

РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ. ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕОБМЕЖЕНОЇ СТРУНИ

1. Фізичні процеси, що описуються рівняннями гіперболічного типу

Багато задач механіки (коливання струн, стрижнів, мембран і тривимірних об'ємів) та фізики (електромагнітні коливання) описуються рівнянням коливань вигляду

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - qu + F(t, \mathbf{x}), \quad (1.1)$$

де невідома функція $u(t, \mathbf{x})$ залежить від n ($n = 1, 2, 3$) просторових координат $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ і часу t ; коефіцієнти ρ , p і q визначаються властивостями середовища, де відбувається коливний процес; вільний член $F(t, \mathbf{x})$ виражає інтенсивність зовнішнього збурення. Зауважимо, що ДРЧП (1.1) є рівнянням гіперболічного типу. Розглянемо деякі частинні випадки рівняння (1.1).

Рівняння вигляду

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t, x) \quad (1.2)$$

називається **рівнянням малих поперечних коливань струни**. Якщо в (1.2) $F(t, x) \equiv 0$, то коливання називаються **вільними**, якщо ж $F(t, x) \neq 0$ – то **вимушеними**.

У рівнянні (1.2) шукана функція $u(t, x)$ характеризує величину відхилення струни від положення рівноваги в точці x у момент часу t , тобто $u = u(t, x)$ є рівнянням струни в момент часу t ; $\rho(x)$ – лінійна густина струни в точці з абсцисою x ; $T_0 = \text{const}$ – величина сили натягу, яка у випадку малих коливань є сталою в довільній точці струни; $F(t, x)$ позначає густину зовнішніх сил, що діють на струну в точці x у момент часу t , і напрямлені перпендикулярно до осі x у площині коливань (x, u) .

Якщо лінійна густина є сталою в кожній точці струни, тобто $\rho(x) \equiv \rho_0 = \text{const}$, то рівняння коливань струни набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x), \quad (1.3)$$

де $f(t, x) = \frac{F}{\rho_0}$ – інтенсивність зовнішніх сил, $a^2 = \frac{T_0}{\rho_0}$ – додатна стала. ДРЧП (1.3)

називають також **одновимірним хвильовим рівнянням**.

Рівняння вигляду (1.1) описує також **малі поздовжні коливання пружного стрижня**. У цьому випадку отримуємо ДРЧП

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(t, x), \quad (1.4)$$

де $S(x)$ – площа поперечного перерізу стрижня, $E(x)$ – модуль Юнга (характеристика матеріалу) в точці x . Якщо стрижень однорідний і має сталий переріз, то з ДРЧП (1.4) очевидно отримуємо рівняння вигляду (1.3).

Із фізичних міркувань випливає, що для однозначного опису процесу коливань струни чи стрижня необхідно додатково задати величини зміщення u і швидкості u_t в початковий момент часу (**початкові умови**), і коливні режими на кінцях (**крайові умови**).

Аналогічний до (1.2) вигляд має **рівняння малих поперечних коливань мембрани**

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F(t, x, y). \quad (1.5)$$

Якщо густина ρ стала й рівна ρ_0 , то з (1.5) отримуємо рівняння коливань однорідної мембрани

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(t, x, y), \quad f = \frac{F}{\rho_0}, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho_0}, \quad (1.6)$$

яке називають також **двовимірним хвильовим рівнянням**.

Тривимірне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(t, x, y, z) \quad (1.7)$$

описує процеси поширення звуку в однорідному середовищі, а також електромагнітних хвиль в однорідному непровідному середовищі. Це рівняння справджує густина газу, його тиск і потенціал швидкостей, а також складові напруженості електричного та магнітного полів і відповідні потенціали.

Хвильові рівняння (1.3), (1.6), (1.7) загалом записують єдиною формулою для n -вимірного простору

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n),$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ – **оператор Лапласа**.

2. Вільні коливання необмеженої струни. Метод характеристик

Нехай розміри розглядуваної області значно перевищують масштаби досліджуваного явища. Тоді кажуть, що відповідне явище відбувається в необмеженій області.

Прикладом такої ситуації може стати процес коливань деякої ділянки досить довгої струни, що знаходиться на доволі великій відстані від її кінців, за нетривалий проміжок часу. Очевидно, що тоді коливні режими на кінцях струни не впливатимуть на досліджуваний процес. У цьому випадку хід хвильового процесу залежатиме від

його початкового стану та початкових швидкостей. Математичною моделлю такого явища є *задача Коші* для рівняння коливань струни, а власне струну за дослідження цього процесу вважають *необмеженою*.

Розглянемо задачу: знайти закон вільних коливань однорідної необмеженої струни, якщо в початковий момент часу $t = 0$ відхилення точок струни описувалося функцією $\varphi(x)$, а їх швидкість – функцією $\psi(x)$.

Математична модель задачі: в області $\Omega = \{(t, x) \mid t > 0, x \in \mathbb{R}\}$ (*фазовій площині*) знайти розв'язок $u(t, x)$ рівняння вільних коливань струни

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (2.1)$$

який справджує початкові умови

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x). \quad (2.2)$$

Для розв'язання задачі (2.1)-(2.2) застосуємо метод характеристик: зведемо спочатку ДРЧП (2.1) до канонічного вигляду. Із відповідного характеристичного рівняння маємо

$$dx^2 = a^2 dt^2 \Rightarrow dx = \pm a dt.$$

Інтегруючи останню рівність, отримаємо дві дійсні сім'ї характеристик

$$x = \pm at + C_{1,2} \Rightarrow C_1 = x - at, \quad C_2 = x + at.$$

Введемо нові незалежні змінні

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at, \quad u(x, y) = U(\xi(x, y), \eta(x, y)). \quad (2.3)$$

Тоді

$$\begin{aligned} u_x &= U_\xi + U_\eta, \quad u_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \\ u_t &= -aU_\xi + aU_\eta, \quad u_{tt} = a^2 U_{\xi\xi} - 2a^2 U_{\xi\eta} + a^2 U_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Підставивши знайдені похідні в (2.1) і звівши подібні доданки, дістанемо канонічну форму

$$U_{\xi\eta} = 0. \quad (2.4)$$

Знайдемо загальний розв'язок ДРЧП (2.4). Перше інтегрування дає

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \eta} = f(\eta),$$

де $f(\eta)$ – довільна функція змінної η . Інтегруючи останню рівність за змінною η , одержимо

$$U(\xi, \eta) = \int f(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

де $f_1(\xi)$, $f_2(\eta)$ – довільні функції.

Повертаючись до старих незалежних змінних згідно з формулами (2.3), маємо

$$u(t, x) = f_1(x - at) + f_2(x + at). \quad (2.5)$$

Отже, загальний розв'язок рівняння вільних коливань струни (2.1) визначається формулою (2.5), у якій кожен із доданків правої частини має реальний фізичний зміст. Доданок $f_1(x - at)$ називається *прямою біжучою хвилею*, яка рухається зліва направо зі сталою швидкістю a . Доданок $f_2(x + at)$ називається *зворотною біжучою хвилею*, яка рухається справа наліво з тією ж сталою швидкістю a . Згідно з формулою (2.5) загальний розв'язок ДРЧП (2.1), який описує зміщення струни, отримується як результат *суперпозиції* (накладання) прямої й зворотної біжучих хвиль.

Визначимо функції $f_1(x-at)$ та $f_2(x+at)$ таким чином, щоб розв'язок (2.5) задовольняв початкові умови (2.2). Безпосередньою підстановкою (2.5) у (2.2) отримуємо:

$$u(0, x) \equiv f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x);$$

$$u_t = -a \frac{df_1(x-at)}{d(x-at)} + a \frac{df_2(x+at)}{d(x+at)} \Rightarrow u_t(0, x) \equiv a[f_2'(x) - f_1'(x)] = \psi(x).$$

Зінтегрувавши друге рівняння на інтервалі $[x_0, x]$, де x_0 – фіксована точка, одержимо:

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ f_2(x) - f_1(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + C, \end{cases}$$

звідки

$$f_1(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz - \frac{C}{2}, \quad f_2(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz + \frac{C}{2},$$

а отже,

$$f_1(x-at) = \frac{\varphi(x-at)}{2} - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(z) dz - \frac{C}{2},$$

$$f_2(x+at) = \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(z) dz + \frac{C}{2}.$$

Підставивши знайдені пряму й зворотну хвилі в (2.5), отримуємо формулу для розв'язку задачі Коші (2.1)-(2.2)

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz,$$

яка називається **формулою Д'Аламбера**.

Справедливі наступні теореми.

Теорема 2.1 (обґрунтування формули Д'Аламбера). Якщо в початкових умовах (2.2) $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$, то задача Коші (2.1)-(2.2) має в області Ω єдиний розв'язок, який дається формулою Д'Аламбера (2.6).

Теорема 2.2 (про неперервну залежність розв'язку задачі Коші для рівняння вільних коливань струни від початкових даних). Нехай функції $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$ є розв'язками задач Коші

$$u_{i_{tt}} = a^2 u_{i_{xx}}, \quad (t, x) \in \Omega, \quad (i=1,2),$$

$$u_i(0, x) = \varphi_i(x), \quad u_{i_t}(0, x) = \psi_i(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

причому $\varphi_i(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi_i(x) \in C^1(\mathbb{R})$, $i=1,2$. Тоді для довільних $\varepsilon, t_1 > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon, t_1) > 0$, що як тільки $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta$, $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$ при $x \in \mathbb{R}$, то справедлива нерівність

$$|u_1(t, x) - u_2(t, x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad t \leq t_1.$$

На практиці початкові умови отримують дослідним шляхом, тому природно, що вони не є точними. Теорема 2.2 стверджує, що невеликі похибки в початкових умовах задачі Коші (2.1)-(2.2) призводять до невеликих змін у її розв'язку, тобто розглядувана задача Коші є коректно поставленою.

Зауважимо, що розв'язок задачі Коші для рівняння вільних коливань струни можна будувати і у деяких випадках, коли початкові функції не задовольняють умови Теорема 2.1, зокрема тоді, коли $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ відмінні від нуля тільки на скінчених відрізках, неперервні при $x \in \mathbb{R}$, а функція $\varphi(x)$ має похідну першого порядку. Такий розв'язок задачі Коші (2.1)-(2.2) називається **узагальненим**, і на підставі Теорема 2.2 можна показати, що він також дається формулою Д'Аламбера (2.6).

На практиці узагальнений розв'язок задачі Коші (2.1)-(2.2) зручно шукати у вигляді «модифікованої» формули (2.6)

$$u(t, x) = \Phi(x - at) + \Phi(x + at) + \Psi(x + at) - \Psi(x - at), \quad (2.7)$$

де $\Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{2}$, $\Psi(x) = \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(z) dz$ (x_0 – фіксована точка). У формулі (2.7) перший і

четвертий доданок складають пряму хвилю, а зворотна хвиля є сумою другого і третього доданка.

Джерела:

Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – С. 44-48.
Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001. – С. 25-37.