

СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1. Розв'язування систем диференціальних рівнянь шляхом зведення до звичайних диференціальних рівнянь

Приклад 1.1. Знайти загальний розв'язок $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь (ЛОСДР)

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases} \quad (1.1)$$

Розв'язання. Як відомо, за виконання певних умов нормальну систему n -го порядку можна звести до одного диференціального рівняння n -го порядку відносно однієї з шуканих функцій. Перевіримо можливість застосування цього методу. Для цього продиференціюємо перше рівняння системи (1.1) за змінною t із урахуванням другого і третього рівнянь системи:

$$\ddot{x} = \dot{x} - \dot{y} - \dot{z} = x - y - z - (x + y) - (3x + z) = -3x - 2y - 2z. \quad (1.2)$$

Із (1.2) і першого з рівнянь (1.1) одержимо:

$$\begin{cases} y + z = x - \dot{x}, \\ 2y + 2z = -3x - \ddot{x}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Очевидно, що y і z із системи (1.3) не визначаються однозначно як функції x , \dot{x} і \ddot{x} , тому ЛОСДР (1.1) не можна звести до одного диференціального рівняння третього порядку відносно невідомої функції $x(t)$. Однак це ще не означає, що такого рівняння не можна отримати відносно функцій $y(t)$ або $z(t)$. Будемо наполегливими й почнемо все спочатку, виходячи з другого рівняння системи (1.1). Маємо:

$$\ddot{y} = \dot{x} + \dot{y} = x - y - z + (x + y) = 2x - z. \quad (1.4)$$

Цього разу умова можливості застосування методу очевидно виконується, адже з (1.1) і (1.4) для x і z отримуємо однозначні вирази

$$x = \dot{y} - y, \quad z = 2x - \ddot{y} = 2\dot{y} - 2y - \ddot{y}. \quad (1.5)$$

Щоб отримати шукане рівняння третього порядку, продиференціюємо рівняння (1.4) за змінною t з урахуванням (1.1) та (1.5):

$$\ddot{\ddot{y}} = 2\dot{x} - \dot{z} = 2(x - y - z) - (3x + z) = -x - 2y - 3z = -(\dot{y} - y) - 2y - 3(2\dot{y} - 2y - \ddot{y}),$$

звідки

$$\ddot{\ddot{y}} - 3\ddot{y} + 7\dot{y} - 5y = 0. \quad (1.6)$$

Загальний розв'язок рівняння (1.6) знаходимо за методом Ейлера для звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5 \equiv (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$$

має корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$, яким відповідають лінійно незалежні частинні розв'язки $y_1 = e^t$, $y_2 = e^t \cos 2t$, $y_3 = e^t \sin 2t$. Тоді загальний розв'язок рівняння (1.6)

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = e^t (C_1 + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t),$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі. Підставивши знайдену $y(t)$ у формули (1.5), знаходимо дві інші невідомі функції:

$$x = \dot{y} - y = e^t (C_1 + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t - 2C_2 \sin 2t + 2C_3 \cos 2t) - e^t (C_1 + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t) = 2e^t (C_3 \cos 2t - C_2 \sin 2t),$$

$$z = 2x - \ddot{y} = 4e^t (C_3 \cos 2t - C_2 \sin 2t) - e^t (C_1 - 3C_2 \cos 2t - 3C_3 \sin 2t - 4C_2 \sin 2t + 4C_3 \cos 2t) = e^t (-C_1 + 3C_2 \cos 2t + 3C_3 \sin 2t).$$

Відповідь. $x = 2e^t (C_3 \cos 2t - C_2 \sin 2t)$, $y = e^t (C_1 + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t)$,
 $z = e^t (-C_1 + 3C_2 \cos 2t + 3C_3 \sin 2t)$.

Приклад 1.2. Знайти розв'язок задачі Коші для ЛОСДР

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases} \quad (1.7)$$

за початкових умов

$$x(0) = 1, \quad y(0) = -1, \quad z(0) = 0. \quad (1.8)$$

Розв'язання. Спробуємо застосувати метод зведення до рівняння третього порядку аналогічно до прикладу 1.1. Виходячи з першого рівняння системи (1.7), маємо:

$$\ddot{x} = 4\dot{x} - \dot{y} - \dot{z} = 4(4x - y - z) - (x + 2y - z) - (x - y + 2z) = 14x - 5y - 5z. \quad (1.9)$$

Із (1.9) і першого з рівнянь (1.7) одержимо:

$$\begin{cases} y + z = 4x - \dot{x}, \\ 5y + 5z = 14x - \ddot{x}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Очевидно, що y і z із системи (1.10) не визначаються однозначно як функції x , \dot{x} і \ddot{x} , тому ЛОСДР (1.7) також не можна звести до одного диференціального рівняння третього порядку відносно невідомої функції $x(t)$. Ба більше, виходячи з другого і третього рівнянь системи (1.7), можна переконатися, що задану ЛОСДР не вдасться звести до рівняння третього порядку відносно жодної з невідомих функцій.

Ну що ж, тоді спробуємо хоча б понизити порядок заданої системи, аби спростити розв'язання. Для цього застосуємо так званий **метод інтегровних комбінацій**.

Як відомо, інтегрованою комбінацією шуканих функцій та їх похідних називається будь-яке диференціальне рівняння, яке є наслідком системи і легко інтегрується.

Побудувавши k лінійно незалежних інтегровних комбінацій для заданої системи диференціальних рівнянь n -го порядку, можна понизити порядок останньої на k одиниць. Якщо вдалося побудувати n таких комбінацій, то знаходження розв'язку СДР можна звести до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь.

Підбираючи інтегровні комбінації для системи (1.7) у вигляді $a\dot{x} + b\dot{y} + c\dot{z}$, де a, b, c – дійсні коефіцієнти, знаходимо два придатні співвідношення:

$$\dot{x} - \dot{y} - \dot{z} = 2x - 2y - 2z, \quad \dot{x} - \dot{y} = 3x - 3y.$$

Звідси отримуємо два лінійно незалежні перші інтеграли системи (1.7):

$$\frac{d(x - y - z)}{dt} = 2(x - y - z) \Rightarrow x - y - z = C_1 e^{2t},$$

$$\frac{d(x-y)}{dt} = 3(x-y) \Rightarrow x-y = C_2 e^{3t},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Із отриманих рівностей визначаємо

$$z = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}, \quad x = y + C_2 e^{3t}. \quad (1.11)$$

Підставивши функції (1.11) у друге рівняння системи (1.7), дістанемо лінійне неоднорідне рівняння першого порядку для визначення невідомої функції $y(t)$:

$$\dot{y} = x + 2y - z = y + C_2 e^{3t} + 2y - (-C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}) = 3y + C_1 e^{2t}.$$

Розв'язавши це рівняння методом варіації сталої чи методом підстановки, дістанемо

$$y = -C_1 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \text{ а тоді з (1.11) } x = -C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3) e^{3t}.$$

Отже, загальний розв'язок ЛОСДР (1.7) має вигляд

$$x = -C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3) e^{3t}, \quad y = -C_1 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \quad z = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}. \quad (1.12)$$

Щоб знайти шуканий розв'язок задачі Коші, підставимо (1.12) у початкові умови (1.8):

$$x(0) \equiv -C_1 + C_2 + C_3 = 1,$$

$$y(0) \equiv -C_1 + C_3 = -1,$$

$$z(0) \equiv -C_1 + C_2 = 0.$$

Із останньої системи алгебраїчних рівнянь знаходимо: $C_1 = C_2 = 2, C_3 = 1$. Підклавши ці значення в (1.12), отримаємо шуканий частинний розв'язок.

Відповідь. $x = -2e^{2t} + 3e^{3t}, \quad y = -2e^{2t} + e^{3t}, \quad z = -2e^{2t} + 2e^{3t}.$

2. Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера

Приклад 2.1. Розв'язати лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь методом Ейлера:

$$\dot{X} = AX, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Розв'язання. Згідно з алгоритмом методу Ейлера спочатку знаходимо власні значення матриці A як корені характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) \equiv \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7 - \lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1 - \lambda) = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 0$.

Для власного значення $\lambda_1 = 1$ – однократного кореня характеристичного рівняння – знаходимо власний вектор $h_1 = \text{col}(h_{11}, h_{12}, h_{13}) \neq \vec{0}$, елементи якого визначаються з рівності $(A - \lambda_1 E)h_1 = \vec{0}$, тобто

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

або у скалярному вигляді

$$\begin{cases} 3h_{11} - 5h_{12} + 2h_{13} = 0, \\ 5h_{11} - 8h_{12} + 3h_{13} = 0, \\ 6h_{11} - 9h_{12} + 3h_{13} = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Алгебраїчна система (2.2) має безліч нетривіальних розв'язків, одним із яких є, наприклад, $h_{11} = h_{12} = h_{13} = 1$. Отже, за власний вектор можна взяти $h_1 = \text{col}(1, 1, 1)$.

Тоді згідно з правилами методу Ейлера для побудови фундаментальної системи частинних розв'язків ЛОСДР власному значенню $\lambda_1 = 1$ відповідає частинний розв'язок

$$\varphi_1(t) = h_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

Власне значення $\lambda = 0$ є коренем кратності $m = 2$ характеристичного рівняння. Кратність цього власного значення, тобто кількість відповідних йому лінійно незалежних власних векторів, визначається числом $s = n - \text{rang}(A - \lambda E)$, де n – порядок заданої ЛОСДР. У нашому випадку

$$s = 3 - \text{rang} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Отже, для побудови $m = 2$ лінійно незалежних частинних розв'язків системи (2.1), що відповідають власному значенню $\lambda = 0$, треба визначити $s = 1$ власний вектор $h_2 = \text{col}(h_{21}, h_{22}, h_{23}) \neq \vec{0}$ із рівності $(A - \lambda E)h_2 = \vec{0}$, а також $m - s = 2 - 1 = 1$

приєднаний до нього вектор $h_3 = \text{col}(h_{31}, h_{32}, h_{33})$ із рівності $(A - \lambda E)h_3 = h_2$. Маємо:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Згідно з правилами методу Ейлера для кратних коренів характеристичного рівняння відповідні до $\lambda = 0$ частинні розв'язки записуються у вигляді

$$\varphi_2(t) = h_2 e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3(t) = (h_2 t + h_3) e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді загальний розв'язок системи (2.1) рівний $X = C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t) + C_3 \varphi_3(t)$, де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі. Підклавши в останню формулу знайдену ФСЧР, отримаємо шукану вектор-функцію.

Відповідь. $X = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 + C_3(t-1) \\ C_1 e^t + 2C_2 + C_3(2t-1) \\ C_1 e^t + 3C_2 + 3tC_3 \end{pmatrix}.$

Приклад 2.2. Методом Ейлера побудувати загальний розв'язок лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь:

$$\dot{X} = AX, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Розв'язання. Згідно з алгоритмом методу Ейлера спочатку знаходимо власні значення матриці A як корені характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) \equiv \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 & 1 \\ -1 & -2 - \lambda & 0 \\ -3 & 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 + \lambda)(-\lambda^2 - 4\lambda - 8) = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = -2 \pm 2i$.

Для власного значення $\lambda_1 = -2$ – однократного кореня характеристичного рівняння – знаходимо власний вектор $h_1 = \text{col}(h_{11}, h_{12}, h_{13}) \neq \vec{0}$, елементи якого визначаються з рівності $(A - \lambda_1 E)h_1 = \vec{0}$, тобто

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Одним із нетривіальних розв'язків є, наприклад, $h_{11} = 0$, $h_{12} = 1$, $h_{13} = -1$. Отже, за власний вектор можна взяти $h_1 = \text{col}(0, 1, -1)$. Тоді згідно з правилами методу Ейлера для побудови фундаментальної системи частинних розв'язків ЛОСДР власному значенню $\lambda_1 = -2$ відповідає частинний розв'язок

$$\varphi_1(t) = h_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Щоб знайти дійсні частинні розв'язки, що відповідають комплексно спряженим кореням характеристичного рівняння $\lambda_{2,3} = -2 \pm 2i$, знайдемо власний вектор

$\gamma = \text{col}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \neq \vec{0}$ для одного з цих власних значень, наприклад, для $\lambda_2 = -2 + 2i$.

Комплекснозначні елементи цього вектора визначаються з рівності $(A - \lambda_2 E)\gamma = \vec{0}$, тобто

$$\begin{pmatrix} -2i & 1 & 1 \\ -1 & -2i & 0 \\ -3 & 0 & -2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Одним із нетривіальних розв'язків є, наприклад, $\gamma_1 = 2i$, $\gamma_2 = -1$, $\gamma_3 = -3$. Отже, за власний вектор можна взяти $\gamma = \text{col}(2i, -1, -3)$. Тоді згідно з правилами методу Ейлера для побудови фундаментальної системи частинних розв'язків ЛОСДР парі комплексно спряжених власних значень $\lambda_{2,3} = -2 \pm 2i$ відповідають дійсні частинні розв'язки, що отримуються як дійсна і уявна частини комплексної вектор-функції

$$\varphi(t) = \gamma e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{(-2+2i)t} = \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t} (\cos 2t + i \sin 2t).$$

Отже, маємо:

$$\varphi_2(t) = \text{Re} \varphi(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ -\cos 2t \\ -3 \cos 2t \end{pmatrix}, \quad \varphi_3(t) = \text{Im} \varphi(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ -\sin 2t \\ -3 \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Тоді загальний розв'язок системи (2.3) рівний $X = C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t) + C_3 \varphi_3(t)$, де C_1 , C_2 , C_3 – довільні сталі. Підклавши в останню формулу знайдену ФСЧР, отримаємо шукану вектор-функцію.

Відповідь. $X = e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} -2C_2 \sin 2t + 2C_3 \cos 2t \\ C_1 - C_2 \cos 2t - C_3 \sin 2t \\ -C_1 - 3C_2 \cos 2t - 3C_3 \sin 2t \end{pmatrix}.$

Приклад 2.3. Застосувати метод Ейлера для знаходження загального розв'язку системи (1.7), розглянутої в Прикладі 1.2.

Розв'язання. Система (1.7) задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Знайдемо власні значення матриці A як корені характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) \equiv \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda - 3)^2 = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 3$.

Для власного значення $\lambda_1 = 2$ – однократного кореня характеристичного рівняння – знаходимо власний вектор $h_1 = \text{col}(h_{11}, h_{12}, h_{13}) \neq \vec{0}$, елементи якого визначаються з рівності $(A - \lambda_1 E)h_1 = \vec{0}$, тобто

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Одержана алгебраїчна система має безліч нетривіальних розв'язків, одним із яких є, наприклад, $h_{11} = h_{12} = h_{13} = 1$. Отже, за власний вектор можна взяти $h_1 = \text{col}(1, 1, 1)$.

Тоді власному значенню $\lambda_1 = 2$ відповідає частинний розв'язок

$$\varphi_1(t) = h_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Власне значення $\lambda = 3$ є коренем кратності $m = 2$ характеристичного рівняння. Кратність цього власного значення, тобто кількість відповідних йому лінійно незалежних власних векторів, рівна $s = n - \text{rang}(A - \lambda E)$. У нашому випадку

$$s = 3 - \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

Отже, для побудови $m = 2$ лінійно незалежних частинних розв'язків системи (1.7), що відповідають власному значенню $\lambda = 3$, треба визначити $s = 2$ лінійно незалежні власні вектори h_2, h_3 вигляду $\gamma = \text{col}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \neq \vec{0}$ із рівності $(A - \lambda E)\gamma = \vec{0}$. Маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Згідно з правилами методу Ейлера для кратних коренів характеристичного рівняння у цьому випадку відповідні до $\lambda = 3$ частинні розв'язки записуються у вигляді

$$\varphi_2(t) = h_2 e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad \varphi_3(t) = h_3 e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Тоді загальний розв'язок системи (1.7) $\text{col}(x, y, z) = C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t) + C_3 \varphi_3(t)$, де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі. Підклавши в останню формулу знайдену ФСЧР, дістанемо шукану вектор-функцію. Результат із точністю до позначень довільних сталих цілком узгоджується з формулами (1.12), отриманими із застосуванням методу інтегровних комбінацій.

Відповідь.
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3) e^{3t} \\ C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \\ C_1 e^{2t} + C_3 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

3. Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь. Метод варіації сталих (метод Лагранжа)

Метод Лагранжа (варіації сталих) є універсальним методом інтегрування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь та їх систем. Суть цього методу у випадку систем диференціальних рівнянь (СДР) полягає в наступному.

Нехай відомий загальний розв'язок лінійної однорідної СДР n -го порядку $\dot{X} = AX$

$$X_{з.о.}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(t), \quad (3.1)$$

де C_1, \dots, C_n – довільні сталі, $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ – фундаментальна система частинних розв'язків (ФСЧР) однорідної СДР. Тоді загальний розв'язок лінійної неоднорідної СДР $\dot{X} = AX + F(t)$ можна шукати у вигляді

$$X(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) \varphi_i(t), \quad (3.2)$$

де коефіцієнти $C_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ знаходяться з *системи Лагранжа*

$$\sum_{i=1}^n \dot{C}_i(t) \varphi_i(t) = F(t) \quad (3.3)$$

шляхом розв'язування алгебраїчної системи (3.3) і подальшого n -кратного інтегрування.

Приклад 3.1. Методом варіації сталих розв'язати лінійну неоднорідну СДР

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + e^{2t} \operatorname{sect}, \\ \dot{y} = x + 2y + e^{2t} \operatorname{csc}t. \end{cases} \quad (3.4)$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок (3.1) відповідної однорідної СДР

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases} \quad (3.5)$$

Ця система задається матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Власні значення цієї матриці є коренями характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) \equiv \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Звідси $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$.

Щоб знайти ФСЧР системи (3.5), що відповідає знайденим комплексно спряженим власним значенням, визначимо власний вектор $\gamma = \operatorname{col}(\gamma_1, \gamma_2) \neq \vec{0}$ для одного з цих власних значень, наприклад, для $\lambda_1 = 2 + i$. Комплекснозначні елементи цього вектора визначаються з рівності $(A - \lambda_1 E)\gamma = \vec{0}$, тобто

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Одним із нетривіальних розв'язків є, наприклад, $\gamma_1 = i$, $\gamma_2 = 1$. Отже, за власний вектор можна взяти $\gamma = \operatorname{col}(i, 1)$. Тоді згідно з правилами методу Ейлера для побудови ФСЧР парі комплексно спряжених власних значень $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ відповідають дійсні частинні розв'язки, що отримуються як дійсна і уявна частини комплексної вектор-функції

$$\varphi(t) = \gamma e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(2+i)t} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} (\cos t + i \sin t).$$

Отже, маємо:

$$\varphi_1(t) = \operatorname{Re} \varphi(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \operatorname{Im} \varphi(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Тоді загальний розв'язок однорідної системи (3.5) $\operatorname{col}(x, y)_{3.o.} = C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t)$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Згідно з алгоритмом методу варіації сталих загальний розв'язок неоднорідної системи (3.4) будемо шукати у вигляді (3.2), тобто у нашому випадку

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1(t) \varphi_1(t) + C_2(t) \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} [-C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t] \\ e^{2t} [C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t] \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів $C_1(t), C_2(t)$ складаємо систему Лагранжа (3.3):

$$\begin{cases} e^{2t} [-\dot{C}_1(t) \sin t + \dot{C}_2(t) \cos t] = e^{2t} \sec t, \\ e^{2t} [\dot{C}_1(t) \cos t + \dot{C}_2(t) \sin t] = e^{2t} \csc t, \end{cases}$$

або після спрощення

$$\begin{cases} -\dot{C}_1(t) \sin t + \dot{C}_2(t) \cos t = \cos^{-1} t, \\ \dot{C}_1(t) \cos t + \dot{C}_2(t) \sin t = \sin^{-1} t. \end{cases} \quad (3.7)$$

Визначник системи (3.7) $\Delta = \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{vmatrix} = -1$. Тоді за методом Крамера

$$\dot{C}_1(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = - \begin{vmatrix} \cos^{-1} t & \cos t \\ \sin^{-1} t & \sin t \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t = 2 \operatorname{ctg} 2t,$$

$$\dot{C}_2(t) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = - \begin{vmatrix} -\sin t & \cos^{-1} t \\ \cos t & \sin^{-1} t \end{vmatrix} = 2.$$

Звідси шляхом двократного інтегрування отримуємо:

$$C_1(t) = 2 \int \operatorname{ctg} 2t dt = \ln |\sin 2t| + c_1, \quad C_2(t) = 2 \int dt = 2t + c_2,$$

де c_1, c_2 – довільні сталі. Підставивши знайдені коефіцієнти у (3.6), дістанемо шуканий загальний розв'язок неоднорідної системи (3.4).

Відповідь. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} -(\ln |\sin 2t| + c_1) \sin t + (2t + c_2) \cos t \\ (\ln |\sin 2t| + c_1) \cos t + (2t + c_2) \sin t \end{pmatrix}.$

Приклад 3.2. Із застосуванням методу Лагранжа розв'язати задачу Коші для лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - 3y + \frac{2}{e^t + 1} \end{cases} \quad (3.8)$$

за початкових умов

$$x(0) = 0, \quad y(0) = \ln 4. \quad (3.9)$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок (3.1) відповідної однорідної СДР

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - 3y. \end{cases} \quad (3.10)$$

Ця система задається матрицею $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Власні значення цієї матриці є коренями характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) \equiv \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$.

Щоб знайти ФСЧР системи (3.5), що відповідає знайденим дійсним однократним кореням характеристичного рівняння, визначимо власні вектори $h_1 = \text{col}(h_{11}, h_{12}) \neq \vec{0}$ та $h_2 = \text{col}(h_{21}, h_{22}) \neq \vec{0}$, елементи яких визначаються з рівностей $(A - \lambda_1 E)h_1 = \vec{0}$, $(A - \lambda_2 E)h_2 = \vec{0}$, тобто

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нетривіальними розв'язками наведених систем, є, наприклад, $h_{11} = 1$, $h_{12} = 2$; $h_{21} = h_{22} = 1$. Отже, за власні вектори можна взяти $h_1 = \text{col}(1, 2)$, $h_2 = \text{col}(1, 1)$. Тоді згідно з правилами методу Ейлера відповідна до власних значень $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ ФСЧР системи (3.10) має вигляд

$$\varphi_1(t) = h_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \varphi_2(t) = h_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

Тоді загальний розв'язок однорідної системи (3.10) $\text{col}(x, y)_{3.0.} = C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t)$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Згідно з алгоритмом методу варіації сталих загальний розв'язок неоднорідної системи (3.8) будемо шукати у вигляді (3.2), тобто у нашому випадку

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1(t) \varphi_1(t) + C_2(t) \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) e^{-t} + C_2(t) e^t \\ 2C_1(t) e^{-t} + C_2(t) e^t \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів $C_1(t)$, $C_2(t)$ складаємо систему Лагранжа (3.3):

$$\begin{cases} \dot{C}_1(t) e^{-t} + \dot{C}_2(t) e^t = 0, \\ 2\dot{C}_1(t) e^{-t} + \dot{C}_2(t) e^t = \frac{2}{e^t + 1}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Віднявши від другого рівняння алгебраїчної системи (3.12) перше і поділивши на e^{-t} , маємо:

$$\dot{C}_1(t) = \frac{2e^t}{e^t + 1} \Rightarrow C_1(t) = 2 \ln(e^t + 1) + c_1.$$

Тоді з першого рівняння (3.12), підставивши відоме значення $\dot{C}_1(t)$, дістанемо

$$\dot{C}_2(t) = -\frac{2e^{-t}}{e^t + 1} = -\frac{2e^{-2t}}{1 + e^{-t}} \Rightarrow C_2(t) = 2[1 + e^{-t} - \ln(1 + e^{-t})] + c_2$$

(c_1, c_2 – довільні сталі). Підставивши знайдені коефіцієнти у (3.11), дістанемо загальний розв'язок неоднорідної системи (3.8). Випишемо його покомпонентно:

$$\begin{aligned} x &= e^{-t} \cdot [2 \ln(e^t + 1) + c_1] + e^t \cdot [2 + 2e^{-t} - 2 \ln(1 + e^{-t}) + c_2], \\ y &= 2e^{-t} \cdot [2 \ln(e^t + 1) + c_1] + e^t \cdot [2 + 2e^{-t} - 2 \ln(1 + e^{-t}) + c_2]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Виділимо з (3.13) частинний розв'язок, що справджує початкові умови (3.9).

Підставивши функції (3.13) у (3.9), маємо:

$$x(0) \equiv c_1 + 4 + c_2 = 0,$$

$$y(0) \equiv 2 \ln 2 + 2c_1 + 4 + c_2 = \ln 4.$$

Звідси $c_1 = 0$, $c_2 = -4$. Підклавши ці значення в (3.13), одержимо шуканий розв'язок задачі Коші (3.8)-(3.9).

Відповідь.
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \cdot \ln(e^t + 1) + 2e^t \cdot [e^{-t} - 1 - \ln(1 + e^{-t})] \\ 4e^{-t} \cdot \ln(e^t + 1) + 2e^t \cdot [e^{-t} - 1 - \ln(1 + e^{-t})] \end{pmatrix}.$$

4. Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів

Метод невизначених коефіцієнтів дозволяє знаходити загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь (ЛНСДР) зі сталими коефіцієнтами n -го порядку

$$\dot{X} = AX + F(t) \quad (4.1)$$

без інтегрування у випадку, якщо вільний член $F(t)$ має вигляд векторного квазіполінома, тобто

$$F(t) = e^{\alpha t} [P_{k_1}(t) \cos \beta t + Q_{k_2}(t) \sin \beta t], \quad (4.2)$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – деякі сталі, а $P_{k_1}(t)$, $Q_{k_2}(t)$ – вектор-функції, елементами яких є поліноми степенів, що не перевищують значення k_1 та k_2 відповідно.

Тоді загальний розв'язок системи (4.1) можна шукати у вигляді

$$X(t) = X_{з.о.}(t) + X_{ч.н.}(t), \quad (4.3)$$

де $X_{з.о.}(t)$ загальний розв'язок відповідної до (4.1) однорідної системи $\dot{X} = AX$, а $X_{ч.н.}(t)$ частинний розв'язок неоднорідної системи (4.1), який знаходиться у вигляді

$$X_{ч.н.}(t) = e^{\alpha t} [\bar{P}_{k+m}(t) \cos \beta t + \bar{Q}_{k+m}(t) \sin \beta t], \quad (4.4)$$

де $k = \max\{k_1, k_2\}$, а m – кратність кореня характеристичного рівняння $\gamma = \alpha + i\beta$ [контрольного числа для квазіполінома (4.2)]. Поліноми у вектор-функції (4.4) записуємо з невизначеними коефіцієнтами, значення яких вираховуються шляхом безпосередньої підстановки (4.4) у неоднорідну систему (4.1).

Приклад 4.1. Побудувати загальний розв'язок ЛНСДР методом невизначених коефіцієнтів (числових значень коефіцієнтів не знаходити):

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + 2 \cos t - 9, \\ \dot{y} = 3x + y - z + 4t^2 - 5t e^{-t}, \\ \dot{z} = x + z - 6t \sin t + 3e^{2t} - 7t. \end{cases} \quad (4.5)$$

Розв'язання. Усі доданки вільних членів у рівняннях системи (4.5) мають вигляд квазіполіномів, тому для її розв'язання застосовний метод невизначених коефіцієнтів.

Отже, будемо шукати загальний розв'язок системи (4.5) у вигляді (4.3), і знайдемо спочатку $X_{3,0}(t)$ методом Ейлера із відповідної однорідної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = 3x + y - z, \\ \dot{z} = x + z, \end{cases} \quad (4.6)$$

яка задається матрицею $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Її власні значення є коренями

характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) \equiv \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 & 0 \\ 3 & 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^3 = 0.$$

Звідси $\lambda_{1,2,3} = 2$.

Отже, власне значення $\lambda = 2$ є коренем кратності $m = 3$ характеристичного рівняння. Кратність цього власного значення, тобто кількість відповідних йому лінійно незалежних власних векторів, рівна $s = n - \text{rang}(A - \lambda E)$. У нашому випадку

$$s = 3 - \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Отже, для побудови $m = 3$ лінійно незалежних частинних розв'язків системи (4.6), що відповідають власному значенню $\lambda = 2$, треба визначити $s = 1$ власний вектор

$h_1 = \text{col}(h_{11}, h_{12}, h_{13}) \neq \vec{0}$ із рівності $(A - \lambda E)h_1 = \vec{0}$, а також ланцюжок із

$m - s = 3 - 1 = 2$ приєднаних до нього векторів $h_2 = \text{col}(h_{21}, h_{22}, h_{23})$,

$h_3 = \text{col}(h_{31}, h_{32}, h_{33})$ із рівностей $(A - \lambda E)h_2 = h_1$, $(A - \lambda E)h_3 = h_2$. Маємо:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Згідно з правилами методу Ейлера для кратних коренів характеристичного рівняння відповідні до $\lambda = 2$ частинні розв'язки записуються у вигляді

$$\varphi_1(t) = h_1 e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \varphi_2(t) = (h_1 t + h_2) e^{\lambda t} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] e^{2t},$$

$$\varphi_3(t) = \left(h_1 \frac{t^2}{2} + h_2 t + h_3 \right) e^{\lambda t} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2t}.$$

Тоді загальний розв'язок системи (4.6) $\text{col}(x, y, z) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + c_3 \varphi_3(t)$, де c_1, c_2, c_3 – довільні сталі, тобто

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3.0.} = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t + 0,5c_3 t^2 \\ 2c_1 + c_2(2t - 1) + c_3(t^2 - t) \\ c_1 + c_2(t - 1) + c_3(0,5t^2 - t + 1) \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Побудуємо тепер частинний розв'язок $X_{ч.н.}(t)$ неоднорідної системи (4.5). Оскільки вільні члени рівнянь цієї системи містять доданки, яким відповідають різні контрольні числа – у цьому можна переконатися, порівнюючи кожен доданок із загальним виглядом (4.2), – то $X_{ч.н.}(t)$ буде сумою частинних розв'язків, побудованих за формулою (4.4) для кожного з квазіполіномів, утвореного з доданків, яким відповідає однакове контрольне число. Таких квазіполіномів отримуємо чотири:

$$F_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 0 \\ -6t \sin t \end{pmatrix}, \quad F_2(t) = \begin{pmatrix} -9 \\ 4t^2 \\ -7t \end{pmatrix}, \quad F_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5t e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_4(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Визначимо вигляд частинного розв'язку для кожного з цих квазіполіномів.

1. Для вектор-функції $F_1(t)$ маємо: $\alpha = 0$ (числовий коефіцієнт у степені експоненти), $\beta = 1$ (числовий коефіцієнт в аргументі косинуса чи синуса), тоді контрольне число $\gamma = \alpha + i\beta = i$. Це число не є коренем характеристичного рівняння (маємо **нерезонансний випадок**), тому $m = 0$. Останнє необхідне для застосування формули (4.4) число $k = 1$ (коефіцієнт при синусі є поліномом першого степеня – вищого за коефіцієнт при косинусі). Підставивши визначені α, β, m і k в формулу (4.4), одержимо загальний вигляд першої складової частинного розв'язку

$$X_{ч.н.1}(t) = \bar{P}_1(t) \cos t + \bar{Q}_1(t) \sin t,$$

тобто з невизначеними коефіцієнтами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{ч.н.1} = \begin{pmatrix} A_1 t + B_1 \\ A_2 t + B_2 \\ A_3 t + B_3 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} C_1 t + D_1 \\ C_2 t + D_2 \\ C_3 t + D_3 \end{pmatrix} \sin t. \quad (4.8)$$

2. Для вектор-функції $F_2(t)$ маємо: $\alpha = 0, \beta = 0$, тоді контрольне число $\gamma = \alpha + i\beta = 0$. Це число також не є коренем характеристичного рівняння, тому $m = 0$. Порівнюючи степені поліномів, знаходимо $k = 2$ (найвищий степінь). Підставивши визначені α, β, m і k в формулу (4.4), одержимо загальний вигляд другої складової частинного розв'язку

$$X_{ч.н.2}(t) = \bar{P}_2(t),$$

тобто з невизначеними коефіцієнтами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\text{ч.н.2}} = \begin{pmatrix} E_1 t^2 + F_1 t + G_1 \\ E_2 t^2 + F_2 t + G_2 \\ E_3 t^2 + F_3 t + G_3 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

3. Для вектор-функції $F_3(t)$ маємо: $\alpha = -1$, $\beta = 0$, і контрольне число $\gamma = \alpha + i\beta = -1$.

Це число знову не є коренем характеристичного рівняння, тому $m = 0$. Також очевидно $k = 1$. Підставивши визначені α , β , m і k в формулу (4.4), одержимо загальний вигляд третьої складової частинного розв'язку

$$X_{\text{ч.н.3}}(t) = \bar{P}_1(t) e^{-t},$$

тобто з невизначеними коефіцієнтами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\text{ч.н.3}} = \begin{pmatrix} H_1 t + I_1 \\ H_2 t + I_2 \\ H_3 t + I_3 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}. \quad (4.10)$$

4. Нарешті, для вектор-функції $F_4(t)$ маємо: $\alpha = 2$, $\beta = 0$, і контрольне число

$\gamma = \alpha + i\beta = 2$. Це число є трикратним коренем характеристичного рівняння, тому $m = 3$ (**резонансний випадок**). Числовий коефіцієнт при експоненті є поліномом нульового степеня, тому $k = 0$. Підставивши визначені α , β , m і k в формулу (4.4), одержимо загальний вигляд четвертої й останньої складової частинного розв'язку

$$X_{\text{ч.н.4}}(t) = \bar{P}_3(t) e^{2t},$$

тобто з невизначеними коефіцієнтами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\text{ч.н.4}} = \begin{pmatrix} J_1 t^3 + K_1 t^2 + L_1 t + M_1 \\ J_2 t^3 + K_2 t^2 + L_2 t + M_2 \\ J_3 t^3 + K_3 t^2 + L_3 t + M_3 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}. \quad (4.11)$$

Шуканий частинний розв'язок $X_{\text{ч.н.}}(t)$ буде сумою чотирьох його складових (4.8), (4.9), (4.10) і (4.11). Позначені літерами коефіцієнти теоретично можна знайти безпосередньою підстановкою $X_{\text{ч.н.}}(t)$ у систему (4.5), однак у завданні знаходження їх числових значень не вимагається.

Згідно з формулою (4.3) загальний розв'язок неоднорідної системи (4.5) рівний сумі побудованого частинного розв'язку $X_{\text{ч.н.}}(t)$ і загального розв'язку (4.7) відповідної однорідної системи.

Відповідь.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t + 0,5c_3 t^2 \\ 2c_1 + c_2(2t-1) + c_3(t^2-t) \\ c_1 + c_2(t-1) + c_3(0,5t^2-t+1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 t + B_1 \\ A_2 t + B_2 \\ A_3 t + B_3 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} C_1 t + D_1 \\ C_2 t + D_2 \\ C_3 t + D_3 \end{pmatrix} \sin t +$$

$$+ \begin{pmatrix} E_1 t^2 + F_1 t + G_1 \\ E_2 t^2 + F_2 t + G_2 \\ E_3 t^2 + F_3 t + G_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_1 t + I_1 \\ H_2 t + I_2 \\ H_3 t + I_3 \end{pmatrix} \cdot e^{-t} + \begin{pmatrix} J_1 t^3 + K_1 t^2 + L_1 t + M_1 \\ J_2 t^3 + K_2 t^2 + L_2 t + M_2 \\ J_3 t^3 + K_3 t^2 + L_3 t + M_3 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}.$$

Приклад 4.2. Із застосуванням методу невизначених коефіцієнтів розв'язати задачу Коші для лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases} \quad (4.12)$$

за початкових умов

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 4. \quad (4.13)$$

Розв'язання. Усі доданки вільних членів у рівняннях системи (4.12) мають вигляд квазіполіномів, тому для її розв'язання застосовний метод невизначених коефіцієнтів. Отже, будемо шукати загальний розв'язок системи (4.12) у вигляді (4.3), і знайдемо спочатку $X_{3.o.}(t)$ методом Ейлера із відповідної однорідної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases} \quad (4.14)$$

Ця система задається матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Власні значення цієї матриці є коренями характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) \equiv \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$.

Щоб знайти ФСЧР системи (4.14), що відповідає знайденим дійсним однократним кореням характеристичного рівняння, визначимо власні вектори $h_1 = \text{col}(h_{11}, h_{12}) \neq \vec{0}$ та $h_2 = \text{col}(h_{21}, h_{22}) \neq \vec{0}$, елементи яких визначаються з рівностей $(A - \lambda_1 E)h_1 = \vec{0}$, $(A - \lambda_2 E)h_2 = \vec{0}$, тобто

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нетривіальними розв'язками наведених систем, є, наприклад, $h_{11} = 1$, $h_{12} = -1$; $h_{21} = h_{22} = 1$. Отже, за власні вектори можна взяти $h_1 = \text{col}(1, -1)$, $h_2 = \text{col}(1, 1)$. Тоді згідно з правилами методу Ейлера відповідна до власних значень $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ ФСЧР системи (4.14) має вигляд

$$\varphi_1(t) = h_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t, \quad \varphi_2(t) = h_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Тоді загальний розв'язок однорідної системи (4.14) $\text{col}(x, y)_{3.o.} = C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t)$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Побудову частинного розв'язку $X_{ч.н.}(t)$ неоднорідної системи (4.12) розпочнемо з визначення кількості його складових. Для цього виділимо з вільного члена квазіполіноми, що відповідають різним контрольним числам. Таких квазіполіномів отримуємо два:

$$F_1(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо вигляд частинного розв'язку для кожного з цих квазіполіномів.

1. Для вектор-функції $F_1(t)$ маємо: $\alpha = 1$, $\beta = 0$, тоді контрольне число $\gamma = \alpha + i\beta = 1$. Це число є однократним коренем характеристичного рівняння тому $m = 1$. Числовий коефіцієнт при експоненті є поліномом нульового степеня, тому $k = 0$. Підставивши визначені α , β , m і k в формулу (4.4), одержимо загальний вигляд першої складової частинного розв'язку

$$X_{ч.н.1}(t) = \bar{P}_1(t)e^t,$$

тобто з невизначеними коефіцієнтами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{ч.н.1} = \begin{pmatrix} A_1t + B_1 \\ A_2t + B_2 \end{pmatrix} \cdot e^t. \quad (4.15)$$

2. Для вектор-функції $F_2(t)$ маємо: $\alpha = 4$, $\beta = 0$, і контрольне число $\gamma = \alpha + i\beta = 4$. Це число не є коренем характеристичного рівняння, тому $m = 0$. Числовий коефіцієнт при експоненті є поліномом нульового степеня, тому $k = 0$. Підставивши визначені α , β , m і k в формулу (4.4), одержимо загальний вигляд другої складової частинного розв'язку

$$X_{ч.н.2}(t) = \bar{P}_0(t)e^{4t},$$

тобто з невизначеними коефіцієнтами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{ч.н.2} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} \cdot e^{4t}. \quad (4.16)$$

Частинний розв'язок буде сумою двох його складових (4.15) і (4.16). Випишемо його покомпонентно:

$$\begin{aligned} x_{ч.н.} &= (A_1t + B_1)e^t + D_1e^{4t}, \\ y_{ч.н.} &= (A_2t + B_2)e^t + D_2e^{4t}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Числові значення невизначених коефіцієнтів знаходимо підстановкою (4.17) у неоднорідну систему (4.12). Маємо:

$$(A_1t + B_1 + A_1)e^t + 4D_1e^{4t} = 2(A_1t + B_1)e^t + 2D_1e^{4t} + (A_2t + B_2)e^t + D_2e^{4t} + 2e^t,$$

$$(A_2t + B_2 + A_2)e^t + 4D_2e^{4t} = (A_1t + B_1)e^t + D_1e^{4t} + 2(A_2t + B_2)e^t + 2D_2e^{4t} - 3e^{4t}.$$

Щоб останні рівності виконувалися для довільних t , коефіцієнти при однакових функціях зліва і справа повинні співпадати. Отже,

$$te^t: \begin{cases} A_1 = 2A_1 + A_2, \\ A_2 = A_1 + 2A_2; \end{cases} \quad e^t: \begin{cases} B_1 + A_1 = 2B_1 + B_2 + 2, \\ B_2 + A_2 = B_1 + 2B_2; \end{cases} \quad e^{4t}: \begin{cases} 4D_1 = 2D_1 + D_2, \\ 4D_2 = D_1 + 2D_2 - 3. \end{cases}$$

Наведені рівності справджуються, наприклад, для наступного набору числових значень: $A_1 = 1$, $A_2 = B_2 = D_1 = -1$, $B_1 = 0$, $D_2 = -2$. Підклавши ці значення у (4.17), одержимо остаточний вигляд частинного розв'язку

$$\begin{aligned} x_{ч.н.} &= te^t - e^{4t}, \\ y_{ч.н.} &= (-t - 1)e^t - 2e^{4t}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Додавши до (4.17) покомпонентно загальний розв'язок $\text{col}(x, y)_{з.о.} = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t)$ однорідної системи (4.14), одержимо загальний розв'язок ЛНСДР (4.12):

$$\begin{aligned} x &= C_1e^t + C_2e^{3t} + te^t - e^{4t}, \\ y &= -C_1e^t + C_2e^{3t} - (t + 1)e^t - 2e^{4t}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Виділимо з (4.18) частинний розв'язок, що справджує початкові умови (4.13).

Підставивши функції (4.18) у (4.13), маємо:

$$x(0) \equiv C_1 + C_2 - 1 = 0,$$

$$y(0) \equiv -C_1 + C_2 - 3 = 4.$$

Звідси $C_1 = -3$, $C_2 = 4$. Підклавши ці значення в (4.18), одержимо шуканий розв'язок задачі Коші (4.12)-(4.13).

Відповідь.
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cdot (t - 3) + 4e^{3t} - e^{4t} \\ e^t \cdot (2 - t) + 4e^{3t} - 2e^{4t} \end{pmatrix}.$$

5. Експонента матриці

Приклад 5.1. Знайти експоненту матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Згідно з властивостями експоненти матриці, матрицю e^A можна знайти, побудувавши матрицант $X(t) = e^{At}$ – фундаментальну матрицю лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь $\dot{X} = AX$, для якої справджується початкова умова $X(0) = E$ (одинична матриця). Якщо відомий матрицант $X(t) = e^{At}$, то тоді експонента матриці A рівна $e^A = X(1)$.

Для знаходження матрицанта користуються співвідношеннями

$$H^{-1}AH = J, \quad (5.1)$$

$$X(t) \equiv e^{At} = H e^{Jt} H^{-1}, \quad (5.2)$$

де H – матриця, сформована з усіх власних і приєднаних векторів, що відповідають різним власним значенням матриці A (у випадку комплексно спряжених власних значень беруться дійсна і уявна частини комплексно спряжених власних векторів), J – канонічна жорданова форма матриці A , а e^{Jt} – експонента матриці Jt .

Для застосування формул (5.1), (5.2) спочатку знайдемо власні значення матриці A як корені характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) \equiv \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0.$$

Звідси $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$.

Щоб сформувати матрицю перетворення (5.1) H , знайдемо для одного з комплексно спряжених власних значень, наприклад, $\lambda_1 = 1 + 3i$, відповідний власний вектор

$\gamma = \text{col}(\gamma_1, \gamma_2) \neq \vec{0}$, елементи якого визначаються з рівності $(A - \lambda_1 E)\gamma = \vec{0}$, тобто

$$\begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Одним із нетривіальних розв'язків є, наприклад, $\gamma_1 = i$, $\gamma_2 = 1$. Отже, за власний вектор можна взяти $\gamma = \text{col}(i, 1)$. За стовпці матриці H візьмемо вектори $h_1 = \text{Re} \gamma = \text{col}(0, 1)$, $h_2 = \text{Im} \gamma = \text{col}(1, 0)$. Тоді

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H^{-1} = H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Згідно з правилами формування жорданових клітин парі комплексно спряжених власних значень $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$ відповідає один двовимірний жордановий блок

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Для перевірки правильності обчислень на цьому етапі скористаємося рівністю (5.2):

$$H^{-1}AH = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = J,$$

тобто рівність справді виконується.

Згідно з правилами запису експоненти матриці Jt за відомою жордановою формою (5.3) отримуємо:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t \cos 3t & e^t \sin 3t \\ -e^t \sin 3t & e^t \cos 3t \end{pmatrix}.$$

Тепер можемо знайти шуканий матрицант із рівності (5.2):

$$X(t) \equiv e^{At} = H e^{Jt} H^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t \cos 3t & e^t \sin 3t \\ -e^t \sin 3t & e^t \cos 3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos 3t & -e^t \sin 3t \\ e^t \sin 3t & e^t \cos 3t \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що для отриманої матриці очевидно справджується початкова умова $X(0) = E$, яка повинна виконуватися за означенням матрицанта.

Тоді експонента матриці A $e^A = X(1)$.

Відповідь. $e^A = e \cdot \begin{pmatrix} \cos 3 & -\sin 3 \\ \sin 3 & \cos 3 \end{pmatrix}.$

Приклад 5.2. Знайти експоненту матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Будемо шукати експоненту за алгоритмом, викладеним у Прикладі 5.1. Спочатку знайдемо власні значення матриці A як корені характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) \equiv \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)^3 = 0.$$

Звідси $\lambda_{1,2,3} = -1$.

Отже, власне значення $\lambda = -1$ є коренем кратності $m = 3$ характеристичного рівняння. Кратність цього власного значення, тобто кількість відповідних йому лінійно незалежних власних векторів, рівна $s = n - \text{rang}(A - \lambda E)$. У нашому випадку

$$s = 3 - \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

Отже, щоб сформувати матрицю перетворення (5.1) H , треба для власного значення $\lambda = -1$ визначити $s = 2$ лінійно незалежних власних векторів $h_1 = \text{col}(h_{11}, h_{12}, h_{13}) \neq \vec{0}$, $h_2 = \text{col}(h_{21}, h_{22}, h_{23}) \neq \vec{0}$ із рівностей $(A - \lambda E)h_1 = \vec{0}$, $(A - \lambda E)h_2 = \vec{0}$, а також $m - s = 3 - 2 = 1$ приєднаний до одного з них, наприклад, до h_2 , вектор $h_3 = \text{col}(h_{31}, h_{32}, h_{33})$ із рівності $(A - \lambda E)h_3 = h_2$. Маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Система рівнянь для елементів вектора h_3 має розв'язок, якщо $h_2 = \text{col}(k, k, 2k)$, де k – будь-яке дійсне число, не рівне нулю. Зауважимо, що за $k \neq 0$ вектор h_2 очевидно буде лінійно незалежним відносно вибраного вектора h_1 . Покладемо $k = 1$, тоді $h_2 = \text{col}(1, 1, 2)$, а за приєднаний вектор можна взяти $h_3 = \text{col}(1, 0, 0)$.

Тепер можемо сформувати матрицю H , стовпцями якої будуть знайдені вектори, і побудувати обернену до неї матрицю H^{-1} :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки власному значенню $\lambda = -1$ відповідають два лінійно незалежні власні вектори, то для кожного з них формується окрема жорданова клітина, причому вектору h_1 відповідатиме одновимірний блок $J_1(\lambda) = (-1)$, а вектору h_2 – двовимірний

блок $J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (одиниця у правому верхньому куті позначає приєднаний

вектор). Тому канонічна жорданова форма матриці A має вигляд

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Для перевірки правильності обчислень на цьому етапі скористаємося рівністю (5.2):

$$H^{-1}AH = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = J,$$

тобто рівність справді виконується.

Згідно з правилами запису експоненти матриці Jt за відомою жордановою формою (5.4) отримуємо:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Тепер можемо знайти шуканий матрицант із рівності (5.2):

$$\begin{aligned} X(t) \equiv e^{At} &= H e^{Jt} H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} & e^{-t}(t+1) \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ e^{-t} & 2e^{-t} & 2te^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} t+1 & t & -t \\ t & t+1 & -t \\ 2t & 2t & 1-2t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що для отриманої матриці очевидно справджується початкова умова $X(0) = E$, яка повинна виконуватися за означенням матрицанта.

Тоді експонента матриці A $e^A = X(1)$.

Відповідь. $e^A = e^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

Примітка. Необхідні теоретичні відомості по темах розділу:

Маринець К. В. Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи диференціальних рівнянь першого порядку. – Навчальний посібник з курсу «Диференціальні рівняння», частина II. – Ужгород: «Говерла», 2017. – С. 51-82.

Лекції до Модуля 3 – Системи диференціальних рівнянь.

Лекція до Модуля 3 – Експонента матриці та її властивості.