СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1. Основні поняття та означення

Позначимо незалежну змінну через t, а через $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_m(t)$ – деякі невідомі функції цієї змінної.

Означення 1. Сукупність співвідношень вигляду

$$F_i[t, x_1(t), \ldots, x_1^{(q_1)}(t), \ldots, x_m(t), \ldots, x_m^{(q_m)}(t)] = 0, \quad q_i \in \mathrm{N}, \quad i = \overline{1, m} \tag{1.1}$$

називається ***системою диференціальних рівнянь*** (СДР).

Означення 2. ***Порядком*** СДР (1.1) називається число n, рівне сумі порядків старших похідних функцій $x_1(t)$, ..., $x_m(t)$ з тих, які входять у співвідношення (1.1):

$$n = \sum_{i=1}^{m} q_i \,.$$

Означення 3. Система функцій $x_1(t)$, ..., $x_m(t)$ називається ***розв'язком*** СДР (1.1) на проміжку $t \in [\tau_0, \tau_1]$, якщо

а) функції $x_1(t)$, ..., $x_m(t)$ мають похідні до порядків q_1, ..., q_m відповідно на проміжку $t \in [\tau_0, \tau_1]$;

б) при $t \in [\tau_0, \tau_1]$ точка $M[t, x_1(t), \ldots, x_1^{(q_1)}(t), \ldots, x_m(t), \ldots, x_m^{(q_m)}(t)]$ належить області визначення $\mathrm{D} \subset \mathrm{R}^{n+m+1}$ функцій F_i;

в) для довільного значення $t_0 \in [\tau_0, \tau_1]$

$$F_i[t_0, x_1(t_0), \ldots, x_1^{(q_1)}(t_0), \ldots, x_m(t_0), \ldots, x_m^{(q_m)}(t_0)] = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Означення 4. СДР, розв'язана відносно старших похідних шуканих функцій $x_1(t)$, ..., $x_m(t)$, називається ***канонічною*** і записується як

$$x_i^{(q_i)} = \Phi_i[t, x_1(t), \ldots, x_1^{(q_1-1)}(t), \ldots, x_m(t), \ldots, x_m^{(q_m-1)}(t)], \quad i = \overline{1, m}. \tag{1.2}$$

Канонічну СДР вигляду (1.2) із m рівнянь вищих порядків завжди можна замінити еквівалентною їй СДР $n = \sum_{i=1}^{m} q_i$ рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідних усіх n шуканих функцій:

$$\dot{y}_i \equiv \frac{dy_i}{dt} = f_i[t, y_1(t), \ldots, y_n(t)], \quad i = \overline{1, n}, \tag{1.3}$$

де $y_1(t) = x_1^{(q_1-1)}$, $y_2(t) = x_1^{(q_1-2)}, \ldots,$ $y_{q_1}(t) = x_1(t), \ldots,$ $y_{q_1+1}(t) = x_2^{(q_2-1)}$,

$y_{q_1+2}(t) = x_2^{(q_2-2)}, \ldots,\ y_n(t) = x_m(t)$.

СДР вигляду (1.3) називається ***нормальною***. Нормальна СДР (1.3) називається ***автономною***, якщо $f_i \equiv f_i[y_1(t), \ldots, y_n(t)]$, $i = \overline{1,n}$, і ***неавтономною*** в протилежному випадку. Із фізичної точки зору нормальна система (1.3) визначає в довільний момент часу t в заданій точці фазового простору $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ компоненти швидкості $(v_1, \ldots, v_n) = (\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n)$, або поле напрямів. Із такої точки зору СДР (1.3) називається ***динамічною***, а будь-який її розв'язок називається ***рухом***.

Означення 5. ***Розв'язком*** СДР (1.3) називається будь-яка система функцій $y_1(t)$, ..., $y_n(t)$, визначених і неперервних на деякому проміжку $t \in [\tau_0, \tau_1]$, якщо

а) при $t \in [\tau_0, \tau_1]$ точка $M[t, y_1(t), \ldots, y_n(t)]$ належить області визначення $\mathrm{D} \subset \mathrm{R}^{n+1}$ функцій f_i;

б) для довільного $t \in [\tau_0, \tau_1]$ за підкладання функцій $y_1(t)$, ..., $y_n(t)$ у рівняння СДР (1.3) останні перетворюються на тотожності.

Означення 6. ***Задачею Коші*** для СДР (1.3) називається задача знаходження такого розв'язку цієї системи, який справджує початкові умови

$$y_1(t_0) = y_1^0, \quad y_2(t_0) = y_2^0, \quad \ldots, \quad y_n(t_0) = y_n^0, \quad t_0 \in [\tau_0, \tau_1], \tag{1.4}$$

де y_1^0, ..., y_n^0 – задані сталі. Із фізичної точки зору початкова умова в точці t_0 $(y_1^0, \ldots, y_n^0)$ задає початкове положення рухомої матеріальної точки. Розв'язок задачі Коші для СДР (1.3) являє собою ***траєкторію*** руху матеріальної точки.

Означення 6. Будь-яка функція $\psi(y_1, \ldots, y_n)$, що набуває сталого значення $C = const$ тільки за підкладання в неї розв'язку СДР (1.3), називається ***інтегралом*** цієї системи. Співвідношення $\psi(y_1, \ldots, y_n) = C$ називається ***першим інтегралом*** СДР (1.3). Сукупність n лінійно незалежних перших інтегралів СДР (1.3) складає ***загальний інтеграл*** цієї системи.

Означення 7. Система співвідношень

$$y_i(t) = \varphi_i(t, C_1, \ldots, C_n), \quad i = \overline{1,n} \tag{1.5}$$

називається ***загальним розв'язком*** СДР (1.3), якщо

а) (1.5) є розв'язком СДР (1.3) за довільних значень сталих C_1, ..., C_n;

б) (1.5) допускає визначення сталих C_1, ..., C_n як функцій змінних t, y_1, ..., y_n.

Теорема 1.1 ***(про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для нормальної СДР)***. Якщо в системі (1.3) функції f_i та їх частинні похідні за аргументами y_1, ..., y_n неперервні в деякій області $\mathrm{D} \subset \mathrm{R}^{n+1}$, яка містить точку $M(t_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, тоді існує єдиний розв'язок СДР (1.3), який справджує початкові умови (1.4).

Фіксуючи в (1.5) значення сталих C_1, ..., C_n, одержимо ***частинний розв'язок*** СДР (1.3). Розв'язок, у кожній точці якого порушується умова єдиності (тобто не виконуються умови Теореми 1.1), називається ***особливим розв'язком*** СДР (1.3).
Якщо в кожному з рівнянь СДР (1.3) визначити dt і прирівняти отримані співвідношення, то дістанемо еквівалентну до нормальної СДР (1.3) ***систему в симетричній формі***

$$\frac{dt}{1}=\frac{dy_1}{f_1}=\frac{dy_2}{f_2}=...=\frac{dy_n}{f_n}. \tag{1.6}$$

Якщо в (1.6) підкласти будь-який розв'язок (рух) СДР (1.3), то симетрична система перетвориться на рівняння дотичної до заданої кривої (руху).

2. Метод виключення змінних для нормальних систем диференціальних рівнянь

Суть методу виключення змінних загалом полягає у зведенні СДР до звичайних диференціальних рівнянь відносно шуканих функцій.
Розглянемо нормальну СДР другого порядку

$$\begin{cases}\dot{x}=f_1[t,x(t),y(t)], & (2.1)\\ \dot{y}=f_2[t,x(t),y(t)]. & (2.2)\end{cases}$$

Продиференціюємо рівняння (2.1) за змінною *t*, одержимо:

$$\ddot{x}=\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\dot{x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\dot{y}=\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot f_1+\frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot f_2 \tag{2.3}$$

з урахуванням (2.1) і (2.2). Якщо $\partial f_1/\partial y\neq 0$, то з рівності (2.1) можна визначити $y=\varphi(t,x,\dot{x})$ і підкласти у (2.3). Таким чином отримаємо ДР другого порядку для визначення функції $x(t)$:

$$\ddot{x}=F(t,x,\dot{x}). \tag{2.4}$$

Зінтегрувавши ДР (2.4), одержимо його загальний розв'язок $x=x(t,C_1,C_2)$, тоді друга функція $y(t)$ рівна $y=\varphi[t,x(t,C_1,C_2),\dot{x}(t,C_1,C_2)]$.
Особливо просто за допомогою методу виключення інтегруються лінійні СДР.
Розглянемо, наприклад, нормальну лінійну СДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases}\dot{x}=ax+by+f_1(t), & (2.5)\\ \dot{y}=cx+dy+f_2(t), & (2.6)\end{cases}$$

де *a*, *b*, *c*, *d* – задані сталі. Зауважимо, що при $b=0$ або $c=0$ змінні уже є виключеними, тому надалі вважатимемо $cb\neq 0$.
Якщо $b\neq 0$, то після диференціювання (2.5) за змінною *t* і підкладання значень $\dot{y}(t)$ із (2.6) і $y(t)$ із (2.5) маємо:

$$\ddot{x}=a\dot{x}+b\dot{y}+\dot{f}_1(t)=a\dot{x}+b[cx+dy+f_2(t)]+\dot{f}_1(t)=$$
$$=a\dot{x}+b\left[cx+d\,\frac{\dot{x}-ax-f_1(t)}{b}+f_2(t)\right]+\dot{f}_1(t),$$

або після зведення подібних доданків

$$\ddot{x}-(a+d)\dot{x}+(ad-bc)x=bf_2(t)-df_1(t)+\dot{f}_1(t). \tag{2.7}$$

Визначивши з (2.7) $x(t)$, другу функцію $y(t)$ знаходимо з рівняння (2.5):

$$y(t)=\frac{\dot{x}-ax-f_1(t)}{b}.$$

Якщо $c\neq 0$, то після диференціювання (2.6) за змінною t і підкладання значень $\dot{x}(t)$ із (2.5) і $x(t)$ із (2.6) маємо:

$$\ddot{y}=c\dot{x}+d\dot{y}+\dot{f}_2(t)=c[ax+by+f_1(t)]+d\dot{y}+\dot{f}_2(t)=$$
$$=c\left[a\frac{\dot{y}-dy-f_2(t)}{c}+by+f_1(t)\right]+d\dot{y}+\dot{f}_2(t),$$

або після зведення подібних доданків

$$\ddot{y}-(a+d)\dot{y}+(ad-bc)y=cf_1(t)-af_2(t)+\dot{f}_2(t). \tag{2.8}$$

Визначивши з (2.8) $y(t)$, другу функцію $x(t)$ знаходимо з рівняння (2.6):

$$x(t)=\frac{\dot{y}-dy-f_2(t)}{c}.$$

Зауважимо, що ДР (2.7) і (2.8) мають однакові корені характеристичного рівняння (ХР)

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\cdot\left[a+d\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}\right],$$

які співпадають із коренями ХР системи (2.5)-(2.6).
Аналогічно нормальна СДР n-го порядку може бути зведена до одного ДР n-го порядку або $k<n$ ДР нижчих порядків, сума порядків яких дорівнює n.

3. Метод інтегровних комбінацій для нормальних систем диференціальних рівнянь

Суть методу загалом полягає у побудові на підставі заданої СДР так званих ***інтегровних комбінацій***, тобто звичайних диференціальних рівнянь, які є наслідком системи і легко інтегруються.
Для нормальної СДР n-го порядку (1.3) інтегровні комбінації зазвичай будують, складаючи вирази вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\dot{y}_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\,, \tag{3.1}$$

де α_i, $i=\overline{1,n}$ – деякі числові коефіцієнти. У рівності (3.1) ліва частина є похідною за змінною t від функції $z=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i$. Отже, якщо праву частину можна подати у вигляді функції виключно змінних t і z, то співвідношення (3.1) дає інтегровну комбінацію вигляду

$$\dot{z}=F(t,z),$$

визначивши з якої $z(t)$, можна понизити на одиницю порядок СДР (1.3).
Якщо нормальна СДР n-го порядку допускає побудову n лінійно незалежних інтегровних комбінацій, то її можна звести до системи алгебраїчних рівнянь відносно шуканих функцій.

Застосуємо наведений вище спосіб побудови інтегровних комбінацій до СДР другого порядку (2.5)-(2.6). Маємо:

$$\alpha\dot{x}+\beta\dot{y}=\alpha[ax+by+f_1(t)]+\beta[cx+dy+f_2(t)],$$

тобто

$$\alpha\dot{x}+\beta\dot{y}=(\alpha a+\beta c)x+(\alpha b+\beta d)y+\alpha f_1(t)+\beta f_2(t).$$

Остання рівність очевидно дає інтегровну комбінацію тоді й тільки тоді, коли виконуються умови

$$\alpha a+\beta c=k\alpha,\ \ \alpha b+\beta d=k\beta,\ \ k\in\mathrm{R}$$

або при $\alpha\beta\neq 0$

$$a+\frac{\beta}{\alpha}c=\frac{\alpha}{\beta}b+d. \tag{3.2}$$

Введемо позначення $\gamma=\dfrac{\alpha}{\beta}$, тоді з (3.2) маємо

$$a+\frac{c}{\gamma}=b\gamma+d \quad\Rightarrow\quad \gamma=\frac{a-d\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2b}.$$

Із отриманого співвідношення очевидно випливає: інтегровні комбінації для СДР (2.5)-(2.6) існують тільки у випадку $(a-d)^2+4bc\geq 0$, а їх коефіцієнти α, β визначаються на підставі формули

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a-d\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2b}.$$

4. Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь (ЛОСДР) та їх властивості. Теорема про структуру загального розв'язку ЛОСДР

Система диференціальних рівнянь називається ***лінійною***, якщо вона є лінійною відносно шуканих функцій $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ та всіх їх похідних.
Нормальна лінійна однорідна СДР має вигляд

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j(t),\quad i=\overline{1,n}, \tag{4.1}$$

де коефіцієнти $a_{ij}(t)$ – відомі неперервні на заданому проміжку $t\in[\tau_0,\tau_1]$ функції.

Нехай $x_1^{(1)}(t)$, ..., $x_n^{(1)}(t)$ – деякий частинний розв'язок ЛОСДР (4.1). Тоді мають силу наступні очевидні твердження:

а) для довільного значення $C=const$ система функцій $Cx_1^{(1)}(t)$, ..., $Cx_n^{(1)}(t)$ також буде частинним розв'язком ЛОСДР (4.1);

б) якщо $x_1^{(2)}(t)$, ..., $x_n^{(2)}(t)$ деякий інший частинний розв'язок ЛОСДР (4.1), то система функцій $x_1^{(1)}(t)+x_1^{(2)}(t)$, ..., $x_n^{(1)}(t)+x_n^{(2)}(t)$ також буде частинним розв'язком ЛОСДР (4.1).

Нехай

$$x_1^{(j)}(t),\ ...,\ x_n^{(j)}(t),\ j=\overline{1,n} \tag{4.2}$$

система *n* частинних розв'язків ЛОСДР (4.1). Складемо матрицю з векторів-стовпців

$$A=\begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \dots & x_1^{(n)}(t) \\ & \dots & \\ x_n^{(1)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}.$$

Система функцій (4.2) називається ***фундаментальною системою частинних розв'язків*** (ФСЧР) для ЛОСДР (4.1), якщо вона є лінійно незалежною, тобто $\det A \neq 0$ при $t \in [\tau_0, \tau_1]$. Тоді визначник $\det A$ називається ***детермінантом Вронського*** для системи функцій (4.2) і позначається $W(t)$. Для ЛОСДР (4.1) ФСЧР завжди існує, а $W(t)$ для довільного $t \in [\tau_0, \tau_1]$ справджує рівність

$$W(t) = W(t_0)\,e^{-\int\limits_{t_0}^{t}[a_{11}(\tau)+a_{22}(\tau)+\ldots+a_{nn}(\tau)]d\tau}. \tag{4.3}$$

Формула (4.3) називається формулою Остроградського-Ліувілля для ЛОСДР (4.1), або ***формулою Якобі***. Із (4.3) випливає, що при $W(t_0) \neq 0$ $W(t) \neq 0$ для всіх $t \in [\tau_0, \tau_1]$. Справедлива наступна

Теорема 4.1 (***про структуру загального розв'язку ЛОСДР***). Якщо система функцій (4.2) утворює ФСЧР ЛОСДР (4.1), то загальний розв'язок цієї СДР має вигляд

$$x_i(t) = C_1 x_i^{(1)}(t) + \ldots + C_n x_i^{(n)}(t), \quad i = \overline{1,n}, \tag{4.4}$$

де C_1, ..., C_n – довільні сталі.

Доведення. На підставі властивостей ***а)***, ***б)*** система функцій (4.4) буде розв'язком ЛОСДР (4.1). Покажемо, що (4.4) є загальним розв'язком ЛОСДР (4.1), тобто з (4.4) можна отримати будь-який частинний розв'язок цієї СДР, задавши деякі початкові умови

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = \overline{1,n} \tag{4.5}$$

у точці $t_0 \in [\tau_0, \tau_1]$.

Поклавши в (4.4) $t = t_0$, одержимо лінійну неоднорідну алгебраїчну систему для визначення сталих C_1, ..., C_n, детермінант якої рівний $W(t_0) \neq 0$, оскільки система функцій (4.2) складає ФСЧР ЛОСДР (4.1). Тому значення сталих із алгебраїчної системи визначаються однозначно: $C_i = C_{i0}$, $i = \overline{1,n}$, а отже, з розв'язку (4.4) підкладанням знайдених значень C_{i0} одержимо розв'язок задачі Коші (4.1), (4.5). Це й означає, що (4.4) буде загальним розв'язком ЛОСДР (4.1).

5. Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь (ЛНСДР). Метод варіації сталих (Лаґранжа)

Нормальна лінійна неоднорідна СДР має вигляд

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j(t) + f_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \tag{5.1}$$

де $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ – відомі неперервні на заданому проміжку $t \in [\tau_0, \tau_1]$ функції. Тоді (4.1) називають лінійною однорідною СДР, що відповідає ЛНСДР (5.1).

Загальний розв'язок ЛНСДР (5.1) знаходять як суму загального розв'язку відповідної ЛОСДР (4.1) і деякого частинного розв'язку неоднорідної СДР (5.1). Якщо такий спосіб призводить до складнощів, то можна скористатися теоремою, яка дає загальний метод інтегрування ЛНСДР (5.1).

Теорема 5.1 (***метод Лаґранжа для лінійної неоднорідної СДР***). Якщо відомий загальний розв’язок відповідної ЛОСДР (4.1), то загальний розв’язок ЛНСДР (5.1) знаходиться за допомогою *n* квадратур.

Доведення. Нехай відомий загальний розв’язок відповідної ЛОСДР (4.1) у вигляді (4.4). Будемо вважати в (4.4) $C_i = C_i(t)$, $i=\overline{1,n}$. Тоді

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j(t)\dot{x}_i^{(j)}(t) + \sum_{j=1}^{n} \dot{C}_j(t) x_i^{(j)}(t), \quad i=\overline{1,n}.$$

Враховуючи, що (4.4) є загальним розв’язком ЛОСДР (4.1) $x_i^0(t)$, $i=\overline{1,n}$, після підстановки в ЛНСДР (5.1) одержимо

$$\dot{x}_i^0(t) + \sum_{j=1}^{n} \dot{C}_j(t) x_i^{(j)}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j^0(t) + f_i(t), \quad i=\overline{1,n},$$

звідки отримуємо лінійну неоднорідну алгебраїчну систему відносно похідних $\dot{C}_j(t)$

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{C}_j(t) x_i^{(j)}(t) = f_i(t), \quad i=\overline{1,n}. \tag{5.2}$$

Система (5.2) називається ***системою Лаґранжа*** для СДР (5.1). Її визначник $W(t) \neq 0$ при $t \in [\tau_0, \tau_1]$, а отже, (5.2) має єдиний розв’язок $\dot{C}_j(t) = \varphi_j(t)$, $j=\overline{1,n}$. Тоді функції $C_j(t)$ знаходимо за допомогою *n* квадратур: $C_j(t) = \int \varphi_j(t)dt + \overline{C}_j$, $j=\overline{1,n}$, де $\overline{C}_j$ – довільні сталі. Підклавши знайдені функції в (4.4), одержимо загальний розв’язок ЛНСДР (5.1).

6. Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера

Розглянемо ЛОСДР *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\dot{X} = AX, \tag{6.1}$$

де $X = \mathrm{col}(x_1(t) \quad \ldots \quad x_n(t))$ – вектор-стовпець із невідомих функцій, $A : n \times n$ – матриця зі сталими елементами.

Будемо шукати розв’язок СДР (6.1) за алгоритмом методу Ейлера у вигляді

$$X = h\mathrm{e}^{\lambda t}, \tag{6.2}$$

де $h = \mathrm{col}(h_1 \quad \ldots \quad h_n) \neq \vec{0}$ – *n*-вимірний вектор зі сталими елементами, λ – деяка стала. Підставивши (6.2) у (6.1), після скорочення на $\mathrm{e}^{\lambda t} \neq 0$ отримаємо лінійну однорідну алгебраїчну систему для визначення елементів вектора *h*

$$(A - \lambda E)h = \vec{0}, \tag{6.3}$$

де *E* – одинична матриця. Система (6.3) має нетривіальні розв’язки за виконання умови

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{6.4}$$

Означення 8. Ті значення параметра λ, для яких виконується рівність (6.4), називаються ***власними значеннями*** матриці *A*, а відповідний нетривіальний розв’язок системи (6.3) називається ***власним вектором*** матриці A, що відповідає власному значенню λ.

Рівність (6.4) називається ***характеристичним рівнянням*** для ЛОСДР (6.1). Корені характеристичного рівняння є власними значеннями матриці A.
Загальний розв'язок ЛОСДР (6.1) визначається залежно від коренів характеристичного рівняння (6.4), тобто власних значень матриці A. Тут, як і для звичайних ЛОДР зі сталими коефіцієнтами, можливі три випадки.

1. Випадок дійсних різних коренів. Нехай усі власні значення матриці A дійсні й різні, тобто $\lambda_i \in \mathrm{R}$, $i = \overline{1,n}$, причому $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Тоді згідно з (6.2) кожному з власних значень λ_i відповідає частинний розв'язок

$$X_i = h_i \,\mathrm{e}^{\lambda_i t}, \tag{6.5}$$

де h_i власний вектор, що відповідає власному значенню λ_i і визначається з векторної рівності

$$(A - \lambda_i E)h_i = \vec{0}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Згідно з Теоремою 4.1 загальний розв'язок ЛОСДР (6.1) записується як лінійна комбінація частинних розв'язків (6.5):

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i(t),$$

де C_1, ..., C_n – довільні сталі.

2. Випадок комплексно спряжених коренів. Нехай $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – пара однократних комплексних власних значень матриці A. Тоді згідно з (6.2) їм відповідає пара комплексних частинних розв'язків ЛОСДР (6.1)

$$\overline{X}_1 = h_1 \,\mathrm{e}^{(\alpha + i\beta)t}, \quad \overline{X}_2 = h_2 \,\mathrm{e}^{(\alpha - i\beta)t}, \tag{6.6}$$

де

$$[A - (\alpha + i\beta)E]h_1 = \vec{0}, \; [A - (\alpha - i\beta)E]h_2 = \vec{0}.$$

Виділимо з (6.6) дійсні частинні розв'язки ЛОСДР (6.1). Із властивостей лінійних однорідних СДР (див. тему 4) очевидно випливає: якщо комплексна функція $Y = U + iV$ є частинним розв'язком СДР (6.1), то дійсні функції $U = \mathrm{Re}\,Y$ та $V = \mathrm{Im}\,Y$ також є частинними розв'язками СДР (6.1). Таким чином, із (6.6) одержимо дійсні частинні розв'язки:

$$X_1 = \mathrm{Re}\left[h_1 \,\mathrm{e}^{(\alpha + i\beta)t}\right], \quad X_2 = \mathrm{Im}\left[h_1 \,\mathrm{e}^{(\alpha + i\beta)t}\right]. \tag{6.7}$$

Зауважимо, що із $\overline{X}_2$ отримуються аналогічні функції з точністю до знака, тому для знаходження дійсних частинних розв'язків можна використати будь-яку з двох комплексних функцій (6.6).
Отже, парі однократних комплексно спряжених власних значень $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ матриці A відповідають два лінійно незалежні частинні розв'язки ЛОСДР (6.1) вигляду (6.7).

3. Випадок кратних коренів. Нехай дійсне число $\lambda = \alpha$ є коренем ХР (6.4) кратності $k > 1$. Тоді йому повинні відповідати *k* лінійно незалежних частинних розв'язків ЛОСДР (6.1). Спосіб побудови цих частинних розв'язків залежить від числа

$$s = n - \text{rang}(A - \alpha E),$$

яке називається ***кратністю власного значення*** $\lambda = \alpha$ (не плутати з кратністю кореня ХР!) і визначає кількість лінійно незалежних розв'язків векторного рівняння (6.3) (тобто кількість лінійно незалежних власних векторів матриці *A*, які відповідають власному значенню $\lambda = \alpha$).

I. Якщо $s = k$, то власному значенню $\lambda = \alpha$ відповідають *k* лінійно незалежних власних векторів h_1, ..., h_k, які визначаються з векторного рівняння (6.3). Тоді згідно з (6.2) система *k* лінійно незалежних частинних розв'язків має вигляд

$$X_1 = h_1 \mathrm{e}^{\alpha t}, \ \ldots, \ X_k = h_k \mathrm{e}^{\alpha t}.$$

II. Якщо $s = 1$ і h_1 – відповідний власний вектор матриці *A*, визначений із (6.3), то перший частинний розв'язок згідно з (6.2) має вигляд $X_1 = h_1 \mathrm{e}^{\alpha t}$. Для побудови наступних частинних розв'язків X_2, ..., X_k розглянемо систему функцій

$$\begin{aligned} X_2 &= (h_1 t + h_2)\mathrm{e}^{\alpha t}, \\ X_3 &= \left(h_1 \frac{t^2}{2} + h_2 t + h_3 \right)\mathrm{e}^{\alpha t}, \\ &\ldots \\ X_k &= \left(h_1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + h_{k-1} t + h_k \right)\mathrm{e}^{\alpha t}, \end{aligned} \qquad (6.8)$$

де h_2, ..., h_k – невідомі вектори зі сталими елементами.

Підставивши функцію X_2 в ЛОСДР (6.1), одержимо

$$[\alpha(h_1 t + h_2) + h_1]\mathrm{e}^{\alpha t} = A(h_1 t + h_2)\mathrm{e}^{\alpha t}$$

або

$$(A - \alpha E)(h_1 t + h_2)\mathrm{e}^{\alpha t} = h_1 \mathrm{e}^{\alpha t}.$$

Враховуючи, що $(A - \alpha E)h_1 = \vec{0}$, для визначення вектора h_2 отримаємо рівняння

$$(A - \alpha E)h_2 = h_1.$$

Аналогічно, підставивши в ЛОСДР (6.1) функцію X_3, маємо

$$\left[h_1 t + h_2 + \alpha\left(h_1 \frac{t^2}{2} + h_2 t + h_3 \right) \right]\mathrm{e}^{\alpha t} = A\left(h_1 \frac{t^2}{2} + h_2 t + h_3 \right)\mathrm{e}^{\alpha t}$$

або

$$(A - \alpha E)\left(h_1 \frac{t^2}{2} + h_2 t + h_3 \right)\mathrm{e}^{\alpha t} = (h_1 t + h_2)\mathrm{e}^{\alpha t}.$$

Оскільки $(A - \alpha E)h_1 = \vec{0}$ і $(A - \alpha E)h_2 = h_1$, то для визначення вектора h_3 отримаємо рівняння

$$(A-\alpha E)h_3 = h_2 .$$

Аналогічно можна показати, що функції (6.8) будуть частинними розв'язками ЛОСДР (6.1) за виконання умов

$$(A-\alpha E)h_{i+1} = h_i, \quad i=\overline{1,k-1}. \tag{6.9}$$

Вектори h_2, ..., h_k, які справджують рекурентні співвідношення (6.9), називають системою векторів, ***приєднаних*** до власного власного вектора h_1.

Отже, у випадку $s=1$ k-кратному дійсному кореню ХР (6.4) $\lambda=\alpha$ відповідають k лінійно незалежних частинних розв'язків ЛОСДР (6.1) вигляду

$$X_j = \left(h_1 \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} + \ldots + h_{j-1}t + h_j \right) \mathrm{e}^{\alpha t}, \quad j=\overline{1,k},$$

де h_1 власний вектор, що визначається з рівняння (6.3), а h_2, ..., h_k – система приєднаних до h_1 векторів, яка визначається зі співвідношень (6.9).

III. Якщо $1<s<k$, то власному значенню $\lambda=\alpha$ відповідає $s>1$ лінійно незалежних власних векторів h_1, ..., h_s, до яких слід побудувати $(k-s)$ приєднаних векторів аналогічно до випадку II. Тоді перші s частинних розв'язків будуть

$$X_1 = h_1 \mathrm{e}^{\alpha t}, \ \ldots, \ X_s = h_s \mathrm{e}^{\alpha t},$$

а інші $(k-s)$ частинних розв'язків отримуються у вигляді (6.8) залежно від власних векторів, до яких будуються приєднані вектори.

7. Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів

ЛНСДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$\dot{X} = AX + F(t), \tag{7.1}$$

де $X=\mathrm{col}(x_1(t) \ \ \ldots \ \ x_n(t))$ – вектор-стовпець із невідомих функцій, $F(t)=\mathrm{col}(f_1(t) \ \ \ldots \ \ f_n(t))$ – вектор-стовпець вільних членів, $A: n\times n$ – матриця зі сталими елементами.

Загальний розв'язок $X(t)$ ЛНСДР (7.1), як уже згадувалося в темі 5, є сумою загального розв'язку $X_{з.о.}$ відповідної ЛОСДР (6.1) і деякого частинного розв'язку $X_{ч.н.}$ ЛНСДР (7.1). Як було показано в темі 6, $X_{з.о.}$ можна побудувати за допомогою методу Ейлера залежно від коренів характеристичного рівняння (6.4).

Розглянемо випадок, коли вільний член $F(t)$ ЛНСДР (7.1) має вигляд ***векторного квазіполінома***

$$F(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(P_{s_1}(t)\cos\beta t + Q_{s_2}(t)\sin\beta t\right), \tag{7.2}$$

де $P_{s_1}(t)$, $Q_{s_2}(t)$ – n-вимірні вектор-функції, елементами яких є поліноми від змінної t максимальних степенів s_1 і s_2 відповідно; α, β – відомі дійсні числа.

Тоді для відшукання частинного розв'язку $X_{ч.н.}$ ЛНСДР (7.1) застосовний штучний метод, який має назву ***методу невизначених коефіцієнтів*** і дає змогу розв'язати ЛНСДР (7.1) без квадратур аналогічно до звичайного ЛНДР n-го порядку.

Згідно з цим методом частинний розв'язок $X_{ч.н.}$ ЛНСДР (7.1) шукаємо у вигляді подібного до (7.2) векторного квазіполінома

$$X_{ч.н.}(t) = e^{\alpha t}\left(\overline{P}_{s+m}(t)\cos\beta t + \overline{Q}_{s+m}(t)\sin\beta t\right), \tag{7.3}$$

де $s = \max\{s_1, s_2\}$, а число m рівне кратності кореня ХР (6.4) $\gamma = \alpha + i\beta$ (якщо γ не є коренем ХР, то $m = 0$). Останнє значення називають ***контрольним числом*** для векторного квазіполінома (7.2).

Поліноми в вектор-функціях $\overline{P}_{s+m}(t)$, $\overline{Q}_{s+m}(t)$ записуємо з невизначеними коефіцієнтами, які як правило позначаються літерами. Числові значення цих коефіцієнтів знаходимо шляхом безпосередньої підстановки квазіполінома (7.3) у ЛНСДР (7.1).

Підставивши знайдені числові значення коефіцієнтів у (7.3), одержимо шуканий частинний розв'язок $X_{ч.н.}$ ЛНСДР (7.1). Тоді загальний розв'язок ЛНСДР (7.1) записується у вигляді суми

$$X(t) = X_{з.о.} + X_{ч.н.}.$$

Зауваження 1. Якщо $F(t)$ складається з кількох векторних квазіполіномів вигляду (7.2), яким відповідають різні контрольні числа, то для кожного з цих квазіполіномів частинний розв'язок записується окремо згідно з формулою (7.3), після чого $X_{ч.н.}$ шукається методом невизначених коефіцієнтів у вигляді суми всіх записаних частинних розв'язків.

Зауваження 2. Якщо вільний член ЛНСДР (7.1) не має спеціального вигляду (7.2), то загальний розв'язок такого рівняння знаходять за допомогою методу Лаґранжа аналогічно до ЛНСДР зі змінними коефіцієнтами згідно з алгоритмом, викладеним у Теоремі 5.1.

Джерело: *Маринець К. В.* Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи диференціальних рівнянь першого порядку. – Навчальний посібник з курсу «Диференціальні рівняння», частина ІІ. – Ужгород: «Говерла», 2017. – С. 51-82.