

До Модуля 1

Цикл лекцій по темах розділу:

**ПОНЯТТЯ ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ  
ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ МОДЕЛІ**

**1. Диференціальні рівняння та математичне моделювання**

Досліджуючи різноманітні фізичні явища, технологічні процеси у багатьох галузях науки та техніки, деякі процеси, що виникають в економіці, екології та інших соціальних науках, не завжди вдається безпосередньо простежити залежність між величинами, які описують певний процес чи явище. Однак у багатьох випадках можна виявити функціональну залежність між визначальними характеристиками процесу (функціями), швидкостями їх зміни й часом, тобто знайти співвідношення, які пов'язують шукані функції та їх похідні. Такі співвідношення, до яких, крім незалежних величин і залежних від них шуканих функцій, входять також похідні від шуканих функцій, називають диференціальними рівняннями [термін «диференціальне рівняння» введений у 1675 р. німецьким математиком Г. В. Лейбніцем (1646-1716)], а знаходження невідомої функції (розв'язку) – інтегруванням диференціального рівняння. Диференціальне рівняння (ДР), отримане в ході дослідження деякого реального явища чи процесу, називають диференціальною моделлю цього явища або процесу. Диференціальні моделі називають ще динамічними математичними моделями описуваних ними реальних об'єктів. У таких моделях, крім шуканих залежних величин, містяться також похідні шуканих залежностей (швидкості, прискорення тощо). Диференціальні моделі допомагають зрозуміти досліджувані явища та процеси, дають можливість встановити якісні та кількісні характеристики їх станів, із їх використанням можна описати механізм розвитку процесу, а також передбачити його подальший розвиток без натуральних експериментів, проведення яких часто є надто дорогим або просто неможливим.

Диференціальні моделі є важливою складовою математичного моделювання, яке включає в себе не тільки побудову й дослідження математичних моделей, але також створення алгоритмів і програм, що реалізують ці моделі на ЕОМ.

У процесі побудови диференціальних моделей важливе значення має знання законів тієї області науки, з якою пов'язана природа задачі, що вивчається. Наприклад, у механіці це може бути другий закон Ньютона ( $F = ma$ , де  $m$  – маса тіла,  $a$  – прискорення руху,  $F$  – сума сил, що діють на тіло); у електротехніці – закон Кірхгофа (алгебраїчна сума сил струмів, які протікають у певній точці електричного кола, дорівнює нулю); у хімії – закон розчинення речовини (швидкість розчинення пропорційна наявній кількості нерозчиненої речовини та різниці концентрацій насиченого розчину і розчину в певний момент часу) тощо.

Питання про відповідність математичної моделі й реального явища вивчається на основі аналізу результатів дослідів та їх порівняння з поведінкою розв'язку одержаного диференціального рівняння.

Розглянемо прикладну задачу, що призводить до звичайних диференціальних рівнянь.

**Приклад 1.1.** Знайти закон зростання інформаційних потоків у науці (зростання кількості наукових публікацій), якщо відомо, що швидкість зростання прямо пропорційна досягнутому рівню кількості публікацій. Визначити, за який час кількість публікацій подвоїться порівняно з початковою кількістю, якщо відносна швидкість зростання складає 7%.

**Розв'язання.** Нехай  $y(t)$  – кількість публікацій у момент часу  $t$ ,  $y_0$  – початкова кількість публікацій, тобто  $y(0) = y_0$ . Швидкість зростання інформаційних потоків як швидкість зміни функції є похідною цієї функції. Отже, закон зростання інформаційних потоків можна записати у вигляді диференціального рівняння

$$y'(t) = ky(t), \quad (1.1)$$

де  $k = \text{const} > 0$  – коефіцієнт пропорційності, що характеризує відгуки на публікації у певній галузі знань. Диференціальне рівняння (1.1) разом із умовою  $y(0) = y_0$  є математичною моделлю зростання інформаційних потоків. Розв'яжемо це рівняння, враховуючи, що  $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ :

$$\frac{dy}{dt} - ky = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} - kdt = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(\ln y - kt) = 0 \Rightarrow \ln y - kt = C_1 \Rightarrow y = e^{C_1 + kt},$$

де  $C_1$  – довільна стала. Якщо перепозначити  $e^{C_1}$  через  $C$ , то  $y(t) = Ce^{kt}$ . Оскільки  $y(0) = y_0$ , то  $C = y_0$ , тобто шуканий закон зростання інформаційних потоків у науці визначається формулою

$$y(t) = y_0 e^{kt}. \quad (1.2)$$

Знайдемо тепер час  $T$ , за який потік наукової інформації в порівнянні з початковою кількістю збільшиться вдвічі. За умовою задачі відносна швидкість  $y'/y$  зростання інформаційних потоків складає 7%, а тому  $k = 0,07$ . Оскільки  $y(T) = 2y_0$ , то з (1.2) отримуємо

$$y(T) = y_0 e^{kT} = 2y_0 \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{0,07} \approx 10 \text{ років.}$$

## 2. Загальні поняття й означення теорії диференціальних рівнянь

**Означення 1.** *Звичайним диференціальним рівнянням* називають співвідношення вигляду

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.1)$$

між незалежною змінною  $x$ , шуканою функцією  $y = y(x)$  цієї змінної та похідними  $y'$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n)}$ .

Позначення, використані в Означенні 1, не є суттєвими: незалежна змінна може позначатися через  $t$ , шукана функція – через  $s, f, F$  тощо.

**Означення 2.** *Порядком* звичайного ДР називають порядок найвищої похідної невідомої функції, яка входить у рівняння. У ДР  $n$ -го порядку (2.1) вважається, що похідна  $n$ -го порядку шуканої функції справді входить у це рівняння, тоді як наявність решти аргументів необов'язкова.

Наведемо приклади звичайних диференціальних рівнянь:

$$y = xy' + y'^3, \quad y' + |y'| = 0, \quad y'' + y = \cos x, \quad y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 2y' + y = xe^x, \quad y^{(10)} = x.$$

Перші два з наведених рівнянь мають перший порядок, третє рівняння – другий порядок, четверте рівняння – четвертий порядок, п'яте – десятий порядок.

**Означення 3.** Якщо ДР містить частинні похідні невідомої функції від кількох незалежних змінних, то його називають **рівнянням із частинними похідними**.

Наведемо приклади таких рівнянь:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z).$$

**Розв'язком** ДР (2.1) на деякому інтервалі  $(a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , називають функцію  $y = y(x)$ , яка має на цьому інтервалі похідні до порядку  $n$  включно та задовольняє рівняння (2.1). Це означає, що для всіх  $x \in (a, b)$  справджується тотожність

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \equiv 0.$$

Наприклад, функція  $y = \cos 2x$  є розв'язком ДР другого порядку  $y'' + 4y = 0$  на інтервалі  $(-\infty, +\infty)$ . Розв'язками цього рівняння, як легко перевірити, є також

$$y = \sin 2x, \quad y = 3 \cos 2x, \quad y = \cos 2x - \sin 2x, \quad \text{і загалом усі функції вигляду}$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x, \quad \text{де } C_1, C_2 \text{ – довільні сталі. Пізніше, при вивченні рівнянь}$$

вищих порядків, буде встановлено, що звичайне ДР  $n$ -го порядку в загальному випадку має сім'ю розв'язків, залежну від  $n$  довільних сталих.

Із геометричної точки зору розв'язку ДР у прямокутній системі координат відповідає деяка крива, яку називають **інтегральною кривою**. Сукупність інтегральних кривих, залежну від довільних сталих, називають **сім'єю інтегральних кривих**. Наприклад, розв'язки рівняння  $y'' = 2$  утворюють двопараметричну сім'ю парабол

$$y = x^2 + C_1 x + C_2, \quad \text{кожна з яких є інтегральною кривою.}$$

Процес знаходження розв'язків ДР називають **інтегруванням** цього рівняння. Якщо при цьому всі розв'язки вдається виразити через елементарні функції або у квадратурах (коли розв'язки виражаються через інтеграли від елементарних функцій), то кажуть, що рівняння зінтегроване у скінченому вигляді. У нашому курсі розглядатимемо переважно такі рівняння, хоча значно більше ДР не інтегруються у скінченому вигляді, і для подання їх розв'язків доводиться використовувати більш складний математичний апарат.

Основною задачею, що ставиться при інтегруванні диференціального рівняння, є знаходження всіх його розв'язків та дослідження їх властивостей.

### 3. Диференціальні рівняння першого порядку. Основні поняття та означення

Згідно з Означенням 1 диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{3.1}$$

яке пов'язує незалежну змінну  $x$ , невідому функцію  $y = y(x)$  та її похідну  $y'$ . Рівняння (3.1) може не містити явно  $x$  або  $y$ , але обов'язково має містити похідну  $y'$  (у протилежному випадку воно не буде диференціальним рівнянням). ДР (3.1), нерозв'язне відносно похідної  $y'$ , називають **неявним** диференціальним рівнянням. Якщо рівняння (3.1) можна розв'язати відносно  $y'$ , то його записують у вигляді

$$y' = f(x, y) \quad (3.2)$$

і називають рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної (**явним**, або рівнянням у **нормальній формі**). Рівняння (3.2) можна записати ще й так:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{або} \quad -f(x, y)dx + dy = 0.$$

Домноживши останнє рівняння на деяку функцію  $Q(x, y) \neq 0$ , дістанемо ДР першого порядку, записане в **диференціальній формі**:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (3.3)$$

де  $P(x, y)$  і  $Q(x, y)$  – відомі функції. Рівняння (3.3) зручне тим, що змінні  $x$  та  $y$  в ньому рівноправні, тобто кожен з них можна розглядати як функцію другої.

Наведемо приклади диференціальних рівнянь вигляду (3.1), (3.2) і (3.3):

$$(xy' + y)^2 - \sin y' = 0, \quad y' = 2x - y, \quad (x - 3y)dx + xydy = 0.$$

Знаходження невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння, називають розв'язуванням або інтегруванням цього рівняння. Графік розв'язку ДР називається інтегральною кривою цього рівняння. Відповідь на запитання про те, за яких умов рівняння (3.2) має розв'язок, дає теорема Коші, яку наведемо тут у спрощеному формулюванні, аби уникнути повторюваності, оскільки в детальнішому викладі вона подається в одному з наступних розділів.

**Теорема 3.1 (про існування та єдиність розв'язку).** Нехай права частина рівняння (3.2)  $f(x, y)$  та її частинна похідна  $f'_y(x, y)$  визначені й неперервні у відкритій області  $G$  площини  $Oxy$ , а точка  $(x_0, y_0) \in G$ . Тоді існує єдиний розв'язок  $y = \varphi(x)$  диференціального рівняння (3.2), який при  $x = x_0$  набуває значення  $y_0$ , тобто

$$\varphi(x_0) = y_0. \quad (3.4)$$

Теорема 3.1 визначає достатні умови існування єдиного розв'язку рівняння (3.2). Геометрично Теорема 3.1 стверджує, що через кожен точку  $(x_0, y_0)$  із множини  $G$  точок площини, для яких виконуються умови теореми, проходить єдина інтегральна крива. Якщо зафіксувати  $x_0$  і змінювати  $y_0$ , не виходячи при цьому з області  $G$ , то отримуватимемо різні інтегральні криві. Це наочно показує, що рівняння (3.2) має безліч різних розв'язків. Умову (3.4), згідно з якою розв'язок  $y = \varphi(x)$  набуває наперед заданого значення  $y_0$  в заданій точці  $x_0$ , називають **початковою умовою** для розв'язку і записують так:

$$y|_{x=x_0} = y_0 \quad \text{або} \quad y(x_0) = y_0. \quad (3.5)$$

Задача знаходження розв'язку рівняння (3.2), який задовольняє початкову умову (3.5), називається **задачею Коші**. Із точки зору геометрії розв'язати задачу Коші означає

виділити з множини інтегральних кривих ту, яка проходить через задану точку  $(x_0, y_0)$ .

Нехай права частина диференціального рівняння (3.2) задовольняє в області  $G$  умови Теорема 3.1.

**Означення 4.** Функція  $y = \varphi(x, C)$ , яка залежить від аргументу  $x$  і довільної сталої  $C$ , називається **загальним розв'язком** ДР (3.2) в області  $G$ , якщо вона справджує наступні умови:

- 1) функція  $\varphi(x, C)$  є розв'язком рівняння за будь-якого значення сталої  $C$  з деякої множини;
- 2) для довільної точки  $(x_0, y_0) \in G$  можна знайти таке значення  $C = C_0$ , що функція  $y = \varphi(x, C_0)$  задовольняє початкову умову  $\varphi(x_0, C_0) = y_0$ .

**Означення 5.** **Частинним розв'язком** рівняння (3.2) називається функція  $y = \varphi(x, C_0)$ , яка отримується із загального розв'язку  $y = \varphi(x, C)$  при певному значенні сталої  $C = C_0$ .

**Означення 6.** Якщо загальний розв'язок ДР першого порядку знайдено в неявному вигляді, тобто у вигляді рівняння

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (3.6)$$

то такий розв'язок називають **загальним інтегралом** диференціального рівняння. Рівність  $\Phi(x, y, C_0) = 0$  у цьому випадку називають **частинним інтегралом** рівняння.

Точки площини, в яких не виконуються умови Теорема 3.1 [наприклад,  $f(x, y)$  або  $f'_y(x, y)$  у цих точках розривні], називаються **особливими**. Через кожен з таких точок проходить кілька інтегральних кривих або не проходить жодної. Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називають **особливим розв'язком**. Графік особливого розв'язку називають особливою інтегральною кривою. Щоб з'ясувати її геометричний зміст, введемо поняття обвідної. **Обвідною** сім'ї кривих  $\Phi(x, y, C) = 0$  називається крива, в кожній точці якої має місце дотик із однією з кривих сім'ї. Виявляється, що особлива інтегральна крива геометрично є обвідною сім'ї інтегральних кривих диференціального рівняння, визначених його загальним розв'язком.

Зауважимо, що, виходячи з геометричного змісту ДР (3.2), можна проводити дослідження його розв'язків і без інтегрування рівняння (це має особливе значення у випадку рівнянь, що не інтегруються в квадратурах). Одним зі способів такого дослідження є так званий **метод ізоклін**.

Із геометричного змісту похідної випливає, що ДР (3.2) для кожної точки площини  $M(x, y)$  дає значення кутового коефіцієнта  $y' = \operatorname{tg} \alpha$  дотичної до інтегральної кривої, що проходить через точку  $M(x, y)$  (тут  $\alpha$  – кут нахилу цієї дотичної до осі абсцис). Таким чином, ДР (3.2) задає сукупність напрямів, або, як кажуть, **поле напрямів** на площині. Отже, з геометричної точки зору задача інтегрування ДР (3.2) полягає у

знаходженні кривих, напрям дотичних до яких співпадає з напрямом поля у відповідних точках.

Геометричне місце точок, де виконується співвідношення  $y' = C = const$ , називається **ізокліною** ДР (3.2). За різних значень сталої  $C$  одержуємо різні ізокліни, які задаються рівнянням  $f(x, y) = C$ . Знаючи ізокліни, можна, як кажуть, якісно визначити розміщення інтегральних кривих заданого рівняння на площині. Для цього враховуємо той факт, що в точках ізоклін дотичні до інтегральних кривих нахилені під кутом  $\alpha = \operatorname{arctg} C$ , тому для побудови **фазової картини** (тобто зображення інтегральних кривих на площині) зручно найперше брати значення  $C = \pm 1$  (що відповідають кутам  $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$ ),  $C = 0$  (що відповідає куту  $\alpha = 0$ ), а також  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  [цьому куту відповідає крива, на якій  $f(x, y)$  є невизначеною]. Побудувавши ізокліни, за отриманим полем напрямів можна схематично зобразити фазову картину заданого рівняння.

#### 4. Побудова диференціального рівняння заданої сім'ї кривих

Нехай задане рівняння (3.6) сім'ї кривих, залежної від одного дійсного параметра  $C$ . Побудуємо диференціальне рівняння сім'ї кривих (3.6), тобто рівняння, яке описує властивості, притаманні всім кривим цієї сім'ї. Для цього продиференціюємо за змінною  $x$  рівність (3.6), враховуючи, що  $y = y(x)$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \quad (4.1)$$

Якщо співвідношення (4.1) не містить  $C$ , то воно буде виражати ту загальну властивість, яка притаманна всім кривим сім'ї (3.6) (наприклад, якщо  $y = x + C$ , то  $y' = 1$ ). У загальному випадку рівність (4.1) залежатиме від параметра  $C$ . Тоді, виключивши цей параметр із системи, складеної з рівнянь (3.6), (4.1), одержимо ДР першого порядку вигляду (3.1). Це рівняння називають диференціальним рівнянням сім'ї кривих (3.6). Воно виражає спільну властивість кривих (3.6), незалежно від сталої  $C$ .

**Приклад 4.1.** Знайти диференціальне рівняння сім'ї парабол, заданої за допомогою однопараметричної формули  $y = x^2 - Cx$ , де  $C$  – довільна стала.

**Розв'язання.** Формула з умови задачі визначає сім'ю парабол, обернутих вершинами в точках  $\left(\frac{C}{2}, -\frac{C^2}{4}\right)$  униз, які проходять через початок координат, і мають вертикальні осі симетрії. Складемо систему (3.6), (4.1), яка у нашому випадку набуде вигляду

$$\begin{cases} y = x^2 - Cx, \\ y' = 2x - C, \end{cases}$$

і виключимо з неї сталу  $C$ . Для цього знайдемо  $C$  з першого рівняння системи й підставимо у друге:

$$C = \frac{x^2 - y}{x} \Rightarrow y' = 2x - \frac{x^2 - y}{x} \Rightarrow y' = \frac{x^2 + y}{x},$$

звідки шукане диференціальне рівняння заданої сім'ї парабол:  $xy' = x^2 + y$ .

Аналогічно, маючи сім'ю кривих  $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ , залежну від  $n$  довільних сталих, можна за певних умов отримати диференціальне рівняння, для якого згадані криві будуть інтегральними. Для цього потрібно продиференціювати співвідношення  $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$   $n$  разів за змінною  $x$  і виключити з нього та отриманих внаслідок диференціювання  $n$  рівнянь сталі  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . У результаті одержимо диференціальне рівняння сім'ї кривих, яке виражатиме загальну властивість цих кривих.

**Приклад 4.2.** Знайти диференціальне рівняння сім'ї кривих  $(x - C_1)^2 + C_2 y^2 = 1$ .

**Розв'язання.** Двічі продиференціюємо за змінною  $x$  тотожність  $(x - C_1)^2 + C_2 y^2 = 1$ :

$$2(x - C_1) + 2C_2 y y' = 0, \quad 1 + C_2 (y'^2 + y y'') = 0.$$

Виключивши з трьох рівностей сталі  $C_1, C_2$ , після нескладних перетворень одержуємо ДР другого порядку  $y^3 y'' + (y'^2 + y y'')^2 = 0$ .

#### **Джерела:**

Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні рівняння: Навчальний посібник. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2014. – 360 с.

Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння в задачах: Підручник. – К.: Либідь, 2003. – 504 с.