

ІНСТРУКЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ №3 НА ТЕМУ «РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ»

1. Типи мішаних задач для рівняння теплопровідності

Розглянемо мішану задачу для одновимірного рівняння теплопровідності: в області $B = \{(t, x) | 0 < t < T, 0 < x < l\}$ знайти розв'язок рівняння

$$U_t = a^2 U_{xx} + f(t, x), \quad (1.1)$$

який справджує початкову умову

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.2)$$

та крайові умови загального вигляду

$$\alpha_1 U_x(t, 0) + \beta_1 U(t, 0) = \gamma_1(t), \quad \alpha_2 U_x(t, l) + \beta_2 U(t, l) = \gamma_2(t), \quad 0 \leq t < T. \quad (1.3)$$

Можна вирізнити **чотири типи задач**.

1. Задача для однорідного рівняння з однорідними крайовими умовами:

$$f(t, x) \equiv 0, \quad \gamma_1(t) = \gamma_2(t) \equiv 0.$$

Будемо вважати, що початкова умова (1.2) та крайові умови (1.3) є узгодженими, тобто виконуються рівності

$$\alpha_1 \varphi'(0) + \beta_1 \varphi(0) = \gamma_1(0), \quad \alpha_1 \varphi'(l) + \beta_1 \varphi(l) = \gamma_2(0),$$

тоді розв'язок шукається у вигляді добутку

$$U(t, x) = T(t) \cdot X(x) \neq 0, \quad (1.4)$$

де $X(x)$ – власні функції відповідної задачі Штурма-Ліувілля, а $T(t)$

визначаються з однорідного рівняння та початкової умови.

Зауважимо, що алгоритм методу відокремлення змінних (методу Фур'є) у випадку мішаної задачі типу 1 для рівняння теплопровідності детально викладений у [2], стор. 171-175.

2. Задача для неоднорідного рівняння з однорідними крайовими умовами:

$$f(t, x) \neq 0, \quad \gamma_1(t) = \gamma_2(t) \equiv 0.$$

Будемо вважати, що $f(t, x)$ як функція змінної x справджує крайові умови. Тоді згідно методу Фур'є розв'язок шукається у вигляді ряду

$$U(t, x) = \sum_n T_n(t) X_n(x), \quad (1.5)$$

де $X_n(x)$ – власні функції задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі, а $T_n(t)$ визначаються підстановкою ряду (1.5) у неоднорідне рівняння та в початкову умову.

3. Загальна мішана задача:

$$\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) \neq 0,$$

тобто хоча б одна з крайових умов неоднорідна. Тоді для застосування методу відокремлення змінних необхідно спершу звести крайові умови до однорідних. Розв'язок шукаємо у вигляді суми

$$U(t, x) = V(t, x) + \omega(t, x), \quad (1.6)$$

причому допоміжну функцію $\omega(t, x)$ підбираємо таким чином, щоб вона справджувала крайові умови (1.3). Тоді для функції $V(t, x)$ одержимо мішану задачу типу 1 або типу 2 (з однорідними крайовими умовами), розв'язок якої можна шукати методом Фур'є. У деяких випадках для функції $V(t, x)$ можемо отримати також задачу типу 4 (зі стаціонарними неоднорідностями, див. нижче). Допоміжна функція $\omega(t, x)$ шукається у стандартному лінійному вигляді

$$\omega(t, x) = a(t)x + b(t), \quad (1.7)$$

де коефіцієнти $a(t)$ і $b(t)$ визначаються з крайових умов (1.3). Винятком є друга мішана задача: якщо в умовах (1.3) $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то допоміжна функція шукається у вигляді

$$\omega(t, x) = [a(t)x + b(t)] \cdot x.$$

4. Задача зі стаціонарними неоднорідностями: вільний член у рівнянні та крайові умови не залежать від часу, тобто

$$f(t, x) \equiv f(x), \quad \gamma_1(t) \equiv \gamma_1 = \text{const}, \quad \gamma_2(t) \equiv \gamma_2 = \text{const}.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$U(t, x) = V(t, x) + \omega(x), \quad (1.8)$$

де допоміжна функція $\omega(x)$ (стаціонарна температура) повинна справджувати не лише крайові умови (1.3), а й рівняння (1.1), тобто повинна бути розв'язком наступної крайової задачі:

$$\begin{aligned} a^2 \omega''(x) + f(x) &= 0, \\ \alpha_1 \omega'(0) + \beta_1 \omega(0) &= \gamma_1, \quad \alpha_2 \omega'(l) + \beta_2 \omega(l) = \gamma_2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Тоді для функції $V(t, x)$ одержимо мішану задачу типу 1 (однорідне рівняння та однорідні крайові умови), до якої безумовно застосовний метод Фур'є.

Якщо крайова задача для стаціонарної температури не має розв'язку (це можливо за певних наборів крайових умов), то задану мішану задачу слід інтегрувати як загальну мішану задачу (типу 3).

Примітка. Рівняння поширення тепла у стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею

$$U_t = a^2 U_{xx} - b[U - U_0(t, x)] + f(t, x), \quad b = \text{const} > 0, \quad (1.10)$$

зводиться до рівняння вигляду (1.1) підстановкою

$$U = e^{-bt} \cdot V(t, x). \quad (1.11)$$

Тоді для нової невідомої функції $V(t, x)$ одержимо рівняння

$$V_t = a^2 V_{xx} + e^{bt} \cdot [bU_0(t, x) + f(t, x)].$$

Підстановку доцільно вводити у випадку однорідних крайових умов, бо інакше після застосування такої підстановки можемо отримати складнішу задачу.

2. Знаходження власних функцій

При застосуванні методу Фур'є відносно функцій $X(x)$ зазвичай отримуємо задачу Штурма-Ліувілля (ЗШЛ) для рівняння

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad (2.1)$$

із крайовими умовами, що впливають із умови конкретної задачі. Оскільки для різних значень параметра λ загальний розв'язок рівняння (2.1) має різний вигляд, то для повного дослідження ЗШЛ необхідно розглянути три випадки:

- 1) $\lambda > 0$, тоді $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$;
- 2) $\lambda = 0$, тоді $X(x) = C_3 x + C_4$;
- 3) $\lambda < 0$, тоді $X(x) = C_5 \cos \sqrt{-\lambda}x + C_6 \sin \sqrt{-\lambda}x$.

Наведені загальні розв'язки потрібно підставити в крайові умови ЗШЛ. Якщо з одержаної алгебраїчної системи для довільних сталих отримується тільки тривіальний розв'язок, тоді для даного випадку власних значень не існує. Якщо при певних значеннях параметра λ отримуються нетривіальні розв'язки, то ці значення параметра будуть шуканими власними значеннями, а відповідні нетривіальні розв'язки – власними функціями.

Скільки може вийти різних власних функцій? Враховуючи, що типів крайових умов усього три, а кінців у скінченного стержня два, то можемо отримати не більш ніж 9 різних власних функцій. Складемо таблицю для всіх можливих випадків розподілу крайових умов:

Крайові умови ЗШЛ для рівняння (2.1)	Власні значення	Власні функції
1. $X(0) = 0, X(l) = 0$		
2. $X'(0) = 0, X(l) = 0$		
3. $X(0) = 0, X'(l) = 0$		
4. $X'(0) = 0, X'(l) = 0$		
5. $X(0) = 0, X'(l) + hX(l) = 0 \ (h = \text{const} > 0)$		
6. $X'(0) = 0, X'(l) + hX(l) = 0 \ (h = \text{const} > 0)$		
7. $X'(0) - hX(0) = 0, X(l) = 0 \ (h = \text{const} > 0)$		
8. $X'(0) - hX(0) = 0, X'(l) = 0 \ (h = \text{const} > 0)$		
9. $X'(0) - h_1 X(0) = 0, X'(l) + h_2 X(l) = 0 \ (h_1, h_2 = \text{const} > 0)$		

Деякі з дев'яти наборів крайових умов безсумнівно траплялися на практиці, інші можна знайти в прикладах, наведених у підручниках чи методичних посібниках. Спробуйте заповнити таблицю, вписавши в другий і третій стовпці відповідні

власні значення та власні функції. Це значно полегшить вам розв'язання задач математичної фізики, зокрема тих, що включені в Інд_04 та Інд_05.

3. Знаходження коефіцієнтів $T(t)$

При застосуванні методу Фур'є до мішаних задач для рівняння теплопровідності відносно функцій $T(t)$ зазвичай отримуємо рівняння вигляду

$$T' + \delta T(t) = q(t), \quad \delta = \text{const} > 0. \quad (3.1)$$

Для його інтегрування зручно застосовувати формулу загального розв'язку лінійного рівняння першого порядку:

$$y' + p(x)y = q(x) \Rightarrow y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right].$$

Тоді з рівняння (3.1) отримаємо формулу

$$T(t) = e^{-\int \delta dt} \cdot \left[C + \int q(t)e^{\int \delta dt} dt \right], \quad (3.2)$$

у якій залишається просто обчислити інтеграли.

4. Розклад у ряд Фур'є

На останньому етапі застосування методу Фур'є до мішаних задач для рівняння теплопровідності для знаходження коефіцієнтів ряду, у вигляді якого отримується шуканий розв'язок, часто виникає необхідність розкласти в ряд Фур'є на проміжку $[0, l]$ початкову функцію чи вільний член у рівнянні (або і ту, і іншу функції одразу). Для цього використовується наступна властивість: якщо функція $g(x) \in C_{[0, l]}^1$ і справджує крайові умови отриманої в процесі розв'язування мішаної задачі ЗШЛ для рівняння (2.1), то її можна розкласти в ряд Фур'є за відповідною системою власних функцій $\{X_n(x)\}$ цієї ЗШЛ:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x), \quad \alpha_n = \frac{\int_0^l g(x) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx},$$

причому цей ряд збігається абсолютно й рівномірно до функції $g(x)$ на відрізку $[0, l]$.

Коефіцієнти Фур'є α_n в нерезонансному випадку слід обчислити, виконавши інтегрування. Резонансний випадок маємо тоді, коли $g(x) = AX_k(x)$, тобто функція, яку розкладаємо в ряд Фур'є, входить у множину власних функцій ЗШЛ. Тоді з урахуванням властивості ортогональності власних функцій, що відповідають різним власним значенням, маємо:

$$\alpha_n = \frac{\int_0^l g(x) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx} = \frac{A \int_0^l X_k(x) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx} = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ A, & k = n, \end{cases}$$

звідки випливає, що в резонансному випадку коефіцієнти Фур'є знаходяться без інтегрування.

Зауважимо, що при розкладі в ряд Фур'є вільного члена в неоднорідному рівнянні теплопровідності коефіцієнти α_n загалом будуть функціями змінної t .

5. Задачі Коші для одновимірного рівняння теплопровідності

Теоретичний матеріал по темі: [2], стор. 176-183.

Розглянемо задачу: у фазовій площині $\Omega = \{(t, x) | t > 0, x \in R\}$ знайти обмежений розв'язок однорідного рівняння теплопровідності

$$U_t = a^2 U_{xx}, \quad (5.1)$$

який справджує початкову умову

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad x \in R, \quad (5.2)$$

де $\varphi(x)$ – відома неперервна й обмежена на всій осі функція. Якщо розв'язок задачі Коші (5.1), (5.2) існує, то він є єдиним і дається формулою Пуассона

$$U(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi. \quad (5.3)$$

Інтеграл (5.3) в окремих випадках вдається обчислити зведенням до відомого інтеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi},$$

або шляхом вираження через так званий «інтеграл помилок»

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Розв'язок задачі Коші для неоднорідного рівняння теплопровідності

$$U_t = a^2 U_{xx} + f(t, x)$$

із початковою умовою (5.2) будується із застосуванням принципу Дюгамеля і дається формулою

$$U(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot \exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}\right) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau, \xi)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\xi d\tau. \quad (5.4)$$

6. Мішані задачі для напівобмеженого стержня

Теоретичний матеріал по темі: [2], стор. 186-195.

При дослідженні процесів поширення тепла в напівобмеженому стержні з теплоізованою бічною поверхнею, кінець якого розміщений у початку координат, приходимо до мішаної задачі: в області $\Omega = \{(t, x) | t > 0, x > 0\}$ знайти розв'язок рівняння (1.1), який справджує початкову умову

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad x \geq 0,$$

та крайову умову на кінці стержня:

$$\alpha U_x(t, 0) + \beta U(t, 0) = \gamma(t), \quad t \geq 0 \quad (\alpha, \beta = \text{const}).$$

Будемо вважати функції $f(t, x)$, $\varphi(x)$ і $\gamma(t)$ обмеженими і неперервними відповідно в областях Ω , $x \geq 0$ та $t \geq 0$.

1. Метод непарного продовження. Мішана задача

$$\begin{aligned} U_t &= a^2 U_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ U(0, x) &= \varphi(x), \quad x \geq 0; \\ U(t, 0) &= 0, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

(кінець стержня підтримується при нульовій температурі) при $x \geq 0$ еквівалентна задачі Коші

$$\begin{aligned} V_t &= a^2 V_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ V(0, x) &= \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0; \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(задаємо непарне продовження початкової функції). Тоді розв'язок мішаної задачі $U(t, x) = V(t, x)|_{x \geq 0}$, де $V(t, x)$ знаходиться за допомогою формули Пуассона (5.3).

2. Метод парного продовження. Мішана задача

$$\begin{aligned} U_t &= a^2 U_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ U(0, x) &= \varphi(x), \quad x \geq 0; \\ U_x(t, 0) &= 0, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

(кінець стержня теплоізований) при $x \geq 0$ еквівалентна задачі Коші

$$\begin{aligned} V_t &= a^2 V_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ V(0, x) &= \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0; \\ \varphi(-x), & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(задаємо парне продовження початкової функції). Тоді знову розв'язок мішаної задачі $U(t, x) = V(t, x)|_{x \geq 0}$, де $V(t, x)$ знаходиться за допомогою формули Пуассона (5.3).

Зауваження 1. Якщо у мішаній задачі (6.1) $\mu_1(t) \equiv 0$ [або у мішаній задачі (6.2) $\mu_2(t) \equiv 0$], то розв'язок можна знайти, застосувавши принцип Дюгамеля аналогічно до задач Коші. Інший спосіб – задати парне (непарне) продовження не тільки початкової функції, а й інтенсивності джерел тепла: тоді розв'язок еквівалентної задачі Коші знаходиться за допомогою формули (5.4).

Зауваження 2. Якщо у мішаній задачі для напівобмеженого стержня крайова умова неоднорідна, то її завжди можна звести до однорідної, підібравши деяку обмежену допоміжну функцію, котра справджує цю крайову умову. Зокрема, підстановкою

$$U(t, x) = V(t, x) + \mu_1(t)$$

зодноріднюється крайова умова $U(t, 0) = \mu_1(t)$, а підстановкою

$$U(t, x) = V(t, x) - e^{-x} \mu_2(t) \quad (6.3)$$

– крайова умова $U_x(t, 0) = \mu_2(t)$.

7. Ілюстративне розв’язання варіанту індивідуального завдання

1. Дано однорідний ($a = 1$) ізотропний стержень довжини l , правий кінець та бічна поверхня якого теплоізовані. Початкова температура стержня рівна $A(1 + x - 0,5x^2l^{-1})$, де $A = \text{const}$, а на його лівому кінці температура змінюється згідно закону Ae^{-t} . Усередині стержня діють джерела тепла інтенсивності $A(l^{-1} - e^{-t})$. Знайти розподіл температури уздовж стержня при $t > 0$.

Розв’язання. Математична модель ([1], стор. 5-7):

$$U_t = U_{xx} + A(l^{-1} - e^{-t}), \quad (7.1)$$

який справджує початкову умову

$$U(0, x) = A(1 + x - 0,5x^2l^{-1}), \quad 0 \leq x \leq l \quad (7.2)$$

та крайові умови

$$U(t, 0) = Ae^{-t}, \quad U_x(t, l) = 0, \quad 0 \leq t < T. \quad (7.3)$$

1 етап. Крайові умови неоднорідні, причому містять змінну часу, отже, маємо загальну мішану задачу (типу 3). Отже, на першому етапі розв’язання необхідно звести задачу (7.1)-(7.3) до задачі з однорідними крайовими умовами підстановкою (1.6), де допоміжну функцію $\omega(t, x)$ підбираємо таким чином, щоб вона справджувала крайові умови (7.3), тобто

$$\omega(t, 0) = Ae^{-t}, \quad \omega_x(t, l) = 0, \quad 0 \leq t < T. \quad (7.4)$$

Допоміжна функція $\omega(t, x)$ шукається у лінійному вигляді (1.7), де коефіцієнти $a(t)$ і $b(t)$ знаходимо з умов (7.4):

$$\omega(t, x) = a(t)x + b(t) \Rightarrow \begin{cases} \omega(t, 0) \equiv b(t) = Ae^{-t}, \\ \omega_x(t, l) \equiv a(t) = 0. \end{cases}$$

Отже, підстановка (1.6) запишеться у вигляді

$$U(t, x) = V(t, x) + \omega(t, x) = V(t, x) + Ae^{-t}. \quad (7.5)$$

Підставивши функцію (7.5) у рівності (7.1), (7.2) та (7.3), маємо:

$$V_t - Ae^{-t} = V_{xx} + A(l^{-1} - e^{-t}),$$

$$V(0, x) + A = A(1 + x - 0,5x^2l^{-1}), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$V(t, 0) + Ae^{-t} = Ae^{-t}, \quad V_x(t, l) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

Після спрощення отримаємо мішану задачу для нової невідомої функції $V(t, x)$:

$$V_t = V_{xx} + Al^{-1}, \quad (7.6)$$

$$V(0, x) = A(x - 0,5x^2l^{-1}), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (7.7)$$

$$V(t, 0) = 0, \quad V_x(t, l) = 0, \quad 0 \leq t < T. \quad (7.8)$$

2 етап. Крайові умови однорідні, однак вільний член у рівнянні не залежить від часу, отже, маємо задачу зі стаціонарними неоднорідностями (типу 4). Тому на

другому етапі розв'язання необхідно звести задачу (7.6)-(7.8) до задачі першого типу підстановкою (1.8), де допоміжна функція $\omega(x)$ (стаціонарна температура) повинна справджувати не тільки крайові умови (7.8), а й рівняння (7.6), тобто має бути розв'язком крайової задачі (1.9) у вигляді:

$$\begin{aligned}\omega''(x) + Al^{-1} &= 0, \\ \omega(0) &= 0, \quad \omega'(l) = 0.\end{aligned}\tag{7.9}$$

Загальний розв'язок рівняння одержується двократним інтегруванням і має вигляд $\omega(t, x) = -0,5Al^{-1}x^2 + C_1x + C_2$. Значення сталих C_1, C_2 знаходимо з крайових умов:

$$\omega(0) \equiv C_2 = 0, \quad \omega'(l) \equiv -A + C_1 = 0.$$

Отже, підстановка (1.8) запишеться у вигляді

$$V(t, x) = Z(t, x) + \omega(x) = Z(t, x) + A(x - 0,5l^{-1}x^2).\tag{7.10}$$

Підставивши функцію (7.10) у рівності (7.6), (7.7) та (7.8), маємо:

$$\begin{aligned}Z_t &= Z_{xx} - Al^{-1} + Al^{-1}, \\ Z(0, x) + A(x - 0,5l^{-1}x^2) &= A(x - 0,5x^2l^{-1}), \quad 0 \leq x \leq l, \\ Z(t, 0) + 0 &= 0, \quad Z_x(t, l) + A(1 - xl^{-1})|_{x=l} = 0, \quad 0 \leq t < T.\end{aligned}$$

Після спрощення отримаємо мішану задачу для нової невідомої функції $Z(t, x)$:

$$\begin{aligned}Z_t &= Z_{xx}, \\ Z(0, x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq l, \\ Z(t, 0) &= 0, \quad Z_x(t, l) = 0, \quad 0 \leq t < T.\end{aligned}$$

Із єдиності розв'язку мішаної задачі для рівняння теплопровідності випливає, що одержана задача типу 1 має тільки тривіальний розв'язок, адже $Z(t, x) \equiv 0$

очевидно є розв'язком задачі, а тому ця функція є її єдиним розв'язком.

Отже, враховуючи підстановки (7.5), (7.10), можемо записати шуканий розв'язок мішаної задачі (7.1)-(7.3):

$$U(t, x) = V(t, x) + \omega(t, x) = Z(t, x) + \omega(x) + \omega(t, x) = A(e^{-t} + x - 0,5l^{-1}x^2).$$

2. Зінтегрувати мішану задачу та дати фізичну інтерпретацію:

$$U_t = a^2 U_{xx} - b[U - x(x-1)e^{-2bt}], \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1;\tag{7.11}$$

$$U(0, x) = 2 \sin 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1;\tag{7.12}$$

$$U(t, 0) = 0, \quad U(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t < T.\tag{7.13}$$

Розв'язання. Фізична інтерпретація ([1], стор. 5-7): знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні одиничної довжини, якщо початкова температура точок стержня рівна $2 \sin 2\pi x$, на обох кінцях підтримується нульова температура, а через бічну поверхню відбувається теплообмін по закону Ньютона з навколишнім середовищем температури $x(x-1)e^{-2bt}$.

1 етап. Рівняння має вигляд (1.10), тому для початку спростимо його до вигляду (1.1) підстановкою (1.11):

$$U = e^{-bt} \cdot V(t, x),$$

де $V(t, x)$ нова невідома функція. Підставивши функцію (1.11) у рівняння (7.11), маємо:

$$-b e^{-bt} \cdot V + e^{-bt} \cdot V_t = a^2 e^{-bt} \cdot V_{xx} - b[e^{-bt} \cdot V - x(x-1)e^{-2bt}],$$

звідки після спрощення отримаємо рівняння для $V(t, x)$:

$$V_t = a^2 V_{xx} + bx(x-1)e^{-bt}. \quad (7.14)$$

Підстановка (1.11) очевидно не змінює початкової умови (7.12) і однорідних крайових умов (7.13), тому для $V(t, x)$ буде

$$V(0, x) = 2 \sin 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (7.15)$$

$$V(t, 0) = 0, \quad V(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t < T. \quad (7.16)$$

2 етап. В одержаній задачі (7.14)-(7.16) рівняння неоднорідне, а крайові умови однорідні (задача типу 2). Початкова та крайові умови узгоджені, отже, можемо застосувати метод відокремлення змінних. Розв'язок шукаємо у вигляді ряду (1.5), де $X_n(x)$ – власні функції задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі, а $T_n(t)$ визначаються підстановкою ряду для $V(t, x)$ у неоднорідне рівняння (7.14) та початкову умову (7.15). Тому на другому етапі спочатку необхідно знайти власні функції задачі Штурма-Ліувілля для відповідної до (7.14)-(7.16) однорідної задачі

$$W_t = a^2 W_{xx}, \quad (7.17)$$

$$W(t, 0) = 0, \quad W(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t < T \quad (7.18)$$

(початкові умови наразі можна не враховувати). Розв'язок допоміжної задачі (7.17)-(7.18) (задачі типу 1) шукаємо методом відокремлення змінних у вигляді (1.4), або, перепозначивши допоміжну функцію через $Y(t)$,

$$W(t, x) = Y(t) \cdot X(x) \neq 0. \quad (7.19)$$

Підставивши (7.19) у рівняння (7.17) і відокрепивши змінні, одержимо:

$$Y'(t) \cdot X(x) = a^2 Y(t) \cdot X''(x) \Rightarrow \frac{Y'(t)}{a^2 Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \text{const} \Rightarrow X''(x) = \lambda X(x).$$

Із урахуванням крайових умов (7.18) для шуканих власних функцій $X(x)$ отримаємо задачу Штурма-Ліувілля (ЗШЛ)

$$\begin{aligned} X''(x) - \lambda X(x) &= 0; \\ X(0) &= 0, \quad X(1) = 0. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Дослідимо ЗШЛ (7.20).

1. Нехай $\lambda > 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння з (7.20) запишеться у вигляді $X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Підставивши цей розв'язок у крайові умови, одержимо лінійну однорідну систему відносно невідомих сталих C_1, C_2 :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи $\Delta = -2 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} \neq 0$, оскільки $\sqrt{\lambda} > 0$. Отже, $C_1 = C_2 = 0$, а тому $X(x) \equiv 0$ і $\lambda > 0$ не є власним значенням.

2. Нехай $\lambda = 0$. Тоді $X(x) = C_3 x + C_4$ і з крайових умов одержимо:

$$\begin{cases} C_4 = 0; \\ C_3 + C_4 = 0, \end{cases}$$

звідки $C_3 = C_4 = 0$, а тому $X(x) \equiv 0$ і $\lambda = 0$ також не є власним значенням.

3. При $\lambda < 0$ загальний розв'язок рівняння з (7.20) запишеться у вигляді

$X(x) = C_5 \cos \sqrt{-\lambda}x + C_6 \sin \sqrt{-\lambda}x$. Із крайових умов одержимо:

$$\begin{cases} C_5 = 0; \\ C_6 \sin \sqrt{-\lambda} + C_5 \cos \sqrt{-\lambda} = 0, \end{cases}$$

звідки $C_5 = 0$ і $C_6 \sin \sqrt{-\lambda} = 0$. Отже, нетривіальний розв'язок задачі (7.20) існує тільки для тих значень параметра λ , які є розв'язками тригонометричного рівняння $\sin \sqrt{-\lambda} = 0$, звідки $\lambda_n = -(\pi n)^2$. Тоді відповідні власні функції матимуть вигляд (беремо для визначеності $C_6 = 1$)

$$X_n(x) = \sin \pi n x, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.21)$$

З урахуванням знайдених власних функцій (7.21) ряд (1.5) для розв'язку $V(t, x)$ мішаної задачі (7.14)-(7.15) запишеться у вигляді

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \pi n x. \quad (7.22)$$

3 етап. Визначаємо коефіцієнти $T_n(t)$ підстановкою ряду (7.22) у неоднорідне рівняння (7.14) та початкову умову (7.15). Маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) \sin \pi n x = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} (\pi n)^2 T_n(t) \sin \pi n x + b x(x-1) e^{-bt}; \quad (7.23)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \pi n x = 2 \sin 2\pi x. \quad (7.24)$$

Знайдемо рівняння для коефіцієнтів $T_n(t)$. Для цього спершу перепишемо рівність (7.23) у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T'_n(t) + (a\pi n)^2 T_n(t)] \sin \pi n x = b e^{-bt} \cdot x(x-1). \quad (7.25)$$

Розкладемо функцію $x(x-1)$ у ряд Фур'є на відрізку $[0;1]$ по системі власних функцій (7.21):

$$x(x-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \pi n x, \quad \alpha_n = \frac{\int_0^1 x(x-1) \sin \pi n x dx}{\int_0^1 \sin^2 \pi n x dx}. \quad (7.26)$$

Тоді рівність (7.25) можна записати у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T'_n(t) + (a\pi n)^2 T_n(t) - b \alpha_n e^{-bt}] \sin \pi n x = 0,$$

звідки

$$T'_n(t) + (a\pi n)^2 T_n(t) - b \alpha_n e^{-bt} = 0. \quad (7.27)$$

Для визначення початкових значень $T_n(0)$ розклад у ряд не потрібен, адже у правій частині рівності (7.24) маємо власну функцію (7.21) при $n = 2$, а тому

$$T_n(0) = \begin{cases} 0, & n \neq 2, \\ 2, & n = 2. \end{cases} \quad (7.28)$$

Розв'яжемо задачі Коші (7.27), (7.28). Для знаходження загального розв'язку рівняння (7.27) при довільному $n \in \mathbb{N}$ застосуємо формулу (3.2):

$$T_n(t) = e^{-(a\pi n)^2 t} \left(A_n + \int b\alpha_n e^{-bt} \cdot e^{(a\pi n)^2 t} dt \right) = A_n e^{-(a\pi n)^2 t} + \frac{b\alpha_n e^{-bt}}{(a\pi n)^2 - b}. \quad (7.29)$$

Підставивши (7.29) у початкові умови (7.28), маємо:

а) при $n \neq 2$ $T_n(0) = 0 \Rightarrow A_n = -\frac{b\alpha_n}{(a\pi n)^2 - b};$

б) при $n = 2$ $T_2(0) = 2 \Rightarrow A_2 = 2 - \frac{b\alpha_2}{4(a\pi)^2 - b}.$

Підставивши знайдені A_n у (7.29), одержимо розв'язки задач Коші (7.27), (7.28):

$$T_n(t) = \begin{cases} \frac{b\alpha_n [e^{-bt} - e^{-(a\pi n)^2 t}]}{(a\pi n)^2 - b}, & n \neq 2, \\ 2e^{-4(a\pi)^2 t} + \frac{b\alpha_n [e^{-bt} - e^{-4(a\pi)^2 t}]}{4(a\pi)^2 - b}, & n = 2. \end{cases}$$

Тоді ряд (7.22) запишеться у вигляді

$$V(t, x) = 2e^{-4(a\pi)^2 t} \sin 2\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b\alpha_n [e^{-bt} - e^{-(a\pi n)^2 t}]}{(a\pi n)^2 - b} \sin \pi n x.$$

І, нарешті, з урахуванням підстановки (1.11) одержуємо шуканий розв'язок мішаної задачі (7.11)-(7.13)

$$U = e^{-bt} \cdot V(t, x) = 2e^{-[b+4(a\pi)^2]t} \sin 2\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b\alpha_n [e^{-2bt} - e^{-[b+(a\pi n)^2]t}]}{(a\pi n)^2 - b} \sin \pi n x,$$

у якому залишається обчислити значення коефіцієнтів Фур'є за формулами (7.26).

3. Зінтегрувати мішану задачу та дати фізичну інтерпретацію:

$$U_t = U_{xx} - 2e^{-t}(e^{-x} + 1), \quad 0 < t < T, \quad x > 0; \quad (7.30)$$

$$U(0, x) = e^{-x}, \quad x \geq 0; \quad (7.31)$$

$$U_x(t, 0) = -e^{-t}, \quad 0 \leq t < T. \quad (7.32)$$

Розв'язання. Фізична інтерпретація ([1], стор. 5-7, 18-19): знайти закон зміни температури в однорідному напівобмеженому стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо початкова температура точок стержня рівна e^{-x} , усередині стержня діють джерела тепла інтенсивності $-2e^{-t}(e^{-x} + 1)$, а через кінець стержня проходить тепловий потік величини $-e^{-t}$.

1 етап. Крайова умова (7.32) неоднорідна, отже, на першому етапі зводимо задачу (7.30)-(7.32) до задачі з однорідними крайовими умовами підстановкою (6.3) у вигляді

$$U(t, x) = V(t, x) + e^{-x} \cdot e^{-t}. \quad (7.33)$$

Підставивши функцію (7.33) у рівності (7.30), (7.31) та (7.32), маємо:

$$V_t - e^{-x} \cdot e^{-t} = V_{xx} + e^{-x} \cdot e^{-t} - 2e^{-t}(e^{-x} + 1), \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$$

$$V(0, x) + e^{-x} = e^{-x}, \quad x \geq 0;$$

$$V_x(t, 0) - e^{-t} = -e^{-t}, \quad 0 \leq t < T.$$

Після спрощення отримуємо задачу для нової невідомої функції $V(t, x)$:

$$V_t = V_{xx} - 2e^{-t}, \quad 0 < t < T, \quad x > 0; \quad (7.34)$$

$$V(0, x) = 0, \quad x \geq 0; \quad (7.35)$$

$$V_x(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t < T. \quad (7.36)$$

2 етап. Маємо задачу типу (6.2) (для напівобмеженого стержня з теплоізолюваним кінцем). Зведемо задачу (7.34)-(7.36) до еквівалентної задачі Коші шляхом парного продовження на від'ємну піввісь вільного члена в рівнянні (7.34):

$$f(t, x) = -2e^{-t} \Rightarrow F(t, x) = \begin{cases} f(t, x), & x \geq 0; \\ f(t, -x), & x < 0 \end{cases} = -2e^{-t}, \quad x \in R,$$

оскільки $f(t, x)$ не залежить від змінної x . Отже, $V(t, x) = W(t, x)|_{x \geq 0}$, де $W(t, x)$ є розв'язком задачі Коші

$$W_t = W_{xx} - 2e^{-t}, \quad t > 0, \quad x \in R;$$

$$W(0, x) = 0, \quad x \in R.$$

Для знаходження $W(t, x)$ застосовуємо формулу (5.4):

$$\begin{aligned} W(t, x) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot \exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}\right) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau, \xi)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\xi d\tau = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot \exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}\right) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2e^{-\tau}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\xi d\tau = \\ &= \left| \frac{\xi-x}{2a\sqrt{t-\tau}} = \alpha, \right|_{d\xi=2a\sqrt{t-\tau}d\alpha} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2e^{-\tau}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\alpha^2} d\alpha d\tau = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} \cdot d\alpha = \sqrt{\pi} \right| = -\int_0^t e^{-\tau} d\tau = \\ &= e^{-t} - 1, \quad x \in R. \end{aligned}$$

Тоді розв'язок мішаної задачі (7.34)-(7.36) $V(t, x) = e^{-t} - 1, \quad x \geq 0$.

Із урахуванням початкової підстановки (7.33) одержимо шуканий розв'язок задачі (7.30)-(7.32)

$$U(t, x) = V(t, x) + e^{-x} \cdot e^{-t} = e^{-t} - 1 + e^{-(x+t)}.$$

Джерела:

[1] Маринець В. В., Рєго В. Л. Рівняння математичної фізики (методична розробка з практичних занять), ч. II. – Ужгород: Говерла, 2009. – 92 с.

[2] Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – 334 с.