Курс: «Рівняння в частинних похідних та їх застосування» **ст. викл. Рего В. Л.**
До Модуля 4
Індивідуальні завдання №4 до розділу:

РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Варіант 1

1. Знайти форму рівноваги прямокутної мембрани зі сторонами $2a$ та $2c$ (початок координат вибраний у центрі мембрани), яка знаходиться під дією рівномірно розподіленого навантаження $P = const$, якщо краї мембрани нерухомо закріплені. Обчислити прогин центру мембрани, рахуючи відношення c:a=2.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho,\varphi) = 0, \quad 2 < \rho < 4, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$$U(2,\varphi) = A\cos^2\frac{\varphi}{2}, \quad U_\rho(4,\varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \quad (A = const).$$

б) $\Delta U(x,y) = x\,\mathrm{e}^y, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1;$

$$U_x(0,y) = \mathrm{e}^y - \cos\pi y, \quad U_x(2,y) = \mathrm{e}^y, \quad 0 \le y \le 1;$$
$$U_y(x,0) = x, \quad U_y(x,1) = \mathrm{e}\,x, \quad 0 \le x \le 2.$$

Варіант 2

1. Знайти закон стаціонарного розподілу температури всередині нескінченого кругового циліндра радіуса R, якщо на його поверхні підтримується температура $U_0 \sin\varphi$ $(U_0 = const)$. Розв’язок знайти у формі ряду та у формі інтегралу Пуассона.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

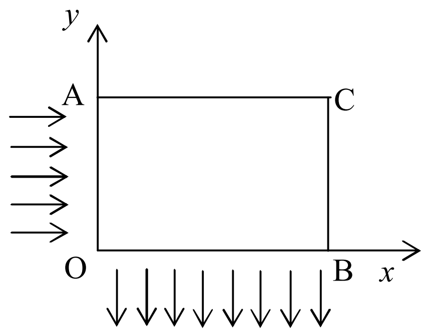
а) $\Delta U(x,y) = 2x, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$

$$U(0,y) = 0, \quad U(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b;$$
$$U(x,0) = 0, \quad U_y(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a.$$

б) $\Delta U(\rho,\varphi) = 9, \quad 1 < \rho < 3, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$$U_\rho(1,\varphi) = 2\cos 2\varphi, \quad U(3,\varphi) = \cos 4\varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Варіант 3



1. Дано прямокутну пластинку $OACB$ (див. мал. праворуч) зі сторонами $OA = a$, $OB = b$. Через край OA підводиться потік тепла $q = const > 0$ на одиницю площі перерізу, через край OB тепловий потік такої ж величини на одиницю площі відводиться (коефіцієнт внутрішньої теплопровідності $k = 1$), а на краях AC та BC

температура змінюється за законом відповідно $q(b-x)$ та $q(y-a)$. Визначити стаціонарну температуру внутрішніх точок мембрани.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho,\varphi)=\sin 8\varphi,\quad 0<\rho<2,\quad 0<\varphi<\pi/4;$
$U(2,\varphi)=A\sin 4\varphi,\quad 0\le\varphi\le\pi/4\quad (A=const);$
$U(\rho,0)=0,\quad U(\rho,\pi/4)=0,\quad 0\le\rho\le 2.$

б) $\Delta U(x,y)=5\cos 6\pi y-\cos\pi x,\quad 0<x<1,\quad 0<y<2;$
$U_x(0,y)=2,\quad U_x(1,y)=2,\quad 0\le y\le 2;$
$U_y(x,0)=0,\quad U_y(x,2)=0,\quad 0\le x\le 1.$

Варіант 4

1. Знайти положення рівноваги мембрани, яка має форму півкруга радіуса a і знаходиться під дією навантаження, розподіленого згідно закону $q\varphi(\varphi-\pi)$, де $q=const.$ Краї мембрани нерухомо закріплені.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x,y)=0,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b;$
$U_x(0,y)=0,\quad U_x(a,y)=0,\quad 0\le y\le b;$
$U(x,0)=A,\quad U(x,b)=A,\quad 0\le x\le a\quad (A=const).$

б) $\Delta U(\rho,\varphi)=0,\quad R<\rho<\infty,\quad 0\le\varphi<2\pi;$
$U_\rho(R,\varphi)-hU(R,\varphi)=\sin 3\varphi+\cos 4\varphi,\quad 0\le\varphi<2\pi\quad (h=const>0).$

Варіант 5

1. Дано прямокутну пластинку $OACB$ (див. мал. до Варіанту 3) зі сторонами $OA=a$, $OB=b$. Сторони AC та BC покриті тепловою ізоляцією, а на двох інших підтримується нульова температура. Знайти стаціонарний розподіл температури при умові, що в пластинці виділяється тепло зі сталою інтенсивністю $Q=const$.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho,\varphi)=0,\quad 0<\rho<a,\quad 0<\varphi<\pi;$
$U(a,\varphi)=5\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le\pi;$
$U(\rho,0)=0,\quad U(\rho,\pi)=0,\quad 0\le\rho\le a.$

б) $\Delta U(x,y)=20x^3,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b;$
$U_x(0,y)=4\cos\frac{\pi}{b}y,\quad U_x(a,y)=5a^4,\quad 0\le y\le b;$
$U_y(x,0)=0,\quad U_y(x,b)=\cos\frac{\pi}{a}x,\quad 0\le x\le a.$

Варіант 6

1. Визначити стаціонарний розподіл температури в мембрані, яка має форму криволінійного прямокутника, дві сторони якого утворені дугами концентричних кіл $\rho=a$ та $\rho=b$, а дві інші – відрізками радіусів $\varphi=0$ та $\varphi=\pi/2$. На краї $\rho=b$

температура змінюється за законом $T_0 \cos^2(2\varphi + \pi/2)$, де $T_0 = const$, а інші три краї підтримуються при нульовій температурі.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x,y) = Ay, \quad 0 < x < 4, \quad 0 < y < 2;$

$U(0,y) = 0, \quad U_x(4,y) = 0, \quad 0 \le y \le 2;$

$U(x,0) = 0, \quad U_y(x,2) = 0, \quad 0 \le x \le 4 \quad (A = const).$

б) $\Delta U(\rho,\varphi) = 0, \quad a < \rho < b, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$U(a,\varphi) = T + B\cos\varphi, \quad U_\rho(b,\varphi) + hU(b,\varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \quad (h > 0, T, B - const).$

Варіант 7

1. Тонка плівка натягнута на дротяний каркас, який проектується на площину xOy в прямокутник зі сторонами $x = 0$, $x = l$, $y = 0$, $y = m$; відхилення точок контура від площини xOy задається рівностями: $U(0,y) = U(l,y) = U(x,0) = 0$, $U(x,m) = A\sin\frac{\pi}{l}x$, де $A = const$. Визначити форму поверхні, по якій розміститься плівка.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho,\varphi) = -4, \quad 0 < \rho < a, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$

$U(a,\varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$

б) $\Delta U(x,y) = 12xy, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1;$

$U_x(0,y) = y^3 + 5\cos 6\pi y, \quad U_x(1,y) = 3y + y^3, \quad 0 \le y \le 1;$

$U_y(x,0) = x^3, \quad U_y(x,1) = 3x + x^3 + \cos\pi x, \quad 0 \le x \le 1.$

Варіант 8

1. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині нескінченого кругового циліндра радіуса R, якщо на поверхні циліндра підтримується стала температура:

$$f(\varphi) = \begin{cases} 0, & \alpha < \varphi < 2\pi; \\ 2\pi U_0 \alpha^{-1}, & 0 \le \varphi \le \alpha, \end{cases}$$

де U_0, α – задані сталі. Розглянути випадок, коли α досить мале.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x,y) = \sin x \cdot \sin y, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi;$

$U(0,y) = 0, \quad U(\pi,y) = 0, \quad 0 \le y \le \pi;$

$U(x,0) = \sin x, \quad U(x,\pi) = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi.$

б) $\Delta U(\rho,\varphi) = 0, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 < \varphi < \alpha < \pi;$

$U_\rho(R,\varphi) + \gamma U(R,\varphi) = Q\sin^2\frac{\pi}{\alpha}\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \alpha;$

$U(\rho,0) = 0, \quad U_\varphi(\rho,\alpha) + hU(\rho,\alpha) = 0, \quad 0 \le \rho \le R \quad (\gamma, Q, h = const > 0).$

Джерело: *Перестюк М. О., Маринець В. В., Рего В. Л.* Збірник задач з математичної фізики. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2012. – 245 с.