

МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОБМЕЖЕНОЇ СТРУНИ. МЕТОД ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ

Зауважимо, що в темах 4-5 використовується нумерація, введена в Циклі лекцій №1 (теми 1-3 даного розділу).

4. Загальна мішана задача для рівняння коливань струни

Означення 4. *Загальною мішаною задачею* для обмеженої струни називається мішана задача для рівняння коливань струни з неоднорідними (загалом залежними від часу t) крайовими умовами.

Правило інтегрування загальної мішаної задачі. Якщо у мішаній задачі хоча б одна з крайових умов неоднорідна (загалом залежна від часу t), тоді для застосування методу відокремлення змінних необхідно спершу звести крайові умови до однорідних. Розв'язок шукаємо у вигляді суми

$$U(t, x) = V(t, x) + \omega(t, x), \quad (4.1)$$

де $V(t, x)$ – нова невідома функція, а допоміжну функцію $\omega(t, x)$ підбираємо таким чином, щоб вона справджувала крайові умови вихідної задачі. Тоді для функції $V(t, x)$ одержимо одну з розглянутих вище (див. Цикл лекцій №1 до даного розділу) мішану задачу для вільних або вимушених коливань, до якої за умови її коректної постановки можна застосувати метод Фур'є.

Правила знаходження допоміжної функції. Допоміжну функцію $\omega(t, x)$ рекомендується шукати у наступному вигляді:

а) $\omega(t, x) = a(t)x^2 + b(t)x$, якщо крайові умови мають вигляд

$$U_x(t, 0) = v_1(t), \quad U_x(t, l) = v_2(t), \quad t \geq 0; \quad (4.2)$$

б) $\omega(t, x) = a(t)x + b(t)$ за крайових умов будь-якого іншого вигляду.

У обох випадках коефіцієнти $a(t)$ і $b(t)$ визначаються з крайових умов.

Для ілюстрації наведених правил розглянемо задачу: в області $\Omega = \{(t, x) | t > 0, 0 < x < l\}$ знайти розв'язок рівняння коливань струни

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f_1(t, x), \quad (4.3)$$

який задовольняє початкові умови

$$U(0, x) = \varphi_1(x), \quad U_t(0, x) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4.4)$$

та крайові умови

$$U(t, 0) = \mu_1(t), \quad U(t, l) = \mu_2(t), \quad t \geq 0, \quad (4.5)$$

Крайові умови (4.5) неоднорідні та залежні від часу, тому маємо загальну мішану задачу. Для застосування методу відокремлення змінних необхідно спершу звести задачу (4.3)-(4.4)-(4.5) до задачі з однорідними крайовими умовами підстановкою (4.1), де $V(t, x)$ – нова невідома функція, а допоміжна функція $\omega(t, x)$ повинна справджувати крайові умови (4.5), тобто

$$\omega(t, 0) = \mu_1(t), \quad \omega(t, l) = \mu_2(t), \quad t \geq 0. \quad (4.6)$$

Крайові умови (4.5) відмінні від (4.2), тому допоміжну функцію шукаємо за правилом **б)** у вигляді $\omega(t, x) = a(t)x + b(t)$. Коефіцієнти знаходяться безпосередньою підстановкою у (4.6):

$$\omega(t, 0) \equiv b(t) = \mu_1(t), \quad \omega(t, l) \equiv a(t)l + b(t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0,$$

звідки

$$b(t) = \mu_1(t), \quad a(t) = \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{l},$$

тобто

$$\omega(t, x) = \mu_1(t) + xl^{-1}[\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

Тоді підстановка (4.1) запишеться у вигляді

$$U(t, x) = V(t, x) + \mu_1(t) + xl^{-1}[\mu_2(t) - \mu_1(t)]. \quad (4.7)$$

Введемо підстановку (4.7) у рівняння (4.1), початкові умови (4.2) та крайові умови (4.3). Маємо:

$$\begin{aligned} V_{tt} + \mu_1''(t) + xl^{-1}[\mu_2''(t) - \mu_1''(t)] &= a^2 V_{xx} + f_1(t, x), \\ V(0, x) + \mu_1(0) + xl^{-1}[\mu_2(0) - \mu_1(0)] &= \varphi_1(x), \\ V_t(0, x) + \mu_1'(0) + xl^{-1}[\mu_2'(0) - \mu_1'(0)] &= \psi_1(x), \\ V(t, 0) + \mu_1(t) + 0 \cdot l^{-1}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] &= \mu_1(t), \\ V(t, l) + \mu_1(t) + l \cdot l^{-1}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] &= \mu_2(t). \end{aligned}$$

Після спрощення останніх рівностей отримаємо мішану задачу для визначення нової невідомої функції $V(t, x)$:

$$\begin{aligned} V_{tt} &= a^2 V_{xx} + f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega, \\ V(0, x) &= \varphi(x), \quad V_t(0, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ V(t, 0) &= 0, \quad V(t, l) = 0, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

де $f(t, x) = f_1(t, x) - \mu_1''(t) - xl^{-1}[\mu_2''(t) - \mu_1''(t)]$, $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \mu_1(0) - xl^{-1}[\mu_2(0) - \mu_1(0)]$, $\psi(x) = \psi_1(x) - \mu_1'(0) - xl^{-1}[\mu_2'(0) - \mu_1'(0)]$.

Задача (4.8) очевидно аналогічна уже розглянутій мішаній задачі для рівняння вимушених коливань струни (1.1)-(1.2)-(2.2), і її розв'язок дається формулою (3.11). Отже, шуканий розв'язок загальної мішаної задачі (4.3)-(4.4)-(4.5) визначається формулою (4.7), де $V(t, x)$ записується у вигляді (3.11) з урахуванням виражень функцій $f(t, x)$, $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ через задані в умові задачі величини.

Приклад 4.1. Знайти допоміжну функцію $\omega(t, x)$ для випадку загальної мішаної задачі з крайовими умовами вигляду (4.2).

Розв'язання. Допоміжна функція $\omega(t, x)$ повинна справджувати крайові умови (4.2), тобто

$$\omega_x(t, 0) = v_1(t), \quad \omega_x(t, l) = v_2(t), \quad t \geq 0. \quad (4.9)$$

У випадку крайових умов (4.2) допоміжну функцію шукаємо за правилом **a)** у вигляді $\omega(t, x) = a(t)x^2 + b(t)x$. Коефіцієнти знаходяться безпосередньою підстановкою в (4.9):

$$\omega_x(t, 0) \equiv b(t) = v_1(t), \quad \omega_x(t, l) \equiv 2a(t)l + b(t) = v_2(t), \quad t \geq 0,$$

звідки

$$b(t) = v_1(t), \quad a(t) = \frac{v_2(t) - v_1(t)}{2l},$$

тобто

$$\omega(t, x) = xv_1(t) + 0,5x^2l^{-1}[v_2(t) - v_1(t)].$$

Відповідь. $\omega(t, x) = xv_1(t) + 0,5x^2l^{-1}[v_2(t) - v_1(t)]$.

Приклад 4.2. Звести до задачі з однорідними крайовими умовами загальну мішану задачу

$$U_{tt} = U_{xx} - 4t \cos \frac{\pi x}{2}, \quad (t, x) \in \Omega_{l=1},$$

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = x + 1, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$U_x(t, 0) = t, \quad U(t, 1) = 2t, \quad t \geq 0.$$

Розв'язання. Розв'язок наведеної загальної мішаної задачі шукаємо у вигляді (4.1), де допоміжна функція $\omega(t, x)$ повинна справджувати задані крайові умови

$$\omega_x(t, 0) = t, \quad \omega(t, 1) = 2t, \quad t \geq 0. \quad (4.10)$$

Крайові умови (4.10) відмінні від (4.2), тому допоміжну функцію шукаємо за правилом **b)** у вигляді $\omega(t, x) = a(t)x + b(t)$. Коефіцієнти знаходяться безпосередньою підстановкою в (4.10):

$$\omega_x(t, 0) \equiv a(t) = t, \quad \omega(t, 1) \equiv a(t) + b(t) = 2t, \quad t \geq 0,$$

звідки

$$a(t) = t, \quad b(t) = t,$$

тобто

$$\omega(t, x) = t(x + 1).$$

Тоді підстановка (4.1) запишеться у вигляді

$$U(t, x) = V(t, x) + t(x + 1). \quad (4.11)$$

Введемо підстановку (4.11) у рівняння, початкові та крайові умови вихідної задачі. Маємо:

$$V_{tt} = V_{xx} + 4t \cos \frac{\pi x}{2},$$

$$V(0, x) = 0, \quad V_t(0, x) + x + 1 = x + 1,$$

$$V_x(t, 0) + t = t, \quad V(t, 1) + 2t = 2t.$$

Зауважимо, що рівняння для $V(t, x)$ не змінилося тому, що другі похідні від $\omega(t, x)$ за змінними x і t рівні нулеві. Після спрощення останніх рівностей отримаємо мішану задачу для визначення нової невідомої функції $V(t, x)$:

$$\begin{aligned}
V_{tt} &= V_{xx} + 4t \cos \frac{\pi x}{2}, \quad (t, x) \in \Omega_{l=1}, \\
V(0, x) &= 0, \quad V_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\
V_x(t, 0) &= 0, \quad V(t, 1) = 0, \quad t \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Відповідь. Вихідна загальна мішана задача зводиться до задачі з однорідними крайовими умовами (4.12) підстановкою (4.11).

5. Задача зі стаціонарними неоднорідностями для рівняння коливань струни

Означення 5. Мішана задача для обмеженої струни називається **задачею зі стаціонарними неоднорідностями**, якщо вільний член у рівнянні і крайові умови не залежать явно від змінної часу.

Задача зі стаціонарними неоднорідностями є частинним випадком загальної мішаної задачі, однак метод її інтегрування має свою специфіку.

Правило інтегрування задачі зі стаціонарними неоднорідностями. Якщо у мішаній задачі вільний член у рівнянні і крайові умови не залежать явно від змінної часу, тоді розв'язок шукаємо у вигляді суми

$$U(t, x) = V(t, x) + \omega(x), \tag{5.1}$$

де $V(t, x)$ – нова невідома функція, а допоміжну функцію $\omega(x)$, яка у випадку рівняння коливань має назву **статичного прогину**, підбираємо таким чином, щоб вона справджувала не тільки крайові умови, а й рівняння вихідної задачі. Тоді для функції $V(t, x)$ однозначно одержимо розглянуту вище (див. Цикл лекцій №1 до даного розділу) мішану задачу для вільних коливань, до якої за умови її коректної постановки можна застосувати метод Фур'є.

Зауваження до знаходження статичного прогину. Статичний прогин $\omega(x)$ визначається з крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку, яка для деяких типів крайових умов, зокрема якщо крайові умови вихідної задачі мають вигляд (4.2), може не мати розв'язку. У такому випадку – якщо статичний прогин не існує – вихідну задачу зі стаціонарними неоднорідностями слід інтегрувати як загальну мішану задачу (див. тему 4).

Для ілюстрації наведених правил розглянемо задачу: в області $\Omega = \{(t, x) | t > 0, 0 < x < l\}$ знайти розв'язок рівняння коливань струни

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x), \tag{5.2}$$

який задовольняє початкові умови

$$U(0, x) = \varphi_1(x), \quad U_t(0, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{5.3}$$

та крайові умови

$$U(t, 0) = \mu_1 = \text{const}, \quad U(t, l) = \mu_2 = \text{const}, \quad t \geq 0. \tag{5.4}$$

Вільний член у рівнянні і крайові умови (5.4) не залежать явно від змінної часу, тому маємо задачу зі стаціонарними неоднорідностями. Для застосування методу відокремлення змінних необхідно спершу звести задачу (5.2)-(5.3)-(5.4) до однорідної

підстановкою (5.1), де $V(t, x)$ – нова невідома функція, а статичний прогин $\omega(x)$ має справджувати рівняння (5.2) та крайові умови (5.4), тобто має бути розв'язком наступної крайової задачі (отримується шляхом безпосередньої підстановки):

$$\begin{aligned} a^2 \omega''(x) + f(x) &= 0, \\ \omega(0) &= \mu_1, \quad \omega(l) = \mu_2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Зінтегруємо крайову задачу (5.5). Із рівняння маємо

$$\omega'' = -\frac{f(x)}{a^2} \Rightarrow \omega' = -\frac{1}{a^2} \int_0^x f(\xi) d\xi + C_1 \Rightarrow \omega = -\frac{1}{a^2} \int_0^x (x - \xi) f(\xi) d\xi + C_1 x + C_2.$$

З урахуванням крайових умов

$$\begin{aligned} \omega(0) &= \mu_1 \Rightarrow C_2 = \mu_1, \\ \omega(l) &= \mu_2 \Rightarrow C_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{l} + \frac{1}{a^2 l} \int_0^l (l - \xi) f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Отже, крайова задача (5.5) має єдиний розв'язок, тобто існує статичний прогин

$$\omega(x) = -\frac{1}{a^2} \int_0^x (x - \xi) f(\xi) d\xi + \left[\frac{\mu_2 - \mu_1}{l} + \frac{1}{a^2 l} \int_0^l (l - \xi) f(\xi) d\xi \right] x + \mu_1. \quad (5.6)$$

Введемо підстановку (5.1) у рівняння (5.2), початкові умови (5.3) та крайові умови (5.4). Маємо:

$$\begin{aligned} V_{tt} &= a^2 [V_{xx} + \omega''(x)] + f(x), \\ V(0, x) + \omega(x) &= \varphi_1(x), \quad V_t(0, x) = \psi(x), \\ V(t, 0) + \omega(0) &= \mu_1, \quad V(t, l) + \omega(l) = \mu_2. \end{aligned}$$

Після спрощення останніх рівностей з урахуванням (5.5) отримаємо мішану задачу для визначення нової невідомої функції $V(t, x)$:

$$\begin{aligned} V_{tt} &= a^2 V_{xx}, \quad (t, x) \in \Omega, \\ V(0, x) &= \varphi(x), \quad V_t(0, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ V(t, 0) &= 0, \quad V(t, l) = 0, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

де $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \omega(x)$, а статичний прогин $\omega(x)$ визначається формулою (5.6).

Задача (5.7) очевидно аналогічна уже розглянутій мішаній задачі для рівняння вільних коливань струни (2.1)-(1.2)-(2.2), і її розв'язок дається формулою (2.14).

Отже, шуканий розв'язок задачі зі стаціонарними неоднорідностями (5.2)-(5.3)-(5.4) визначається формулою (5.1), де $V(t, x)$ записується у вигляді (2.14) з урахуванням вираження функції $\varphi(x)$ через задані в умові задачі величини, а статичний прогин $\omega(x)$ подається формулою (5.6).

Приклад 5.1. Визначити умову існування статичного прогину у випадку задачі зі стаціонарними неоднорідностями для рівняння (5.2) з початковими умовами (5.3) та стаціонарними крайовими умовами вигляду (4.2)

$$U_x(t, 0) = v_1 = \text{const}, \quad U_x(t, l) = v_2 = \text{const}, \quad t \geq 0.$$

Розв'язання. Статичний прогин $\omega(x)$ має бути розв'язком крайової задачі (отримується шляхом безпосередньої підстановки):

$$a^2 \omega''(x) + f(x) = 0, \quad (5.9)$$

$$\omega'(0) = v_1, \quad \omega'(l) = v_2.$$

Загальний розв'язок рівняння з (5.9) аналогічний уже отриманому для задачі (5.5):

$$\omega(x) = -\frac{1}{a^2} \int_0^x (x - \xi) f(\xi) d\xi + C_1 x + C_2, \quad (5.10)$$

а його перша похідна рівна

$$\omega'(x) = -\frac{1}{a^2} \int_0^x f(\xi) d\xi + C_1. \quad (5.11)$$

Підставимо функцію (5.11) у крайові умови задачі (5.9). Маємо

$$\omega'(0) = v_1 \Rightarrow C_1 = v_1,$$

$$\omega'(l) = v_2 \Rightarrow C_1 = v_2 + \frac{1}{a^2} \int_0^l f(\xi) d\xi.$$

Крайова задача (5.9) очевидно має розв'язок лише тоді, коли значення сталої C_1 , визначені з двох останніх рівностей, співпадатимуть. У цьому випадку існує статичний прогин у вигляді (5.10), де сталій C_2 можна надавати будь-якого значення. У протилежному випадку статичний прогин не існує, а тому відповідну задачу зі стаціонарними неоднорідностями слід інтегрувати як загальну мішану задачу.

Відповідь. Статичний прогин для вихідної задачі існує тільки за виконання умови

$$v_1 = v_2 + \frac{1}{a^2} \int_0^l f(\xi) d\xi.$$

Приклад 5.2. Знайти статичний прогин для мішаної задачі

$$U_{tt} = 4U_{xx} - 24x, \quad (t, x) \in \Omega_{l=1},$$

$$U(0, x) = 2x + 1, \quad U_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$U(t, 0) = 1, \quad U_x(t, 1) = 2, \quad t \geq 0$$

і звести задачу до однорідної.

Розв'язання. Розв'язок наведеної задачі зі стаціонарними неоднорідностями шукаємо у вигляді (5.1), де статичний прогин $\omega(x)$ має справджувати рівняння та крайові умови вихідної задачі, тобто має бути розв'язком наступної крайової задачі (отримується шляхом безпосередньої підстановки):

$$4\omega''(x) - 24x = 0, \quad (5.12)$$

$$\omega(0) = 1, \quad \omega'(1) = 2.$$

Розв'яжемо крайову задачу (5.12).

$$\omega''(x) = 6x \Rightarrow \omega'(x) = 3x^2 + C_1 \Rightarrow \omega(x) = x^3 + C_1 x + C_2;$$

$$\omega'(1) = 2 \Rightarrow 3 + C_1 = 2 \Rightarrow C_1 = -1;$$

$$\omega(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1.$$

Отже, статичний прогин для вихідної задачі рівний

$$\omega(x) = x^3 - x + 1,$$

а підстановка (5.1) запишеться у вигляді

$$U(t, x) = V(t, x) + x^3 - x + 1. \quad (5.13)$$

Введемо підстановку (5.13) у рівняння, початкові та крайові умови вихідної мішаної задачі. Маємо:

$$\begin{aligned} V_{tt} &= 4[V_{xx} + 6x] - 24x, \\ V(0, x) + x^3 - x + 1 &= 2x + 1, \quad V_t(0, x) = 0, \\ V(t, 0) + 1 &= 1, \quad V_x(t, 1) + 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

Після спрощення останніх рівностей отримаємо мішану задачу для визначення нової невідомої функції $V(t, x)$:

$$\begin{aligned} V_{tt} &= 4V_{xx}, \quad (t, x) \in \Omega_{l=1}, \\ V(0, x) &= 3x - x^3, \quad V_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ V(t, 0) &= 0, \quad V_x(t, 1) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Відповідь. Статичний прогин рівний $\omega(x) = x^3 - x + 1$; вихідна задача зі стаціонарними неоднорідностями зводиться до однорідної задачі (5.14) підстановкою (5.13).

Джерела:

- [1] Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – С. 108-120.
- [2] Перестюк М.О., Маринець В.В., Рего В.Л. Збірник задач з математичної фізики. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2012. – С. 78-90.