Курс: «Диференціальні рівняння» **ст. викл. Варга Я.В.**

До Модуля 1

Цикл лекцій по темах розділу:

НАЙПРОСТІШІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ, ІНТЕГРОВНІ В КВАДРАТУРАХ

1 Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них.

Диференціальне рівняння

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \qquad (1)$$

де $M_1(x)$, $M_2(x)$ та $N_1(y)$, $N_2(y)$ – неперервні функції своїх аргументів, називається **рівнянням з відокремлюваними змінними**.

Відокремимо змінні в рівнянні (1): поділимо обидві його частини на добуток функцій $M_2(x)N_1(y)$, причому вважаємо, що $M_2(x) \neq 0$ та $N_1(y) \neq 0$. Матимемо

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Інтегруючи останню рівність, отримуємо загальний інтеграл рівняння (1):

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C,$$

де C – довільна стала.

Якщо a – корінь рівняння $M_2(x) = 0$, то $x = a$ є розв'язком рівняння (1). Аналогічно, якщо b – корінь рівняння $N_1(y) = 0$, то $y = b$ – розв'язок рівняння (1).

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$(y - x^2y)dy - (x - xy^2)dx = 0.$$

Рівняння з відокремлюваними змінними можна записати також у вигляді

$$y' = f_1(x)f_2(y), \qquad (2)$$

де $f_1(x)$ та $f_2(y)$ – неперервні функції.

Відокремимо змінні в рівнянні (2): поділимо обидві його частини на функцію $f_2(y)$, вважаючи, що $f_2(y) \neq 0$, і помножимо на dx, врахувуючии, що $dy = y'dx$. Матимемо

$$\frac{1}{f_2(y)}dy = f_1(x)dx.$$

Інтегруючи останню рівність, отримуємо загальний інтеграл рівняння (2):

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C.$$

Якщо $f_2(a) = 0$, то $y = a$ є також розв'язком рівняння (2).

До рівняння з відокремлюваними змінними зводиться рівняння вигляду

$$y' = f(ax + by + c),$$

де a, b, c – довільні сталі. Дійсно, виконавши заміну $z = ax + by + c$, для знаходження функції z отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$z' = a + bf(z).$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$y' = (4x + y + 5)^2.$$

2 Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.

Функція $f(x, y)$ називається ***однорідною функцією виміру m***, якщо $\forall\lambda > 0$ виконується рівність

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y).$$

Функція $f(x, y)$ називається ***однорідною функцією***, якщо вона є однорідною функцією виміру нуль, тобто $\forall\lambda > 0$ виконується рівність

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y). \tag{3}$$

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{4}$$

називається ***однорідним рівнянням***, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією.

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Оскільки права частина рівняння (4) – однорідна функція, то підставивши в рівність (3) $\lambda = \dfrac{1}{x}$, матимемо $f(x, y) = f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$. Таким чином, однорідне рівняння (4) можна записати у вигляді

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{5}$$

Виконаємо заміну шуканої функції $y = zx$, де $z = z(x)$ – нова шукана функція. Тоді $y' = z'x + z$ і рівняння (5) набуде вигляду

$$z'x + z = f(1, z). \tag{6}$$

Отже, для знаходження функції z одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремивши змінні в рівнянні (6)

$$\frac{dz}{f(1, z) - z} = \frac{dx}{x}$$

та проінтегрувавши отриману рівність, одержимо

$$\int \frac{dz}{f(1, z) - z} = \ln|x| + C.$$

Якщо ввести позначення $F(z) = \displaystyle\int \frac{dz}{f(1,z) - z}$, то загальний інтеграл однорідного рівняння (4) можемо записати у вигляді

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C.$$

Розв'язками однорідного рівняння (4) можуть бути також функції $y = ax$ $(x \neq 0)$, де a – корінь рівняння $f(1,z) - z = 0$, та $x = 0$ $(y \neq 0)$, які могли бути втрачені при відокремленні змінних. Ці розв'язки можуть виявитись особливими.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Диференціальне рівняння в симетричній формі

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

є однорідним, якщо $M(x,y)$ та $N(x,y)$ – однорідні функції однакового виміру.

3. Рівняння, звідні до однорідних.

а) Розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{7}$$

де a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 – деякі сталі.

Якщо $c_1 = c_2 = 0$, то диференціальне рівняння (7) є однорідним рівнянням.

Якщо $\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то диференціальне рівняння (7) можна звести до однорідного рівняння за допомогою заміни

$$x = u + x_0, \quad y = v(u) + y_0, \quad y' = v', \tag{8}$$

де (x_0, y_0) є розв'язком системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0, \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Оскільки $\triangle \neq 0$, то лінійна неоднорідна система (9) має єдиний розв'язок.

Підставимо (8) в (7) і таким чином, одержимо диференціальне рівняння

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v + a_1x_0 + b_1y_0 + c_1}{a_2u + b_2v + a_2x_0 + b_2y_0 + c_2}\right),$$

або, враховуючи (9),

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right). \tag{10}$$

Очевидно, що диференціальне рівняння (10) є однорідним і розв'язується заміною змінних $v(u) = z(u)u$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0.$$

b) Якщо $\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, тобто $a_1 b_2 = a_2 b_1$, то $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$, а тому диференціальне рівняння (7) можна записати у вигляді

$$y' = f\left(\frac{\lambda(a_2 x + b_2 y) + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) = f_1\left(a_2 x + b_2 y\right).$$

Таким чином, одержали диференціальне рівняння, яке за допомогою заміни $z = a_2 x + b_2 y$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними

$$z' = a_2 + b_2 f_1(z).$$

Зауважимо, що для зведення рівняння (7) до рівняння з відокремлюваними змінними можна застосовувати також заміни $z = a_1 x + b_1 y$, $z = a_1 x + b_1 y + c_1$ або $z = a_2 x + b_2 y + c_2$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0.$$

4. Квазіоднорідні рівняння

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{11}$$

називається ***квазіоднорідним рівнянням*** з показником квазіоднорідності σ, якщо $\forall \lambda > 0$ виконується рівність

$$f(\lambda x, \lambda^{\sigma} y) = \lambda^{\sigma - 1} f(x, y), \tag{12}$$

тобто рівняння (11) інваріантне (не змінює свого вигляду) відносно заміни

$$x \to \lambda x, \quad y \to \lambda^{\sigma} y.$$

За допомогою заміни шуканої функції $y = z x^{\sigma}$, де $z = z(x)$ – нова шукана функція, квазіоднорідне рівняння (11) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Дійсно, після заміни шуканої функції, замість (11) отримаємо рівняння

$$x^{\sigma} z' + \sigma x^{\sigma - 1} z = f(x, x^{\sigma} z).$$

Згідно з рівністю (12)

$$f(x, x^{\sigma} z) = f(x \cdot 1, x^{\sigma} z) = x^{\sigma - 1} f(1, z).$$

Таким чином, для знаходження функції z одержимо рівняння з відокремлюваними змінними

$$z' = \frac{f(1, z) - \sigma z}{x}. \tag{13}$$

Розв'язавши рівняння (11) та зробивши обернену заміну, знайдемо загальний розв'язок квазіоднорідного рівняння (11). При цьому слід пам'ятати про можливість втрати сталих розв'язків, які визначаються коренями рівняння $f(1, z) - \sigma z = 0$, при відокремленні змінних у рівняння (13).

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$2x^2y' = y^3 + xy.$$

Джерела

Гой Т.П. Навчальний посібник: Диференціальні рівняння/Т.П. Гой , О.В. Махней – Івано-Франківськ, 2010. – Стор. 35-45.

Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2000. – Стор. 10-25.