінчення якого рух точки повністю повторюється, називається *періодом коливань*. Залежність між періодом коливань і частотою визначається з умови періодичності руху

$$\omega(t + T) + e = \omega t + e + 2\pi,$$

звідки $T = 2\pi/\omega$, або

$$T = 2\pi \sqrt{m/c}. \quad (2.9)$$

Таким чином, період коливань, так само як і частота, не залежить від початкових умов. Ця властивість коливань називається *ізохронністю*. Як видно з (2.8), період і частота коливань визначаються величиною маси m матеріальної точки і коефіцієнтом пропорційності c , причому зі збільшенням маси й зменшенням коефіцієнта c період коливань збільшується.

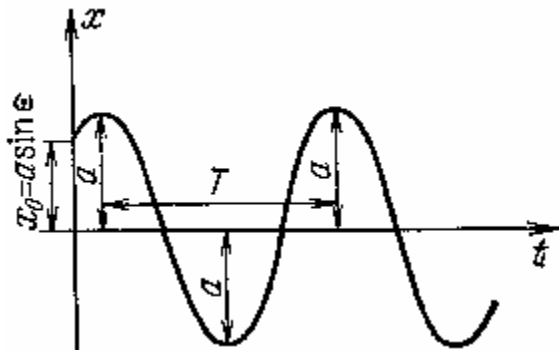


Рис. 2.1

¹⁾ Якщо $x_0 > 0$, то при $\dot{x}_0 > 0$ $0 \leq e \leq \pi/2$, а при $\dot{x}_0 < 0$ $\pi/2 \leq e \leq \pi$. Якщо $x_0 < 0$, то при $\dot{x}_0 > 0$ $3\pi/2 \leq e \leq 2\pi$, а при $\dot{x}_0 < 0$ $\pi \leq e \leq 3\pi/2$.

2.2. Рух точки під дією в'язкого опору

Розглянемо прямолінійний рух матеріальної точки під дією лінійної відновлювальної сили і лінійної сили опору. Виберемо за початок координат положення рівноваги точки. Проекція відновлювальної сили \vec{F} на вісь x дорівнює $-cx$. Оскільки сила опору \vec{R} завжди напрямлена у бік, протилежний напрямку швидкості точки, то проекція сили опору на вісь x дорівнює $-b\dot{x}$, де b – коефіцієнт пропорційності, що характеризує опір середовища.

Отже, диференціальне рівняння руху точки запишеться наступним чином:

$$m\ddot{x} = -cx - b\dot{x}. \quad (2.10)$$

Увівши позначення $c/m = w^2$, $b/m = 2h$, одержимо

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + w^2x = 0. \quad (2.11)$$

Це – лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння має вигляд $l^2 + 2hl + w^2 = 0$, і його корені рівні

$$l_1 = -h + \sqrt{h^2 - w^2}, \quad l_2 = -h - \sqrt{h^2 - w^2}.$$

Характер руху точки істотно залежить від співвідношення величин h і w .

Якщо $h < w$ (випадок малого опору), то корені характеристичного рівняння комплексно спряжені. Якщо $h > w$ (випадок великого опору), то корені дійсні. Розглянемо докладно кожний із цих випадків.

1. Випадок малого опору ($h < w$). Корені характеристичного рівняння будуть

$$l_1 = -h + i\sqrt{w^2 - h^2}, \quad l_2 = -h - i\sqrt{w^2 - h^2}.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (2.11) має вигляд

$$x(t) = e^{-ht} (C_1 \cos w^*t + C_2 \sin w^*t), \quad (2.12)$$

де $w^* = \sqrt{w^2 - h^2}$, C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

Для більшої наочності введемо нові сталі a і e за допомогою формул (2.5). Тоді одержимо

$$x(t) = ae^{-ht} \sin(w^*t + e). \quad (2.13)$$

Із цього рівняння видно, що $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (тому що $e^{-ht} \rightarrow 0$), тобто рух є *згасаючим*. Цей згасаючий рух носить коливальний характер, тому що, наближаючись (при $t \rightarrow \infty$) до стану рівноваги, система буде проходити через цей стан нескінченне число раз у моменти часу, рівні

$$t_n = \frac{pn - e}{w^*},$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$ (рис. 2.2).

Рух, описуваний формулою (2.13), не є періодичним, тому що із часом послідовні максимальні відхилення точки від положення рівноваги зменшуються. Однак, проміжок часу між двома будь-якими наступними відхилен-

нями (наприклад, у бік додатного напрямку осі x) є сталою величиною, рівною

$$T^* = 2p/w^* = 2p/\sqrt{w^2 - h^2}. \quad (2.14)$$

Цю величину умовно називають *періодом згасаючих коливань*.

Розглянемо докладніше графік руху (див. рис. 2.2). На цьому рисунку криві $x = ae^{-ht}$ і $x = -ae^{-ht}$ є межами області, усередині якої розташовується графік руху.

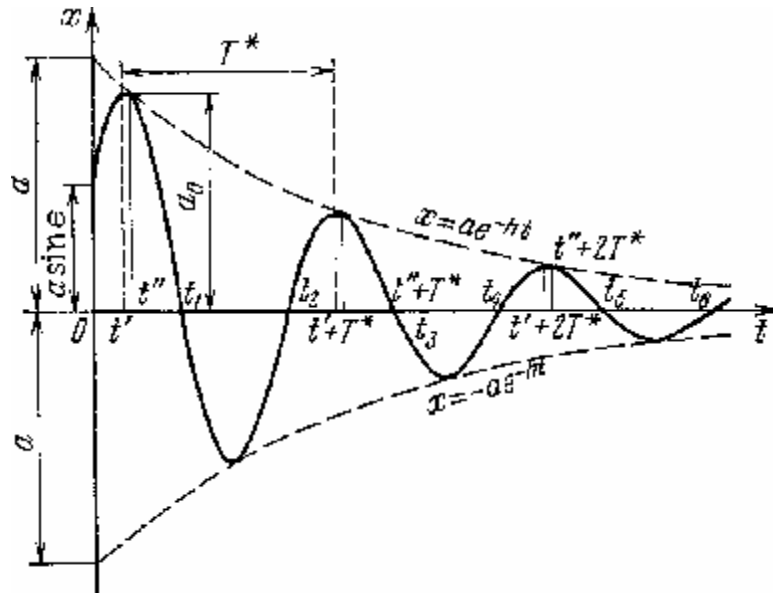


Рис. 2.2

Обчислимо моменти часу, що відповідають максимальним відхиленням точки від положення рівноваги. Із цією метою знайдемо швидкість точки

$$\dot{x}(t) = -hae^{-ht} \sin(w^*t + e) + aw^*e^{-ht} \cos(w^*t + e) \quad (2.15)$$

і прирівняємо її до нуля. Матимемо

$$\operatorname{tg}(w^*t + e) = w^*/h.$$

Звідси випливає, що якщо t' (найменший корінь отриманого рівняння) відповідає першому максимальному відхиленню в додатному напрямку осі x , то наступні максимальні відхилення в додатному напрямку осі x будуть досягатися в моменти часу $t'_n = t' + (n-1)T^*$, де $n = 1, 2, \dots$.

Із формули (2.14) видно, що при в'язкому терті період згасаючих коливань T^* більший за період незатухаючих коливань $T = 2p/w$. Максимальні відхилення $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, що відповідають моментам часу $t', t' + T^*, t' + 2T^*, \dots, t' + nT^*, \dots$, рівні

$$a_0 = ae^{-ht'} \sin(w^*t' + e), \quad a_1 = ae^{-h(t'+T^*)} \sin(w^*t' + e), \dots,$$

$$a_n = ae^{-h(t'+nT^*)} \sin(w^*t' + e), \dots$$

і утворюють спадну геометричну прогресію. Її знаменник

$$h = \frac{a_m}{a_{m-1}} = e^{-hT^*}$$

називається *декрементом коливань* (або *фактором згасань*), а модуль натурального логарифма величини h

$$\Lambda = hT^*$$

– *логарифмічним декрементом коливань*.

Відмітимо, що якщо $t = t''$ є додатним коренем рівняння $\sin(w^*t + e) = 1$, то моменти часу, в які графік дотикається кривої $x = ae^{-ht}$, будуть: t'' , $t'' + T^*$, $t'' + 2T^*$, ...

Декремент коливань можна визначити як відношення відхилення при $t = t'' + nT^*$ до відхилення при $t = t'' + (n-1)T^*$.

Для визначення сталих інтегрування використаємо початкові умови: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$.

Підставляючи ці умови в рівняння (2.13) і (2.15), одержимо рівняння для визначення сталих a і e :

$$x_0 = a \sin e, \quad \dot{x}_0 = -ha \sin e + aw^* \cos e,$$

звідки

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + hx_0)^2}{w^{*2}}}, \quad \operatorname{tg} e = \frac{w^* x_0}{\dot{x}_0 + hx_0}.$$

2. Граничний випадок ($h = \omega$). Корені характеристичного рівняння в цьому випадку будуть дійсними й кратними: $I_1 = I_2 = -h$ і, отже, загальний розв'язок рівняння руху (2.11) має вигляд

$$x = e^{-ht} (C_1 + C_2 t), \quad (2.16)$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування. Беручи до уваги, що $\dot{x} = -he^{-ht} (C_1 + C_2 t) + C_2 e^{-ht}$, одержимо при початкових умовах $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$ наступні рівняння для визначення сталих інтегрування C_1 і C_2 : $x_0 = C_1$, $\dot{x}_0 = -hC_1 + C_2$. Звідси $C_1 = x_0$, $C_2 = \dot{x}_0 + hx_0$.

Таким чином, для заданих початкових умов рівняння руху точки запишеться у вигляді

$$x = e^{-ht} [x_0 + (\dot{x}_0 + hx_0)t]. \quad (2.17)$$

Із цієї залежності випливає, що в розглянутому випадку рух точки вже не носить коливальний характер, але залишається згасаючим рухом, тому що $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Такий рух називається *апериодичним* (див. рис. 2.3).

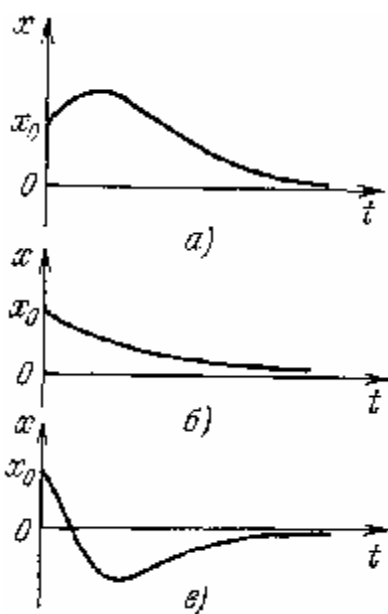


Рис. 2.3

3. Випадок великого опору ($h > \omega$). У цьому випадку корені характеристичного рівняння

$$I_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega^2}, \quad I_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega^2}$$

є дійсними і від'ємними. Загальний розв'язок рівняння руху (2.11) має вигляд

$$x = C_1 e^{I_1 t} + C_2 e^{I_2 t}. \quad (2.18)$$

Оскільки $\dot{x} = I_1 C_1 e^{I_1 t} + I_2 C_2 e^{I_2 t}$, то при початкових умовах: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, при $t = 0$ рівняння для визначення сталих інтегрування будуть $x_0 = C_1 + C_2$, $\dot{x}_0 = I_1 C_1 + I_2 C_2$. Знайшовши звідси

$$C_1 = \frac{I_2 x_0 - \dot{x}_0}{I_2 - I_1}, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 - I_1 x_0}{I_2 - I_1}$$

та підставивши ці C_1 і C_2 у вираз (2.18), одержимо

$$x = \frac{I_2 x_0 - \dot{x}_0}{I_2 - I_1} e^{I_1 t} + \frac{\dot{x}_0 - I_1 x_0}{I_2 - I_1} e^{I_2 t}. \quad (2.19)$$

Це рівняння теж описує аперіодичний згасаючий рух ($x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, оскільки I_1 і I_2 від'ємні). Графіки такого руху будуть подібні до тих, що зображені на рис. 2.3.

2.3. Змушені коливання

Розглянемо прямолінійний рух матеріальної точки під дією відновлювальної сили і зовнішньої збурювальної сили. Збурювальна сила може бути довільною функцією часу, однак ми обмежимося найпростішим, але вельми важливим з практичної точки зору випадком, коли сила змінюється за гармонічним законом. Нехай проекція збурювальної сили на вісь x дорівнює $Q_x(t) = H_0 \sin(pt + d)$, де H_0 – амплітуда і p – частота збурювальної сили, d – початкова фаза. Тоді диференціальне рівняння руху матеріальної точки уздовж осі x має вигляд

$$m\ddot{x} = -cx + H_0 \sin(pt + d),$$

або

$$\ddot{x} + w^2 x = H \sin(pt + d), \quad (2.20)$$

де

$$w^2 = c/m, \quad H = H_0/m.$$

Розв'язавши диференціальне рівняння (2.20), ми визначимо закон руху матеріальної точки. Загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння (2.20) дорівнює сумі частинного розв'язку рівняння (2.20) і загального розв'язку однорідного рівняння

$$\ddot{x} + w^2 x = 0.$$

Загальний розв'язок останнього рівняння ми вже знаємо:

$$x_{3.o.} = a \sin(\omega t + e),$$

де a і e – сталі інтегрування. Якщо $p \neq \omega$, то частинний розв'язок рівняння (2.20) будемо шукати у вигляді

$$x_{ч.н.} = A \sin(pt + d),$$

де A – невідома стала. Для її визначення підставимо вираз для $x_{ч.н.}$ в рівняння (2.20):

$$-Ap^2 \sin(pt + d) + A\omega^2 \sin(pt + d) = H \sin(pt + d).$$

Для тотожного виконання цієї рівності повинно бути, щоб

$$A = \frac{H}{\omega^2 - p^2}.$$

Частинний розв'язок має вигляд

$$x_{ч.н.} = \frac{H}{\omega^2 - p^2} \sin(pt + d). \quad (2.21)$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (2.20) запишеться у формі

$$x = a \sin(\omega t + e) + \frac{H}{\omega^2 - p^2} \sin(pt + d). \quad (2.22)$$

Сталі a і e залежать від початкових умов. Таким чином, шуканий рух матеріальної точки є сумою гармонічних коливань, що відбуваються із власною частотою ω , і гармонічних коливань, що відбуваються із частотою збурювальної сили p . Докладно вивчимо другий доданок в (2.22), що описує чисто змушені коливання й не залежить від початкових умов.

Амплітуда чисто змушених коливань дорівнює

$$A^* = \frac{H}{|\omega^2 - p^2|}. \quad (2.23)$$

Перепишемо розв'язок (2.21), використовуючи формулу (2.23):

$$x_{ч.н.} = A^* \sin(pt + d) \quad (p < \omega),$$

$$x_{ч.н.} = -A^* \sin(pt + d) = A^* \sin(pt + d - \pi) \quad (p > \omega).$$

З отриманих співвідношень випливає, що при $p < \omega$ фаза змушених коливань збігається з фазою збурювальної сили; при $p > \omega$ змушені коливання зсунуті по фазі від збурювальної сили на π .

Прослідкуємо залежність амплітуди змушених коливань від відношення частот p/ω . Для цього перетворимо вираз амплітуди змушених коливань

$$A^* = \frac{H}{|\omega^2 - p^2|} = \frac{H}{c |1 - p^2/\omega^2|} = \frac{x_{cm}}{|1 - p^2/\omega^2|},$$

де $x_{cm} = H/c$ – величина *статичного відхилення*¹⁾ від положення рівноваги при дії сили, яка дорівнює максимальному значенню збурювальної сили.

Позначимо

$$m = \frac{A^*}{x_{cm}} = \frac{1}{|1 - p^2/w^2|}.$$

Величина μ являє собою *коефіцієнт динамічності*, який показує в скільки разів амплітуда коливань переважає статичне відхилення. Із графіка (рис. 2.4) видно, що при $p/w \rightarrow 1$ коефіцієнт динамічності різко зростає.

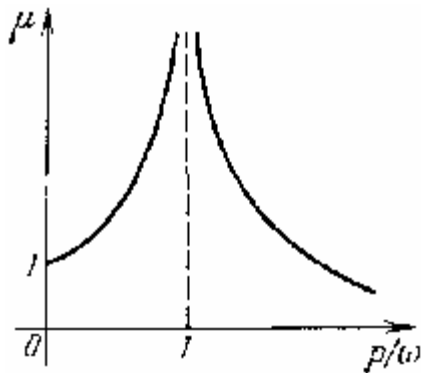


Рис. 2.4

Повернемося тепер до загального

розв'язку (2.22). Записавши його у вигляді

$$x = C_1 \cos wt + C_2 \sin wt + \frac{H}{w^2 - p^2} \sin(pt + d) \quad (2.24)$$

визначимо сталі інтегрування, якщо $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$.

Підставивши початкові умови в рівняння (2.24) і у вираз для швидкості руху

$$\dot{x} = -wC_1 \sin wt + wC_2 \cos wt + \frac{pH}{w^2 - p^2} \cos(pt + d), \quad (2.25)$$

одержимо

$$C_1 = x_0 - \frac{H}{w^2 - p^2} \sin d, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{w} - \frac{p}{w} \frac{H}{w^2 - p^2} \cos d.$$

Підставляючи C_1 і C_2 у співвідношення (2.24), матимемо

$$x = x_0 \cos wt + \frac{\dot{x}_0}{w} \sin wt - \frac{H}{w^2 - p^2} \left(\sin d \cos wt + \frac{p}{w} \cos d \sin wt \right) + \frac{H}{w^2 - p^2} \sin(pt + d). \quad (2.26)$$

Такий запис розв'язку дозволяє встановити, що навіть при нульових початкових умовах ($x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$) точка буде здійснювати коливання, що відбуваються із власною частотою і визначаються членом $-H(w^2 - p^2)^{-1} [\sin d \cos wt + (p/w) \cos d \sin wt]$, причому амплітуда цих коливань не залежить від початкових умов.

При частоті p , близькій до власної частоти w , завдяки додаванню двох коливань близької частоти, однакової амплітуди й протилежних за фазою, настає своєрідне явище, яке називається *биттям*.

¹⁾ У випадку руху матеріальної точки під дією сили пружності цю величину ще називають *статичною деформацією*.

Нехай $p \approx w$, тоді вираз (2.26) при $x_0 = 0$ і $\dot{x}_0 = 0$ матиме вигляд (приблизно вважаємо, що $p/w = 1$, але $w^2 - p^2 \neq 0$)

$$x \approx \frac{H}{w^2 - p^2} [\sin(pt + d) - \sin(wt + d)]$$

або

$$x \approx \frac{2H}{w^2 - p^2} \sin \frac{p-w}{2} t \cos(pt + d).$$

Графік цього руху зображений на рис. 2.5.

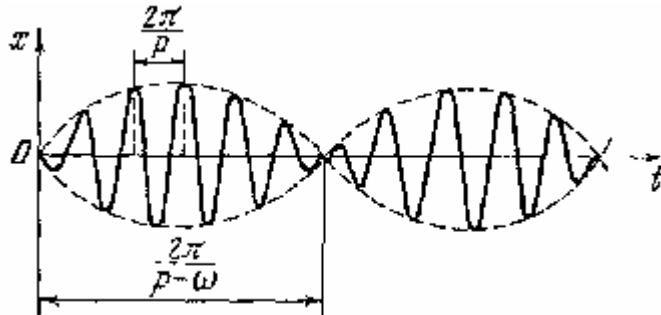


Рис. 2.5

Показані тут биття являють собою коливання, що відбуваються із частотою p збурювальної сили, причому амплітуда цих коливань повільно змінюється також за періодичним законом.

Розглянемо тепер випадок, коли власна частота збігається із частотою збурювальної сили, тобто $p = w$. Частинний розв'язок рівняння (2.20) у цьому випадку потрібно шукати у вигляді

$$x_{ч.н.} = At \sin(pt + g). \quad (2.27)$$

Підставивши вираз (2.27) у диференціальне рівняння (2.20), одержимо

$$2Ap \cos(pt + g) = H \sin(pt + d).$$

Увівши позначення $j = pt + g$, перепишемо це співвідношення у вигляді

$$2Ap \cos j = H \sin j \cos(d - g) + H \cos j \sin(d - g).$$

Цю рівність можна тотожно задовольнити, якщо взяти

$$H \cos(d - g) = 0, \quad H \sin(d - g) = 2Ap.$$

Звідси $A = H/(2p)$, $g = d - p/2$ і, отже,

$$x_{ч.н.} = \frac{Ht}{2p} \sin \left(pt + g - \frac{p}{2} \right) = -\frac{Ht}{2p} \cos(pt + g).$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$x = a \sin(wt + e) - \frac{Ht}{2p} \cos(pt + g).$$

При початкових умовах $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ маємо¹⁾

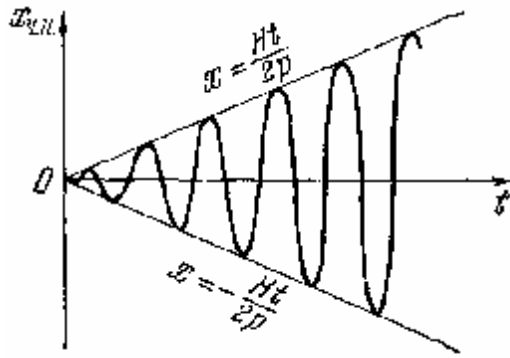


Рис. 2.6

$$x = x_0 \cos wt + \frac{\dot{x}_0}{w} \sin wt + \frac{H}{2p^2} [\cos d \sin pt - pt \cos(pt + d)].$$

На рис. 2.6 показано графік функції $x_{ch.}$. Як видно, при $p = w$ відбувається необмежене зростання амплітуди коливань, причому зростання амплітуди лінійне за часом. Це явище називається *резонансом*.

2.4. Змушені коливання при наявності в'язкого опору

Розглянемо рух матеріальної точки уздовж осі x під дією лінійної відновлювальної сили, в'язкої сили опору і збурювальної сили, проекція якої на вісь x дорівнює $H_0 \sin(pt + d)$.

Диференціальне рівняння руху має вигляд

$$m\ddot{x} = -cx - b\dot{x} + H_0 \sin(pt + d).$$

Поклавши $c/m = w^2$, $b/m = 2h$, $H_0/m = H$, одержимо

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + w^2x = H \sin(pt + d). \quad (2.28)$$

Розв'язок диференціального рівняння (2.28) складається із двох розв'язків: загального розв'язку $x_{z.o.}$ відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку $x_{ch.}$ рівняння (2.28).

Як показано в підрозділі 2.3, при $h < w$ розв'язок однорідного рівняння записується у вигляді

$$x_{z.o.} = e^{-ht} (C_1 \cos w^*t + C_2 \sin w^*t),$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування, а $w^* = \sqrt{w^2 - h^2}$. Частинний розв'язок рівняння (2.28) будемо шукати у вигляді

$$x_{ch.} = A \sin(pt + g),$$

де A і g – невизначені сталі величини. Таким чином, ми припускаємо, що частинний розв'язок описує коливання сталої амплітуди, що відбуваються із частотою збурювальної сили.

Знаходячи $\dot{x}_{ch.} = pA \cos(pt + g)$ і $\ddot{x}_{ch.} = -p^2 A \sin(pt + g)$ і підставляючи значення $x_{ch.}$, $\dot{x}_{ch.}$ і $\ddot{x}_{ch.}$ у рівняння (2.28), одержимо

$$-p^2 A \sin(pt + g) + 2hpA \cos(pt + g) + w^2 A \sin(pt + g) = H \sin(pt + d).$$

¹⁾ Цей розв'язок можна отримати із (2.26), розкриваючи невизначеність, яка виникає при $p \rightarrow w$.

Поклавши $pt + g = j$ і скориставшись співвідношенням

$$\sin(pt + d) = \sin(j + d - g) = \sin j \cos(d - g) + \cos j \sin(d - g),$$

для визначення A і g матимемо наступні рівняння:

$$A(w^2 - p^2) = H \cos(d - g), \quad 2phA = H \sin(d - g),$$

звідки

$$A = \frac{H}{\sqrt{(w^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2}}, \quad \operatorname{tg}(d - g) = \frac{2hp}{w^2 - p^2}. \quad (2.29)$$

Підставивши знайдені значення A і g у частинний розв'язок, одержимо

$$x_{ч.н.} = \frac{H}{\sqrt{(w^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2}} \sin(pt + d + g'),$$

де $g' = g - d$.

Таким чином, загальний розв'язок диференціального рівняння (2.28) має наступний вигляд:

$$x = e^{-ht} (C_1 \cos w^* t + C_2 \sin w^* t) + \frac{H}{\sqrt{(w^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2}} \sin(pt + d + g'). \quad (2.30)$$

Для визначення закону руху матеріальної точки потрібно знайти сталі C_1 і C_2 . Користуючись початковими умовами: $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$, одержимо значення сталих

$$C_1 = x_0 - A \sin(d + g'), \quad C_2 = \frac{1}{w^*} [\dot{x}_0 + hx_0 - hA \sin(d + g') - Ap \cos(d + g')],$$

де A – амплітуда змушених коливань.

Підставивши значення C_1 і C_2 в рівняння (2.30), знайдемо закон руху матеріальної точки в розглядуваному випадку:

$$x = e^{-ht} \left[x_0 \cos w^* t + \frac{\dot{x}_0 + hx_0}{w^*} \sin w^* t \right] - e^{-ht} \left\{ A \sin(d + g') \cos w^* t + \frac{A}{w^*} [h \sin(d + g') + p \cos(d + g')] \sin w^* t \right\} + A \sin(pt + d + g').$$

Отже, рух матеріальної точки складається: з вільних згасаючих коливань (перший доданок), обумовлених початковими умовами, зі згасаючих коливань (другий доданок), що мають власну частоту, але викликані дією збурювальної сили, і чисто змушених коливань (третій доданок). Оскільки перші два рухи із часом згасають, то основним коливанням, що визначає характер руху матеріальної точки, є чисто змушене коливання з амплітудою A і частотою p . Варто помітити, що при наявності опору змушені коливання зсунуті по фазі відносно збурювальної сили на g' .

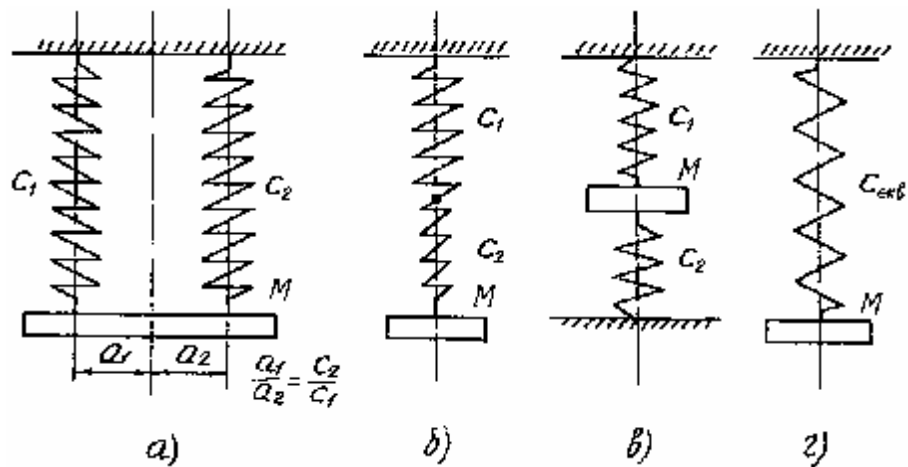


Рис. 2.7

Примітка. При розв'язанні практичних задач на коливання матеріальної точки зустрічаються випадки, коли матеріальна точка спирається або підвішена до кількох пружин одночасно (рис. 2.7).

При розрахунках ці пружини замінюють однією пружиною з еквівалентною жорсткістю $c_{екв}$.

У випадку двох паралельних пружин (рис. 2.7, а), а також коли точка перебуває між двома пружинами (рис. 2.7, в):

$$c_{екв} = c_1 + c_2.$$

У випадку двох послідовних пружин (рис. 2.7, б):

$$c_{екв} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}.$$

Завдання для лабораторної роботи №6

Варіанти 1-5 (рис. 2.8)

Знайти рівняння руху вантажу D масою m_D (варіанти 2 і 4) або системи вантажів D і E масами m_D і m_E (варіанти 1, 3, 5), віднісши їх рух до осі x ; початок відліку пов'язати з положенням спокою вантажу D або відповідно системи вантажів D і E (при статичній деформації пружин). Стрижень, що з'єднує вантажі, уважати невагомим і абсолютно твердим.

Варіант 1. Вантаж D ($m_D = 2 \text{ кг}$) прикріплено до бруска AB , підвішеного до двох однакових паралельних пружин, коефіцієнт жорсткості кожної з яких $c = 3 \text{ Н/см}$. Точка прикріплення вантажу D перебуває на однакових відстанях від осей пружин. У деякий момент часу до вантажу D підвішують вантаж E ($m_E = 1 \text{ кг}$). Опір рухові системи двох вантажів пропорційний швидкості: $R = 12v$ (Н), де v – швидкість (м/с).

Масою абсолютно твердого бруска AB і масою частини демпфера, прикріпленої до бруска, знехтувати.

Варіант 2. У момент, коли стрижень, що з'єднує вантажі D ($m_D = 1 \text{ кг}$) і E ($m_E = 2 \text{ кг}$), перерізують, точка B (верхній кінець послідовно з'єднаних пружин) починає робити рух за законом $x = 1,5 \sin 18t$ (см) (вісь x напрямлено вертикально вниз). Коефіцієнти жорсткості пружин $c_1 = 12 \text{ Н/см}$, $c_2 = 36 \text{ Н/см}$.

Варіант 3. Вантаж D ($m_D = 0,8 \text{ кг}$) висить на пружині (коефіцієнт жорсткості $c_1 = 10 \text{ Н/см}$), яку прикріплено до точки F бруска AB . Брусок підвішений до двох паралельних пружин, коефіцієнти жорсткості яких $c_2 = 4 \text{ Н/см}$, $c_3 = 6 \text{ Н/см}$; точка F перебуває на відстанях a і b від осей цих пружин, $a/b = c_3/c_2$.

В деякий момент часу до вантажу D підвішують вантаж E ($m_E = 1,2 \text{ кг}$). У цей же момент системі вантажів надають швидкості $v_0 = 0,2 \text{ м/с}$, напрямленої вниз. Масою абсолютно твердого бруска AB знехтувати.

Варіант 4. Статична деформація двох однакових паралельних пружин під дією вантажів D ($m_D = 0,5 \text{ кг}$) і E ($m_E = 1,5 \text{ кг}$) $x_{cm} = 4 \text{ см}$. Вантажі підвішені до пружин за допомогою абсолютно твердого бруска AB . У деякий момент часу стрижень, що з'єднує вантажі, перерізують. Опір рухові вантажу D пропорційний швидкості $R = 6v$ (Н), де v – швидкість (м/с). Масою бруска й масою, прикріпленої до бруска частини демпфера, знехтувати.

Варіант 5. Одночасно з підвішуванням до вантажу D ($m_D = 1,6 \text{ кг}$), що висить на пружині (коефіцієнт жорсткості $c = 4 \text{ Н/см}$), вантажу E ($m_E = 2,4 \text{ кг}$) точка B (верхній кінець пружини) починає здійснювати рух за законом $x = 2 \sin 5t$ (см) (вісь x напрямлена вертикально вниз).

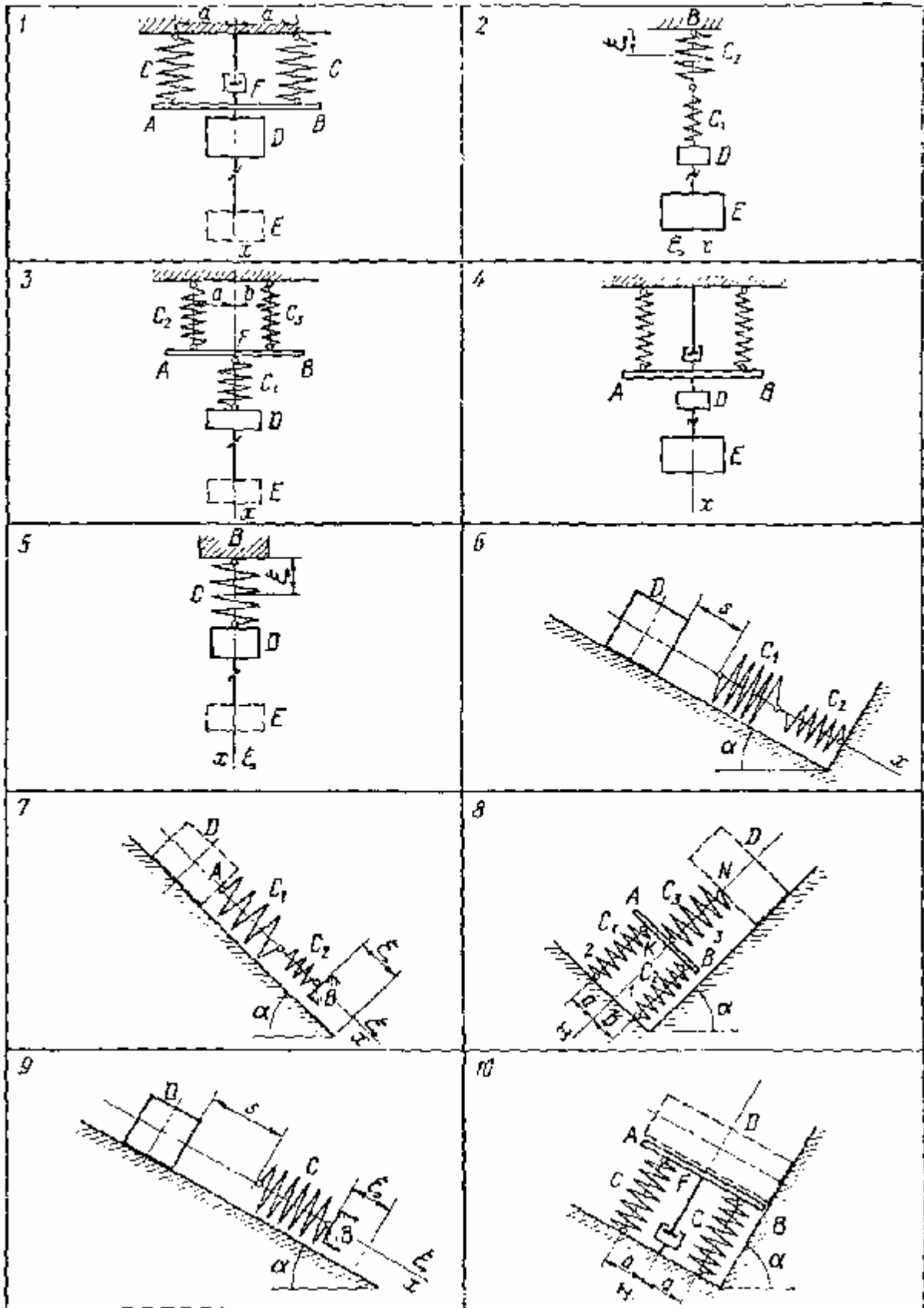


Рис. 2.8

Варіанти 6-10 (рис. 2.8)

Знайти рівняння руху вантажу D масою m по гладкій похилій площині, що складає з горизонтом кут α , з моменту дотику вантажу із пружиною або із системою пружин, припускаючи, що при подальшому русі вантаж від пружин не відділяється. Рух вантажу віднести до осі x , прийнявши за початок відліку положення спокою вантажу (при статичній деформації пружин).

Варіант 6. Пройшовши без початкової швидкості по похилій площині ($\alpha = 30^\circ$) відстань $s = 0,1$ м, вантаж D ($m = 4$ кг) ударяється в недеформовані, послідовно з'єднані пружини, що мають коефіцієнти жорсткості $c_1 = 48$ Н/см і $c_2 = 24$ Н/см.

Варіант 7. У деякий момент часу вантаж D ($m = 2$ кг) приєднують без початкової швидкості до кінця A недеформованих послідовно з'єднаних пружин, що мають коефіцієнти жорсткості $c_1 = 12$ Н/см і $c_2 = 6$ Н/см. У той же момент часу ($t = 0$) інший кінець пружин B починає рухатися уздовж похилої площини ($\alpha = 45^\circ$) за законом $x = 0,02 \sin 20t$ (м) (вісь x напрямлена вздовж похилої площини вниз).

Варіант 8. Дві паралельні пружини 1 і 2 з коефіцієнтами жорсткості $c_1 = 4$ Н/см і $c_2 = 6$ Н/см з'єднані абсолютно твердим бруском AB , до точки K якого прикріплена пружина 3 з коефіцієнтом жорсткості $c_3 = 15$ Н/см. Точка K перебуває на відстанях a і b від осей пружин 1 і 2, $a/b = c_2/c_1$. Пружини 1, 2 і 3 не деформовані. Вантаж D ($m = 1,5$ кг) приєднують до кінця N пружини 3, у той же момент вантажу D надають швидкості $v_0 = 0,5$ м/с, напрямленої вниз паралельно похилій площині ($\alpha = 45^\circ$). Масою бруска AB знехтувати.

Варіант 9. Вантаж D ($m = 1,2$ кг), пройшовши без початкової швидкості по похилій площині ($\alpha = 30^\circ$) відстань $s = 0,2$ м, ударяється об недеформовану пружину, коефіцієнт жорсткості якої $c = 4,8$ Н/см. У цей же момент ($t = 0$) точка B (нижній кінець пружини) починає робити уздовж похилої площини рух за законом $x = 0,03 \sin 12t$ (м) (вісь x напрямлена уздовж похилої площини вниз).

Варіант 10. Вантаж D ($m = 1$ кг) прикріплюють до середини абсолютно твердого бруска AB , що з'єднує кінці двох однакових паралельних пружин, не надаючи початкової швидкості; пружини не деформовані. Коефіцієнти жорсткості обох пружин $c = 1,5$ Н/см. Опір рухові вантажу пропорційний швидкості: $R = 8v$ (Н), де v – швидкість (м/с); $\alpha = 60^\circ$. Масою бруска AB і масою прикріпленої до бруска частини демпфера знехтувати.

Варіанти 11–15 (рис. 2.9)

Вантаж D масою m прикріплено до кінця невагомому стрижня, що може обертатися в горизонтальній площині навколо осі E . Вантаж з'єднаний із пружиною або із системою пружин; вертикальне положення стрижня відповідає недеформованим пружинам. Уважаючи, що вантаж D , прийнятий за матеріальну точку, рухається по прямій, визначити рівняння руху цього вантажу.

Рух віднести до осі x , за початок відліку вибрати точку, що відповідає положенню спокою вантажу (при недеформованих пружинах).

Варіант 11. Вантаж D ($m = 2,4 \text{ кг}$) з'єднаний із точкою F бруска AB , що зв'язує кінці двох паралельних пружин, коефіцієнти жорсткості яких $c_1 = 1 \text{ Н/см}$ і $c_2 = 1,4 \text{ Н/см}$. Точка F перебуває на відстанях a і b від осей пружин: $a/b = c_2/c_1$.

Вантаж D відхиляють на величину $l = 2 \text{ см}$ вліво від положення, що відповідає вертикальному положенню стрижня, і відпускають без початкової швидкості. Опір рухові вантажу пропорційний швидкості: $R = 6v$ (Н), де v – швидкість (м/с). Масою абсолютно твердого бруска AB і масою демпфера знехтувати.

Варіант 12. У деякий момент часу вантаж D ($m = 3 \text{ кг}$), утримуваний у положенні, при якому пружина стиснута на величину $l = 2 \text{ см}$, відпускають без початкової швидкості. Коефіцієнт жорсткості пружини $c = 9 \text{ Н/см}$. Одночасно ($t = 0$) точка B (правий кінець пружини) починає рухатися за законом $x = 1,2 \sin 8t$ (см) (вісь x напрямлена горизонтально вліво).

Варіант 13. Вантаж D ($m = 1 \text{ кг}$) прикріплений до кінця пружини, яка має коефіцієнт жорсткості $c_1 = 12 \text{ Н/см}$ і з'єднана іншим кінцем із точкою F бруска AB . Брусок AB зв'язує кінці двох паралельних пружин, коефіцієнт жорсткості кожної з яких $c = 3 \text{ Н/см}$. Точка F перебуває на рівних відстанях від осей паралельних пружин. Вантажу при вертикальному положенні стрижня надають швидкості $v_0 = 0,5 \text{ м/с}$, напрямленої вправо.

Опір рухові вантажу пропорційний швидкості: $R = 12v$ (Н), де v – швидкість (м/с).

Шток демпфера пропущений через отвір у невагомому бруску AB і з'єднаний з вантажем D .

Варіант 14. Вантаж D ($m = 1,5 \text{ кг}$) прикріплений однією стороною до кінця пружини, що має коефіцієнт жорсткості $c_1 = 4,4 \text{ Н/см}$, а іншою стороною – до кінця двох послідовно з'єднаних пружин, коефіцієнти жорсткості яких $c_2 = 2 \text{ Н/см}$, $c_3 = 8 \text{ Н/см}$.

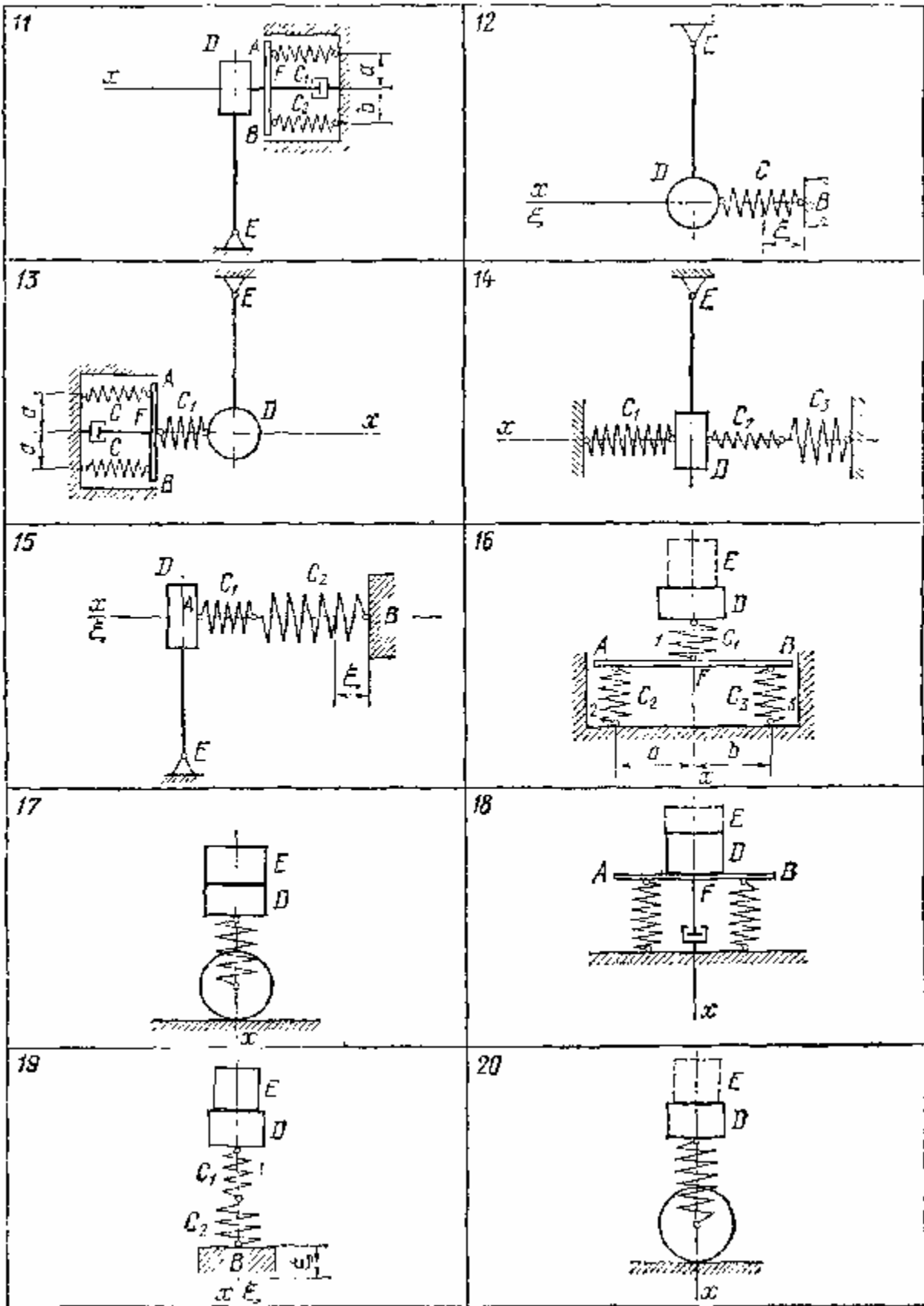


Рис. 2.9

Вантаж відхиляють на величину $l = 2,5 \text{ см}$ уліво від його положення, що відповідає вертикальному положенню стрижня, і відпускають, одночасно надаючи вантажу початкової швидкості $v_0 = 0,4 \text{ м/с}$, напрямленої вправо.

Варіант 15. Вантаж D ($m = 1 \text{ кг}$) прикріплений до кінця A послідовно з'єднаних пружин. Інший кінець пружин B рухається за законом: $x = 1,8 \sin 12t$ (см) (вісь x напрямлена горизонтально вліво). Коефіцієнти жорсткості пружин: $c_1 = 4 \text{ Н/см}$, $c_2 = 12 \text{ Н/см}$. При $t = 0$ вантаж перебував у положенні спокою, що відповідає недеформованим пружинам.

Варіанти 16-20 (рис. 2.9)

Знайти рівняння руху вантажу D масою m_D (варіанти 17 і 19) або системи вантажів D і E масами m_D і m_E (варіанти 16, 18, 20), віднісши рух до осі x ; початок відліку пов'язати з положенням спокою вантажу D або відповідно системи вантажів D і E (при статичній деформації пружин). Передбачається, що вантажі D і E при спільному русі не відділяються.

Варіант 16. Пружина 1, на якій знаходиться в стані спокою вантаж D ($m_D = 10 \text{ кг}$), спирається в точці F на брусок AB , що з'єднує кінці двох паралельних пружин 2 і 3. Коефіцієнти жорсткості пружин 1, 2 і 3: $c_1 = 200 \text{ Н/см}$, $c_2 = 160 \text{ Н/см}$, $c_3 = 140 \text{ Н/см}$.

Точка F перебуває на відстанях a і b від осей пружин 2 і 3: $a/b = c_3/c_2$.

У деякий момент часу на вантаж D установлюють вантаж E ($m_E = 20 \text{ кг}$); одночасно системі вантажів надають швидкості $v_0 = 0,4 \text{ м/с}$, напрямлену вниз.

Масою абсолютно твердого бруска AB знехтувати.

Варіант 17. У деякий момент часу вантаж E знімають із вантажу D (обидва вантажі перебувають в стані спокою, що відповідає статичній деформації пружини). Колова частота власних коливань системи вантажів D і E на пружині $w = 20 \text{ с}^{-1}$, відношення мас $m_D/m_E = 2/3$.

Варіант 18. Статична деформація кожної із двох однакових паралельних пружин під дією вантажу D ($m_D = 20 \text{ кг}$) дорівнює $x_{cm D} = 2 \text{ см}$. У деякий момент часу на вантаж D установлюють вантаж E ($m_E = 10 \text{ кг}$). Опір рухові вантажів пропорційний швидкості: $R = 60\sqrt{3}v$ (Н), де v – швидкість (м/с). Масою абсолютно твердого бруска AB і масою частини демпфера, пов'язаної з ним, знехтувати.

Варіант 19. Два вантажі D й E ($m_D = 15 \text{ кг}$, $m_E = 25 \text{ кг}$) знаходяться в стані спокою на послідовно з'єднаних пружинах з коефіцієнтами жорсткості $c_1 = 250 \text{ Н/см}$, $c_2 = 375 \text{ Н/см}$. У момент, коли знімають вантаж E , точка

упору пружин B починає рухатися за законом $x = 0,5 \sin 30t$ (см) (вісь x напрямлена вертикально вниз).

Варіант 20. На вантаж D , що перебуває в стані спокою, який відповідає статичній деформації пружини, у деякий момент часу встановлюють вантаж E . У цей же момент часу системі двох вантажів надають швидкості $v_0 = 0,3$ м/с, напрямленої вниз. Колова частота власних коливань вантажу D на пружині $w = 21$ с⁻¹, відношення мас $m_E/m_D = 3$.

Варіанти 21-25 (рис. 2.10)

Знайти рівняння руху вантажу D масою m по гладкій похилій площині, що утворює з горизонтом кут α , віднісши рух до осі x ; за початок відліку вибрати положення спокою вантажу (при статичній деформації пружин).

Варіант 21. У деякий момент часу вантаж D ($m = 2$ кг) прикріплюють до кінців недеформованих пружин, що мають коефіцієнти жорсткості $c_1 = 7$ Н/см, $c_2 = 3$ Н/см; одночасно вантажу надають швидкості $v_0 = 0,4$ м/с, напрямленої уздовж похилої площини ($\alpha = 45^\circ$) вниз.

Варіант 22. Вантаж D перебуває на похилій площині ($\alpha = 30^\circ$) у стані спокою, що відповідає статичній деформації пружини $x_{cm} = 2$ см. У деякий момент часу ($t = 0$) точка B (верхній кінець пружини) починає рухатися за законом $x = 0,01 \sin 10t$ (см) (вісь x напрямлена уздовж похилої площини вниз).

Варіант 23. Вантаж D ($m = 3$ кг) прикріплюють до точки F бруска AB , що з'єднує кінці двох недеформованих паралельних пружин, і відпускають без початкової швидкості. Коефіцієнти жорсткості пружин $c_1 = 2$ Н/см, $c_2 = 4$ Н/см. Точка F перебуває на відстанях a і b від осей пружини: $a/b = c_2/c_1$; $\alpha = 60^\circ$.

Опір рухові вантажу пропорційний швидкості: $R = 12v$ (Н), де v – швидкість (м/с). Масою бруска AB і масою демпфера знехтувати.

Варіант 24. У деякий момент часу вантаж D ($m = 1$ кг) прикріплюють до кінця A недеформованих послідовно з'єднаних пружин з коефіцієнтами жорсткості $c_1 = 12$ Н/см, $c_2 = 4$ Н/см і відпускають без початкової швидкості.

Одночасно ($t = 0$) інший кінець пружин B починає рухатися за законом $x = 1,5 \sin 10t$ (см). Вісь x напрямлена уздовж похилої площини вниз ($\alpha = 30^\circ$).

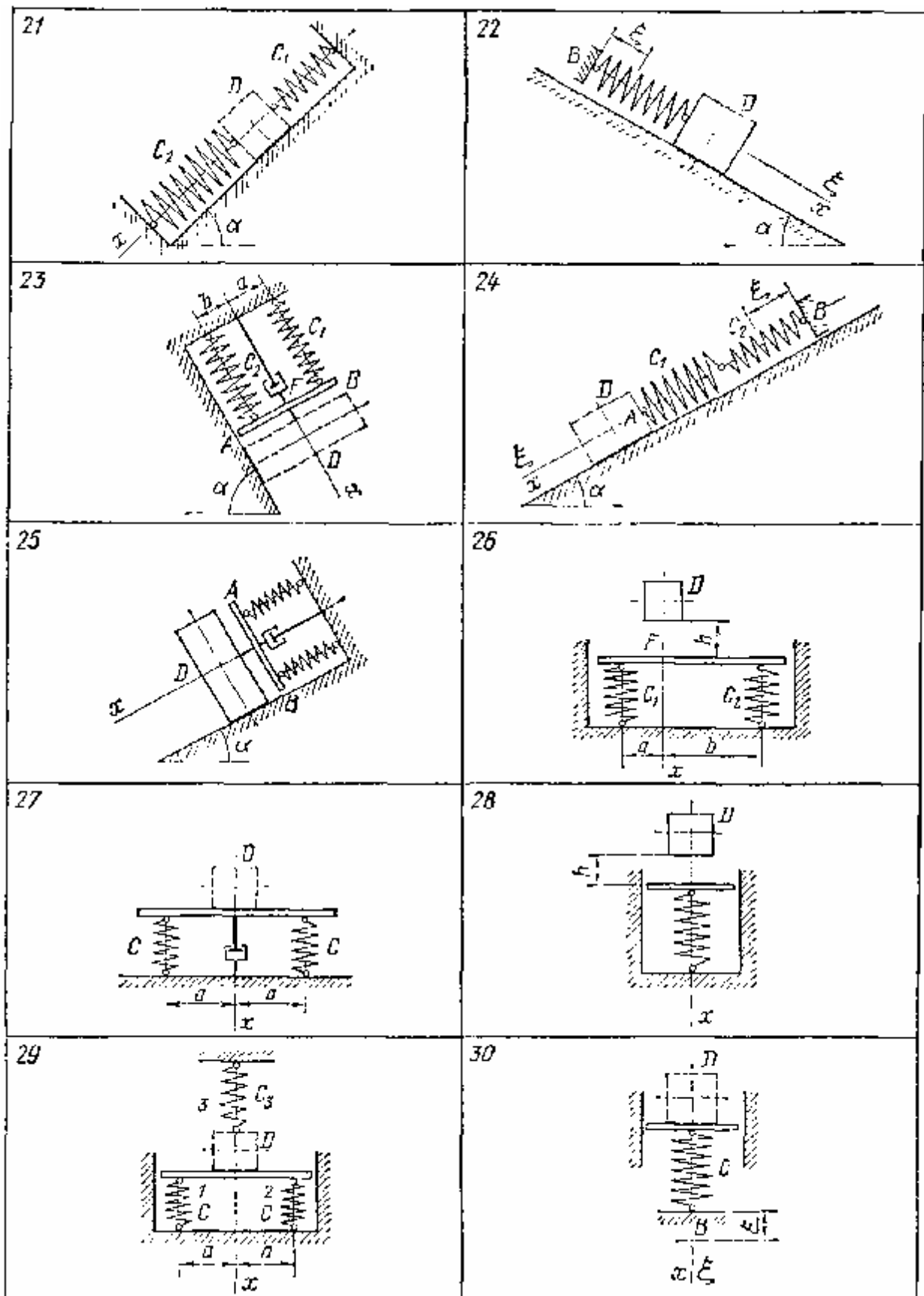


Рис. 2.10

Варіант 25. Кінці двох однакових паралельних пружин з'єднані бруском AB . Статична деформація кожної із пружин під дією вантажу D ($m = 1,5 \text{ кг}$), що перебуває на похилій площині ($\alpha = 30^\circ$), $x_{cm} = 4,9 \text{ см}$. У деякий момент вантажу D надають швидкості $v_0 = 0,3 \text{ м/с}$, напрямленої вгору уздовж похилої площини. Опір рухові вантажу пропорційний швидкості вантажу: $R = 6v$ (H), де v – швидкість ($м/с$).

Масою абсолютно твердого бруска AB і масою частини демпфера, пов'язаної із бруском, знехтувати.

Варіанти 26-30 (рис. 2.10)

Нехтуючи масою плити й уважаючи її абсолютно твердою, знайти рівняння руху вантажу D масою m з моменту стикання його із плитою, припускаючи, що при подальшому русі вантаж від плити не відділяється.

Рух вантажу віднести до осі x , прийнявши за початок відліку положення спокою цього вантажу (при статичній деформації пружин).

Варіант 26. Плита лежить на двох паралельних пружинах, що мають коефіцієнти жорсткості $c_1 = 600 \text{ Н/см}$, $c_2 = 400 \text{ Н/см}$. Вантаж D ($m = 50 \text{ кг}$) падає без початкової швидкості з висоти $h = 0,1 \text{ м}$ у точку F плити, що перебуває на відстанях a і b від осей пружини: $a/b = c_2/c_1$.

Варіант 27. Коефіцієнт жорсткості кожної із двох паралельних пружин, на яких лежить плита, $c = 130 \text{ Н/см}$. Вантаж D ($m = 40 \text{ кг}$) установлюють на середину плити і відпускають без початкової швидкості при недеформованих пружинах. Опір рухові вантажу пропорційний швидкості: $R = 400v$ (H), де v – швидкість ($м/с$). Масою плити й демпфера знехтувати.

Варіант 28. Вантаж D падає на плиту з висоти $h = 5 \text{ см}$. Статична деформація пружини під дією цього вантажу $x_{cm} = 1 \text{ см}$.

Варіант 29. Плита лежить на двох однакових паралельних пружинах 1 і 2, коефіцієнти жорсткості яких $c_1 = c_2 = c = 400 \text{ Н/см}$. У деякий момент часу вантаж D ($m = 200 \text{ кг}$) установлюють на середину плити і одночасно прикріплюють до недеформованої пружини 3, що має коефіцієнт жорсткості $c_3 = 200 \text{ Н/см}$. У той же момент часу (при недеформованих пружинах) вантажу надають швидкості $v_0 = 0,6 \text{ м/с}$, напрямленої вниз.

Варіант 30. У деякий момент часу вантаж D ($m = 100 \text{ кг}$) установлюють на плиту й відпускають (при недеформованій пружині) без початкової швидкості. У цей же момент часу точка B (нижній кінець пружини) починає рухатися по вертикалі за законом $x = 0,5 \sin 20t$ ($см$) (вісь x напрямлена вниз). Коефіцієнт жорсткості пружини $c = 2000 \text{ Н/см}$.

Варіанти 31-35 (рис. 2.11)

Знайти рівняння руху вантажу D масою m по гладкій похилій площині, що складає з горизонтом кут α , з моменту дотику вантажу із пружиною або із системою пружин, припускаючи, що при подальшому русі вантаж від пружин не відділюється. Рух вантажу віднести до осі x , прийнявши за початок відліку положення спокою вантажу (при статичній деформації пружин).

Варіант 31. Пройшовши без початкової швидкості по похилій площині ($\alpha = 45^\circ$) відстань $s = 0,2$ м, вантаж D ($m = 5$ кг) ударяється в недеформовані, послідовно з'єднані пружини, що мають коефіцієнти жорсткості $c_1 = 36$ Н/см і $c_2 = 18$ Н/см.

Варіант 32. У деякий момент часу вантаж D ($m = 3$ кг) приєднують без початкової швидкості до кінця A недеформованих послідовно з'єднаних пружин, що мають коефіцієнти жорсткості $c_1 = 24$ Н/см і $c_2 = 12$ Н/см. У той же момент часу ($t = 0$) інший кінець пружин B починає рухатися уздовж похилої площини ($\alpha = 60^\circ$) за законом $x = 0,03 \sin 10t$ (м) (вісь x напрямлена вздовж похилої площини вниз).

Варіант 33. Дві паралельні пружини 1 і 2 з коефіцієнтами жорсткості $c_1 = 8$ Н/см і $c_2 = 12$ Н/см з'єднані абсолютно твердим бруском AB , до точки K якого прикріплена пружина 3 з коефіцієнтом жорсткості $c_3 = 18$ Н/см. Точка K перебуває на відстанях a і b від осей пружин 1 і 2, $a/b = c_2/c_1$. Пружини 1, 2 і 3 не деформовані. Вантаж D ($m = 2$ кг) приєднують до кінця N пружини 3, у той же момент вантажу D надають швидкості $v_0 = 0,7$ м/с, напрямленої вниз паралельно похилій площині ($\alpha = 45^\circ$). Масою бруска AB знехтувати.

Варіант 34. Вантаж D ($m = 1,5$ кг), пройшовши без початкової швидкості по похилій площині ($\alpha = 30^\circ$) відстань $s = 0,3$ м, ударяється об недеформовану пружину, коефіцієнт жорсткості якої $c = 4,8$ Н/см. У цей же момент ($t = 0$) точка B (нижній кінець пружини) починає робити уздовж похилої площини рух за законом $x = 0,02 \sin 20t$ (м) (вісь x напрямлена уздовж похилої площини вниз).

Варіант 35. Вантаж D ($m = 1,2$ кг) прикріплюють до середини абсолютно твердого бруска AB , що з'єднує кінці двох однакових паралельних пружин, не надаючи початкової швидкості; пружини не деформовані. Коефіцієнти жорсткості обох пружин $c = 1,8$ Н/см. Опір рухові вантажу пропорційний швидкості: $R = 6v$ (Н), де v – швидкість (м/с); $\alpha = 60^\circ$. Масою бруска AB і масою прикріпленої до бруска частини демпфера знехтувати.

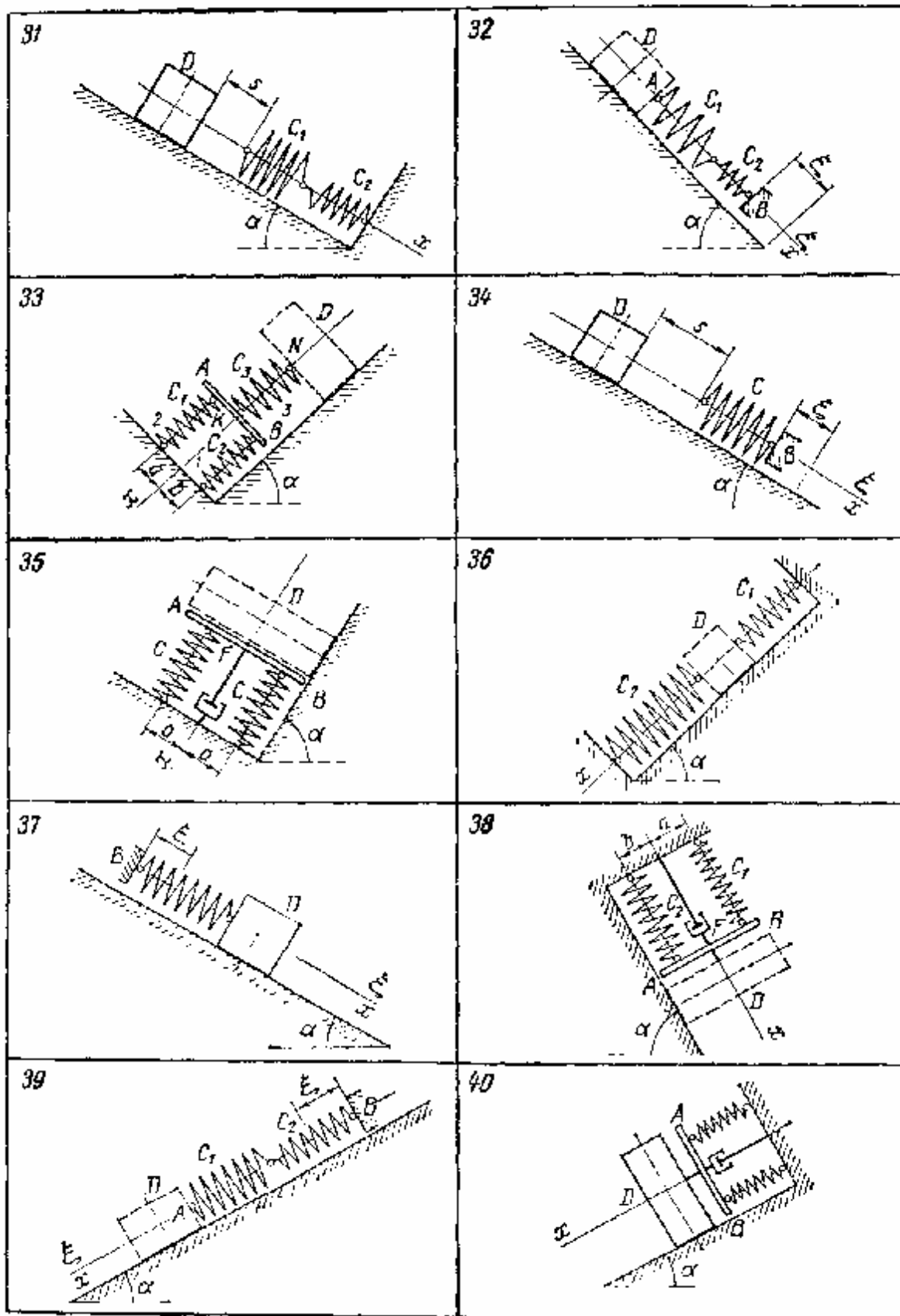


Рис. 2.11

Варіанти 36-40 (рис. 2.11)

Знайти рівняння руху вантажу D масою m по гладкій похилій площині, що утворює з горизонтом кут α , віднісши рух до осі x ; за початок відліку вибрати положення спокою вантажу (при статичній деформації пружин).

Варіант 36. У деякий момент часу вантаж D ($m = 1,3 \text{ кг}$) прикріплюють до кінців недеформованих пружин, що мають коефіцієнти жорсткості $c_1 = 8 \text{ Н/см}$, $c_2 = 6 \text{ Н/см}$; одночасно вантажу надають швидкості $v_0 = 0,5 \text{ м/с}$, напрямленої уздовж похилої площини ($\alpha = 45^\circ$) вниз.

Варіант 37. Вантаж D перебуває на похилій площині ($\alpha = 45^\circ$) у стані спокою, що відповідає статичній деформації пружини $x_{cm} = 3 \text{ см}$. У деякий момент часу ($t = 0$) точка B (верхній кінець пружини) починає рухатися за законом $x = 0,03 \sin 20t$ (см) (вісь x напрямлена уздовж похилої площини вниз).

Варіант 38. Вантаж D ($m = 2,5 \text{ кг}$) прикріплюють до точки F бруска AB , що з'єднує кінці двох недеформованих паралельних пружин, і відпускають без початкової швидкості. Коефіцієнти жорсткості пружин $c_1 = 4 \text{ Н/см}$, $c_2 = 8 \text{ Н/см}$. Точка F перебуває на відстанях a і b від осей пружини: $a/b = c_2/c_1$; $\alpha = 45^\circ$.

Опір рухові вантажу пропорційний швидкості: $R = 10v$ (Н), де v – швидкість (м/с). Масою бруска AB і масою демпфера знехтувати.

Варіант 39. У деякий момент часу вантаж D ($m = 1,4 \text{ кг}$) прикріплюють до кінця A недеформованих послідовно з'єднаних пружин з коефіцієнтами жорсткості $c_1 = 20 \text{ Н/см}$, $c_2 = 10 \text{ Н/см}$ і відпускають без початкової швидкості.

Одночасно ($t = 0$) інший кінець пружин B починає рухатися за законом $x = \sin 15t$ (см). Вісь x напрямлена уздовж похилої площини вниз ($\alpha = 30^\circ$).

Варіант 40. Кінці двох однакових паралельних пружин з'єднані бруском AB . Статична деформація кожної із пружин під дією вантажу D ($m = 2 \text{ кг}$), що перебуває на похилій площині ($\alpha = 30^\circ$), $x_{cm} = 9,8 \text{ см}$. У деякий момент вантажу D надають швидкості $v_0 = 1 \text{ м/с}$, напрямленої вгору уздовж похилої площини. Опір рухові вантажу пропорційний швидкості вантажу: $R = 8v$ (Н), де v – швидкість (м/с).

Масою абсолютно твердого бруска AB і масою частини демпфера, пов'язаної із бруском, знехтувати.

Примітка. У варіантах 5, 7, 9, 12, 15, 19, 22, 24, 30, 32, 34, 37, 39 положення початку відліку на осі x відповідає середньому положенню точки B ($x = 0$).

Приклад виконання завдання (рис. 2.12)

Два вантажі D і E масами $m_D = 2 \text{ кг}$ і $m_E = 3 \text{ кг}$ лежать на гладкій площині, нахиленій під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту, спираючись на пружину з коефіцієнтом жорсткості $c = 6 \text{ Н/см} = 600 \text{ Н/м}$.

У деякий момент часу вантаж E забирають; одночасно ($t = 0$) нижній кінець пружини B починає рухатися уздовж похилої площини за законом $x = 0,02 \sin 10t$ (м). Знайти рівняння руху вантажу D .

Розв'язання

Застосуємо до розв'язання задачі диференціальні рівняння руху точки. Пов'яжемо початок координатної системи з положенням спокою вантажу D , що відповідає статичній деформації пружини, за умови, що точка B займає своє середнє положення ($x = 0$).

Направимо вісь x вгору уздовж похилої площини (у бік руху вантажу D після зняття вантажу E). Рух вантажу D визначається згідно наступного диференціального рівняння:

$$m_D \ddot{x} = \sum_i F_i,$$

де $\sum_i F_i$ – сума проекцій на вісь x сил, що діють на вантаж D (рис. 2.12, а):

\vec{P}_D – ваги, \vec{N} – нормальної реакції похилої площини, \vec{F} – сили пружності пружини.

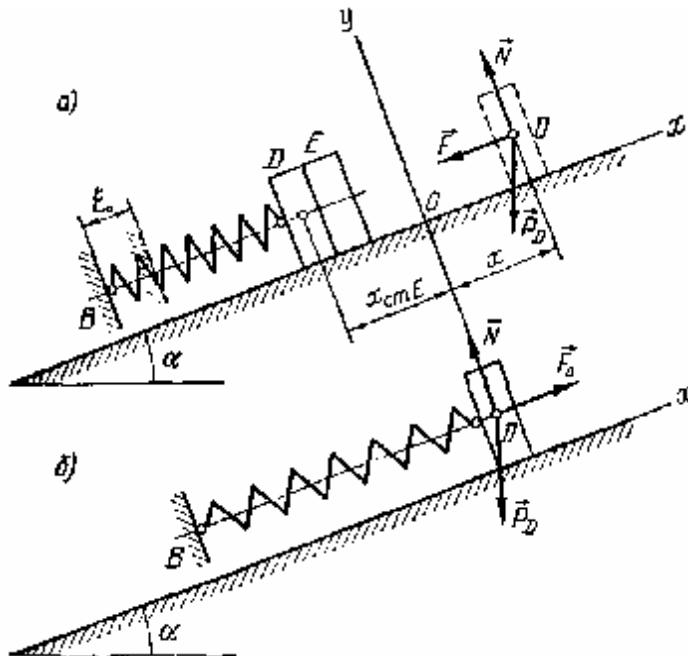


Рис. 2.12

Таким чином,

$$m_D \ddot{x} = -P_D \sin a + F.$$

Тут

$$F = -c(x - x_{cm D} - x_0),$$

де $x_{cm D}$ – статична деформація пружини під дією вантажу D , x – переміщення точки кріплення нижнього кінця пружини, що відбувається за законом $x = d \sin pt$ ($d = 0,02$ м, $p = 10$ с⁻¹).

Статичну деформацію пружини $x_{cm D}$ знайдемо з рівняння, що відповідає стану спокою вантажу D на похилій площині (рис. 2.12, б):

$$\sum_i F_i = 0; \quad -P_D \sin a + F_0 = 0,$$

тобто

$$-P_D \sin a + cx_{cm D} = 0, \quad x_{cm D} = \frac{P_D \sin a}{c}.$$

Диференціальне рівняння руху вантажу D набуде вигляду

$$m_D \ddot{x} = -P_D \sin a - c(x - x_{cm D} - x_0)$$

або після перетворення:

$$m_D \ddot{x} + cx = cd \sin pt.$$

Поділивши всі члени рівняння на m_D й увівши позначення

$$c/m_D = w^2, \quad cd/m_D = H,$$

зведемо диференціальне рівняння до наступного вигляду:

$$\ddot{x} + w^2 x = H \sin pt.$$

Розв'язок цього лінійного неоднорідного рівняння складається із загального розв'язку $x_{з.о.}$ відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку $x_{ч.н.}$ даного неоднорідного рівняння:

$$x = x_{з.о.} + x_{ч.н.}$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$x_{з.о.} = C_1 \cos wt + C_2 \sin wt.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$x_{ч.н.} = \frac{H}{w^2 - p^2} \sin pt.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$x = C_1 \cos wt + C_2 \sin wt + \frac{H}{w^2 - p^2} \sin pt.$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 і C_2 знайдемо, крім того, рівняння для \dot{x} :

$$\dot{x} = -C_1 w \sin wt + C_2 w \cos wt + \frac{pH}{w^2 - p^2} \cos pt$$

і використаємо початкові умови задачі.

Розглядуваний рух починається в момент ($t=0$), коли деформація пружини є статичною деформацією під дією вантажів D і E . При вибраному положенні початку відліку O початкова координата вантажу D дорівнює $x_0 = -x_{cm E}$, причому $x_{cm E} = \frac{P_E \sin a}{c}$ – статична деформація пружини під дією вантажу E .

Таким чином, при $t = 0$

$$x_0 = -\frac{P_E \sin a}{c}, \quad \dot{x}_0 = 0.$$

Складемо рівняння $x = x(t)$ і $\dot{x} = \dot{x}(t)$ для $t = 0$:

$$x_0 = C_1; \quad \dot{x}_0 = C_2 w + \frac{pH}{w^2 - p^2},$$

звідки

$$C_1 = -x_{cm E}, \quad C_2 = -\frac{pH}{w(w^2 - p^2)}.$$

Рівняння руху вантажу D має наступний вигляд:

$$x = -x_{cm E} \cos wt - \frac{pH}{w(w^2 - p^2)} \sin wt + \frac{H}{w^2 - p^2} \sin pt.$$

Знайдемо числові значення величин, які входять у рівняння:

$$w = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{600}{2}} = 17,3 \text{ c}^{-1};$$

$$x_{cm E} = \frac{P_E \sin a}{c} = \frac{3 \cdot 9,81 \cdot 0,5}{600} = 0,0245 \text{ м};$$

$$\frac{H}{w^2 - p^2} = \frac{cd}{m_D(w^2 - p^2)} = \frac{600 \cdot 0,02}{2(300 - 100)} = 0,03 \text{ м};$$

$$\frac{pH}{w(w^2 - p^2)} = \frac{0,03 \cdot 10}{17,3} = 0,0173 \text{ м}.$$

Отже, рівняння руху вантажу D :

$$x = -2,45 \cos 17,3t - 1,73 \sin 17,3t + 3 \sin 10t \text{ (см)}.$$

РОЗДІЛ 3. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

3.1. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки

При інтегруванні диференціальних рівнянь руху в конкретних задачах ці рівняння піддаються різним одностипним перетворенням, що залежать від характеру діючих сил. Тому доцільно проробити такі перетворення в загальному виді. Загальні теореми динаміки точки і являють собою перетворення диференціальних рівнянь руху, причому в різних теоремах виділені й пов'язані між собою ті чи інші характеристики рухів. У результаті отримуються зручні залежності, які широко використовуються для розв'язання конкретних задач динаміки.

З основного закону динаміки (В1) випливає, що

$$d(m\dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{F}}dt. \quad (3.1)$$

Вектор $\dot{\mathbf{Q}} = m\dot{\mathbf{v}}$, який дорівнює добутку маси точки на її швидкість, називається *кількістю руху матеріальної точки*.

Добуток сили на елементарний проміжок часу її дії, тобто $\dot{\mathbf{F}}dt$, називається *елементарним імпульсом сили*.

Рівняння (3.1) виражає теорему про зміну кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі: *елементарна зміна кількості руху матеріальної точки дорівнює елементарному імпульсу сили, прикладеної до цієї точки*.

Розглянемо тепер рух матеріальної точки на скінченному проміжку часу. Нехай у момент $t = t_0$ швидкість точки дорівнює $\dot{\mathbf{v}}_0$, а в момент t дорівнює $\dot{\mathbf{v}}$. Тоді, інтегруючи рівняння (3.1), можна записати

$$m\dot{\mathbf{v}} - m\dot{\mathbf{v}}_0 = \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{F}}dt. \quad (3.2)$$

Інтеграл $\dot{\mathbf{S}} = \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{F}}dt$, що входить у праву частину цього співвідношення,

називається *імпульсом сили за проміжок часу $[t_0, t]$* . Таким чином, ми отримали формулювання теореми про зміну кількості руху в інтегральній формі: *зміна кількості руху матеріальної точки за скінчений проміжок часу дорівнює імпульсу сили, прикладеної до точки, за той же проміжок часу*.

Якщо скористатися декартовою системою координат, то матимемо

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = \int_{t_0}^t F_x dt, \quad m\dot{y} - m\dot{y}_0 = \int_{t_0}^t F_y dt, \quad m\dot{z} - m\dot{z}_0 = \int_{t_0}^t F_z dt, \quad (3.3)$$

де $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ – проекції швидкості матеріальної точки на осі координат у момент часу t , x_0, y_0, z_0 – ті ж проекції в момент t_0 , F_x, F_y, F_z – проекції сили \dot{F} .

Як відмічалось в підрозділі 1.1, у загальному випадку сила \dot{F} (а, отже, і її проекції) може бути функцією часу, координат точки і швидкості:

$$\begin{aligned} F_x &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ F_y &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ F_z &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Тому для фактичного обчислення інтегралів у правих частинах рівнянь (3.3) потрібно знати координати матеріальної точки як функції часу. Але визначення x, y і z як функцій часу і є те, до чого ми прагнемо, розв'язуючи другу задачу динаміки. Якщо ці функції звідкись відомі, то відпадає необхідність користуватися рівняннями (3.3). Таким чином, у загальному випадку теорема про зміну кількості руху нових можливостей для розв'язання оберненої задачі динаміки не відкриває.

Однак, якщо сила є функцією тільки часу, інтеграли в правих частинах рівнянь (3.4) можуть бути обчислені й можна знайти $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, а зінтегрувавши ще раз – рівняння руху $x(t), y(t), z(t)$.

3.2. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки

Знову повернемося до основного рівняння динаміки, записаного тепер у вигляді (B2), і помножимо його векторно зліва на радіус-вектор точки $\dot{\mathbf{r}}$, що визначає положення матеріальної точки відносно деякої точки O , яку будемо називати центром:

$$\dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{F}}. \quad (3.5)$$

Беручи до уваги, що $\dot{\mathbf{w}} = d\dot{\mathbf{v}}/dt$, перетворимо ліву частину цього рівняння в наступним чином:

$$\dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{r}} \times m \frac{d\dot{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{v}}) - \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} \times m\dot{\mathbf{v}}. \quad (3.6)$$

Але $d\dot{\mathbf{r}}/dt = \dot{\mathbf{v}}$, і векторний добуток паралельних векторів $\dot{\mathbf{v}} \times m\dot{\mathbf{v}}$ дорівнює нулю. Тому $\dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{w}} = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{v}})$ і рівняння (3.5) можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{v}}) = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{F}}. \quad (3.7)$$

Вектор $\dot{K}_O = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}$ називається *моментом кількості руху матеріальної точки* відносно центра (точки O), а вектор $\dot{M}_O = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{F}}$ – *моментом сили*, прикладеної до точки, відносно центра.

Таким чином,

$$\frac{d\dot{K}_O}{dt} = \dot{M}_O. \quad (3.8)$$

Це рівняння виражає собою теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки: *похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно деякого центра дорівнює моменту сили, прикладеної до точки, відносно того ж центра.*

Векторне рівняння (3.8) еквівалентно трьом скалярним рівностям.

Приймаючи точку O за початок системи координат $Oxyz$ і записуючи векторні добутки у вигляді визначників третього порядку, замість (3.8) одержуємо

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \quad (3.9)$$

звідки

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} (y\dot{z} - z\dot{y}) &= yF_z - zF_y, \\ m \frac{d}{dt} (z\dot{x} - x\dot{z}) &= zF_x - xF_z, \\ m \frac{d}{dt} (x\dot{y} - y\dot{x}) &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отриманий результат можна сформулювати в такий спосіб: *похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно якої-небудь осі дорівнює моменту сили, прикладеної до точки, відносно тієї ж самої осі.*

Як видно з рівнянь (3.10), при їхньому інтегруванні необхідне обчислення інтегралів від правих частин. Однак обчислення цих інтегралів можливо тільки тоді, коли x , y і z відомі як функції часу, але тоді відпадає взагалі потреба в застосуванні рівностей (3.10).

Проте існують випадки, коли теорема про зміну моменту кількості руху дає можливість ефективно розв'язувати задачі динаміки.

До них належить, насамперед, випадок дії *центральної сили*. Цим терміном ми будемо користуватися стосовно будь-якої сили, лінія дії якої проходить через деяку фіксовану точку простору (полюс). Так, наприклад, при вивченні руху Землі в Сонячній системі на Землю діє сила притягання Сонця, увесь час спрямована до центра Сонця.

Вивчимо дію центральної сили. Момент сили відносно точки, через яку проходить лінія дії, тотожно дорівнює нулю. Отже, відповідно до рівності

(3.10) момент кількості руху матеріальної точки відносно полюса є сталою величиною:

$$\dot{K}_O = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \text{const.} \quad (3.11)$$

Таким чином, ми одержимо відразу три перших інтеграли руху:

$$m(y\dot{z} - z\dot{y}) = C_1, \quad m(z\dot{x} - x\dot{z}) = C_2, \quad m(x\dot{y} - y\dot{x}) = C_3. \quad (3.12)$$

На підставі цих результатів можна зробити деякі загальні висновки про характер руху матеріальної точки.

З цією метою введемо поняття секторної швидкості, яка характеризує швидкість зміни площі поверхні, що описується радіус-вектором. Вектор секторної швидкості рівний

$$\mathbf{v}_s = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}. \quad (3.13)$$

Порівнюючи (3.13) з виразом для $\dot{K}_O = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}$, можна написати інтеграл (3.11) в наступній формі:

$$\dot{K}_O = 2m\mathbf{v}_s = \text{const.} \quad (3.14)$$

Отже, у випадку центральної сили секторна швидкість є сталою величиною, тобто *радіус-вектор точки описує рівні площі за однакові проміжки часу*. Цей результат називається *законом площі*. Крім того, із (3.14) випливає, що траєкторія точки є плоскою кривою. Справді, вектор \mathbf{v}_s зберігає сталий напрямок в просторі, тому на основі формули (3.13) можна стверджувати, що вектор \mathbf{r} увесь час розташований в площині, перпендикулярній до вектора \mathbf{v}_s , тобто траєкторія точки лежить в цій площині.

3.3. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Знайдемо зв'язок між роботою сил, прикладених до матеріальної точки, і зміною швидкості точки. Для цього скористаємося основним рівнянням динаміки

$$m \frac{d\dot{\mathbf{v}}}{dt} = \mathbf{F},$$

де \mathbf{F} – рівнодійна всіх сил, прикладених до матеріальної точки. Помножимо обидві частини цієї рівності скалярно на диференціал радіуса-вектора $d\mathbf{r}$

$$m \frac{d\dot{\mathbf{v}}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.15)$$

У правій частині знаходиться *елементарна робота*¹⁾ $d'A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ рівнодійної всіх сил, прикладених до матеріальної точки; ліву частину можна представити в наступній формі:

¹⁾ Штрих означає, що $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ не є, як правило, повним диференціалом деякої функції координат $A(x, y, z)$.

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot d\mathbf{v} = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right);$$

при цьому враховано, що скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2$). Тепер рівність (3.15) матиме вигляд

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = d'A. \quad (3.16)$$

Половина добутку маси точки на квадрат її швидкості називається *кінетичною енергією* матеріальної точки

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (3.17)$$

Рівняння (3.16) дає диференціальний зв'язок між кінетичною енергією й елементарною роботою: *повний диференціал кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює елементарній роботі всіх сил, що діють на цю точку.*

Нехай тепер матеріальна точка M переміщується по кривій BC від положення M_1 до положення M_2 (див. рис. 3.1).

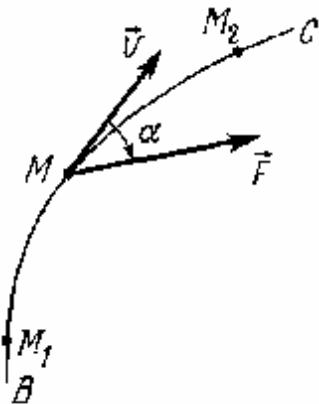


Рис. 3.1

Робота сили на скінченному переміщенні M_1M_2 визначається як сума відповідних елементарних робіт, тобто як криволінійний інтеграл від елементарної роботи, взятий вздовж дуги M_1M_2 траєкторії:

$$A = \int_{M_1M_2} d'A = \int_{M_1M_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.18)$$

Позначимо через v_1 і v_2 швидкість точки M у положеннях M_1 і M_2 відповідно та зінтегруємо обидві частини рівності (3.16) по кривій M_1M_2 :

$$\int_{M_1M_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \int_{M_1M_2} d'A.$$

Права частина цієї рівності дорівнює роботі $A_{M_1M_2}$ сили \mathbf{F} на шляху M_1M_2 ; при обчисленні лівої частини варто мати на увазі, що криволінійний інтеграл від повного диференціала деякої функції дорівнює самій функції. Таким чином, матимемо

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A, \quad (3.19)$$

тобто *зміна кінетичної енергії матеріальної точки при її скінченному переміщенні дорівнює сумі робіт на цьому переміщенні всіх сил, прикладених до точки.*

За допомогою тільки що доведеної теореми про зміну кінетичної енергії можна розв'язувати наступні дві задачі. У першій визначається швид-

кість матеріальної точки наприкінці або на початку руху. Розв'язання цієї задачі за допомогою рівності (3.19) має сенс, звичайно, тільки в тому випадку, якщо роботу всіх сил, прикладених до матеріальної точки, можна обчислити, не знаючи закону руху, тобто не інтегруючи рівняння руху. До задач другого типу належить обчислення роботи сили за заданою швидкістю. Використання формули (3.19) для розв'язання задач такого роду особливо корисно в тих випадках, коли існують труднощі, пов'язані з визначенням закону руху й обчисленням інтеграла (3.18), або коли невідомо аналітичну залежність сили.

3.4. Робота сили. Потужність

Елементарна робота сили є скалярною мірою дії сили, що дорівнює скалярному добутку $d'A = \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{r}$ сили на елементарне переміщення точки її прикладення. У випадку натурального задання руху $d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{t}} ds$. Тоді елементарна робота визначатиметься з виразу

$$d'A = \dot{\mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{t}} ds = F \cos(\dot{\mathbf{F}}, \dot{\mathbf{t}}) ds = F \cos a ds.$$

Повна робота при цьому задаватиметься криволінійним інтегралом першого роду по дузі M_1M_2

$$A = \int_{M_1M_2} F \cos a ds. \quad (3.20)$$

При координатному способі задання руху вираз (3.20) для повної роботи має вигляд

$$A = \int_{M_1M_2} \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_1M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (3.21)$$

Права частина цієї рівності є криволінійним інтегралом другого роду (всі функції F_x , F_y , F_z обчислюються на кривій M_1M_2 , а диференціали координат dx , dy , dz пов'язані між собою через її рівняння).

Якщо сила $\dot{\mathbf{F}}$ залежить тільки від положення точки, тобто від координат x , y , z точки M прикладення сили, то робота обчислюється безпосередньо за формулою (3.21) і при цьому зовсім не потрібно знати закон руху точки M по кривій. Якщо ж сила $\dot{\mathbf{F}}$ залежить не тільки від координат точки прикладення, але й від її швидкості і часу t , то для обчислення роботи слід знати рівняння руху точки

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Якщо врахувати, що $dx = \dot{x} dt$, $dy = \dot{y} dt$, $dz = \dot{z} dt$, тоді від криволінійного інтеграла (3.21) можна перейти до визначеного інтеграла

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt, \quad (3.22)$$

де t_1 і t_2 – моменти часу, в які точка M проходить положення M_1 і M_2 відповідно.

Якщо на матеріальну точку M діє кілька сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, то легко показати, що *робота рівнодійної цих сил на деякому переміщенні дорівнює сумі робіт складових сил на цьому ж переміщенні*

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n.$$

Поряд з поняттям роботи вводять також поняття *потужності сили*:

$$N = \dot{\vec{F}} \cdot \dot{\vec{v}} = F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}.$$

Обчислимо роботу сили \vec{F} від деякої фіксованої точки M_1 до точки M (див. рис. 3.1), яку точка досягає в момент часу t :

$$A(t) = \int_{t_1}^t (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt.$$

Якщо продиференціювати останню рівність за часом, то одержимо, що $N = dA/dt$. Отже, *потужність характеризує швидкість виконання роботи силою, яка прикладена до матеріальної точки*.

Одиницею вимірювання роботи в системі СІ є джоуль ($1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$), у CGS – ерг, у МКГСС – кілограм-сили-метр ($\text{кгс} \cdot \text{м}$). Для вимірювання потужності в цих системах використовують відповідно ват ($1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м/с} \approx 0,102 \text{ кгс} \cdot \text{м/с}$), ерг за секунду (ерг/с), кілограм-сили-метр за секунду ($\text{кгс} \cdot \text{м/с}$). У техніці за одиницю роботи беруть кіловат-годину ($1 \text{ кВт} \cdot \text{год} = 3600 \text{ Дж}$), за одиницю потужності – $1 \text{ кВт} = 1000 \text{ Вт}$, а також так звану кінську силу ($1 \text{ к.с.} = 75 \text{ кгс} \cdot \text{м/с} = 736 \text{ Вт}$).

Обчислимо роботу, виконувану деякими конкретними силами.

Робота сили ваги. Нехай матеріальна точка M маси m рухається по деякій траєкторії з положення M_1 в положення M_2 (див. рис. 3.2). На неї діє напрямлена вертикально вниз сила ваги $\vec{P} = m\vec{g}$, проекції якої на координатні осі запишемо у вигляді

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg.$$

Згідно (3.21) робота, виконана силою ваги підчас переміщення точки M із положення M_1 в положення M_2 , дорівнює

$$A = \int_{M_1 M_2} F_z dz = \int_{z_1}^{z_2} (-mg) dz = -mg(z_2 - z_1).$$

Оскільки різниця $z_2 - z_1$ може бути як додатною, так і від'ємною, то, позначивши $z_2 - z_1 = \pm h$ ($h > 0$), дістанемо

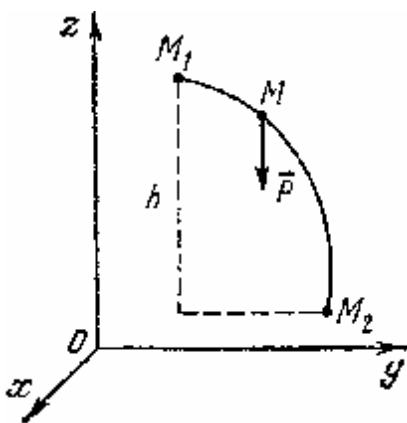


Рис. 3.2

$$A = \pm Ph = \pm mgh. \quad (3.23)$$

Отже, робота сили ваги дорівнює добутку сили ваги P на різницю висот початкового і кінцевого положень та не залежить від форми траєкторії точки.

Робота сили пружності. Обчислимо роботу, здійснену силою \dot{F} , що прикладена до точки M пружини при її деформації вздовж осі Ox . Початкове положення точки M_0 відповідає недеформованій пружині завдовжки x_0 . За законом Гука сила пружності (як при розтягненні, так і при стисненні) пропорційна зміщенню $\Delta x = x - x_0$:

$$F_x = -c\Delta x = -c(x - x_0),$$

де c – коефіцієнт жорсткості пружини (рис. 3.3, а).

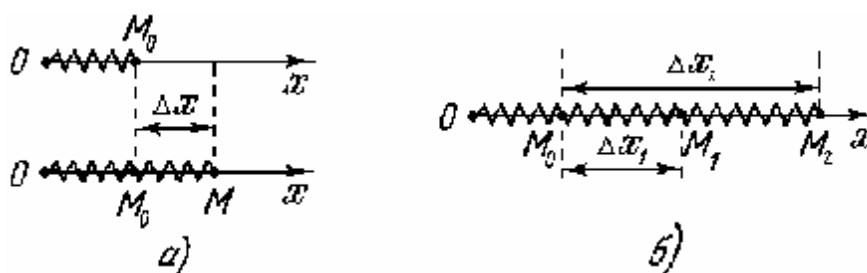


Рис. 3.3

Обчислимо роботу при переході точки з положення M_1 в положення M_2 (рис. 3.3, б). Застосовуючи формулу (3.21), отримуємо

$$A = -c \int_{x_1}^{x_2} (x - x_0) dx = -\frac{c}{2} [(x_2 - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2] = -\frac{c}{2} [(\Delta x_2)^2 - (\Delta x_1)^2]. \quad (3.24)$$

Як видно з формули (3.24) сила пружності виконуватиме додатну роботу при зменшенні деформації пружини ($|\Delta x_2| < |\Delta x_1|$) і від'ємну – при збільшенні деформації ($|\Delta x_2| > |\Delta x_1|$).

3.5. Метод кінетостатики (принцип Д'Аламбера)

Для розв'язання першої основної задачі динаміки невіЛЬНОї матеріальної точки часто ефективним є метод кінетостатики, який особливо зручний, коли потрібно визначити реакцію в'язі при заданих активних силах і законі руху.

Зміст цього методу полягає в наступному. Перепишемо диференціальне рівняння руху невіЛЬНОї матеріальної точки (В5) у вигляді

$$\dot{F} + \dot{N} + (-m\dot{w}) = 0. \quad (3.25)$$

Введемо вектор $\dot{\Phi} = -m\dot{w}$, який називають *силою інерції* (або *даламберовою силою інерції*). Тоді рівність (3.25) матиме вигляд умови рівноваги сил:

$$\dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{N}} + \dot{\mathbf{\Phi}} = 0. \quad (3.26)$$

Це рівняння і виражає принцип Д'Аламбера: для невільної матеріальної точки в кожний момент часу сума активних сил, реакцій в'язей і сил інерції дорівнює нулю. При цьому слід мати на увазі, що до матеріальної точки прикладені тільки активні сили \mathbf{F} і реакції в'язей \mathbf{R} , а сила інерції до точки не прикладена. Тому насправді рівняння (3.26) не є умовою рівноваги активних сил, реакцій в'язей і сили інерції.

Якщо на точку діє одна в'язь, то її реакція у відповідності з рівнянням (3.26) дорівнює

$$\mathbf{N} = -(\mathbf{F} + \mathbf{\Phi}).$$

Завдання для лабораторної роботи №7

Кулька, прийнята за матеріальну точку, рухається з положення A середині трубки у вертикальній площині (рис. 3.4-3.7). Знайти швидкість кульки в положеннях B і C та тиск на стінку каналу в положенні C . Тертям на криволінійних ділянках траєкторії знехтувати. У варіантах 3, 6, 7, 10, 13, 15, 17, 19, 25, 28, 29, 31, 32, 40 кулька, пройшовши шлях h_0 , відділяється від пружини.

Необхідні для виконання завдання дані наведено в табл. 3.1.

В завданні прийнято наступні позначення:

- m – маса кульки;
- v_A – початкова швидкість кульки;
- t – час руху кульки на ділянці AB (у варіантах 1, 2, 5, 8, 14, 18, 20, 21, 23, 24, 27, 30, 32, 34-36, 38-40) або на ділянці BD (у варіантах 3, 4, 6, 7, 9-13, 15-17, 19, 22, 25, 26, 28, 29, 31, 33, 37);
- f – коефіцієнт тертя ковзання кульки по стінці каналу;
- h_0 – початкова деформація пружини;
- h – величина найбільшого стиснення пружини;
- c – коефіцієнт жорсткості пружини;
- H – найбільша висота підйому вантажу;
- s – шлях, пройдений кулькою до зупинки.

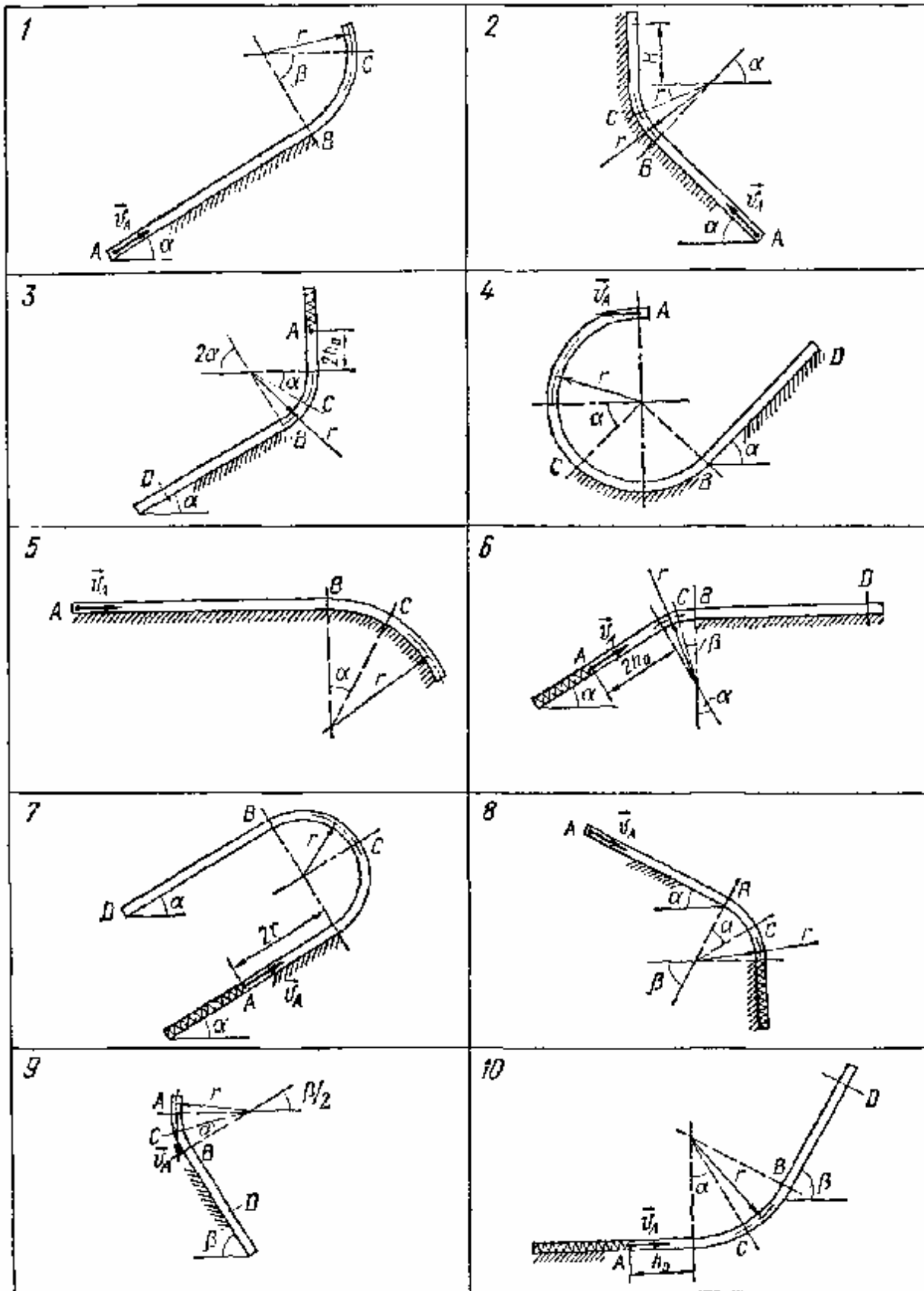


Рис. 3.4

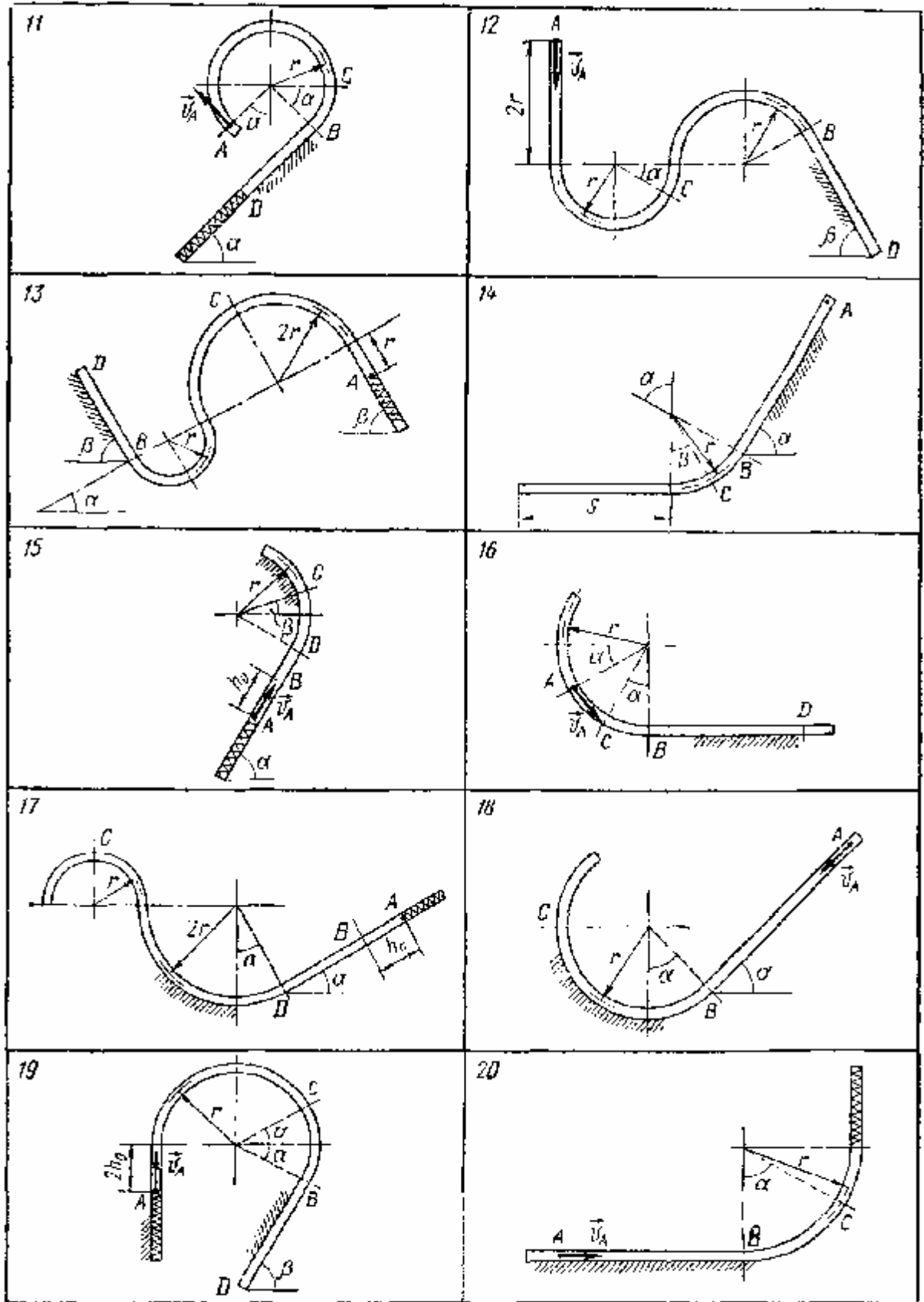


Рис. 3.5

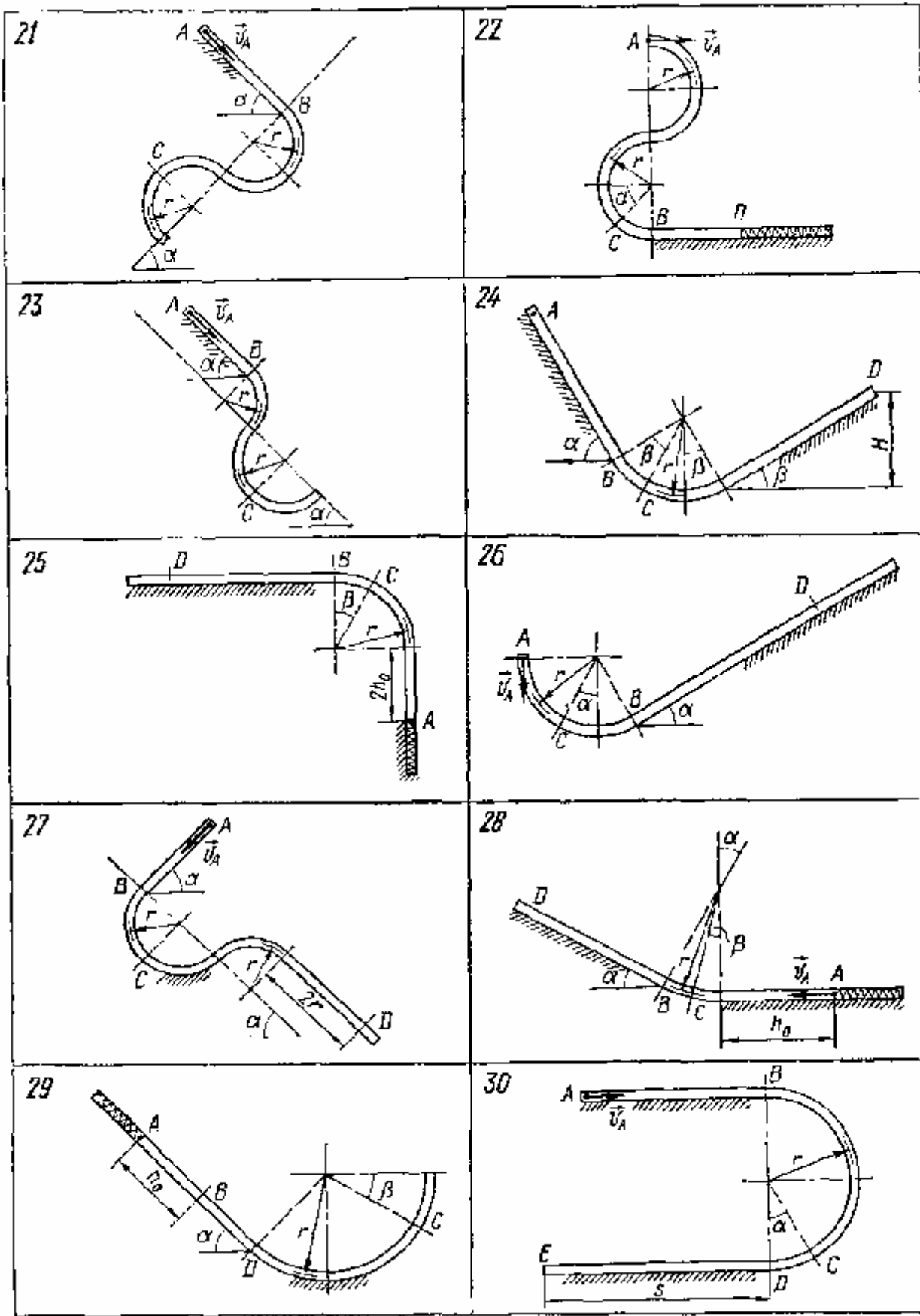


Рис. 3.6

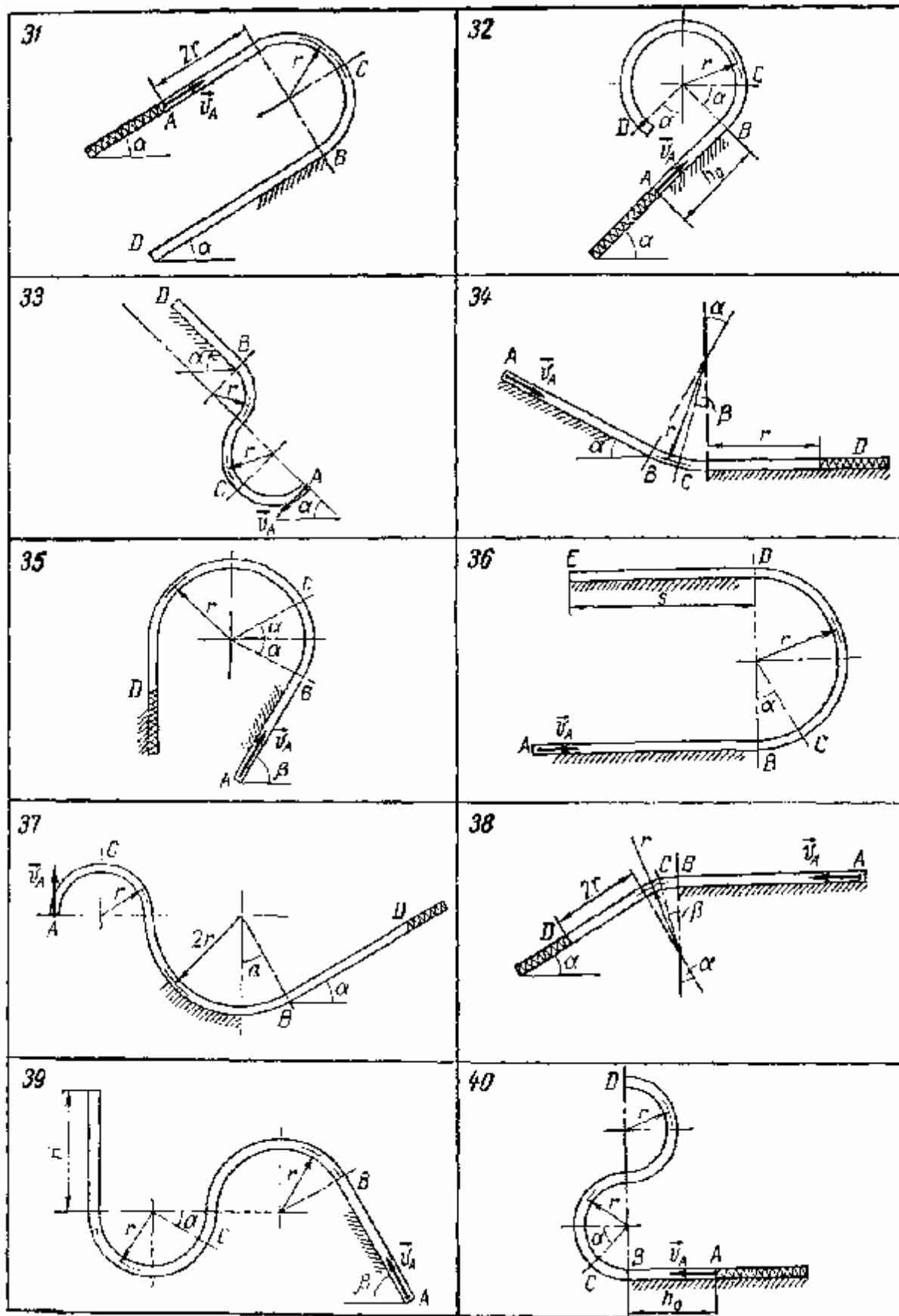


Рис. 3.7

Таблиця 3.1

Номер варіанта (рис.3.4- 3.7)	m , кг	v_A , м/с	t , с	r , м	f	a , град	b , град	h_0 , см	c , Н/см	Величини, які потріб- но визна- чити дода- тково
1	0,5	20	2,0	2,0	0,20	30	45	–	–	–
2	0,6	16	0,2	4,0	0,10	45	20	–	–	H
3	0,4	0	2,0	0,2	0,15	30	–	10	1	v_D
4	0,2	5	0,5	1,0	0,10	45	–	–	–	v_D
5	0,1	8	1,5	2,0	0,20	30	–	–	–	–
6	0,3	2	2,0	4,0	0,10	30	20	30	2	v_D
7	0,4	5	1,0	1,0	0,10	30	–	50	5	v_D
8	0,2	1	0,5	1,5	0,15	30	60	0	4	h
9	0,5	2	1,5	4,0	0,25	20	60	–	–	v_D
10	0,4	4	0,1	0,5	0,10	30	60	0,2	0,2	v_D
11	0,2	6	1,0	1,0	0,30	45	–	–	3	v_D, h
12	0,4	5	0,4	2,0	0,20	30	60	–	–	v_D
13	0,3	0	0,1	1,0	0,10	30	60	50	10	v_D
14	0,6	0	2,0	3,0	0,20	60	30	–	–	s
15	0,1	1	0,1	1,0	0,15	60	20	50	0,2	v_D
16	0,4	2	0,2	2,0	0,40	30	–	–	–	v_D
17	0,2	0	0,1	1,0	0,20	30	–	40	1,0	v_D
18	0,3	3	0,4	1,5	0,10	45	–	–	–	–
19	0,1	2	0,1	0,4	0,30	30	60	10	0,5	v_D
20	0,2	10	1,0	0,5	0,10	60	–	0	1,2	h
21	0,7	3	0,3	0,3	0,20	45	–	–	–	–
22	0,4	1	0,2	0,2	0,40	45	–	0	1,1	v_D, h
23	0,6	2	0,4	0,2	0,20	45	–	–	–	–
24	0,5	0	0,5	0,6	0,30	60	30	–	–	H
25	0,1	0	0,2	0,5	0,25	–	30	30	0,4	v_D
26	0,2	2	0,1	0,2	0,20	30	–	–	–	v_D
27	0,8	3	0,2	0,4	0,15	45	–	–	–	v_D

28	0,3	4	0,1	0,6	0,35	30	15	60	0,1	v_D
29	0,5	0	0,2	0,5	0,20	45	30	50	0,8	v_D
30	0,8	5	0,3	0,6	0,15	30	–	–	–	t_{DE}
31	0,4	20	1,0	1,0	0,10	30	–	50	5	v_D
32	0,2	16	0,6	1,0	0,30	45	–	20	3	v_D
33	0,6	2	0,5	0,2	0,20	45	–	–	–	–
34	0,4	10	0,1	0,6	0,30	30	15	60	0,1	v_D, h
35	0,2	9	0,1	0,3	0,30	30	60	10	0,5	v_D, h
36	0,5	15	0,3	0,6	0,15	30	–	–	–	t_{DE}
37	0,2	10	0,1	1,0	0,20	30	–	40	1,0	v_D, h
38	0,3	12	2,0	4,0	0,10	30	20	30	2	v_D, h
39	0,4	20	0,4	2,0	0,20	30	60	–	–	H
40	0,3	18	0,2	0,2	0,30	45	–	10	1,1	v_D

Приклад виконання завдання (рис. 3.8)

Дано: $m = 0,5$ кг; $v_A = 0,8$ м/с; $t = 0,1$ с (час руху на ділянці BD);
 $r = 0,2$ м; $f = 0,1$; $a = 60^\circ$; $b = 30^\circ$; $h_0 = 0$; $c = 10$ Н/см = 1000 Н/м.

Визначити: v_B, v_C, N_C, v_D, h .

Розв'язання

Для визначення v_B і v_C використаємо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки. Рух кульки на ділянках AC і AB траєкторії відбувається під дією сили тяжіння P (силу тертя на криволінійних ділянках не враховуємо).

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = \sum_i A_i = PH_1 = mgAB \sin a = mgbr \sin a;$$

$$v_B^2 - v_A^2 = 2gbr \sin a;$$

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 12gr \sin a} = \sqrt{0,8^2 + 12 \cdot 9,81 \cdot 0,2 \cdot 0,866} = 4,59 \text{ м/с};$$

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = \sum_i A_i = PH_2 = mg(4r \sin a + 2r \cos a);$$

$$v_C^2 - v_A^2 = 4gr(2 \sin a + \cos a);$$

$$v_C = \sqrt{v_A^2 + 4gr(2 \sin a + \cos a)} = \sqrt{0,8^2 + 4 \cdot 9,81 \cdot 0,2 \cdot (2 \cdot 0,866 + 0,5)} = 4,26 \text{ м/с}.$$

Визначимо тиск кульки на стінку каналу в положенні C .

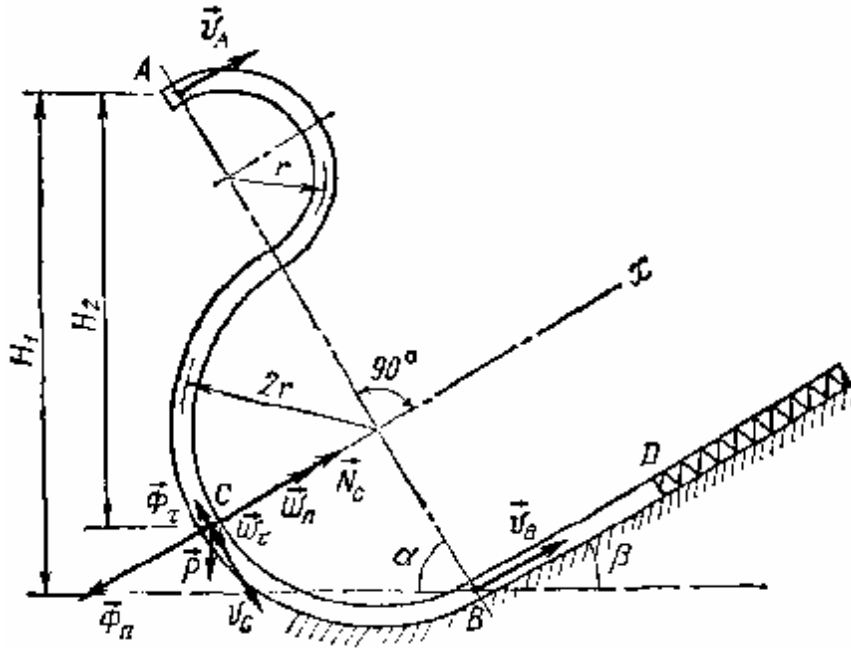


Рис. 3.8

У відповідності з принципом Д'Аламбера для матеріальної точки геометрична сума сил, прикладених до точки, і сили інерції цієї точки рівна нулю (рис. 3.8):

$$\dot{P} + \dot{N}_C + \dot{\Phi} = 0.$$

Силу інерції матеріальної точки можна розкласти на нормальну і дотичну складові

$$\dot{\Phi} = \dot{\Phi}_n + \dot{\Phi}_t.$$

Сума проєкцій сил \dot{P} , \dot{N}_C і $\dot{\Phi}$ на вісь x повинна дорівнювати нулю:

$$N_C - P \cos 60^\circ - \Phi_n = 0.$$

Звідси

$$\begin{aligned} N_C &= P \cos 60^\circ + \Phi_n = mg \cos 60^\circ + \frac{mv_C^2}{2r} = m \left(g \cos 60^\circ + \frac{v_C^2}{2r} \right) = \\ &= 0,5 \left(9,81 \cdot 0,5 + \frac{4,26^2}{2 \cdot 0,2} \right) = 25,2 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Шуканий тиск N'_C кульки на стінку трубки по величині рівний знайдений реакції \dot{N}_C і напрямлений в протилежний бік.

Швидкість кульки в положенні D знайдемо, застосувавши на ділянці BD теорему про зміну кількості руху матеріальної точки (рис. 3.9): $mv_{Dx} - mv_{Bx} = \sum_i S_{ix}$.

До точки прикладені: сила тяжіння \dot{P} , реакція стінки трубки \dot{N} і сила тертя \dot{R} ($R = fN = fmg \cos b$).

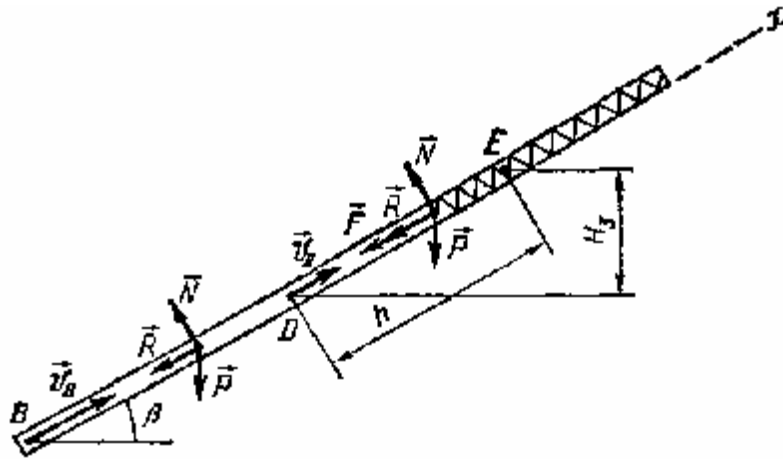


Рис. 3.9

Оскільки

$$v_{Dx} = v_D, v_{Bx} = v_B, \sum_i S_{ix} = -P \sin b \cdot t - Rt = -mg \sin b \cdot t - fmg \cos b \cdot t,$$

то

$$mv_D - mv_B = -mg \sin b \cdot t - fmg \cos b \cdot t,$$

звідки

$$v_D = v_B - gt(\sin b - f \cos b) = 4,59 - 9,81 \cdot 0,1 \cdot (0,5 + 0,1 \cdot 0,866) = 4,01 \text{ м/с.}$$

Для визначення максимального стиску h пружини скористаємося на ділянці DE теоремою про зміну кінетичної енергії матеріальної точки (рис. 3.9):

$$\frac{mv_E^2}{2} - \frac{mv_D^2}{2} = \sum_i A_i = -\frac{ch^2}{2} - PH_3 - Fh.$$

Враховуючи, що $v_E = 0$ і $H_3 = h \sin b$, отримуємо:

$$\frac{ch^2}{2} + P(\sin b + f \cos b)h - \frac{mv_D^2}{2} = 0$$

або

$$h^2 + \frac{2P(\sin b + f \cos b)}{c}h - \frac{mv_D^2}{c} = 0.$$

Розв'язуємо отримане квадратне рівняння відносно h :

$$\begin{aligned} h &= -\frac{P(\sin b + f \cos b)}{c} \pm \sqrt{\left[\frac{P(\sin b + f \cos b)}{c}\right]^2 + \frac{mv_D^2}{c}} = \\ &= -\frac{0,5 \cdot 9,81(0,5 + 0,1 \cdot 0,866)}{1000} \pm \\ &\pm \sqrt{\left[\frac{0,5 \cdot 9,81(0,5 + 0,1 \cdot 0,866)}{1000}\right]^2 + \frac{0,5 \cdot 4,01^2}{1000}} = -0,003 \pm 0,090 \text{ м.} \end{aligned}$$

За розв'язок рівняння беремо додатне значення

$$h = -0,003 + 0,090 = 0,087 \text{ м.}$$

РОЗДІЛ 4. ДИНАМІКА ВІДНОСНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

4.1. Переносна і коріолісова сили інерції

До тепер ми користувалися основним рівнянням динаміки точки (другим законом Ньютона), яке справедливе тільки в інерціальних системах відліку. Нагадаємо, що інерціальною називається така система відліку, у якій виконується принцип інерції (перший закон Ньютона). У багатьох випадках задачі динаміки зводяться до дослідження руху в тій чи іншій неінерціальній системі. По суті, неінерціальною є й звична для нас система відліку, пов'язана із Землею. Втім, тільки досить тонкі досліди (наприклад, спостереження за відхиленням падаючих тіл до сходу, за обертанням площини коливання маятника) можуть виявити неінерціальність геоцентричної системи відліку. У більшості застосувань систему координат, жорстко зв'язану із Землею, можна вважати інерціальною.

Значно помітніше проявляється неінерціальність систем відліку, пов'язаних із технічними об'єктами, які рухаються прискорено – від ліфта, що прискорено піднімається, до штучного супутника або космічного корабля, який злітає із Землі. Якщо пов'язати систему відліку з кораблем, автомобілем або літаком, що рухаються по криволінійних траєкторіях або тим більше з ротором швидкісної турбіни, то неінерціальність буде настільки сильною, що основне рівняння динаміки виявиться невірним.

Даний розділ присвячено вивченню руху матеріальної точки в неінерціальних системах відліку. Нижче буде дано метод побудови рівнянь руху матеріальної точки в неінерціальній системі відліку.

Припустимо, що відомо сили, які діють на матеріальну точку, а також задано рух рухомої системи координат відносно деякої інерціальної системи (надалі будемо називати її нерухомою системою).

Поставимо своїм завданням знайти відносний рух точки, тобто рух у неінерціальній системі відліку.

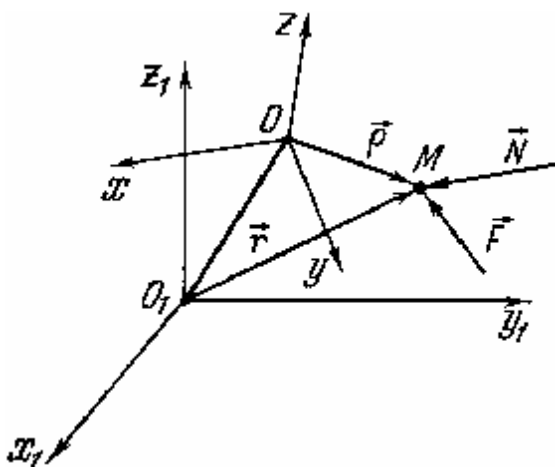


Рис. 4.1

Нагадаємо, що задати рух рухомої системи координат можна за допомогою трьох координат її початку (рис. 4.1): $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$ і трьох кутів Ейлера: φ , θ , ψ .

У нерухомій системі справедливе основне рівняння динаміки (див. (B5))

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{N}. \quad (4.1)$$

Тут, як і вище, \mathbf{F} – рівнодійна всіх активних сил, \mathbf{N} – рівнодійна реакцій в'язей, m – маса матеріальної точки, $\dot{\mathbf{r}}$

– її прискорення.

Використаємо тепер теорему Коріоліса (розд. 4 в [8]) і виразимо абсолютне прискорення через відносне, переносне й коріолісове:

$$\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{w}}_r + \dot{\mathbf{w}}_e + \dot{\mathbf{w}}_c. \quad (4.2)$$

Підставляючи (4.2) в (4.1), одержимо

$$m\dot{\mathbf{w}}_r + m\dot{\mathbf{w}}_e + m\dot{\mathbf{w}}_c = \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{N}}.$$

Переносячи частину членів у праву частину, прийдемо до векторного рівняння

$$m\dot{\mathbf{w}}_r = \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{R}} + (-m\dot{\mathbf{w}}_e) + (-m\dot{\mathbf{w}}_c). \quad (4.3)$$

Звідси видно, що добуток маси матеріальної точки на її відносне прискорення не дорівнює сумі рівнодіючої всіх активних сил, що діють на неї, і рівнодіючої реакцій в'язей.

Останні два вектори в правій частині рівняння (4.3) повинен увести спостерігач, що перебуває в неінерціальній системі відліку, для того, щоб у цій системі відліку основне рівняння динаміки зберегло форму другого закону Ньютона.

Вектори $-m\dot{\mathbf{w}}_e$ й $-m\dot{\mathbf{w}}_c$ називаються *силами інерції*. Перший називається *переносною силою інерції*, другий – *коріолісовою силою інерції*.

Будемо надалі користуватися позначеннями

$$\Phi_e = -m\dot{\mathbf{w}}_e, \quad \Phi_c = -m\dot{\mathbf{w}}_c = -2m(\dot{\mathbf{w}} \times \dot{\mathbf{v}}_r), \quad (4.4)$$

де $\dot{\mathbf{w}}$ – кутова швидкість переносного руху.

Таким чином, рівняння (4.3) набуває звичної форми основного рівняння динаміки (другого закону Ньютона):

$$m\dot{\mathbf{w}}_r = \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{N}} + \Phi_e + \Phi_c. \quad (4.5)$$

Ми одержали наступне правило: *для того, щоб скласти диференціальне рівняння руху матеріальної точки в неінерціальній системі координат у формі другого закону Ньютона, необхідно до діючих на точку активних сил і реакцій в'язей додати переносну та коріолісову сили інерції.*

У неінерціальній системі координат сили інерції проявляють себе як звичайні сили, з якими ми маємо справу в інерціальній системі відліку. Переносна й коріолісова сили інерції викликають відносне прискорення, вони можуть деформувати тіло й навіть руйнувати його, вони виконують роботу тощо. Разом з тим необхідно пам'ятати, що, на відміну від звичайних сил, наприклад сил тяжіння, величина й напрямок яких залежать тільки від характеру взаємодії тіл і не залежать від вибору неінерціальної системи відліку, переносна й коріолісова сили інерції визначаються вибором неінерціальної системи координат.

Крім того, ми не можемо вказати усередині Сонячної системи, з якою пов'язана геліоцентрична інерціальна система, тіла, у результаті взаємодії з якими виникають сили інерції.

У загальній теорії відносності відповідно до принципу еквівалентності, висунутому А. Ейнштейном, природа сил тяжіння й масових сил інерції у відносному русі тотожна.

Зупинимося на способах визначення сил інерції й нагадаємо правила обчислення відповідних прискорень.

Для того щоб знайти переносне прискорення, необхідно знати рух рухомої системи координат. Формула для визначення переносного прискорення має вигляд (розд. 4 в [8])

$$\dot{\mathbf{w}}_e = \dot{\mathbf{w}}_O + \dot{\mathbf{e}} \times \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{w}} \times (\dot{\mathbf{w}} \times \dot{\mathbf{r}}). \quad (4.6)$$

Тут $\dot{\mathbf{w}}$, $\dot{\mathbf{e}}$ – кутова швидкість і кутове прискорення рухомої системи координат, $\dot{\mathbf{w}}_O$ – прискорення її початку й $\dot{\mathbf{r}}$ – радіус-вектор точки в рухомій системі координат (див. рис. 4.1).

У всіх випадках обчислення переносного прискорення й переносної сили інерції корисно представляти переносне прискорення як абсолютне прискорення точки, закріпленої в рухомій системі координат.

Для визначення коріолісового прискорення щораз необхідно перемножувати два вектори $\dot{\mathbf{w}}$ і $\dot{\mathbf{v}}_r$, оскільки

$$\dot{\mathbf{w}}_c = 2\dot{\mathbf{w}} \times \dot{\mathbf{v}}_r.$$

При складанні рівнянь руху матеріальної точки відносно систем відліку, що поступально рухаються, варто мати на увазі, що коріолісові сили інерції відсутні ($\dot{\mathbf{w}} = 0$); а переносні сили інерції не залежать від положення, яке займає точка в рухомій системі відліку.

4.2. Умови відносного спокою

З основного рівняння (4.5), зокрема, впливають умови відносного спокою. У цьому випадку відносна швидкість і відносне прискорення точки дорівнюють нулю ($\dot{\mathbf{v}}_r = 0$, $\dot{\mathbf{w}}_r = 0$), отже, і коріолісова сила інерції обертається в нуль (оскільки $\dot{\mathbf{v}}_r = 0$). Рівняння відносного спокою набуває вигляду

$$\dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{N}} + \dot{\mathbf{\Phi}}_e = 0. \quad (4.7)$$

Якщо виконується умова рівноваги (4.7), то звідси зовсім не впливає, що після надання матеріальній точці початкової швидкості вона буде рухатися рівномірно й прямолінійно, як це має місце в інерціальних системах. Справа в тому, що при наданні точці відносної швидкості, *по-перше*, з'являється коріолісове прискорення $\dot{\mathbf{\Phi}}_c = -2m(\dot{\mathbf{w}} \times \dot{\mathbf{v}}_r) \neq 0$ і, *по-друге*, може змінитися переносне прискорення (воно залежить від положення точки в рухомій системі відліку) і, отже, зміниться переносна сила інерції.

З рівняння (4.5) можна вивести ще один наслідок. Знайдемо такі системи координат, в яких виконується перший закон Ньютона. Для цього досить вимагати, щоб при відсутності сил точка рухалася рівномірно й прямолінійно. З (4.5) впливає, що

$$\dot{\Phi}_e + \dot{\Phi}_c = 0. \quad (4.8)$$

Звідси зрозуміло, що умова (4.8) буде виконуватися, якщо переносна сила інерції в будь-якій точці дорівнює нулю:

$$\dot{\Phi}_e = -m\dot{w}_e = 0.$$

Дійсно, у цьому випадку рухома система відліку повинна рухатися поступально рівномірно й прямолінійно, але тоді її кутова швидкість дорівнює нулю і коріолісова сила інерції також обертається в нуль. Рівняння (4.8) виконується.

Інакше кажучи, для того, щоб рухома система координат була інерціальною, досить, щоб її початок рухався зі сталою швидкістю, а кутова швидкість системи увесь час дорівнювала нулю: $\dot{w}_O = 0$, $\dot{w} = 0$.

У цьому випадку завжди дорівнюють нулю обидві сили інерції й основне рівняння (4.5) набуває вигляду

$$m\dot{w}_r = \dot{F} + \dot{N}.$$

Отже, у цьому випадку справджується і другий закон Ньютона.

Таким чином, якщо існує хоча б одна система відліку, у якій виконуються закони Ньютона, то існує нескінченна множина таких систем. Всі вони рухаються один відносно іншого поступально рівномірно й прямолінійно.

Завдання для лабораторної роботи №8

Кулька M , розглядувана як матеріальна точка, рухається по циліндричному каналу рухомого тіла A (рис. 4.2-4.5). Знайти рівняння відносного руху цієї кульки $x = f(t)$, прийнявши за початок відліку точку O , а також координату x і силу тиску кульки на стінку каналу при заданому значенні $t = t$. Дані, необхідні для виконання завдання, наведено в таблиці 4.1.

Тіло A рівномірно обертається навколо нерухомої осі (в варіантах 2, 3, 4, 7, 10, 11, 14, 20, 23, 26, 30-33 і 38-40 вісь обертання z_1 вертикальна, а у варіантах 1, 12, 15 і 25, 35 вісь обертання x_1 горизонтальна). У варіантах 5, 6, 8, 9, 13, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 24, 27-29, 34, 36 і 37 тіло A рухається поступально, паралельно вертикальній площині $y_1O_1z_1$.

В завданні прийнято наступні позначення:

m – маса кульки M ;

w – стала кутова швидкість тіла A (в варіантах 1–4, 7, 10–12, 14, 15, 20, 23, 25, 26, 30-33, 35, 38-40) або кривошипів O_1B і O_2C (в варіантах 6, 17, 22 34);

c – коефіцієнт жорсткості пружини, до якої прикріплена кулька M ;

l_0 – довжина недеформованої пружини;

f – коефіцієнт тертя ковзання кульки по стінці каналу.

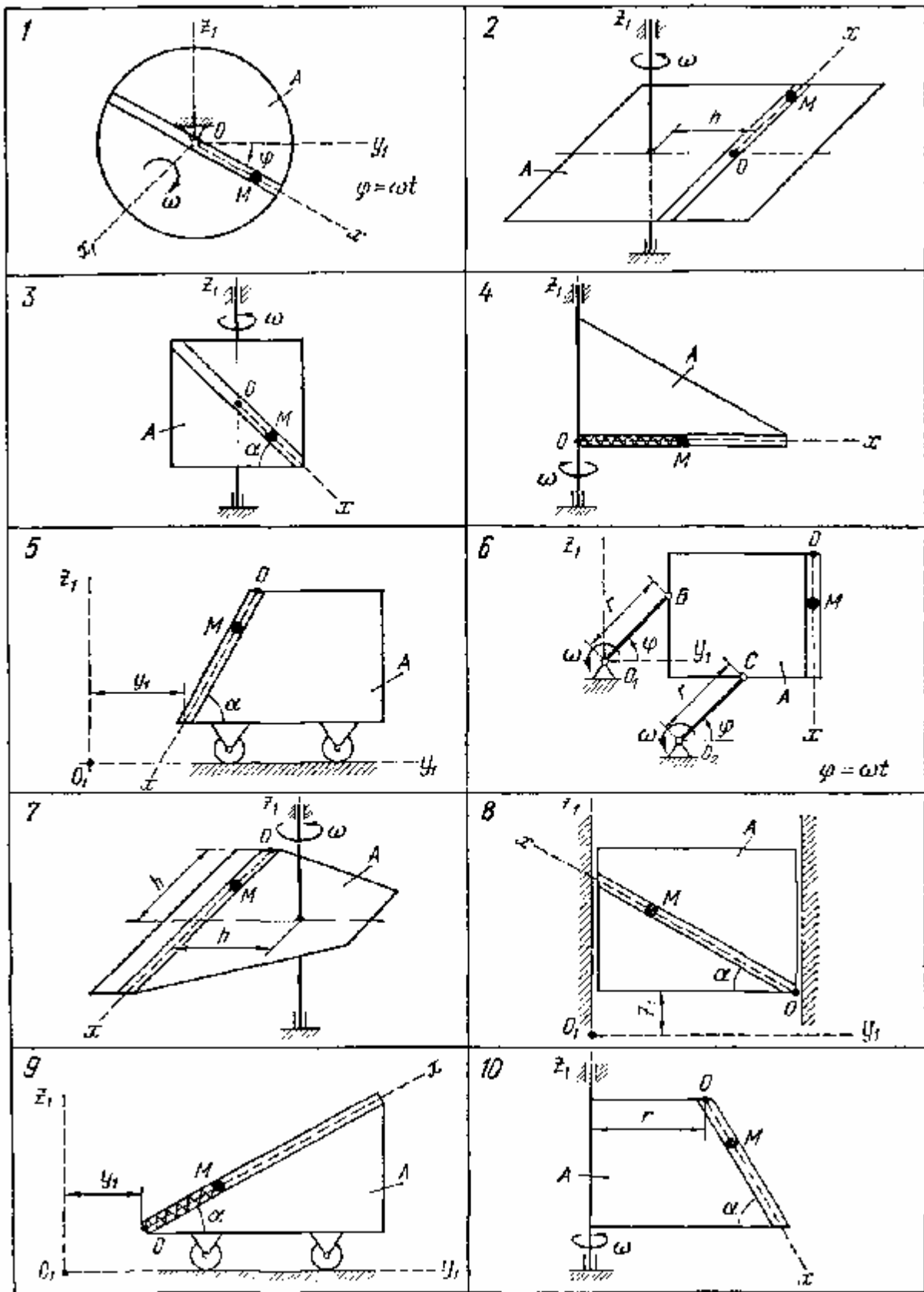


Рис. 4.2

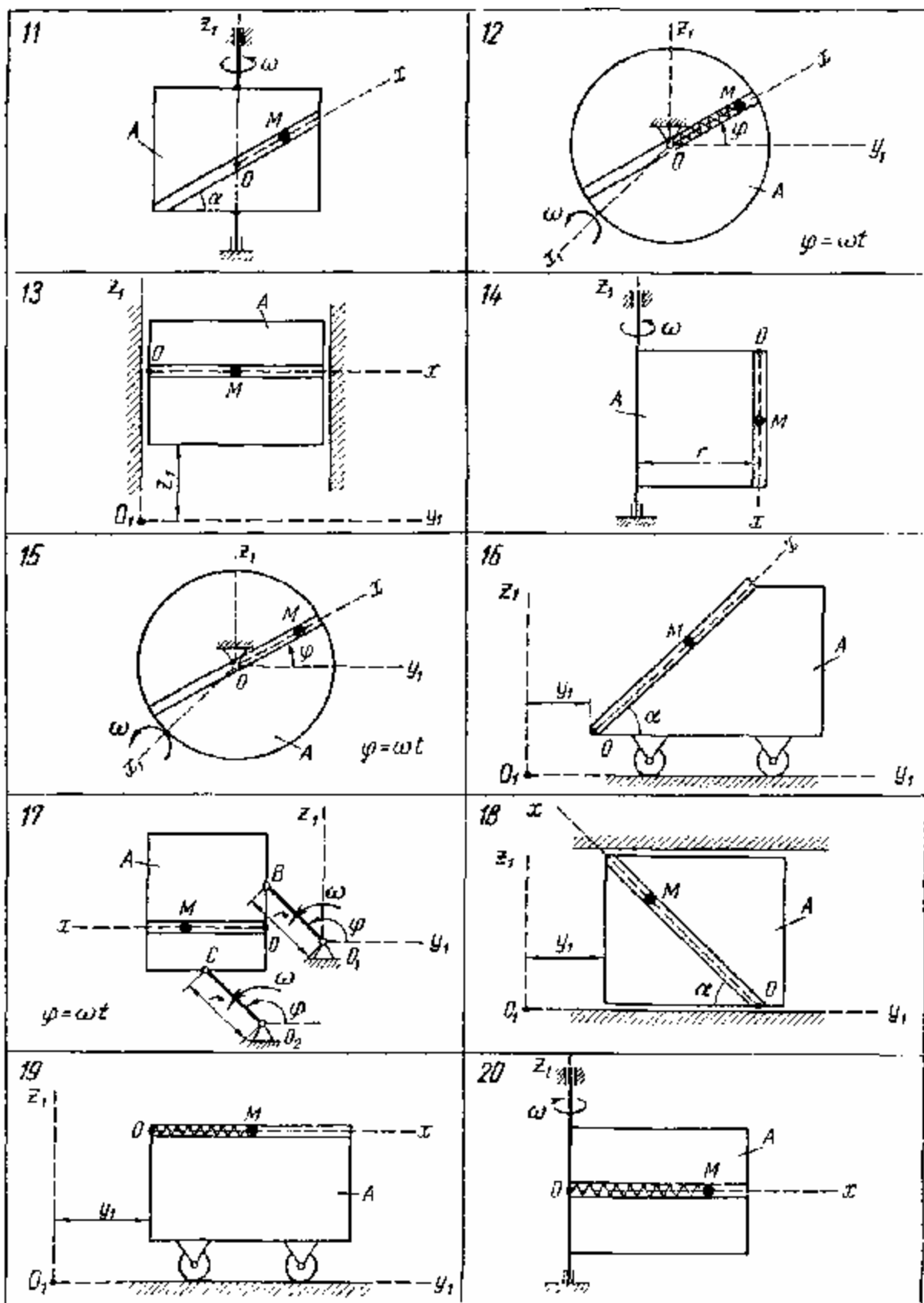


Рис. 4.3

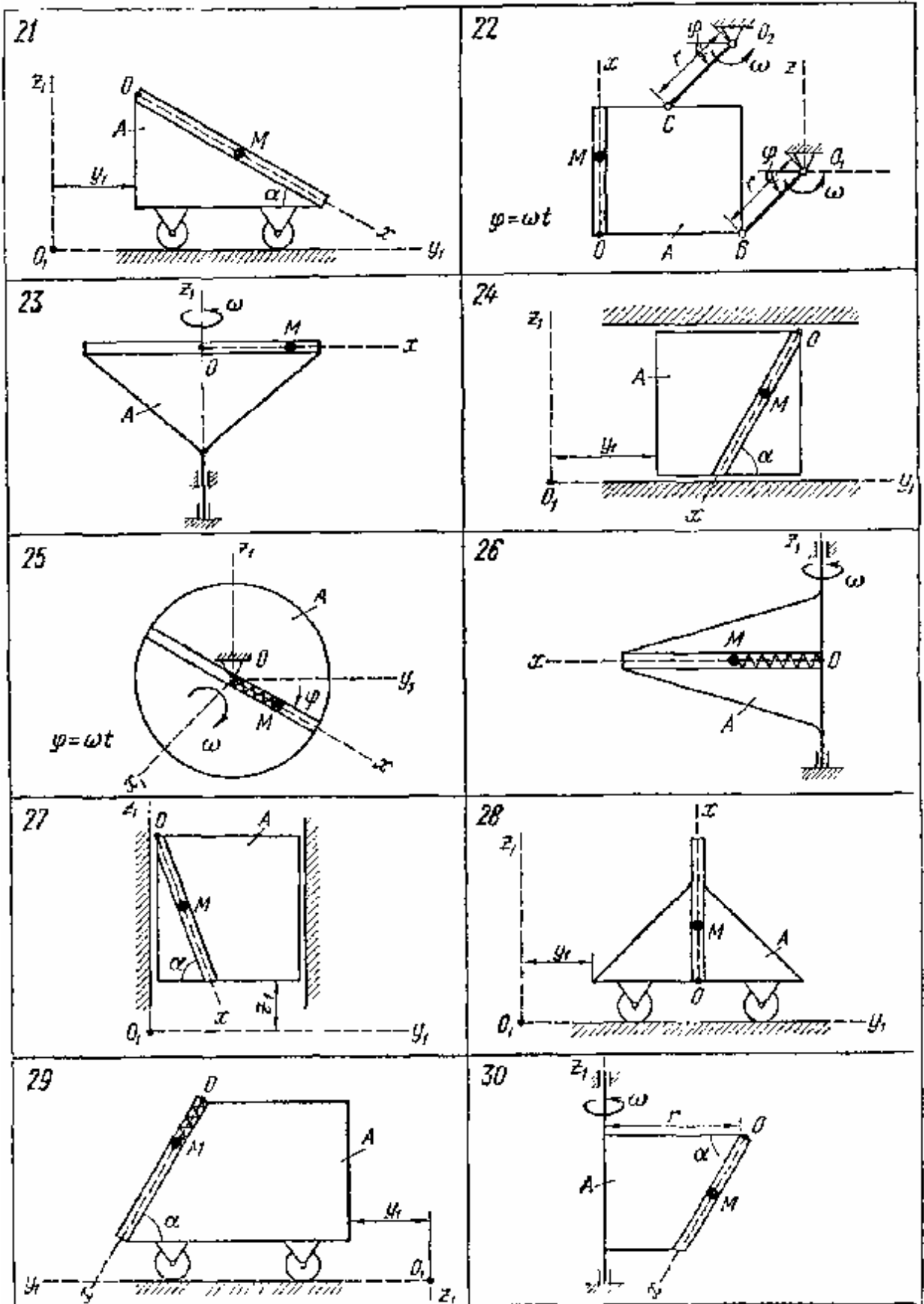


Рис. 4.4

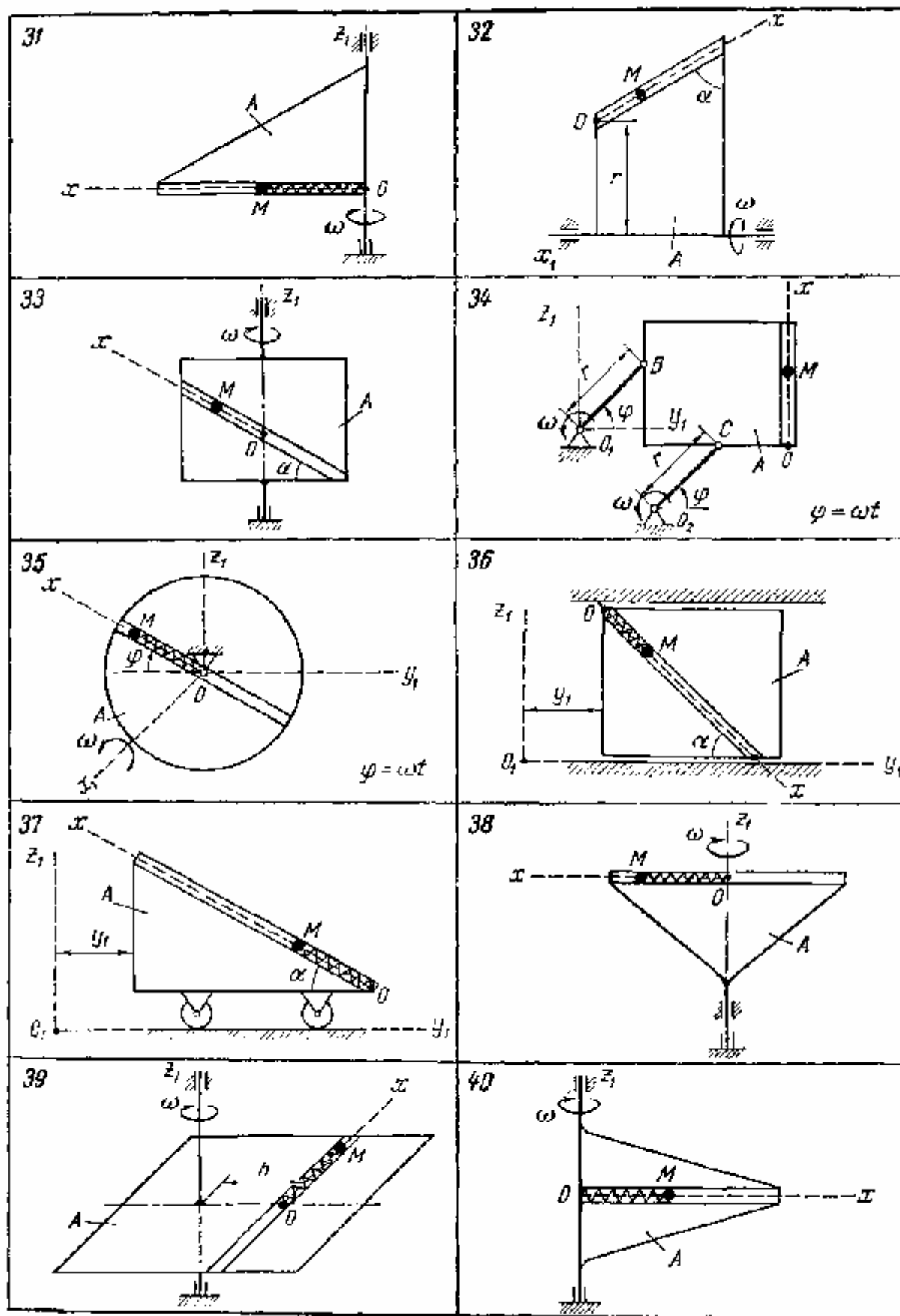


Рис. 4.5

Таблиця 4.1

Номер варіанта (рис.4.2- 4.3)	a , град	m , кг	w , c^{-1}	Початкові умови		t , c	c , Н/см	l_0 , м	Рівняння руху тіла A , м	r	h	f
				x_0 , м	v_0 , м/с					м		
1	–	0,02	p	0	0,4	0,5	–	–	–	–	0	
2	–	0,02	p	0	0,2	0,4	–	–	–	0,15	0	
3	45	0,03	$2p$	0,5	0	0,2	–	–	–	–	0	
4	–	0,09	$4p$	0,2	–0,8	0,1	0,36	0,15	–	–	0	
5	60	0,02	–	0,6	0	0,2	–	–	$y_1 = 0,6 - 2t^3$	–	0,2	
6	–	0,01	$10p$	0,5	0	0,2	–	–	–	0,10	0	
7	–	0,03	$2p$	0,3	0	0,2	–	–	–	0,20	0	
8	30	0,03	–	0,8	0	0,1	–	–	$z_1 = 0,1 \cos 2pt$	–	0	
9	30	0,02	–	0,4	0	0,1	0,20	0,20	$y_1 = 0,6 - 2t^3$	–	0	
10	60	0,05	$6p$	0,4	0	0,1	–	–	–	0,20	0	
11	30	0,05	p	0	0	0,4	–	–	–	–	0	
12	–	0,08	$6p$	0,05	0	0,1	0,20	0,10	–	–	0	
13	–	0,01	–	0	0,5	0,2	–	–	$z_1 = 5 - 10t^2$	–	0,1	
14	–	0,05	$4p$	0,5	0	0,1	–	–	–	0,20	0,2	
15	–	0,01	p	0,5	0	1,0	–	–	–	–	0	
16	45	0,02	–	1,0	2,0	0,1	–	–	$y_1 = 0,06t^3$	–	0	
17	–	0,02	$6p$	0	4,0	0,2	–	–	–	0,20	0	
18	40	0,02	–	0,6	0	0,1	–	–	$z_1 = 0,1 \cos 2pt$	–	0	
19	–	0,08	–	0,4	–0,8	0,1	0,40	0,20	$y_1 = 8t - t^3$	–	0	
20	–	0,01	$10p$	0,1	0	0,2	0,20	0,10	–	–	0	

Номер варіанта (рис.4.4- 4.5)	a , <i>град</i>	m , <i>кг</i>	w , c^{-1}	Початкові умови		t , c	c , <i>Н/см</i>	l_0 , <i>м</i>	Рівняння руху тіла A , m	r	h	f
				x_0 , <i>м</i>	\dot{x}_0 , <i>м/с</i>					m		
21	30	0,05	–	0,5	0,1	0,1	–	–	$y_1 = 2 + t^2$	–	–	0,2
22	–	0,03	$4p$	0,1	3,0	0,1	–	–	–	0,10	–	0
23	–	0,01	$2p$	–0,5	–0,1	0,2	–	–	–	–	–	0
24	60	0,01	–	0	0,2	0,2	–	–	$y_1 = 0,1 \cos 3pt/2$	–	–	0
25	–	0,05	$2p$	0,1	–0,4	0,1	0,20	0,20	–	–	–	0
26	–	0,09	p	0,2	0,3	0,1	0,20	0,10	–	–	–	0
27	75	0,02	–	1,0	0,6	0,3	–	–	$z_1 = 0,1 \sin pt/2$	–	–	0
28	–	0,03	–	0,8	0	0,3	–	–	$y_1 = 8 - 5t^3$	–	–	0,1
29	60	0,10	–	0,4	1,0	0,1	0,20	0,20	$y_1 = 8 + t^3$	–	–	0
30	50	0,02	$p/2$	0	0,5	0,2	–	–	–	0,50	–	0
31	–	0,05	$8p$	0,1	–0,9	0,1	0,36	0,20	–	–	–	0
32	45	0,04	$4p$	0,4	0,1	0,1	–	–	–	0,25	–	0
33	30	0,03	p	0,2	0	0,4	–	–	–	–	–	0
34	–	0,01	$10p$	0,3	–0,5	0,2	–	–	–	0,10	–	0
35	–	0,08	$6p$	0,05	0	0,1	0,20	0,10	–	–	–	0
36	40	0,02	–	0,6	0	0,1	–	–	$z_1 = 0,2 \cos 2pt$	–	–	0
37	30	0,02	–	0,4	0	0,1	0,20	0,10	$y_1 = 3t^3 + 0,2$	–	–	0
38	–	0,01	p	–0,5	–0,1	0,2	0,30	–	–	–	–	0
39	–	0,02	$2p$	0	0,2	0,4	0,20	–	–	0,15	–	0
40	–	0,09	p	0,2	0,3	0,1	0,26	0,10	–	–	–	0

Приклад виконання завдання (рис. 4.6)

Дано: $a = 30^\circ$; $w = p \text{ c}^{-1}$; $m = 0,01 \text{ кг}$; $t = 0,2 \text{ с}$; $x_0 = 0,3 \text{ м}$; $v_0 = 2 \text{ м/с}$; $c = 1 \text{ Н/м}$; $l_0 = 0,2 \text{ м}$; $r = 0,2 \text{ м}$.

Знайти рівняння $x = f(t)$ відносного руху цієї кульки M , а також координату x і тиск кульки на стінку каналу при заданому значенні $t = t$.

Розв'язання

Пов'яжемо рухому систему відліку $Oxyz$ з каналом (трубкою), сумістивши вісь x з траєкторією відносного руху кульки M .

Обертання цієї системи навколо осі z_1 є переносним рухом для кульки M . Відносним рухом кульки M є її рух вздовж трубки. У випадку, коли переносний рух є рівномірним обертанням, відносний рух точки визначається рівнянням

$$m\dot{w}_r = \sum_i \dot{F}_i + \dot{\Phi}_e + \dot{\Phi}_c.$$

До кульки M прикладені сили: вага \vec{P} , сила пружності \vec{F} і нормальна реакція стінки трубки, яку можна розкласти на дві взаємоперпендикулярні складові \vec{N}_1 і \vec{N}_2 .

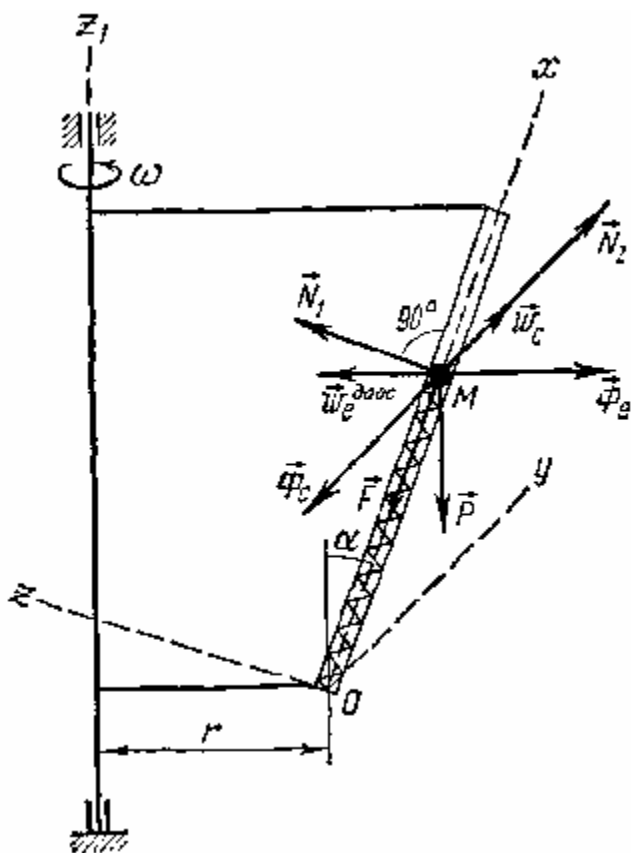


Рис. 4.6

Додамо до сил, що діють на кульку M , переносну відцентрову силу інерції $\dot{\Phi}_e$ і коріолісову силу інерції $\dot{\Phi}_c$, направлені протилежно до прискорень w_e^{dooc} і \dot{w}_c , відповідно. Напрямок прискорення \dot{w}_c знайдемо за відомим правилом, припустивши, що проекція відносної швидкості v_r на вісь x додатна. В розглядуваному прикладі коріолісова сила інерції $\dot{\Phi}_c$ паралельна осі y і перпендикулярна до площини xOz (рис. 4.6).

Модулі сил інерції визначаються за формулами:

$$\Phi_e = mw_e^{dooc} = m\omega^2(r + x \sin a);$$

$$\Phi_c = m\omega v_r = 2m\omega v_r \sin a,$$

де

$$w_e = w, v_r = |\dot{x}|.$$

Основне рівняння відносного руху в даному випадку має вигляд:

$$m\ddot{w}_r = \dot{P} + \dot{F} + \dot{N}_1 + \dot{N}_2 + \dot{\Phi}_e + \dot{\Phi}_c. \quad (4.9)$$

Складемо диференціальне рівняння відносного руху кульки M вздовж осі x :

$$m\ddot{x} = \Phi_e \sin a - P \sin a + F_x;$$

$$m\ddot{x} = mw^2(r + x \sin a) \sin a - mg \cos a - c(x - l_0)$$

(реакція пружини F_x дорівнює добутку коефіцієнта жорсткості на величину деформації пружини).

Останнє рівняння подамо у вигляді:

$$\ddot{x} + \left(\frac{c}{m} - w^2 \sin^2 a \right) x = w^2 r \sin a - g \cos a + \frac{cl_0}{m}. \quad (4.10)$$

Загальний розв'язок отриманого диференціального рівняння (4.10) має вигляд

$$x = x_{з.о.} + x_{ч.н.},$$

де $x_{з.о.}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння;

$x_{ч.н.}$ – частинний розв'язок рівняння (4.10).

Побудуємо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$I^2 + \frac{c}{m} - w^2 \sin^2 a = 0;$$

$$I_1 = \sqrt{w^2 \sin^2 a - \frac{c}{m}} = \sqrt{p^2 \cdot 0,5^2 - \frac{1}{0,01}} = 9,876i, \quad I_2 = -9,876i.$$

Таким чином, загальний розв'язок однорідного рівняння

$$x_{з.о.} = C_1 \cos 9,876t + C_2 \sin 9,876t.$$

Частинний розв'язок рівняння (4.10) шукаємо у вигляді

$$x_{ч.н.} = B = const.$$

Із диференціального рівняння (4.10)

$$x_{ч.н.} = B = \frac{w^2 r \sin a - g \cos a + \frac{cl_0}{m}}{\frac{c}{m} - w^2 \sin^2 a} = \frac{p^2 \cdot 0,2 \cdot 0,5 - 9,81 \cdot 0,866 + \frac{1 \cdot 0,2}{0,01}}{\frac{1}{0,01} - p^2 \cdot 0,5^2} = 0,128 \text{ м.}$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (4.10) відносного руху кульки M має вигляд

$$x = C_1 \cos 9,876t + C_2 \sin 9,876t + 0,128 \text{ (м)}. \quad (4.11)$$

Швидкість цього руху

$$\dot{x} = -9,876C_1 \sin 9,876t + 9,876C_2 \cos 9,876t \text{ (м/с)}. \quad (4.12)$$

Сталі C_1 і C_2 визначаємо, використовуючи початкові умови: при $t = 0$

$$x_0 = 0,3 \text{ м}, \quad \dot{x}_0 = 2 \text{ м/с.}$$

Складемо рівняння (4.11) і (4.12) для $t = 0$:

$$x_0 = C_1 + 0,128; \quad \dot{x}_0 = 9,876C_2,$$

звідки

$$C_1 = 0,3 - 0,128 = 0,172; \quad C_2 = \frac{2}{9,876} = 0,202.$$

Рівняння відносного руху кульки M матиме вигляд

$$x = 0,172 \cos 9,876t + 0,202 \sin 9,876t + 0,128 \text{ (м)}.$$

Швидкість відносного руху кульки

$$\dot{x} = -1,69 \sin 9,876t + 1,99 \cos 9,876t \text{ (м/с)}.$$

Для визначення складових реакції стінки трубки N_1 і N_2 при $t = 0,2$ с виразимо векторне рівняння (4.9) в проекціях на осі y і z .

Враховуючи, що вектор \dot{w}_r перпендикулярний до цих осей, отримуємо:

$$0 = N_2 - \Phi_c,$$

$$0 = N_1 - P \cos 60^\circ - \Phi_e \cos 30^\circ.$$

Із цих рівнянь

$$N_2 = \Phi_c = 2mw v_r \sin a,$$

$$N_1 = P \cos 60^\circ + \Phi_e \cos 30^\circ = mg \cos 60^\circ + mw^2(r + x \sin a) \cos 30^\circ.$$

Для отримання числових значень N_1 і N_2 необхідно визначити координату x і проекцію відносної швидкості точки \dot{x} , що відповідають значенню $t = 0,2$ с.

$$x(0,2) = 0,172 \cos(9,876 \cdot 0,2) + 0,202 \sin(9,876 \cdot 0,2) + 0,128 =$$

$$= 0,172 \cos 113^\circ + 0,202 \sin 113^\circ + 0,128 =$$

$$= -0,172 \cdot 0,391 + 0,202 \cdot 0,92 + 0,128 = 0,246 \text{ м};$$

$$\dot{x}(0,2) = -1,69 \sin 113^\circ + 1,99 \cos 113^\circ = -1,69 \cdot 0,92 - 1,99 \cdot 0,391 =$$

$$= -1,55 - 0,78 = -2,33 \text{ м/с}.$$

Отже, складові реакції N_1 і N_2

$$N_1 = 0,01 \cdot 9,81 \cdot \frac{1}{2} + 0,01 \cdot p^2(0,2 + 0,246 \cdot 0,5) \cdot 0,866 = 0,077 \text{ Н},$$

$$N_2 = 2 \cdot 0,01 \cdot p \cdot 2,33 \cdot 0,5 = 0,080 \text{ Н}.$$

Реакція стінки трубки

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \sqrt{0,077^2 + 0,080^2} = 0,111 \text{ Н}.$$

Шукана сила тиску кульки M на стінки трубки по величині дорівнює знайденій реакції $\dot{N} = \dot{N}_1 + \dot{N}_2$ і напрямлена в протилежний бік.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бондаренко А.А., Дубінін, О.О., Переяславцев О.М.* Збірник завдань розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки. – Вінниця: Нова книга, 2004. – 288 с.
2. *Бутенин Н.В., Луңц Я.Л., Меркин Д.Д.* Курс теоретической механики: в 2 Т. – М.: Наука, 1998. – 736 с.
3. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. – М.: Наука, 1972, т.1. – 362 с., т.2. – 412 с.
4. *Кільчевський М.О.* Курс теоретичної механіки, т.1. – К.: Вища школа, 1972. – 376 с.; т.2. – М.: Наука, 1977. – 544 с.
5. *Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.* Курс теоретической механики, т.1. – М.: Наука, 1982. – 352 с.; т.2. – М.: Наука, 1983. – 640 с.
6. *Мещерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1981. – 480 с.
7. *Павловський М.А.* Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
8. *Путята Т.В., Фрадлін Б.Н.* Методика розв'язання задач з теоретичної механіки. – К.: Радянська школа, 1962. – 366 с.
9. *Рейтій О.К.* Теоретична механіка (методичний посібник з лабораторних робіт). Частина I. Кінематика. – Ужгород: Видавництво УжНУ „Говерла”, 2006. – 64 с.
10. *Старжинский В.М.* Теоретическая механика. – М.: Наука, 1980. – 464 с.
11. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1986. – 486 с.
12. *Яблонский. А.А. и др.* Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 1972. – 432 с.

Підписано до друку 24.11.06. Формат 60x84/16.

Умовн. друк. арк.

Облік.-вид. арк.

Друк офсетний. Зам. №

Наклад 200 прим.

Видавництво УжНУ «Говерла»
м. Ужгород, вул. Капітульна, 18.

Свідоцтво про внесення до державного реєстру видавців, виготовників
і розповсюджувачів видавничої продукції – **Серія 3т №32**