Курс: «Диференціальні рівняння» **ст. викл. Реґо В. Л.**
До Модуля 4
Цикл лекцій по темах розділу:

ТЕОРІЯ СТІЙКОСТІ

1. Основні поняття та означення

Динамічні явища і процеси, що відбуваються в природі, дуже часто призводять до математичних моделей у вигляді задач Коші для систем диференціальних рівнянь. У математичній моделі початковий стан динамічної системи описується початковими умовами. Із практичних міркувань доцільно домагатися, щоб малі відхилення в початковому стані не мали суттєвого впливу на динамічний процес, тобто щоб за перебігу цього процесу система залишалася стійкою. Найбільш широко застосовну на практиці математичну теорію стійкості динамічних систем, що описуються диференціальними рівняннями та їх системами, розробив наприкінці XIX сторіччя видатний російський математик і механік О. М. Ляпунов (1857-1918).

Розглянемо задачу Коші
$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_i(t_0) = x_{i,0}, \end{cases} \quad i = 1,2,\ldots,n,$$
тобто у векторній формі
$$\begin{cases} \dot{X} = f(t, X), \\ X(t_0) = X_0, \end{cases} \tag{1.1}$$
$f : B_{t_\infty X} \to \mathrm{R}^n$, де $B_{t_\infty X} = I_\infty \times D$, $I_\infty = [t_0, \infty)$, $D \subset \mathrm{R}^n$.

Теорема 1.1 (***про неперервну залежність розв'язку від початкових умов***).
Нехай для правої частини системи (1.1) в області $B_{t,X} = I_a \times D$, де

$I_a = [t_0 - a,\ t_0 + a]$, $D = \{X \in R^n : |x_i - x_{i,0}| \le b\}$ виконуються умови:

1) f неперервна, а отже, й обмежена: $|f_i(t, X)| \le M$, $i = \overline{1,n}$ ($M = const > 0$);

2) $\left|\dfrac{\partial f_i(t, X)}{\partial x_j}\right| \le K$, $i, j = \overline{1,n}$ ($K = const > 0$).

Тоді для «збуреної» задачі Коші
$$\dot{X} = f_i(t, X), \quad X(\tilde{t}_0) = \tilde{X}_0$$
існує єдиний розв'язок $X = X(t, \tilde{t}_0, \tilde{X}_0)$ на інтервалі $I_{\frac{\alpha}{2}-\omega} = \left[t_0 - \left(\frac{\alpha}{2} - \omega\right),\ t_0 + \left(\frac{\alpha}{2} - \omega\right)\right]$,

де $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $0 \le \omega < \frac{\alpha}{4}$. Цей розв'язок є неперервною функцією початкових даних $\tilde{t}_0$, $\tilde{X}_0$, якщо

$$|\tilde{t}_0 - t_0| \le \omega < \frac{\alpha}{4}, \quad |\tilde{x}_{i,0} - x_{i,0}| \le \frac{b}{2}.$$

Окрім того, $X = X(t, \tilde{t}_0, \tilde{X}_0)$ відносно змінної t є рівномірно неперервною функцією початкових даних $\tilde{t}_0$, $\tilde{X}_0$.

Із Теореми 1.1 випливає, що на певному скінченому інтервалі розв'язок задачі Коші (1.1) $X = X(t, t_0, X_0) = \varphi(t)$ мало змінюється за малого збурення в початкових умовах. Однак така властивість ще не означає стійкості цього розв'язку. Із практичних міркувань доцільно вимагати, щоб розв'язок мало змінювався і на нескінченно великому інтервалі. Зрозуміло, що дослідження стійкості розв'язку має практичний зміст лише тоді, коли цей розв'язок існує на інтервалі I_∞.

Означення 1 (***стійкість за Ляпуновим***). Розв'язок задачі Коші (1.1)

$$X = X(t, t_0, X_0) = \varphi(t)$$

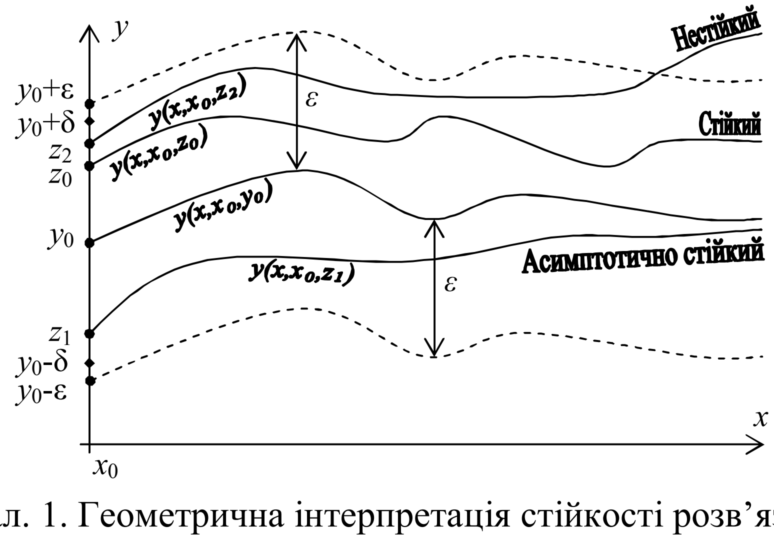
називається ***стійким за Ляпуновим***, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0 \;\; \left\| X_0 - \tilde{X}_0 \right\| < \delta(\varepsilon, t_0) \;\Rightarrow\; \left\| \varphi(t) - \tilde{\varphi}(t) \right\| < \varepsilon, \; \forall t \in I_\infty,$$

де $X = X(t, t_0, \tilde{X}_0) = \tilde{\varphi}(t)$ розв'язок системи (1.1) за початкових умов $X(t_0) = \tilde{X}_0$. Якщо при цьому $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ не залежить від t_0, тобто $\delta = \delta(\varepsilon)$, то розв'язок називається ***рівномірно стійким***.

Якщо розв'язок не є стійким, то його називають ***нестійким***.

Геометрична інтерпретація стійкості у випадку скалярного диференціального рівняння відносно функції $y(x)$ наведена на мал. 1.



Мал. 1. Геометрична інтерпретація стійкості розв'язків

Означення 2 (***асимптотична стійкість***). Розв'язок задачі Коші (1.1)

$$X = X(t, t_0, X_0) = \varphi(t)$$

називається ***асимптотично стійким***, якщо

1) він є стійким за Ляпуновим;

2) $\exists\delta_0 > 0 \ \left\|X_0 - \widetilde{X}_0\right\| < \delta_0 \ \Rightarrow \ \lim\limits_{t\to\infty}\left\|\varphi(t) - X(t,t_0,\widetilde{X}_0)\right\| = 0.$

Означення 3 (***поняття атрактивного розв'язку***). Розв'язок $X = X(t,t_0,X_0) = \varphi(t)$ називається ***атрактивним***, якщо

$$\forall t_0 \geq 0 \ \exists\delta(t_0) > 0 \ \left\|X_0 - \widetilde{X}_0\right\| < \delta(t_0) \ \Rightarrow \ \lim_{t\to\infty}\left\|\varphi(t) - X(t,t_0,\widetilde{X}_0)\right\| = 0.$$

Якщо при цьому $\delta(t_0)$ не залежить від t_0, то розв'язок називається ***рівномірно атрактивним***. Розв'язок називається ***глобально атрактивним***, якщо

$$\forall t_0 \geq 0 \ \forall\widetilde{X}_0 \in D \subset \mathrm{R}^n \ \lim_{t\to\infty}\left\|\varphi(t) - X(t,t_0,\widetilde{X}_0)\right\| = 0.$$

Зауваження. Дослідження стійкості нетривіального розв'язку задачі Коші (1.1) $X = X(t,t_0,X_0) = \varphi(t) \neq 0$ завжди можна за допомогою підстановки $Y = X - \varphi$ звести до дослідження стійкості тривіального розв'язку $Y(t,t_0,0) \equiv 0$ системи

$$\dot{Y} = F(t,Y),$$

де $F(t,Y) = f(t,Y + \varphi(t)) - f(t,\varphi(t)),\ F(t,0) = 0.$

Тому в нелінійному випадку достатньо проводити дослідження стійкості нульового розв'язку $X = X(t,0,0) = \varphi(t) \equiv 0$ задачі

$$\begin{aligned} &\dot{X} = f(t,X), \quad f(t,0) = 0, \quad \forall t \in \mathrm{R}^+, \\ &X(0) = 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

2. Стійкість розв'язків лінійних систем

Розглянемо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\dot{X} = A(t)X. \tag{2.1}$$

Дослідимо на стійкість розв'язки системи (2.1) $X(t,0,0) = \varphi(t) \equiv 0$ (тривіальний розв'язок) та $X(t,t_0,X_0) = \varphi(t)$. Зауважимо, що права частина системи (2.1) задовольняє умову $f(t,0) = 0$, що вимагається в рівнянні (1.2).

Позначимо через $\Phi = \Phi(t)$ фундаментальну матрицю системи (2.1), нормовану в точці $t = t_0$, для якої виконується рівність $\Phi(t_0) = E$ (одинична матриця).

Теорема 2.1 (***необхідні й достатні умови стійкості***). Усякий розв'язок $X(t,t_0,X_0)$ лінійної однорідної системи (2.1) за початкових умов $X(t_0) = X_0$ тоді й тільки тоді

1) ***стійкий***, якщо фундаментальна матриця $\Phi(t)$ $[\Phi(t_0) = E]$ є обмеженою на інтервалі $I_\infty = [t_0,\infty)$, тобто $\left\|\Phi(t)\right\| \leq M$, $t \geq t_0$;

2) ***асимптотично стійкий***, якщо $\lim\limits_{t\to\infty}\Phi(t) = 0$ (нульова матриця);

3) ***нестійкий***, якщо $\Phi(t)$ не обмежена зверху.

Зауваження. Зважаючи на те, що в Теоремі 2.1 говориться про будь-який розв'язок $X(t,t_0,X_0)$, можна стверджувати, що розв'язки лінійної однорідної системи всі одночасно є стійкими, асимптотично стійкими чи нестійкими. На підставі цього лінійну однорідну систему (2.1) загалом називають стійкою, асимптотично стійкою чи нестійкою. У випадку нелінійної системи це не має місця, оскільки може трапитися, що одні розв'язки є стійкими, а інші – нестійкими.

Теорема 2.2 (***стійкість лінійної неоднорідної системи***). Система

$$\dot{X} = A(t)X + f(t)$$

за будь-якого неперервного на інтервалі $[t_0,+\infty)$ вільного члена f стійка тоді й тільки тоді, коли є стійкою відповідна однорідна система (2.1).

3. Стійкість лінійних систем зі сталими коефіцієнтами. Критерії асимптотичної стійкості

Теорема 3.1 (***необхідні й достатні умови стійкості лінійної системи зі сталими коефіцієнтами***). Усякий розв'язок $X(t,t_0,X_0)$ лінійної однорідної системи зі сталими коефіцієнтами n-го порядку

$$\dot{X} = AX \tag{3.1}$$

тоді й тільки тоді

1) стійкий, якщо всі власні значення $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ матриці A мають недодатні дійсні частини, і всі корені характеристичного рівняння кратності m_j із нульовою дійсною частиною ($\mathrm{Re}\lambda_j = 0$) є власними значеннями тієї ж кратності, тобто для них виконується рівність $n - rang(A-\lambda_j E) = m_j$;

2) асимптотично стійкий, коли дійсні частини всіх власних значень матриці A є від'ємними;

3) нестійкий, якщо хоча б одне з власних значень λ_j має додатну дійсну частину, або коли хоча б один корінь характеристичного рівняння кратності m_j із нульовою дійсною частиною ($\mathrm{Re}\lambda_j = 0$) є власним значенням меншої кратності, тобто $n - rang(A-\lambda_j E) < m_j$.

На підставі Теореми 3.1 стійкість системи (3.1) визначається коренями характеристичного рівняння $\det(A-\lambda E) = 0$, яке має вигляд

$$p_n(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{3.2}$$

Від'ємність дійсних частин коренів цього рівняння у випадку дійсних коефіцієнтів можна встановити без їх вирахування із застосуванням відповідних критеріїв. Необхідною умовою у всіх наведених нижче критеріях є додатність усіх коефіцієнтів полінома $p_n(\lambda)$: $a_i > 0$, $i = \overline{0,n}$. Зауважимо, що у випадку $n \le 2$ ця умова є також і достатньою.

Теорема 3.2 (***критерій Рауса-Гурвіца від'ємності дійсних частин полінома*** **n**-***го степеня***). Для того, щоб усі корені полінома n-го степеня

$$p_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

з додатними коефіцієнтами мали від'ємні дійсні частини, необхідно і досить, щоб були додатними всі головні діагональні мінори матриці Гурвіца

$$H[p_n(\lambda)] = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_n \end{pmatrix}, \qquad (3.2)$$

де $a_j = 0$, якщо $j > n$, тобто виконувалися нерівності

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = a_1a_2 - a_3a_0 > 0; \quad \ldots \quad \Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot a_n > 0.$$

Теорема 3.3 (***критерій Льєнара-Шипара від'ємності дійсних частин полінома*** **n**-***го степеня***). Для того, щоб усі корені полінома n-го степеня $p_n(\lambda)$ з додатними коефіцієнтами мали від'ємні дійсні частини, необхідно і досить, щоб для головних діагональних мінорів матриці (3.2) виконувалися нерівності

$$\Delta_n > 0; \quad \Delta_{n-3} > 0; \quad \Delta_{n-5} > 0, \quad \ldots$$

Умови Льєнара-Шипара рівносильні умовам Рауса-Гурвіца, але зручніші, тому що містять менше детермінантів.

Теорема 3.4 (***критерій Михайлова від'ємності дійсних частин полінома*** **n**-***го степеня***). Для того, щоб усі корені полінома n-го степеня $p_n(\lambda)$ з додатними коефіцієнтами мали від'ємні дійсні частини, необхідно і досить, щоб на комплексній площині точка $p(i\omega)$ за зміни ω від 0 до $+\infty$ не проходила через початок координат і зробила поворот навколо нього на кут $n\pi/2$ в додатному напрямі.

Інше (еквівалентне) формулювання критерію Михайлова: необхідно і досить, щоб $a_na_{n-1} > 0$ і щоб усі корені многочленів

$$q(\xi) = a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - \ldots, \quad r(\eta) = a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-2}\eta^2 - \ldots$$

були додатними, різними і чергувалися, починаючи з кореня ξ_1, тобто

$$0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \ldots$$

Принагідно зауважимо, що при $\lambda = i\omega$ $p(\lambda) = q(\omega^2) + i\omega r(\omega^2)$.

Зауваження. Якщо в Теоремах 3.2-3.4 $p_n(\lambda)$ – характеристичний поліном матриці A із (3.2), то ці твердження можна розглядати як критерії асимптотичної стійкості системи (3.1) зі сталими коефіцієнтами.

4. Стійкість за першим наближенням

Повернемося до дослідження стійкості тривіального розв'язку $X = X(t,0,0) \equiv 0$ нелінійної задачі (1.1). Припустимо, що вільний член рівняння подається у вигляді

$$f(t,X) = BX + \Psi(t,X) \tag{4.1}$$

де $B \in \mathrm{R}^{n\times n}$ стала матриця, $\Psi : \mathrm{R}^{+} \times D \to \mathrm{R}^{n}$, $D \subset \mathrm{R}^{n}$ неперервна функція, і для залишкового члена справджується рівність

$$\lim_{\|X\|\to 0} \frac{\|\Psi(t,X)\|}{\|X\|} = 0. \tag{4.2}$$

Зауважимо: якщо для $\Psi(t,X)$ справджуються умови $\Psi(t,0) = 0$ і $\dfrac{\partial \Psi(t,0)}{\partial x_i} = 0$, $i = \overline{1,n}$, то (4.2) завжди виконується. Вигляд (4.1) для функції $f(t,X)$ можна отримати, наприклад, за формулами Тейлора в околі вектора $X = 0$.

Означення 4 (***перше наближення для нелінійної системи***). Першим наближенням для нелінійної системи

$$\dot{X} = f(t,X) = BX + \Psi(t,X) \tag{4.3}$$

є лінійна система диференціальних рівнянь

$$\dot{X} = BX\,. \tag{4.4}$$

За виконання певних умов поведінка розв'язків систем (4.3) і (4.4) в околі вектора $X = 0$ є подібною.

Теорема 4.1 (***Теорема Ляпунова про стійкість за першим наближенням***). Якщо всі власні значення матриці *B* мають від'ємні дійсні частини, то за виконання (4.2) нульовий розв'язок $X = 0$ системи (4.3) асимптотично стійкий. Якщо хоча б одне власне значення має додатну дійсну частину, то за виконання (4.2) нульовий розв'язок системи (4.3) є нестійким.

Зауваження. Якщо дійсна частина хоча б одного власного значення матриці *B*, що фігурує в нелінійній системі (4.3), рівна нулеві, а інші від'ємні, то нульовий розв'язок системи (4.3) може бути як стійким, так і нестійким, тобто перше наближення не вирішує стійкості нелінійної системи.

Проілюструємо алгоритм дослідження стійкості нульового розв'язку за першим наближенням на прикладі нелінійної системи третього порядку

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-3z} = P(x,y,z), \\ \dot{y} = 4z - 3\sin(x+y) = Q(x,y,z), \\ \dot{z} = \ln(1+z-3x) = R(x,y,z). \end{cases} \tag{4.5}$$

Побудуємо систему першого наближення (4.4). Розклад (4.1) для вільних членів можна отримати за формулами Тейлора. Маємо:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\mathrm{e}^{x},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=3\mathrm{e}^{-3x};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-3\cos(x+y),\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=-3\cos(x+y),\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=4;$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=-\frac{3}{1+z-3x},\quad \frac{\partial R}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{1}{1+z-3x}.$$

Тоді в околі нульового розв’язку отримаємо систему (4.3) у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x}=\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{(x,y,z)=(0,0,0)}\cdot x+\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{(x,y,z)=(0,0,0)}\cdot y+\left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{(x,y,z)=(0,0,0)}\cdot z+\psi_1(x,y,z), \\ \dot{y}=\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(x,y,z)=(0,0,0)}\cdot x+\left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{(x,y,z)=(0,0,0)}\cdot y+\left.\frac{\partial Q}{\partial z}\right|_{(x,y,z)=(0,0,0)}\cdot z+\psi_2(x,y,z), \\ \dot{z}=\left.\frac{\partial R}{\partial x}\right|_{(x,y,z)=(0,0,0)}\cdot x+\left.\frac{\partial R}{\partial y}\right|_{(x,y,z)=(0,0,0)}\cdot y+\left.\frac{\partial R}{\partial z}\right|_{(x,y,z)=(0,0,0)}\cdot z+\psi_3(x,y,z), \end{cases}$$

Вирахувавши коефіцієнти, запишемо систему першого наближення (4.4):

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -3 & -3 & 4\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -3 & -3 & 4\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Власні значення матриці B рівні $\lambda_1=-3$, $\lambda_{2,3}=1\pm 3i$. Комплексні власні значення мають додатні дійсні частини, отже, за Теоремою 4.1 нульовий розв’язок системи (4.5) є нестійким.

5. Метод функцій Ляпунова

Досі для дослідження стійкості ми використовували розв’язки систем диференціальних рівнянь. Сукупність таких методів прийнято називати першим методом Ляпунова. Натомість другий (прямий) метод Ляпунова не вимагає відшукання розв’язків для дослідження на стійкість, зате використовує властивості побудованої певним чином скалярної функції багатьох змінних.

Означення 5 (***поняття знаковизначеної функції***). Розглянемо скалярну функцію $V:\ \mathrm{R}_0^+\times D\to\mathrm{R}$, де $D\subset\mathrm{R}^n$ відкрита, зв’язна область, $0\in D$ і V неперервно диференційовна, $V\in C^1$, а також $V(t,0)=0$ для довільного $t\in\mathrm{R}_0^+=(0,+\infty)$.

Функцію V назвемо ***додатно*** (***від’ємно***) ***напіввизначеною***, якщо $V(t,X)\geq 0$ (≤ 0) для $\forall(t,X)\in\mathrm{R}_0^+\times D$.

Функцію V назвемо ***додатно*** (***від’ємно***) ***визначеною***, якщо можна знайти таку функцію $W:D\to\mathrm{R}$, $W\in C$, що для $\forall(t,X)\in\mathrm{R}_0^+\times D$, $X\neq 0$ $V(t,X)\geq W(X)>0$

$[V(t,X) \le -W(X) < 0]$ і $V(t,0) = W(0) = 0$, а також $W(X) = 0$ і $V(t,X) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $X = 0$.
Наприклад: функція $V(t,X) = (-2 + \sin t)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ – від'ємно визначена в області $t \in \mathrm{R}_0^+$, $X \in D \subset \mathrm{R}^3$ $(0 \in D)$, для неї $W(X) = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$; функція $V(t,X) = x_1^2 x_2^2 x_3^2$ – додатно напіввизначена в просторі R^3; функція $V(t,X) = \sin t \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ – знакозмінна (не належить до знаковизначених).
З означення 5 випливає, що для будь-якого фіксованого $t \ge t_0 > 0$ у точці $X = 0$ додатно визначена функція V має абсолютний мінімум, тоді як від'ємно визначена функція V має абсолютний максимум.

Означення 6 (***похідна скалярної функції за системою диференціальних рівнянь***). Похідною неперервно-диференційовної скалярної функції V: $\mathrm{R}_0^+ \times D \to \mathrm{R}$ за системою диференціальних рівнянь (1.2) будемо називати наступну функцію:

$$V'_{(1.2)}(t,X) := \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(t,X),$$

де $f_j(t,X)$, $j = \overline{1,n}$ – компоненти вектор-функції $f(t,X)$.

Означення 7 (***поняття функції Ляпунова***). Неперервно-диференційовну функцію V: $\mathrm{R}_0^+ \times D \to \mathrm{R}$ назвемо ***функцією Ляпунова*** системи (1.2), якщо V додатно (від'ємно) визначена, а її похідна за згаданою системою $V'_{(1.2)}(t,X)$ від'ємно (додатно) напіввизначена.
Із означення 7 можна витлумачити, що V і $V'_{(1.2)}$ – функції, протилежні за знаковизначеністю та відповідно напіввизначеністю.

Відомі наступні критерії стійкості.

Теорема 5.1 (***перша теорема Ляпунова про стійкість***). Якщо для нелінійної системи (1.2) існує функція Ляпунова, то її нульовий розв'язок $X = 0$ стійкий.

Теорема 5.2 (***друга теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість***). Якщо для системи (1.2) існує додатно (від'ємно) визначена функція Ляпунова, причому така, що при $X \to 0$ рівномірно прямує до нуля за змінною *t*, тобто $\lim\limits_{X \to 0} V(t,X) = 0$, а її похідна за системою (1.2) від'ємно (додатно) визначена, тоді нульовий розв'язок $X = 0$ системи (1.2) асимптотично стійкий.

Теорема 5.3 (***третя теорема Ляпунова про нестійкість***). Якщо для системи (1.2) можна побудувати таку векторно-скалярну функцію $V(t,X)$ похідна якої за заданою системою $V'_{(1.2)}$ додатно (від'ємно) визначена, однак функція $V(t,X)$

не є напіввизначеною з протилежним знаком, тоді нульовий розв'язок $X = 0$ згаданої системи нестійкий.

Теорема 5.4 (***Четаєва***). Нехай система (4.3) має нульовий розв'язок, і в деякій області $D \subset \mathrm{R}^n$ існує диференційовна функція $V(x_1,...,x_n)$ така, що

1) точка $X = 0$ належить границі області D;

2) $V = 0$ на границі області D при $\|X\| < \varepsilon_0$;

3) при $t > t_0$ в області D маємо: $V > 0$, $V'_{(4.3)}(X) \geq W(X) > 0$, де $W(X)$ неперервна функція.

Тоді нульовий розв'язок системи (4.3) нестійкий.

Проілюструємо застосування наведених критеріїв на прикладі нелінійної системи з параметром $\alpha = const$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2^3 + \alpha x_1^5, \\ \dot{x}_2 = x_1^3 + \alpha x_2^5. \end{cases} \tag{5.1}$$

Введемо функцію Ляпунова у вигляді $V(t, x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$. Очевидно, що ця функція додатно визначена. Її похідна за системою (5.1) рівна

$$V'_{(5.1)}(t, x_1, x_2) = 4x_1^3(-x_2^3 + \alpha x_1^5) + 4x_2^3(x_1^3 + \alpha x_2^5) = 4\alpha(x_1^8 + x_2^8). \tag{5.2}$$

Легко бачити, що функція (5.2) від'ємно визначена, коли $\alpha < 0$. Тоді за Теоремою 5.2 положення рівноваги $X = 0$ системи (5.1) асимптотично стійке.
Якщо $\alpha = 0$, то можемо вважати $V'_{(5.1)}(t, x_1, x_2)$ від'ємно напіввизначеною, а тоді за Теоремою 5.1 нульовий розв'язок системи (5.1) стійкий.
Якщо $\alpha > 0$, тоді $V'_{(5.1)}(t, x_1, x_2)$ додатно визначена, тож у цьому випадку за Теоремою 5.3 положення рівноваги $X = 0$ системи (5.1) нестійке.

6. Автономні системи диференціальних рівнянь

Одним із важливих частинних випадків нормальної системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, ..., x_n), \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases} \tag{6.1}$$

є так звана ***автономна*** (яку також називають ***динамічною***) система, у якій функції в правій частині рівнянь не залежать явно від змінної *t*:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, ..., x_n), \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

або у векторному вигляді

$$\dot{X} = f(X), \quad X \in \Omega \subset \mathrm{R}^n. \tag{6.2}$$

Зауважимо, що неавтономну систему (6.1) підвищенням її порядку на одиницю шляхом введення нової змінної $x_{n+1} = t$ завжди можна звести до автономної системи вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_{n+1}, x_1, ..., x_n), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_{n+1}, x_1, ..., x_n), \\ \dot{x}_{n+1} = 1. \end{cases}$$

Припустимо, що в замкнутій, обмеженій області $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ функція $f(X)$ задовольняє умову Ліпшиця. Відповідну до системи (6.1) область Ω називають ***«фазовим простором»*** системи.
Нехай функція

$$X = U(t), \quad I_t \subset \mathrm{R} \tag{6.3}$$

є розв'язком системи (6.2) на інтервалі I_t. Зрозуміло, що функція (6.3) – графік якої називають інтегральною кривою – визначає у фазовому просторі Ω деяку *t*-параметричну криву для довільного $t \in I_t$:

$$\{U(t)\} \in \Omega,$$

яку називають ***траєкторією*** (***фазовою кривою***) автономної системи. Отже, функція розв'язку (6.3) (інтегральна крива) належить необмеженому циліндру

$$G = \{(X,t) \big| X \in \Omega, \ t \in \mathrm{R}\}.$$

Таким чином, інтегральна крива належить прямому добутку осі *t* та фазового простору, тож фазова крива (траєкторія) є нічим іншим, як паралельною до осі *t* проекцією інтегральної кривої (6.3) на фазову площину. Подібним чином можна інтерпретувати фазовий простір і траєкторії неавтономної системи (6.1).

Наведемо деякі властивості, характерні тільки для автономних систем.

Лема 6.1 (***властивість зсуву розв'язку***). Якщо $X = U(t)$, $t \in I_t \subset \mathrm{R}$ розв'язок системи (6.2), то $X = V(t) = U(t+c)$, $t \in I_t \subset \mathrm{R}$ також буде розв'язком для будь-якого значення $c \in \mathrm{R}$.

Лема 6.2 (***властивість перетину траєкторій***). Якщо дві траєкторії автономної системи (6.2) $X = U(t)$, $t \in I_1 \subset \mathrm{R}$ і $X = V(t)$, $t \in I_2 \subset \mathrm{R}$ проходять через спільну точку $X^0 = U(t_1) = V(t_2)$ відповідно до значень аргументу t_1 і t_2, то справджується наступна рівність:

$$V(t) = U(t + t_1 - t_2) \tag{6.4}$$

при всіх *t*, для яких є визначеними ліва і права частини (6.4).

Із цієї леми можна зробити висновок, що дві траєкторії автономної системи (6.2) або не перетинаються, або співпадають, тобто єдиність справедлива і для траєкторій також. Зауважимо, що у випадку загальної неавтономної системи (6.1) через будь-яку точку $(n+1)$-вимірного простору (t, X) проходить одна і тільки одна інтегральна крива. Однак при цьому траєкторії неавтономної системи в n-вимірному фазовому просторі можуть перетинатися. Проілюструємо алгоритм відшукання траєкторій на прикладі задачі Коші для неавтономної системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2t, \\ \dot{x}_2 = 1 \end{cases} \tag{6.5}$$

із початковими умовами

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}. \tag{6.6}$$

Загальний розв'язок системи (6.5)

$$x_{1з.}(t) = t^2 + C_1, \quad x_{2з.}(x) = t + C_2.$$

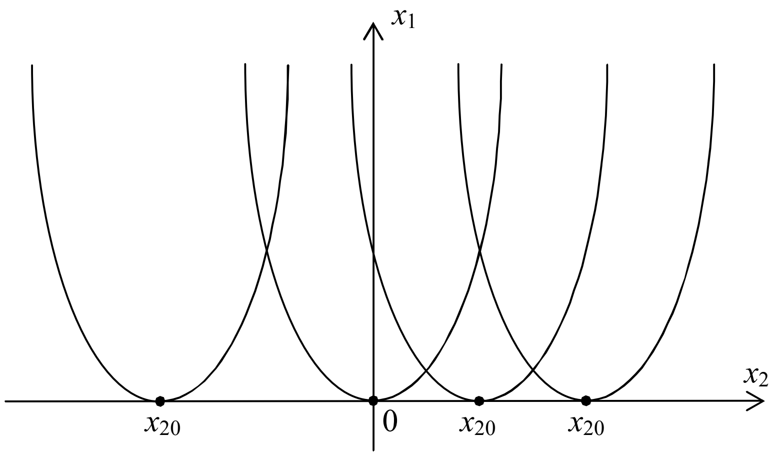
Звідси розв'язок, що відповідає початковим умовам (6.6):

$$x_1(t, x_{10}, x_{20}) = t^2 + x_{10}, \quad x_2(t, x_{10}, x_{20}) = t + x_{20}.$$

Виключивши з останніх рівностей параметр t, отримаємо рівняння траєкторій:

$$x_1(t, 0, x_{10}, x_{20}) = [x_2(t, 0, x_{10}, x_{20}) - x_{20}]^2 + x_{10}.$$

Наприклад, у випадку $x_{10} = 0$ рівняння траєкторій дає сім'ю парабол, зображених на мал. 2.



Мал. 2. Траєкторії системи (6.5)

Означення 8 (***положення рівноваги автономної системи***). ***Положенням рівноваги***, або ***стаціонарною точкою***, автономної системи диференціальних рівнянь (6.2) називається будь-який її сталий розв'язок $X = U(t) = X^* \in \Omega$.

За означенням 8 очевидно, що $X^* \in \Omega$ буде положенням рівноваги автономної системи (6.2) тоді й тільки тоді, коли

$$f(X^*) = 0. \tag{6.7}$$

Таким чином, положення рівноваги автономної системи (6.2) визначаються як розв'язки системи алгебраїчних (чи трансцендентних) рівнянь (6.7).

Означення 9 (***поняття циклу***). Нехай $X = U(t)$, $t \in \mathrm{R}$ – T-періодичний розв'язок автономної системи (6.1) [$U(t) = U(t+T)$, $t \in \mathrm{R}$]. Відповідну періодичному розв’язку замкнену траєкторію в фазовому просторі називають ***циклом***.

Теорема 6.1 (***типи траєкторій автономної системи диференціальних рівнянь***). Для автономної системи диференціальних рівнянь (6.1) можуть існувати траєкторії тільки трьох типів:
1) траєкторії, що відповідають положенням рівноваги;
2) замкнуті траєкторії (цикли), що відповідають періодичним розв’язкам;
3) траєкторії без самоперетинів.

7. Класифікація положень рівноваги динамічних систем

Розглянемо лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь (ЛОСДР) зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases}$$

або у векторному вигляді

$$\dot{X} = AX. \tag{7.1}$$

Побудуємо фазові траєкторії системи (7.1). Для цього потрібно вирізнити кілька випадків, оскільки «фазовий портрет» суттєво залежить від власних значень матриці системи (7.1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

Очевидно, що тривіальний (нульовий) розв’язок $X(t) = \mathrm{col}(0,0) = U(t) = 0$, $\forall t \in I_t$ завжди буде положенням рівноваги для системи (7.1), причому ця стаціонарна точка буде єдиною тоді й тільки тоді, коли матриця (7.2) є невиродженою, тобто $\det A \neq 0$. Зауважимо, що систему (7.2) можна подати у вигляді звичайного диференціального рівняння

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}, \tag{7.3}$$

Розв’язки рівняння (7.3) на фазовій площині $x_1, x_2 \in \mathrm{R}^2$ безпосередньо визначають траєкторії системи (7.1). Оскільки в точці $X = \mathrm{col}(0,0)$ (7.3) є невизначеним, тому жодна з траєкторій автономної ЛОСДР (7.1) не проходить через початок координат.
Положення рівноваги системи (7.1) класифікуються залежно від власних значень матриці (7.1), а також визначника цієї матриці.

Випадок невиродженої матриці ($\det A \neq 0$).

1. Дійсні різні власні значення ($\lambda_{1,2} \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Без обмеження загальності надалі будемо припускати, що $|\lambda_2| > |\lambda_1|$.

Згідно з формулами методу Ейлера загальний розв'язок системи (7.1) можна записати у вигляді

$$X_{з.}(t) = c_1 h_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 h_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathrm{R}, \tag{7.4}$$

де h_1, h_2 дійсні власні вектори, що відповідають власним значенням λ_1, λ_2. (h_1, h_2 утворюють загалом не ортогональний базис в R^2).
Лінійне перетворення

$$X = s_1(t) h_1 + s_2(t) h_2$$

вірніше лінійний дифеоморфізм

$$H : \{(s_1, s_2) \in \mathrm{R}^2 \to X \in \mathrm{R}^2,\ \mathrm{col}(s_1, s_2) \to X = s_1(t) h_1 + s_2(t) h_2\}$$

розкладає автономну ЛОСДР на два взаємно незалежні рівняння

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = \lambda_1 s_1, \\ \dot{s}_2 = \lambda_2 s_2. \end{cases} \tag{7.5}$$

Загальний розв'язок системи (7.5)

$$s_{1з.}(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \quad s_{2з.}(t) = c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}.$$

Отже, на підставі (7.4) координати загального розв'язку (s_1, s_2) в системі координат із базисом, утвореним векторами h_1, h_2, будуть наступними:

$$s_1(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \quad s_2(t) = c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \tag{7.6}$$

що дає водночас *t*-параметричне рівняння фазових траєкторій. Виключивши з (7.6) параметр *t*, отримаємо рівняння так званих «узагальнених парабол»

$$s_2 = k s_1^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}, \quad k = c_2 \cdot c_1^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \tag{7.7}$$

Після цього можемо детально описати фазову картину для ЛОСДР (7.1) залежно від знаків власних значень λ_1, λ_2.

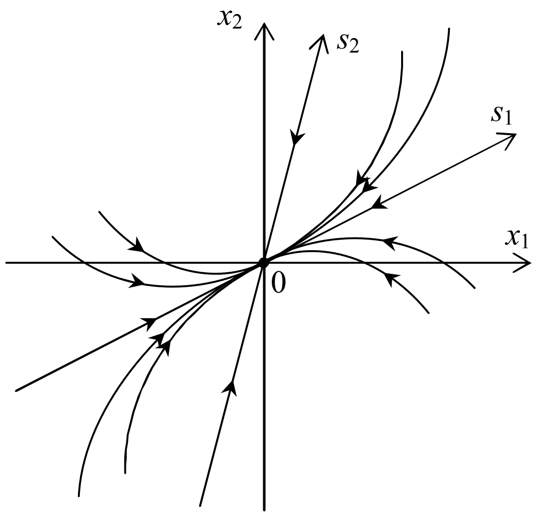
Стійкий вузол ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$). Якщо λ_1, λ_2 від'ємні і $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, то початок координат є ***стійким вузлом*** системи (7.1).
Зауважимо, що у випадку $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ із (7.6) та (7.4) отримаємо положення рівноваги $X = (0{,}0)$, тоді як значенням $c_2 = 0$, $c_1 \neq 0$ та $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ відповідають осі s_1 та s_2. Із (7.6) також очевидно, що

$$\lim_{t \to \infty} s_1(t) = \lim_{t \to \infty} s_2(t) = 0.$$

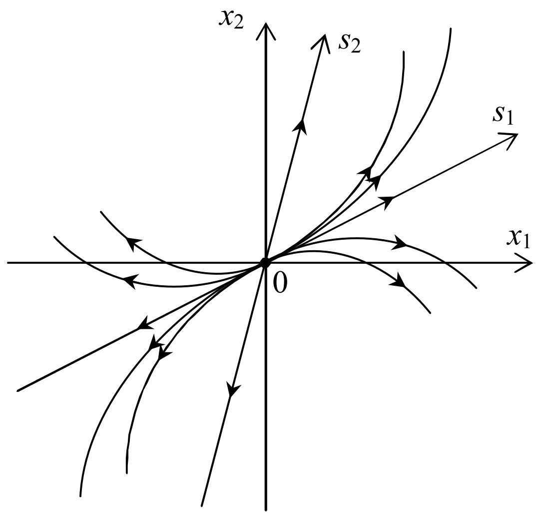
У цьому випадку початок координат є так званим стійким вузлом. За цього типу положення рівноваги рухома точка уздовж будь-якої траєкторії асимптотично наближається до початку координат. У цій точці траєкторії дотикаються до осі абсцис s_1 [тієї осі, яка в (7.6) відповідає меншому за абсолютною величиною власному значенню], оскільки з (7.6) і (7.7)

$$\lim_{t \to \infty} \frac{ds_2}{ds_1} = k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \lim_{t \to \infty} s_1^{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1\right)}(t) = 0.$$

Загалом у випадку $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ і $|\lambda_2| > |\lambda_1|$ сукупність фазових траєкторій ЛОСДР (7.1) являє собою сім'ю кривих типу парабол, до яких додаються ще п'ять особливих траєкторій, а саме – одне положення рівноваги і чотири координатні півосі s_1, s_2 (див. мал. 3). Рух уздовж будь-якої траєкторії відбувається з наближенням до початку координат (на малюнку показано стрілками).



Мал. 3. Стійкий вузол



Мал. 4. Нестійкий вузол

Нестійкий вузол ($\lambda_2 > \lambda_1 > 0$). Оскільки в цьому випадку на підставі (7.6)

$$\lim_{t\to\infty}|s_1(t)| = \lim_{x\to\infty}|s_2(t)| = \infty,$$

то положення рівноваги ЛОСДР (7.1) $X = 0$ називають ***нестійким вузлом***. Сукупність фазових траєкторій та їх розміщення в системі координат s_1, s_2 аналогічні до зображених на мал. 3, тільки напрям руху вздовж траєкторій змінюється на протилежний (див. мал. 4).

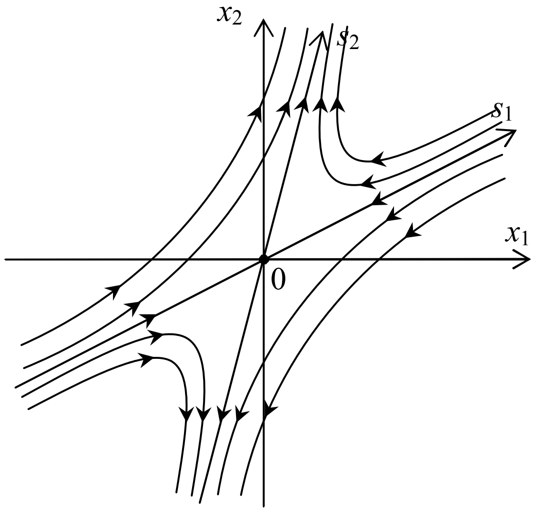
Нестійке сідло ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$). Якщо $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, то із (7.7) отримуємо наступне рівняння траєкторій:

$$s_2 = k s_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = k s_1^{-q}, \quad q = \frac{\lambda_2}{|\lambda_1|},$$

тобто сім'ю так званих «узагальнених гіпербол». Із (7.6) очевидно, що

$$\lim_{t\to\infty} s_1(t) = \lim_{t\to\infty} c_1 \,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} = 0, \quad \lim_{t\to\infty}|s_2(t)| = \lim_{x\to\infty}\left|c_2 \,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\right| = \infty. \qquad (7.8)$$

Таким чином, згідно з (7.8) рух по осі s_1 напрямлений до початку координат, тоді як уздовж осі s_2 – від нього. Такий «портрет» фазових траєкторій називають ***сідлом***, а сам початок координат (положення рівноваги) – ***сідловою точкою***. У випадку сідла уздовж будь-якої траєкторії рухома точка наближається до початку координат поблизу осі s_1 і віддаляється поблизу осі s_2, тобто маємо сім'ю кривих типу гіпербол. Крім того, існують ще п'ять траєкторій інших типів: положення рівноваги (0,0) і координатні півосі s_1, s_2, які водночас є асимптотами сім'ї гіпербол (див. мал. 5). Ці асимптоти зазвичай називають також сепаратрисами. Зауважимо, що сідлова точка завжди нестійка, оскільки у випадку цього типу одне з власних значень завжди додатне.



Мал. 6.5. Сідло (завжди нестійке)

2. Випадок комплексних власних значень. Центр, фокус ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$).

Нехай власні значення матриці (7.2) комплексні, тобто

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

а

$$h_1 = \operatorname{Re} h_1 + i \operatorname{Im} h_1 = u_1 + i v_1 \tag{7.9}$$

відповідний власному значенню λ_1 комплексний власний вектор. Тоді згідно з алгоритмом методу Ейлера

$$\begin{aligned} X_{з.}(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = [c_1\, \mathrm{e}^{\alpha t} \cos\beta t + c_2\, \mathrm{e}^{\alpha t} \sin\beta t] \cdot u_1 + \\ + [-c_1\, \mathrm{e}^{\alpha t} \sin\beta t + c_2\, \mathrm{e}^{\alpha t} \cos\beta t] \cdot v_1. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Оскільки у (7.9) вектори u_1, v_1 лінійно незалежні, то в утвореній ними як базисом косокутній системі координат із (7.10) одержимо наступні координати загального розв'язку s_1, s_2:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= c_1\, \mathrm{e}^{\alpha t} \cos\beta t + c_2\, \mathrm{e}^{\alpha t} \sin\beta t, \\ s_2(t) &= -c_1\, \mathrm{e}^{\alpha t} \sin\beta t + c_2\, \mathrm{e}^{\alpha t} \cos\beta t. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Рівності (7.11) водночас задають t-параметричне рівняння фазових траєкторій. Ввівши підстановки

$$c_1 = d\cos\varphi, \quad c_2 = d\sin\varphi, \quad |d| \ge 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

і скориставшись позначенням полярної координати

$$\rho = |d|\mathrm{e}^{\alpha t},$$

одержимо, що рівності (7.11) у «косокутній» полярній системі координат (ρ, t) відповідають кривій, що задається рівнянням

$$\rho(t) = |d| e^{\alpha t}. \qquad (7.12)$$

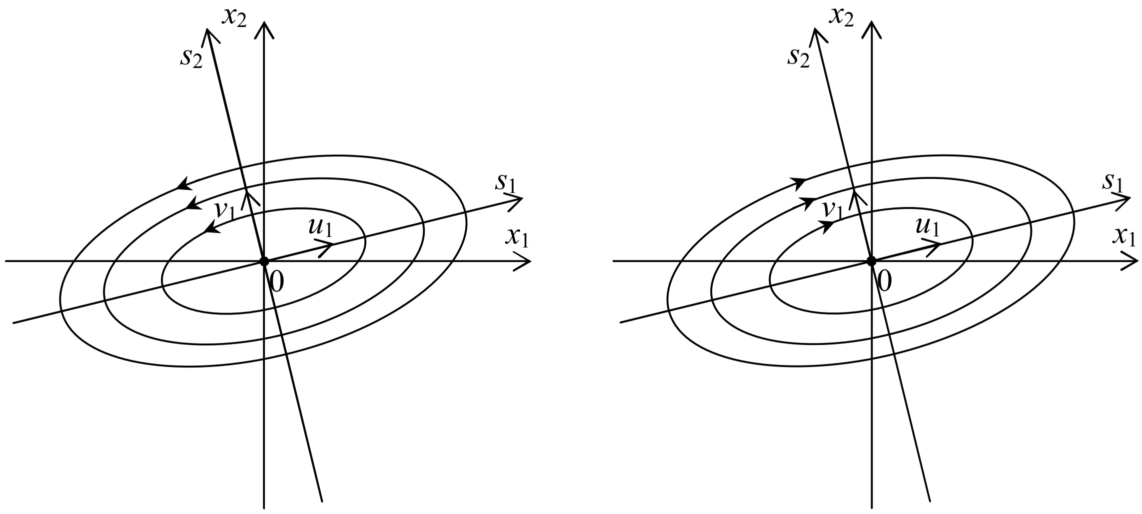
Звідси випливає:

1) якщо $\alpha \neq 0$ і $d \neq 0$, тоді (7.12) задає рівняння логарифмічної спіралі;

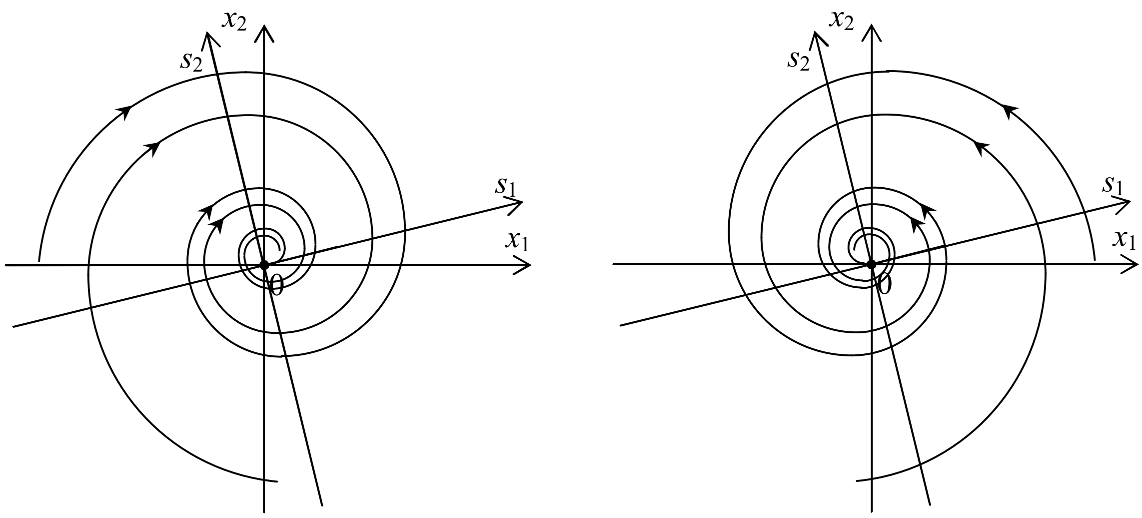
2) якщо $\alpha = 0$ і $|d| > 0$, тоді (7.12) відповідає рівнянню еліпса $\rho(x) = |d|$ (оскільки система координат косокутна: див. малюнки 6 та 7, що відрізняються лише напрямом обходу інтегральних кривих);

3) у випадку $\alpha = 0$, $d = 0$ отримуємо початок координат – стаціонарну точку.

В останніх двох випадках (коли дійсна частина власних значень рівна нулеві, тобто характеристичне рівняння має чисто уявні корені) початок координат є стійким, але не асимптотично стійким, положенням рівноваги, який називають ***центром***. У випадку центра замкнутим траєкторіям у вигляді еліпсів на фазовій площині відповідають періодичні інтегральні криві.



Мал. 6, 7. Центр (стійкий, але не асимптотично)



Мал. 8, 9. Асимптотичний фокус

Якщо $\alpha < 0$, $d \neq 0$, тоді з (7.12)

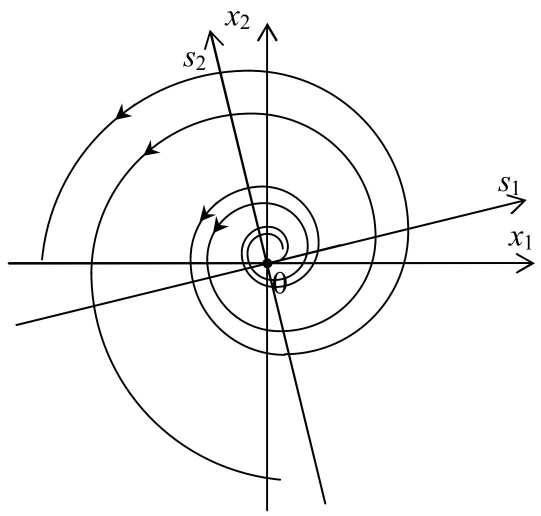
$$\lim_{t\to\infty}|d|\,e^{\alpha t}=0,$$

тобто з ростом t точка, що рухається на фазовій площині, наближається до початку координат, описуючи логарифмічну спіраль. У такому випадку положення рівноваги називають ***асимптотичним фокусом*** (див. мал. 8, 9). Напрям руху по спіралі залежить від фазової швидкості AX.

Якщо $\alpha>0$, $d\neq 0$, тоді з (7.12)

$$\lim_{t\to\infty}|d|\,e^{\alpha t}=\infty,$$

і цього разу положення рівноваги називають ***нестійким фокусом*** (див. мал. 10, 11, що відрізняються лише напрямом руху по спіралях).



Мал. 10, 11. Нестійкий фокус

3. Випадок двократних дійсних коренів характеристичного рівняння.

Дикритичний вузол: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda\neq 0$, $\operatorname{rang}(A-\lambda E)=0$. Цей випадок можливий тільки тоді, коли в (7.2)

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}. \tag{7.13}$$

Тоді будь-який вектор на площині буде власним для матриці A, а тому аналогічно до (7.4)

$$X_{з.}(t)=c_1h_1\,e^{\lambda_1 t}+c_2h_2\,e^{\lambda_2 t},\quad c_1,c_2\in\mathrm{R}, \tag{7.14}$$

де h_1, h_2 – два лінійно незалежні власні вектори матриці (7.13). У системі координат із базисом h_1, h_2 із (7.14) одержимо t-параметричне рівняння фазових траєкторій:

$$s_1(t)=c_1\,e^{\lambda t},\quad s_2(t)=c_2\,e^{\lambda t},$$

звідки

$$s_2(t)=\frac{c_2}{c_1}s_1(t),\quad s_1,s_2\neq 0. \tag{7.15}$$

Півпрямі виду (7.15) можна отримати і з заданої системи (7.1), яка з матрицею (7.13) набуває вигляду

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

звідки

$$x_1(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad x_2(t) = c_2 \mathrm{e}^{\lambda t}, \tag{7.16}$$

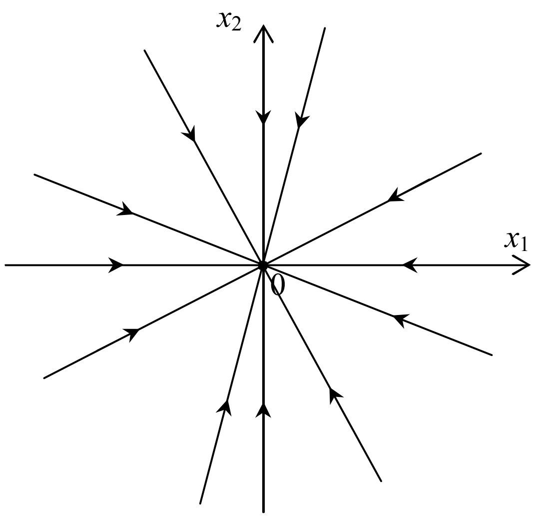
або

$$x_2 = kx_1, \quad k = \frac{c_2}{c_1}.$$

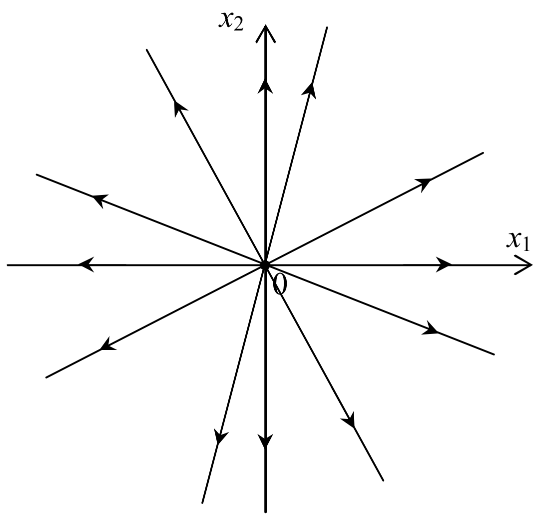
Отже, рух по півпрямих на фазовій площині на підставі (7.14) або (7.15) відбувається:

а) у напрямі до початку координат, якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$, $\mathrm{rang}(A - \lambda E) = 0$ (***стійкий дикритичний вузол***, див. мал. 12), і

б) у протилежному напрямі, якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$, $\mathrm{rang}(A - \lambda E) = 0$ (***нестійкий дикритичний вузол***, див. мал. 13).



Мал. 12. Стійкий дикритичний вузол



Мал. 13. Нестійкий дикритичний вузол

Вироджений вузол ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, $\mathrm{rang}(A - \lambda E) = 1$). Тоді за правилами методу Ейлера можемо виписати відповідну до двократного кореня характеристичного рівняння λ фундаментальну систему частинних розв'язків, а також загальний розв'язок системи (7.1):

$$\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} h_1, \quad \varphi_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}(th_1 + h_2),$$

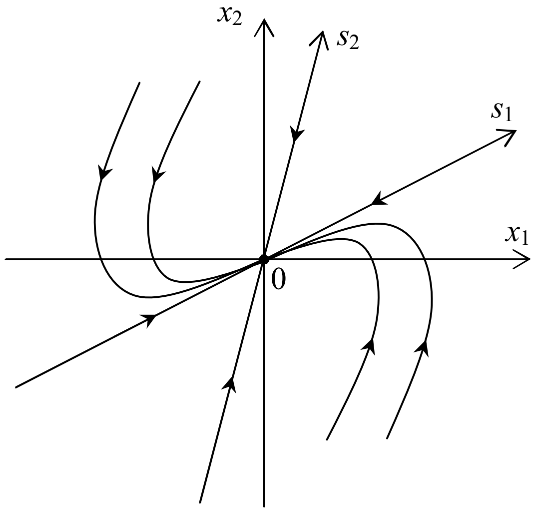
$$X_{з.}(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda t} h_1 + c_2 \mathrm{e}^{\lambda t}(th_1 + h_2), \quad c_1, c_2 \in \mathrm{R}, \tag{7.17}$$

де h_1 відповідний власному значенню λ власний вектор, h_2 – приєднаний до нього вектор.

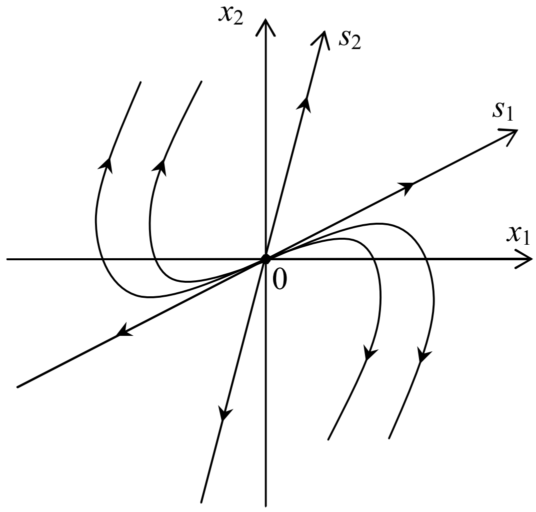
Оскільки вектори h_1 і h_2 лінійно незалежні, то в утвореній ними як базисом косокутній системі координат із (7.17) одержимо наступні координати загального розв'язку s_1, s_2:

$$s_1(t) = (c_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad s_2(t) = c_2\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad c_1, c_2 \in \mathrm{R}. \qquad (7.18)$$

Із (7.18) отримуємо «фазові портрети», зображені на мал. 14, 15.
Якщо $\lambda < 0$, $\mathrm{rang}(A - \lambda E) = 1$, тоді положення рівноваги називають ***стійким виродженим вузлом*** (див. мал. 14).
Якщо $\lambda > 0$, $\mathrm{rang}(A - \lambda E) = 1$, то положення рівноваги називають ***нестійким виродженим вузлом*** (див. мал. 15).



Мал. 14. Стійкий виродженний вузол



Мал. 15. Нестійкий виродженний вузол

Отже, якщо $\det A \neq 0$, тоді для системи (7.1) на фазовій площині можуть існувати 13 типів фазових картин (див. малюнки 3-15).
Дослідимо тепер випадок виродженої матриці, коли $\det A = 0$.

Випадок виродженої матриці ($\det A = 0$).

Пряма положень рівноваги ($\det A = 0$, $\lambda_1 \neq 0$ і $\lambda_2 = 0$). У цьому випадку за правилами методу Ейлера загальний розв'язок системи (7.1) має вигляд

$$X_{з.}(t) = c_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 h_2, \quad c_1, c_2 \in \mathrm{R},$$

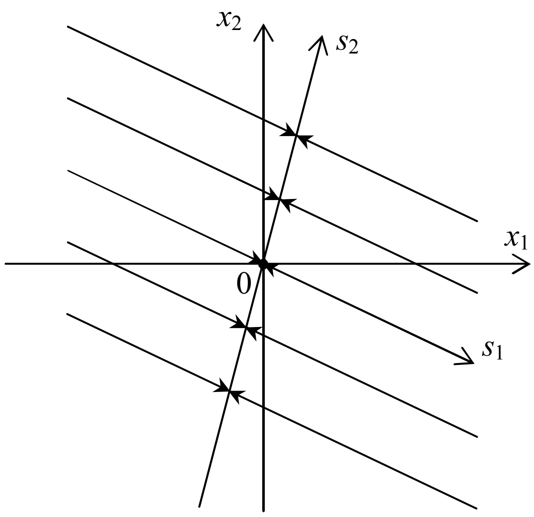
координати якого у системі координат із базисом h_1, h_2

$$s_1(t) = c_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \quad s_2(t) = c_2. \qquad (7.19)$$

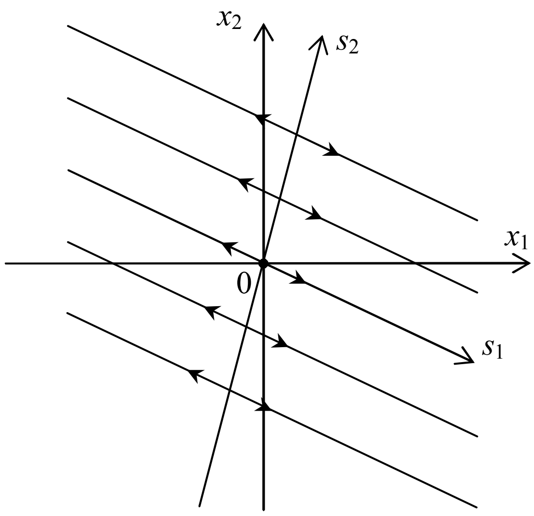
Із (7.19) випливає, що положеннями рівноваги будуть усі точки прямої $s_1 = 0$ ($c_1 = 0$, c_2 довільна стала), тобто початок координат є неізольованою особливою точкою, а траєкторії задаються рівностями

$$s_2 = c_2, \quad s_1 \neq 0,$$

а отже, в цьому випадку траєкторіями будуть півпрямі, напрям руху по яких визначається знаком ненульового власного значення λ_1 (див. мал. 16, 17).



Мал. 16. $s_1 = 0$ – стійка пряма положень рівноваги, $\lambda_1 < 0$

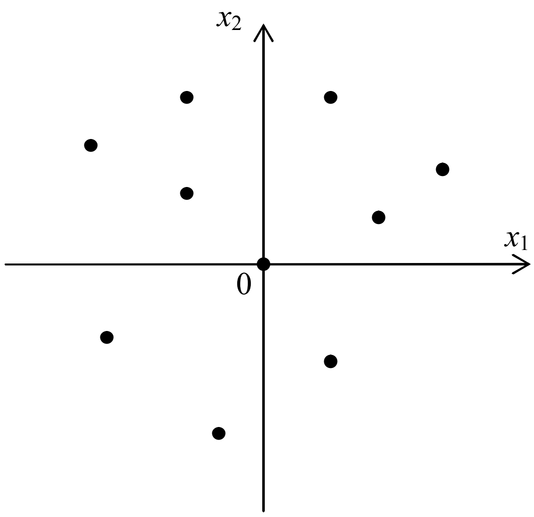


Мал. 17. $s_1 = 0$ – нестійка пряма положень рівноваги, $\lambda_1 > 0$

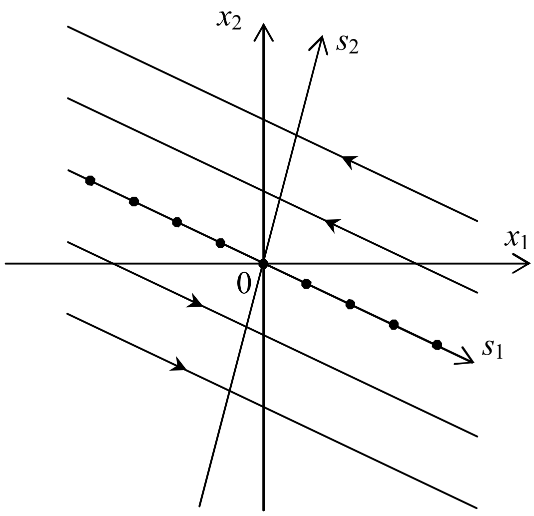
Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ і матриця A складається з самих нулів, тоді положеннями рівноваги системи

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

будуть усі точки площини R^2 (див. мал. 18).



Мал. 18. Неізольовані стаціонарні точки



Мал. 19. $s_2 = 0$ – пряма положень рівноваги, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Якщо матриця A не тотожно нульова, і при цьому $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, тоді за правилами методу Ейлера загальний розв'язок системи (7.1)

$$X_{з.}(t) = c_1 h_1 + c_2 (t h_1 + h_2) = (c_1 + c_2 t) h_1 + c_2 h_2, \quad c_1, c_2 \in \mathrm{R},$$

де h_1 відповідний нульовому власному значенню власний вектор, h_2 – приєднаний до нього вектор.

Таким чином, у базисі h_1, h_2 координати загального розв'язку будуть такими:

$$s_1(t) = c_1 + c_2 t, \quad s_2(t) = c_2.$$

Очевидно, що пряма $s_2 = 0$ є положенням рівноваги ЛОСДР (7.1), тобто початок координат знову є неізольованою особливою точкою, і при цьому траєкторії задаються прямими $s_2 = c$, напрям руху по яких показаний на мал. 19 (якщо $s_2 < 0$, то зліва направо, якщо $s_2 > 0$, то навпаки, справа наліво).

Таким чином, у випадку $\det A = 0$ можуть існувати тільки чотири типи фазових картин.

Наостанок, підсумовуючи сказане вище, дамо кілька практичних рекомендацій для побудови «фазових портретів» положень рівноваги для ЛОСДР (7.1).
Щоб накреслити траєкторії на фазовій площині у випадках сідла, вузла та виродженого вузла, слід найперше знайти ті розв'язки, які зображаються прямими, що проходять через стаціонарну точку. Ці прямі завжди напрямлені уздовж власних векторів матриці (7.2), складеної з коефіцієнтів заданої системи. У випадку вузла криві дотикаються до прямої, напрямленої уздовж власного вектора, що відповідає меншому за абсолютною величиною власному значенню.
У випадку стаціонарної точки типу фокус слід визначити напрям закручування траєкторій. Для цього потрібно, по-перше, дослідити стійкість цієї точки за знаком $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}$, і по-друге, визначити, в якому напрямі відбувається спіральний рух навколо особливої точки по траєкторіях. Для цього досить побудувати в якійсь точці (x_1, x_2) фазової площини вектор швидкості $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$, що визначається з рівнянь системи (7.1).
Аналогічно досліджується напрям руху у випадку виродженого вузла.

8. Особливі точки нелінійних автономних систем

Особливою точкою автономної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \tag{8.1}$$

де *P*, *Q* – неперервно-диференційовні функції, або рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \tag{8.2}$$

називається точка (x_0, y_0), в якій $P(x_0, y_0) = 0$, $Q(x_0, y_0) = 0$.
Якщо знайдені особливі точки системи (8.1), то дослідження стійкості кожної з них окремо можна провести за першим наближенням, скориставшись методом, викладеним у темі 4 для нульового розв'язку.
Таким чином, для дослідження стійкості особливої точки системи (8.1) або рівняння (8.2) потрібно перенести початок координат у досліджувану особливу точку і розкласти функції *P* і *Q* в околі цієї точки за формулою Тейлора, обмежуючись членами першого порядку. Тоді система набуде вигляду (4.3), або конкретно в нашому випадку

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + by_1 + \psi_1(x_1, y_1), \\ \dot{y}_1 = cx_1 + dy_1 + \psi_2(x_1, y_1), \end{cases} \tag{8.3}$$

де x_1, y_1 – нові координати (після переносу), *a*, *b*, *c*, *d* – сталі. Припустимо, що для деякого $\varepsilon > 0$ виконуються умови (4.2) у вигляді

$$\lim_{x_1, y_1 \to 0} \frac{\psi_i(x_1, y_1)}{r^{1+\varepsilon}} = 0, \quad i = 1,2,$$

де $r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Ці умови очевидно виконуються (для будь-якого $\varepsilon < 1$), якщо функції *P* і *Q* в досліджуваній точці двічі диференційовні. Припустимо ще, що дійсні частини усіх власних значень матриці

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

відмінні від нуля. Тоді особлива точка системи (8.1) буде того ж типу, що й положення рівноваги системи першого наближення (4.4), яка отримується з системи (8.3) шляхом відкидання залишкових членів, тобто має вигляд (задля зручності запишемо її без індексів)

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = cx + dy, \end{cases} \tag{8.4}$$

і дослідження якої проводиться аналогічно до ЛОСДР (7.1).
Додамо, що кутові коефіцієнти напрямів, за якими траєкторії входять в особливу точку, для систем (8.1) і (8.4) ті самі [однак прямим $y = kx$ для системи (8.4) можуть відповідати криві для системи (8.1)], а у випадку фокуса – напрям закручування траєкторій той самий.
У тому випадку, коли для системи (8.4) особлива точка – центр, для системи (8.1) вона може бути фокусом або центром. Для наявності центра достатньо (але не необхідно), щоб траєкторії системи (8.1) мали вісь симетрії, що проходить через досліджувану точку. Вісь симетрії очевидно існує, коли рівняння вигляду (8.2), до якого можна звести систему (8.1), не змінюється після заміни *x* на $-x$ (або *y* на $-y$). Для наявності фокуса необхідно й досить, щоб нульовий розв'язок системи (8.1) був асимптотично стійким при $t \to +\infty$ або $t \to -\infty$. Дослідження на стійкість можна провести за допомогою функції Ляпунова. Однак зробити це нелегко, адже в розглядуваному випадку функцію Ляпунова часто доводиться брати у вигляді суми членів другого, третього й четвертого степенів відносно *x*, *y*.

Джерела:

Rontó Miklós, Raisz Péterné. Differenciálegyenletek műszakiaknak. Elméleti összefoglaló 300 kidolgozott feladattal. – Miskolci egyetemi kiadó, 2004. – Стор. 259-308.
Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – Стор. 87-108.