Курс: «Практикум з розв’язування олімпіадних та конкурсних задач» **ст. викл. Рего В. Л.**
Навчальний матеріал до Теми 7:

Елементи теорії чисел у задачах олімпіадного типу. Парність. Подільність. Ознаки подільності

1. ПОДІЛЬНІСТЬ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ. ВЛАСТИВОСТІ ПОДІЛЬНОСТІ. ТЕОРЕМА ПРО ДІЛЕННЯ З ОСТАЧЕЮ

Означення. Нехай a, b – цілі числа. Кажуть, що число a ділиться на b, якщо a можна подати у вигляді $a=nb$, де n – ціле число. Інакше: b є дільником a.
Позначення: $a \vdots b$.

Властивості подільності

Нехай a, b, c, d – цілі числа, число p – просте.
1. Якщо в рівності $a+b=c$ два числа діляться на d, тоді третє число також ділиться на d.
2. Якщо $a \vdots b$, то $ac \vdots bc$.
3. Якщо $a \vdots b$ і $b \vdots c$, то $a \vdots c$.
4. Якщо $ab \vdots p$, то або $a \vdots p$, або $b \vdots p$.

Приклад. Довести: якщо $(a+b+c) \vdots m$ і $(a^2+b^2+c^2) \vdots m$, то і $(a^4+b^4+c^4) \vdots m$.
Розв'язання. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) \Rightarrow 2(ab+ac+bc) \vdots m$,
$4(ab+ac+bc)^2=4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+8abc(a+b+c)$, звідки
$2(ab+ac+bc)^2=2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+4abc(a+b+c)$ і $2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \vdots m$;
$a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \Rightarrow (a^4+b^4+c^4) \vdots m$.

Теорема 1. Усяке ціле число a подається єдиним способом за допомогою цілого $b\neq 0$ рівністю вигляду $a=bq+r$, де q, r – цілі, $0\leq r<|b|$. Число q називається часткою, число r – остачею від ділення b на a.

Приклад. Чи може число ділитися на 8, а при діленні на 12 давати остачу 10?
Розв'язання. Числа, що діляться на 8, мають вигляд $8k$, $k\in\mathbf{Z}$, а ті, що дають остачу 10 при діленні на 12 – вигляд $12l+10$, $l\in\mathbf{Z}$. Розглянемо всі остачі від ділення на НСК(12,8)=24. Діляться на 8 числа вигляду $24m$, $24m+8$, $24m+16$, і жодне з них при діленні на 12 не дає остачу 10.

2. РІВНІСТЬ ЗА МОДУЛЕМ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Означення. Нехай a і b – цілі числа, m – натуральне число. Кажуть, що число a рівне (конгруентне) числу b за модулем m, якщо при діленні на m вони дають однакові остачі.
Позначення: $a\equiv b \pmod{m}$ або $a\equiv_m b$.

Приклад. $45\equiv 75 \pmod{10}$, $182\equiv -4 \pmod{6}$.
Теорема 2. a рівне b за модулем m тоді й тільки тоді, коли $(a-b) \vdots m$

Властивості рівності за модулем

1. $a \equiv a \pmod{m}$ (рефлексивність).
2. $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$ (симетричність).
3. $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$ (транзитивність).
4. $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow (a+c) \equiv (b+d) \pmod{m}$, $(a-c) \equiv (b-d) \pmod{m}$, $ac \equiv bd \pmod{m}$.
5. $ac \equiv bc \pmod{m}$, НСД$(c,m)=1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$.

Множина всіх чисел, рівних a за модулем m, називається класом лишків за модулем m, і зазвичай позначається $[a]_m$ або $\overline{a}_m$. Таким чином, відношення рівності за модулем $a \equiv b \pmod{m}$ рівносильне відношенню рівності класів лишків $[a]_m=[b]_m$.

Вправа. Які остачі можуть давати а) квадрати цілих чисел при діленні на 3, 4, 5, 8, 9; б) куби цілих чисел при діленні на 7, на 9?

Приклад. Довести: якщо p – просте число, то

$$a \equiv b \pmod{p^n} \Rightarrow a^p \equiv b^p \pmod{p^{n+1}}.$$

Розв'язання. За умовою, $(a-b) \vdots p^n$. Тоді, оскільки

$$a^p-b^p=(a-b)(a^{p-1}+a^{p-2}b+a^{p-3}b^2+\ldots+b^{p-1}),$$

залишається довести, що другий множник ділиться на p. Оскільки $a \equiv b \pmod{p}$, то маємо:

$$(a^{p-1}+a^{p-2}b+a^{p-3}b^2+\ldots+b^{p-1}) \equiv pa^{p-1} \pmod{p}.$$

Звідси отримуємо те, що треба було довести.

3. ТЕОРЕМИ ФЕРМА ТА ЕЙЛЕРА

Теорема 3 (Ферма). Якщо p просте і a не ділиться на p, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Теорема 4 (Ейлера). Для довільних натуральних взаємно простих a і $m>1$ виконується $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, де $\varphi(m)$ – функція Ейлера.

Зауваження. Функція Ейлера $\varphi(m)$, названа на честь Леонарда Ейлера (1707-1783), котрий уперше застосував її у своїх роботах із теорії чисел у 1760 р., – мультиплікативна (тобто для довільних взаємно простих чисел m_1 і m_2 $\varphi(m_1 m_2)=\varphi(m_1)\varphi(m_2)$) арифметична функція, рівна кількості натуральних чисел, менших за число m і взаємно простих із ним. При цьому вважається за визначенням, що число 1 взаємно просте з усіма натуральними числами, і $\varphi(1)=1$.

Наприклад, для числа 24 існують 8 менших за нього і взаємно простих із ним чисел: 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Тому φ(24)=8.

Наслідок. Нехай $a \equiv b \pmod m$, $p \equiv n \pmod{\varphi(m)}$, НСД($a,m$)=1. Тоді $a^n \equiv b^p \pmod m$.

Приклад. Знайти $2^{2000} \pmod{25}$.

Розв'язання. $\varphi(25)=20$, $2000 \equiv 0 \pmod{20}$, $2^{2000} \equiv 2^0 \pmod{25} \equiv 1 \pmod{25}$.

Приклад. Довести: якщо $(a+b+c) ⋮ 30$, то $(a^5+b^5+c^5) ⋮ 30$.

Розв'язання. $30=2\cdot 3\cdot 5$. $a^5 \equiv a$ (mod 2,3,5); аналогічно для b і c. 2, 3, 5 – числа попарно взаємно прості.

4. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

1. Розв'язати рівняння в натуральних числах: $4x^2-y^2=28$.

Розв'язання. Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$(2x-y)(2x+y)=28.$$

Подамо 28 у вигляді добутку двох натуральних множників усіма можливими способами:

$$28=1\cdot 28=2\cdot 14=4\cdot 7=7\cdot 4=14\cdot 2=28\cdot 1.$$

Прирівнюємо один із множників зліва до одного, другий – до другого. Розв'язуємо одержані системи. Можливе спрощення: тут числа $(2x+y)$ і $(2x-y)$ мають однакову парність.

***Відповідь*:** $x=4$, $y=6$.

Зауваження. За пошуку цілих розв'язків бралися б до уваги також розклади $(-1)\cdot(-28)=(-2)\cdot(-14)$ тощо.

2. Розв'язати в цілих числах рівняння: $x^2-xy-3y-4=0$.

Розв'язання. На множники не розкладається. Виразимо y:

$$y = x - 3 + \frac{5}{x+3} \quad (x \neq -3).$$

При цілому x y також буде цілим, якщо $5 ⋮ (x+3)$, що можливо при $x+3=\pm 1, \pm 5$.

***Відповідь*:** $(\pm 2,0)$, $(-4,-12)$, $(-8,-12)$.

3. Довести, що рівняння $3x^2-4y^2=13$ не має цілих розв'язків.

Розв'язання. Відношення рівності за модулем 3: $-y^2 \equiv 1 \pmod 3$, що неможливо, оскільки квадрати цілих чисел при діленні на 3 можуть давати остачі або 0, або 1.

5. ТЕОРЕМА ВІЛЬСОНА

Теорема 5 (Вільсона). Число p просте тоді й тільки тоді, коли виконується відношення рівності за модулем

$$(p-1)!+1\equiv 0 \pmod{p}.$$

Приклад (теорема Лейбніца). Довести, що число p просте тоді й тільки тоді, коли

$$(p-2)!+1\equiv 1 \pmod{p}.$$

Розв'язання. За теоремою Вільсона p – просте $\Leftrightarrow$ $(p-1)!+1\equiv 0 \pmod{p}$.

Тоді маємо

$$(p-1)!+1=(p-2)!(p-1)+1=p(p-2)!-(p-2)!+1\equiv-(p-2)!+1 \pmod{p}. \equiv 0 \pmod{p}.$$

6. ЗАДАЧІ

Частина І

1. Знайдіть остачу від ділення: **а)** $36^{2002}+95^{2002}$ на 11; **б)** 2^{2000} на 50.

2. Знайдіть:

а) останню цифру числа 1989^{1989}; *б)* дві останні цифри числа $9^{9^{9^{9}}}$.

3. Доведіть (без калькулятора), що наступні числа є складеними:

а) 711...117 (усього 2004 одиниці);

б) $2\cdot 2006^2+13\cdot 2005\cdot 2006+11\cdot 2005^2$; **в)** $4^{545}+545^4$.

4. Доведіть, що в послідовності 11, 111, 1111, 11111, ... немає квадратів цілих чисел.

5. *а)* При яких натуральних значеннях n число 3^n-1 ділиться на 13?

б) Доведіть, що число $A=\overline{a_0a_1...a_{n-2}a_{n-1}a_n}_{10}$ ділиться на 11 тоді й тільки тоді, коли число $\overline{a_0a_1...a_{n-2}}+\overline{a_{n-1}a_n}$ ділиться на 11.

6. Розв'яжіть рівняння в цілих числах:

а) $3x^2+2xy-y^2=4$; *б)* $3xy+16x+13y+61=0$.

7. Нехай n – ціле число, $n>1$. Чи ділиться $n^{n-1}-1$ на $(n-1)^2$?

8. На 44 деревах, розміщених по колу, сиділи 44 чижі-веселуни (на кожному дереві – по чижові). Час від часу двоє чижів одночасно перелітають на сусідні дерева в різних напрямках (один – за годинниковою стрілкою, а другий – проти). Доведіть, що чижі не зможуть зібратися на одному дереві.

9. Доведіть, що рівняння

$$m^2+3mn-2n^2=122$$

не має цілих розв'язків.

10. Нехай число p – просте, p=4n+3. Доведіть, що

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 - 1 \vdots p;$$

якщо ж p – просте, p=4n+1, то доведіть, що

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 + 1 \vdots p.$$

11. Натуральне число $n \vdots 24$. Доведіть, что сума всіх натуральних дільників числа n–1 (включно з 1 і n–1) також ділиться на 24.

12. Знайдіть остачу від ділення цілої частини числа $\frac{10^{20000}}{10^{100}+3}$ на 10.

13. Знайдіть усі розв’язки рівняння

$$x^{n+1}-(x+1)^n=2001$$

у натуральних числах x, n.

Частина II

1. Довести, що серед довільних 7 натуральних чисел знайдуться три, сума яких ділиться на 3.
2. Довести, що існує степінь числа 3, який закінчується цифрами 001.
3. Довести, що існує число вигляду 19991999...1999, яке ділиться на 99.
4. Довести, що серед 51 цілого числа завжди знайдуться два, різниця квадратів яких ділиться на 100.
5. Довести, що серед довільних 100 натуральних чисел можна вибрати 15 так, щоб різниця довільних двох із них ділилася на 7.
6. Дано 12 різних двоцифрових чисел. Довести, що серед них можна вибрати два, різниця яких – двоцифрове число, записане однаковими цифрами (тобто ділиться на 11).
7. Довести, що серед натуральних чисел 21–1, 22–1, ..., 21999–1 принаймні одне ділиться на 1999.
8. Знайти три попарно взаємно прості числа такі, що сума будь-яких двох із них ділиться на третє.
9. Знайти всі трійки натуральних чисел, що мають таку властивість: добуток будь-яких двох з цих чисел у сумі з 1 ділиться на третє число.
10. Довести, що коли число ділиться на 99, то сума його цифр не менша від 18.
11. Чи може десятковий запис степеня двійки закінчуватися чотирма однаковими цифрами?
12. Довести, що серед будь-яких 39 послідовних натуральних чисел знайдеться одне, сума цифр якого ділиться на 11.
13. Довести, що при непарному натуральному k сума (k+2k+...+nk) ділиться на (1+2+...+n).

7. ЗАДАЧІ НА ПАРНІСТЬ ТА НЕПАРНІСТЬ

Осмислення нових знань.
Числові задачі на розминку.

1. Поставте плюси у виразі: 8 8 8 8 8 8 8 8=1000.
Розв'язання: 888+88+8+8+8=1000.

2. Поставте дужки у виразі: 7·9+12:3–2=23, 7·9+12:3–2=75.
Розв'язання: (7·9+12):(3-2)=75, (7·9+12):3–2=23.

3. Поставте плюси та мінуси у виразі: 1 2 3 4 5 6 7 8 9=100.
Розв'язання: 12–3–4+5–6+7+89=100 (один із варіантів).

4. Скількома способами можна поділити 50 грн. між Петриком та Павликом так, аби хоча б один із них отримав парну кількість гривень?
Розв'язання: 50=0+50, 50=2+48, 50=4+46, 50=6+44, 50=8+42, 50=10+40, ..., 50=46+4, 50=48+2, 50=50+0. Від 0 до 50 існує 26 парних чисел.
Відповідь: 26 способів.

Властивості парності та непарності натуральних чисел

***Задача* 1.** Чи можна розміняти 25 карбованців за допомогою десяти купюр вартістю 1, 3 та 5 карбованців?
Розв'язання цієї задачі ґрунтується на простому спостереженні: сума парної кількості непарних чисел є парною. Узагальнення цього факту виглядає так: парність суми кількох чисел залежить лише від парності числа непарних доданків: якщо кількість непарних доданків є (не)парна, то і сума також є (не)парною.

***Задача* 2.** Петро купив загальний зошит на 96 аркушів і пронумерував усі його сторінки по порядку числами від 1 до 192. Василь вирвав із цього зошита 25 аркушів і додав усі 50 чисел, що на них були написані. Чи міг він дістати 1990?

***Задача* 3.** У ряд записано числа від 1 до 10. Чи можна розставити між ними знаки «+» та «–» так, щоб значення отриманого виразу дорівнювало нулю?
Зауваження. Врахуйте, що від'ємні числа також бувають парними та непарними.

***Задача* 4.** Коник-стрибунець стрибає уздовж прямої, причому першого разу він стрибнув на 1 см в якийсь бік, другого – на 2 см і так далі. Доведіть, що після 1985 стрибків він не може зупинитися там, де починав.

***Задача* 5.** На дошці виписано числа 1, 2, 3, ..., 1984, 1985. Дозволяється стерти з дошки будь-які два числа і замість них записати модуль їх різниці. Врешті-решт на дошці залишається одне число. Чи може воно дорівнювати нулю?

Задачі для самостійного опрацювання.

Задача 1. На дорозі, що з'єднує два аули, немає горизонтальних ділянок. Автобус їде в гору завжди зі швидкістю 15 км/год, а під гору – 30 км/год. Знайдіть відстані між аулами, якщо відомо, що шлях туди і назад автобус долає за 4 години.

Задача 2. Чи існують такі натуральні числа a, b, що $ab(a–b)$=45045?

Задача 3. Позначимо суму трьох послідовних натуральних чисел через a, а суму наступних трьох натуральних чисел – через b. Чи може добуток ab дорівнювати 111111111?
Задача 4. Доведіть, що остання ненульова цифра числа 1985! парна.
Задача 5. Натуральні числа x і y такі, що $34x=43y$. Доведіть, що число $x+y$ – складене.
Задача 6. Чи існують такі цілі числа a, b, відмінні від нуля, що одне з них ділиться на їх суму, а друге – на їх різницю?
Задача 7. Доведіть, що натуральне число, десятковий запис якого складається із однієї одиниці, двох двійок, трьох трійок, ..., дев'яти дев'яток, не може бути точним квадратом.
Задача 8. Кожне з натуральних чисел a, b, c і d ділиться на $ab–cd$. Доведіть, що $ab–cd$ дорівнює 1 або –1.
Задача 9. У країні Анчурії в обігу знаходяться купюри чотирьох вартостей: 1 долар, 10 доларів, 100 доларів, 1000 доларів. Чи можна відрахувати мільйон доларів так, щоб одержати рівно півмільйона купюр?
Задача 10. На дошці написане число 1. Кожну секунду до числа на дошці додають суму його цифр. Чи може через деякий час на дошці з'явитися число 123456?
Задача 11. Доведіть, що число 3999991 не є простим.
Задача 12.
а) Знайдіть семизначне число, всі цифри якого різні і яке ділиться на всі ці цифри.
б) Чи існує таке восьмизначне число?

8. ОЗНАКИ ПОДІЛЬНОСТІ

- Число ділиться на 2 тоді й тільки тоді, коли його остання цифра ділиться на 2 (тобто коли воно закінчується на 0, 2, 4, 6 або 8).
- Число ділиться на 3 тоді й тільки тоді, коли сума цифр цього числа ділиться на 3.
- Число ділиться на 4 тоді й тільки тоді, коли ділиться на 4 число, утворене двома останніми цифрами даного числа.
- Число ділиться на 5 тоді й тільки тоді, коли його остання цифра ділиться на 5 (тобто коли воно закінчується на 0 або 5).
- Число ділиться на 6 тоді й тільки тоді, коли для нього одночасно виконуються ознаки подільності на 2 і на 3.
- Число ділиться на 7 тоді й тільки тоді, коли
  а) ділиться на 7 результат віднімання подвоєної останньої цифри від цього числа без останньої цифри (наприклад, для числа 721: $72–1\cdot 2=70$ ділиться на 7);
  б) ділиться на 7 сума числа без останньої цифри і останньої цифри, помноженої на 5 (наприклад, для числа 126: $12+6\cdot 5=42$ – ділиться на 7);

в) ділиться на 7 сума потроєного числа без останньої цифри і власне останньої цифри (наприклад, для числа 133: $13 \cdot 3 + 3 = 42$ – ділиться на 7);

г) критерій для великого числа, розбитого на блоки по три цифри, починаючи з останньої цифри: якщо ділиться на 7 різниця між сумами блоків, що займають парні й непарні місця.

- Число ділиться на 8 тоді й тільки тоді, якщо три його останні цифри нулі або утворюють число, яке ділиться на 8.
- Число ділиться на 9 тоді й тільки тоді, коли сума цифр цього числа ділиться на 9.
- Число ділиться на 10 тоді й тільки тоді, коли воно закінчується на 0.
- Число ділиться на 11 тоді й тільки тоді, коли ділиться на 11 різниця між сумами цифр, що займають непарні й парні місця у запису даного числа.
- Число ділиться на 13 тоді й тільки тоді, коли ділиться на 13 результат додавання останньої цифри, помноженої на 4, до цього числа без останньої цифри.

Джерела:

http://olimpmath.blogspot.com/2014/10/

http://olimpmath.blogspot.com/2015/03/

https://vseosvita.ua/library/