ст. викл. Рего В. Л.

Математичні ігри та стратегії

1. АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНОЇ ГРИ

Математична гра – це гра двох осіб (інколи трьох). Ходи гравці роблять по черзі, жоден з них не може пропустити хід. Вважається що гравці грають сумлінно, найкращим чином. У таких іграх можна визначити кінцевий результат, тобто передбачити виграш одного з гравців або нічию.
Для розв'язання ігрової задачі треба сформулювати виграшну стратегію одного зі гравців, і довести, що така стратегія веде до виграшу. Проілюструємо детальну схему такого аналізу на прикладі однієї відомої математичної гри.

Тема заняття: Задачі-ігри між двома особами
Мета: Сконструювати виграшну стратегію задачі-гри «100!»

Види ігор між двома особами. Шахи та шашки – найпоширеніші ігри між двома особами. У цих відомих іграх кожен гравець володіє певною інформацією про ситуацію під час гри:

- знає і аналізує попередні ходи гравців;
- знає і аналізує розташування фігур на дошці;
- передбачає можливі наступні ходи гравців;
- знає кількісні та якісні характеристики перебігу гри.

Види колективних ігор. Футбол, хокей, баскетбол – найпоширеніші колективні ігри. У цих відомих іграх кожен гравець взаємодіє з групою гравців згідно з правилами і володіє певною інформацією про ситуацію під час гри:

- узгоджує свої дії з діями інших гравців;
- обирає власну поведінку під час гри;
- передбачає можливі наступні дії гравців;
- знає про кількісні та якісні характеристики перебігу колективної гри.

Виберіть для себе правильну відповідь на запитання: Яка мета ігор, у які ви граєте?

1) Виграти у суперника або хоча б не програти супернику за правилами гри;
2) Задовольнити інтереси гравців;
3) Розвивати мислення;
4) Загартовуватися під час гри;
5) Знаходити шляхи до перемоги;
6) Взаємодіяти між гравцями згідно з правилами;
7) Долати труднощі на шляху до перемоги.

Задача-гра. Є дві купки камінців по 7 у кожній. Грають двоє. За хід дозволяється взяти будь-яку кількість камінців, але тільки з однієї купки. Програє той, кому немає що взяти. Хто виграє у цій грі?

(Хід того, хто починає: гравець узяв два камінці. Хід другого гравця: гравець узяв теж два камінці – з більшої купки. На кожний хід того, хто починав гру, другий гравець...)

Розв'язання. Якщо другий гравець за свого ходу «повторює» ходи гравця, котрий розпочав гру, тобто буде брати з більшої купки стільки камінців, скільки їх бере гравець, котрий розпочав гру, то другий гравець перемагає у цій грі. *Відповідь.* Перемагає гравець, котрий робить парні ходи, якщо «повторює» ходи гравця, котрий розпочинав гру, з більшої купки.

Гра «100»!

Девіз гри: Не гребуй суперниками, вони перші, хто помічає твої помилки!

Правила гри «100». Грають двоє. Гравець, котрий розпочинає гру, називає будь-яке число від 1 до 10. Другий гравець за свого ходу теж називає будь-яке число від 1 до 10 і додає це число до числа, яке назвав його суперник. Потім перший гравець називає число від 1 до 10 і сумує його з сумою суперника. Виграє той, хто першим назве число 100! Хто переможе?

Чи можна грати так, щоб не програвати? Для цього треба знайти:

- *Виграшні позиції гравця:* позиції гравця у грі, із яких гравець за певну кількість ходів здобуде перемогу в грі;
- *Програшні позиції гравця:* позиції гравця у грі, із яких гравець за певну кількість ходів зазнає поразки у грі;
- *Виграшну стратегію гравця:* упорядковану множину виграшних позицій гравця, які ведуть до перемоги.

Яка виграшна стратегія переможця у грі «100!»?

Проаналізуємо кінцеві десять позицій гравців у цій грі. Запишемо всі можливі кінцеві позиції (можливі суми) у даній грі.

100, 99, 98, 97, 96, 95, 94, 93, 92, 91, 90, 89, ...

Пояснення. Під кінець гри переможець отримує суму 100. Це можливо, якщо суперник назве хоча б одну з сум від 90 до 99. Отже, переможець повинен за своїм передостаннім ходом назвати суму 89. Програшні позиції позначені й підкреслені синім кольором. Отже, червоний колір числа означає виграшну позицію гравця-переможця.

Таким чином, 89 – виграшна позиція у грі «100!»

Що означає виграшна позиція 89 у грі «100!»? Якщо гравець назве під час гри суму 89, то як би не грав його суперник, за наступного ходу завжди можна перемогти.

Чи існують ще виграшні позиції? Аналогічно, проаналізуємо десять позицій, які передують сумі 89:

89, 88, 87, 86, 85, 84, 83, 82, 81, 80, 79, 78

У позицію 89 можна потрапити, якщо суперник назве хоча б одну з сум від 79 до 88.

Яку ще суму повинен отримати переможець? Отже, переможець повинен за свого ходу назвати крім 89, ще суму 78. Програшні позиції підкреслюємо синім кольором. Отже, червоний колір числа означає виграшну позицію гравця-переможця. Таким чином, 78 – виграшна позиція у грі «100!»

Як знайти наступну виграшну позицію? Проаналізуємо попередні десять позицій, які передують сумі 78:

78, 77, 76, 75, 74, 73, 72, 71, 70, 69, 68, 67

У позицію 78 можна потрапити, якщо суперник назве хоча б одну з сум від 68 до 77. Отже, за правилами гри, переможець повинен за свого ходу назвати суму 67. Програшні позиції підкреслені синім кольором. Отже, червоний колір числа означає виграшну позицію гравця-переможця. Таким чином, 67 – виграшна позиція у грі «100!»

Яка закономірність для знаходження виграшних позицій? Повторюючи послідовно аналіз попередніх позицій «десятками», отримаємо такі виграшні позиції:

67, 66, 65, 64, 63, 62, 61, 60, 59, 58, 57;
56, 55, 54, 53, 52, 51, 50, 49, 48, 47, 46;
45, 44, 43, 42, 41, 40, 39, 38, 37, 36, 35;
34, 33, 32, 31, 30, 29, 28, 27, 26, 25, 24;
23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13;
12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2;
1.

Чи можна сформулювати виграшну стратегію для переможця? Так, це впорядкована множина усіх виграшних позицій у грі «100!»: вона утворює виграшну стратегію для гравця-переможця. Можна прослідкувати закономірність утворення ряду чисел (виграшних позицій у грі «100!»):

1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100.

Закономірність: різниця між числами дорівнює 11.

Як сформулювати «правило переможця» у грі «100!»? У грі «100!» можна сформулювати «правило переможця» так:

- Переможець починає гру з числа 1.
- Якщо за свого ходу суперник назвав число k, то переможець називає число, що дорівнює різниці $11–k$.

Які існують критерії аналізу задач-ігор? Критерії аналізу задач-ігор:

- за кількістю ходів у грі;
- за властивостями парності чисел;
- за симетричності позицій у грі;
- за інваріантними властивостями чисел та ходів.

(Яким критерієм ми скористалися для аналізу гри «100!»?)

Афоризми азартних гравців:

- Заборони азартні ігри – і закони Всесвіту не діятимуть.
- Скажи мені, який ти стратег, і я скажу, який ти гравець.
- Під час гри шаленіють вічні закони.
- Краще знання, ніж азарт у грі.
- Хороший гравець рухається від нерішучості до самовпевненості.

2. ОСНОВНІ СТРАТЕГІЇ У ЗАДАЧАХ-ІГРАХ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Під ***математичною грою*** зазвичай розуміють гру двох суперників, що володіє наступними властивостями. Гравці виконують деякі дії (ходи) по черзі за певними правилами. У кожен момент гри стан характеризується позицією, що може змінюватися тільки в залежності від ходів гравців. Виголошується також, за якими правилами визначається гравець, котрий виграв, або гравець, котрий програв (деякі ігри допускають нічию). Кожен гравець ставить своєю метою домогтися виграшу.

Якщо один з гравців може виконувати ходи так, що забезпечить собі виграш незалежно від дій суперника, то кажуть, що у нього є ***виграшна стратегія***. У будь-якій математичній грі існує або виграшна стратегія для одного з гравців, або нічийні стратегії для обох (якщо гра допускає нічию).

У задачах-іграх, як правило, потрібно визначити, хто з гравців (той, хто розпочинає гру, або його суперник) має виграшну стратегію, вказати цю стратегію (тобто інструкцію або алгоритм дій) і обґрунтувати, що вона дійсно гарантує гравцеві виграш незалежно від дій суперника. Для пошуку виграшної стратегії можуть використовуватися наступні ідеї:

Відповідність. Наявність вдалого відповідного ходу (може забезпечуватися симетрією, розбиттям на пари, доповненням числа).

Розв’язання з кінця. Послідовно визначаються позиції перемоги та поразки для того, хто починає гру. Наступна позиція є переможною, якщо з неї можна отримати завчасно визначену позицію поразки і є поразкою, якщо будь-який хід із неї веде до завчасно визначеної позиції перемоги.

Передача ходу. Якщо ми можемо скористатися стратегією супротивника, то наші справи не гірші, ніж у нього. Наприклад, перемога (або нічия) забезпечується, коли можна за своїм бажанням потрапити в деяку позицію, або примусити супротивника потрапити до неї.

У деяких задачах стратегію гри не вказують, оскільки результат гри не залежить від гри супротивників. Наведемо кілька прикладів таких задач, які зазвичай називають ***задачами-жартами***.

***Задача* 1.** Двоє грають у наступну гру. Є 3 купки камінців: у першій – 10, у другій – 15, у третій – 20. За хід дозволяється розбити будь-яку купку на 2 менші. Програє той, хто не зможе зробити хід.
Розв'язання: Після кожного ходу кількість купок збільшується на одну. Спочатку їх було 3, в кінці – 45. Таким чином, всього буде зроблено 42 ходи. Останній, 42-й, хід зробить 2-й гравець.

***Задача* 2.** На дошці написані 10 одиниць і 10 двійок. За хід можна стерти дві будь-які цифри, і, якщо вони були однакові, написати 2, якщо різні – 1. Якщо остання цифра, що залишилася на дошці – 1, то перемагає перший гравець, якщо 2, то другий.
Розв'язання: Парність числа одиниць на дошці після кожного ходу не змінюється. Оскільки спочатку одиниць була парна кількість, то після останнього ходу не може залишатися одна (непарна кількість) одиниць. Виграє другий гравець.

***Задача* 3.** Двоє гравців по черзі розставляють між числами від 1 до 20, записаних у рядок, знаки «+» і «–». Після того, як усі місця заповнені, обчислюють результат. Якщо отримають парне число, то виграє перший гравець, якщо непарне, то другий.
Розв'язання: Парність результату залежить не від розташування знаків, а від кількості непарних чисел у початковому наборі. Оскільки в даному випадку їх 10 (тобто парне число), то перемагає перший гравець.

***Задача* 4.** В одному ящику лежать 15 синіх кульок, а у другому 12 білих. За один хід дозволяється взяти 3 синіх кульки або 2 білі. Перемагає той, хто бере останні кульки.
Розв'язання: Зрозуміло, що сині кульки можна рахувати трійками, а білі двійками. Задача зведена до наступної: У ящику лежать 15:3+12:2=11 кубиків. За один хід дозволено брати один кубик. Хто візьме останній? Розв'язання очевидне – це гра, в якій нічого не залежить від гравців.

Дуже часто в математичних іграх виграш забезпечується ***симетричною стратегією***, проілюстрованої в задачі-грі з камінцями із попереднього розділу. Розглянемо ще кілька прикладів подібних задач.

***Задача* 5.** Двоє по черзі ставлять слонів у клітинки шахової дошки так, щоб слони не били один одного (колір слонів значення не має). Програє той, хто не може зробити хід. Чи виграє гравець, котрий розпочинає гру?
Спроба розв'язування. Оскільки шахова дошка симетрична відносно свого центру, то природно спробувати симетричну стратегію. Але цього разу (першим ходом не можна поставити слона в центр дошки) симетрію може підтримувати другий гравець. Здавалося б,

по аналогії з попередньою задачею, це і є його виграшна стратегія. Проте, дотримуючись її, другому гравцеві не вдасться зробити навіть свій перший хід! Слон, щойно поставлений першим гравцем, може бити центрально-симетричне поле.

Цей приклад показує, що при доведенні правильності симетричної стратегії не можна забувати про наступну обставину: *черговому симетричному ходу може завадити хід, щойно зроблений супротивником.*

Раніше зроблені ходи, в силу симетрії позиції, завадити не можуть. Щоб розв'язати гру за допомогою симетричної стратегії, необхідно знайти симетрію, при якій щойно зроблений супротивником хід не перешкоджає здійсненню обраного плану.

Так, розв'язання задачі 5 легко провести, застосовуючи не центральну, а осьову симетрію шахової дошки. За вісь симетрії можна взяти пряму, що розділяє четверту і п'яту горизонталі. Симетричні відносно неї поля мають різний колір, і таким чином слон, поставлений на одне з них, не перешкоджає ходу на інше. Отже, у цій грі таки виграє другий гравець.

Симетрична стратегія зовсім не зобов'язана мати суто геометричний зміст. Розглянемо задачу:

Задача 6. Прямокутна шоколадка розділена 4 поздовжніми та 9 поперечними заглибленнями на 5x10=50 квадратних частин. Перший гравець розламує шоколадку по деякому заглибленню на дві прямокутні частини. Два гравці по черзі одну з отриманих частин по заглибленнях ділять на дві прямокутні частини. Хто виграє при правильній грі, якщо той, хто відламає частку 1x1: ***а)*** програє; ***б)*** виграє.

Розв'язання: В обох випадках виграє перший гравець, і першим своїм ходом він має розламати шоколадку на дві частини 5x5.

У варіанті ***а)*** на кожний хід другого гравця на одній половині шоколадки першому треба зробити такий же («симетричний») хід на іншій. Очевидно, що частку 1x1 раніше отримає другий гравець.

У варіанті ***б)*** перший гравець застосовує симетричну стратегію, дублюючи ходи другого на іншій половині шоколадки, поки другий не відламає якусь частку 1x*n*. Тоді з цієї частини перший отримує частку 1x1.

Ось ще кілька ігор, що ілюструють ту ж ідею.

Задача 7. Двоє по черзі ставлять коней на клітинки шахової дошки так, щоб коні не били один одного. Програє той, хто не зможе зробити хід.

Відповідь. Виграє другий. Перший хід у центр дошки, а після цього – центральна симетрія.

Задача 8. Дано клітчасту дошку 10x10. За хід дозволяється покрити будь-які 2 сусідні клітинки прямокутником 1x2так, щоб прямокутники не перекривалися. Програє той, хто не зможе зробити хід.

Відповідь. Виграє другий. Центральна симетрія.

Задача 9. Є дві купки камінців: в одній – 30, у другій – 20. За хід дозволяється брати будь-яку кількість камінців, але тільки з однієї купки. Програє той, кому нема що брати.

Відповідь. Виграє перший. Першим ходом він зрівнює кількість камінців у купках, після чого грає за симетричною стратегією.

Додамо ще кілька задач-ігор на аналіз із кінця, проілюстрований на прикладі гри «100!» в попередньому розділі:

***Задача* 10.** а) Є дві купки по 7 камінців. За хід дозволяється взяти один камінець із будь-якої купки або по камінцю з кожної купки. Програє той, хто не зможе зробити хід; б) крім ходів, допустимих у пункті а), дозволяється перекладати один камінець із першої купки в другу. В усьому іншому правила ті самі.
Вказівка: в обох варіантах виграє перший гравець.

***Задача* 11.** Є дві купки камінців: у першій – 7 камінців, у другій – 5. За хід дозволяється брати будь-яку кількість камінців із однієї купки або порівну камінців із обох купок. Програє той, хто не зможе зробити хід.
Вказівка: за аналізу з кінця виграшною позицією є 2 і 1 камінці у двох купках.

***Задача* 12.** Гра починається із числа 1. За один хід дозволяється помножити наявне число на будь-яке натуральне число від 2 до 9. Виграє той, хто першим одержить число, більше за 1000.
Вказівка: виграшні позиції для переможця можна знайти аналогічно до гри «100!»

3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Дано смужку 1x17, клітинки якої пронумеровано послідовними натуральними числами. Двоє учнів грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід треба закреслити одну довільну клітинку в смужці або деякі дві послідовні, де перша з них парна. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто може забезпечити собі виграш – той, хто починає гру, чи його суперник? Вкажіть виграшну стратегію.
2. На дошці розміру 4x4 грають двоє. Ходять по черзі, і кожний гравець своїм ходом зафарбовує одну клітинку. Кожну клітинку можна зафарбувати один раз. Програє той гравець, після чийого ходу утвориться квадрат 2x2, що складається із зафарбованих клітинок. Хто з гравців може забезпечити собі виграш – той, хто починає, чи його суперник? Відповідь обґрунтуйте.
3. Двоє гравців по черзі вписують у клітинки квадратної дошки nxn нату-ральні числа згідно з такими правилами: у клітинку, яка знаходиться на перети-ні n-го рядка та m-го стовпця, перший гравець має право вписати найбільший спільний дільник чисел x та y, а другий гравець має право вписати найменше спільне кратне цих чисел. Після заповнення дошки всі числа першого стовпця діляться на 1, усі числа другого стовпця діляться на 2, усі числа третього стовпця діляться на 3 і так далі, аж до останнього стовпця, усі числа якого діляться на n. Потім обчислюється добуток усіх отриманих чисел. Якщо результат менший за 1, то виграє перший гравець, в іншому разі виграє другий гравець. Хто з гравців може забезпечити собі перемогу – той, хто починає гру, чи його суперник?
4. На дошці написані числа 1, 1998, 1999. За один крок дозволяється стерти одне з чисел і замість нього записати різницю між його квадратом та потроєним добутком двох інших чисел. Чи можна, виконуючи такі дії, з початкового набору отримати трійку чисел, сума яких дорівнює нулю?

5. Король за хід може поставити по хрестику в будь-які дві вільні клітинки нескінченного аркуша паперу. Міністр за хід може поставити нулик у будь-яку вільну клітинку. Чи може король поставити 100 хрестиків у ряд?
6. У клітинки прямокутної таблиці записані довільні числа. Дозволяється одним ходом змінити знак у всіх чисел, що стоять у будь-якому рядку чи будь-якому стовпці. Довести, що такими операціями можна домогтися того, щоб сума чисел у таблиці була невід'ємною.
7. На дошці записані 10 одиниць і 10 двійок. За хід дозволяється стерти дві будь-які цифри: якщо вони однакові, написати двійку, а якщо різні – одиницю. Якщо остання цифра, що залишилася на дошці – одиниця, виграв перший гравець, якщо двійка – то другий. Чому в цій грі завжди перемагає гравець, який не розпочинає гру?
8. Певну кількість фішок розташовано в ряд. Два гравці по черзі забирають довільні одну або дві фішки, які стоять поруч; переможцем вважається той, хто зробить останній хід. Хто забезпечить собі перемогу?
9. Певну кількість фішок розташовано по колу. Два гравці по черзі забирають довільні одну або дві фішки, які стоять поруч. Переможцем вважається той, хто зробить останній хід. Хто забезпечить собі перемогу?
10. На початку гри є k груп предметів. Двоє гравців по черзі ділять кожну групу, що містить більше одного предмета, на дві менші групи. Переможцем вважається той, хто виконає останній поділ. Хто забезпечить собі перемогу?
11. Два гравці по черзі виймають зі скриньки предмети, кількість яких не перевищує половини наявних у скриньці. Програє той, хто візьме останній предмет. Хто забезпечить собі перемогу?
12. Є дві купи предметів. Два гравці по черзі забирають одну купу, а іншу ділять на дві частини (обидві дії виконує один і той же гравець). Переможцем вважається той, хто останнім ходом залишить дві купки по одному камінцю. Хто забезпечить собі перемогу?
13. Є 15 шашок, розташованих у ряд. Двоє гравців ходять по черзі. Першим ходом перевертається будь-яка шашка, а кожним наступним – будь-які одна або дві сусідні ще не перевернуті шашки. Переможцем вважається той, хто приму-сить суперника зробити останній хід. Хто забезпечить собі перемогу?
14. На колі розставлені 20 точок. За хід дозволяється з'єднати будь-які дві з них відрізком, що не перетинає відрізків, які проведені раніше. Програє той, хто не може зробити хід.
15. Ромашка має а) 12 пелюсток; б) 11 пелюсток. За хід дозволяється відірвати або одну пелюстку, або дві, що ростуть поруч. Програє той, хто не може зробити ходу.
16. Двоє по черзі ламають шоколадку 6×8. За хід дозволено зробити прямолінійний розлам будь-якого зі шматків. Програє той, хто не зможе зробити хід.
17. а) У рядок записані 10 одиниць. Миколка і Сашко по черзі записують між будь-якими сусідніми числами знак «+» або «–». Коли між усіма сусідніми числами записані знаки, обчислюється результат. Якщо отримане число парне, то перемагає Миколка, якщо непарне, то Сашко. б) А якщо хлопці ставитимуть між числами «+» або «×» (при обчислені результату спочатку виконують множення, а потім додавання)?
18. Двоє записують шестизначне число починаючи зі старшого розряду. Якщо отримане число ділиться націло на 7, то виграє той, хто зробив останній хід, інакше той, хто починав гру.
19. Маємо 3 купки камінців, кількість камінців у кожній купці однакова. Двоє гравців беруть по черзі будь-яку кількість камінців із будь-якої купки, але тільки з однієї. Перемагає той, хто бере останні камінці.

20. На кожній клітинці дошки 11x11 стоїть шашка. За хід дозволяється зняти з дошки будь-яку кількість шашок, що йдуть підряд, або з одного вертикального, або з одного горизонтального ряду. Виграє той, хто зняв останню шашку. Хто забезпечить собі виграш?

21. Гра «9 цифр». На столі лежать 9 карток, на кожній з яких написано одну з цифр від 1 до 9 включно. Цифри на всіх картках різні. Картки лежать написами догори. Двоє гравців по черзі беруть по одній картці зі столу. Переможцем вважається той, хто першим візьме 3 картки, сума цифр на яких дорівнюватиме 15 (на руках у переможця можуть бути й інші картки). Хто забезпечить собі перемогу?

22. Гра «9 слів». На столі лежать 9 карток, кожна з них містить одне зі слів: Лорен, какао, місто, хек, ліс, рама, Алла, меч, рік. Слова на різних картках різні. Картки лежать написами догори. Два гравці по черзі беруть по одній картці зі столу. Переможцем вважається той, хто першим візьме 3 картки зі словами, що мають одну спільну літеру (на руках у переможця можуть бути й інші картки). Хто забезпечить собі перемогу?

23. Гра «9 шляхів». 8 міст, позначених першими літерами латиниці, сполучають 9 шляхів, що проходять відповідно через міста AEH, AF, ADG, BE, BDFH, BG, CF, CGH. Два гравці по черзі зафарбовують своїм кольором (червоним або синім) позначення шляхів на карті. Переможцем вважається той, хто перший зафарбує своїм кольором позначення всіх шляхів, які проходять через одне місто. Хто забезпечить собі перемогу?

24. Гра Баше [Клод Гаспар Баше де Мезіріак (1581-1638) — французький математик, поет, перекладач]. На початку гри в купці є n предметів. Два гравці по черзі забирають із цієї купки предмети (від 1 до p включно). Переможцем вважається той, хто примусить суперника зробити останній хід. Хто забезпечить собі перемогу?

25. Гра «На стежині». На кінцях стежини, розбитої на m клітин, стоять шашки різного кольору. Двоє гравців по черзі рухають шашку певного кольору на вільну клітину на довільну кількість клітин у межах від однієї до p включно в довільному напрямку, але без перескакування шашки суперника й виходу за межі стежини. Переможцем вважається той, хто зробить останній хід. Хто забезпечить собі перемогу?

Джерела:

http://olimpmath.blogspot.com/2015/03/

olgach.jimdofree.com