

До Модуля 1

Індивідуальні завдання №2 до розділів:

**РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО
ПОХІДНОЇ. ІНТЕГРОВНІ ТИПИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ
ПОРЯДКІВ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ МОДЕЛІ ЗАДАЧ ПРИРОДОЗНАВСТВА**

Варіант 1

1. Зінтегрувати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:
а) $y'^2 + xy = y^2 + xy'$; б) $y = xy' - y'^2$.
2. Зінтегрувати рівняння шляхом пониження порядку: $yy'' + y'^2 = \frac{y^2}{x^2}$.
3. Розв'язати задачу Коші:
 $y'y''' - 3y''^2 = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = y''(1) = 1$.
4. Посудина об'єму 20 л містить повітря (80% азоту та 20% кисню). У посудину затікає 0,1 л азоту за секунду, який неперервно перемішується, і витікає така ж кількість суміші. Через який час у посудині буде 99% азоту?

Варіант 2

1. Зінтегрувати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:
а) $xy' = \sqrt{1 + y'^2}$; б) $y = 2xy' - 4y'^3$.
2. Зінтегрувати рівняння шляхом пониження порядку: $xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}$.
3. Розв'язати задачу Коші:
 $y''' - y''y' = y''$, $y(0) = y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$.
4. Лійка має форму конуса радіусу $R = 6$ см і висоти $H = 10$ см, повернутого вершиною вниз. За який час витече вся вода з лійки через круглий отвір діаметру 0,5 см, пророблений у вершині конуса? Скористатися законом витікання води, згідно з яким швидкість витікання рівна $v = 0,6\sqrt{2gh}$, де g – прискорення сили тяжіння, h – висота рівня води над отвором.

Варіант 3

1. Зінтегрувати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:
а) $y = x + y' - \ln y'$; б) $x = y'^3 + y'$.

2. Зінтегрувати рівняння шляхом пониження порядку: $y'''y' - 3y''^2 = 0$.
3. Розв'язати задачу Коші:
 $y'' = 32\sin^3 y \cos y$, $y(2) = \frac{\pi}{2}$, $y'(2) = 4$.
4. Вибраний зі 100-градусної печі калач остигає згідно з законом випромінювання тепла (швидкість зміни температури тіла в будь-який момент часу пропорційна різниці температур тіла та навколишнього середовища) з коефіцієнтом $k = -0,1$. Температура повітря в пекарні в початковий момент часу складала 35°C , і рівномірно зменшувалася на 1°C кожні 20 хв. Знайти температуру калача через півгодини після того, як він був вибраний із печі.

Варіант 4

1. Зінтегрувати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:
а) $y'^2 - 2xy' = 8x^2$; **б)** $y + xy' = 4\sqrt{y'}$.
2. Зінтегрувати рівняння шляхом пониження порядку: $2xy'y'' = y'^2 - 1$.
3. Розв'язати задачу Коші:
 $y''y''' + 1 = 0$, $y(1) = y'(1) = y''(1) = 1$.
4. За 30 днів розпалося 50% початкової кількості радіоактивної речовини. Через який час залишиться 1% від початкової кількості? Скористатися законом радіоактивного розпаду: кількість радіоактивної речовини, що розпадається за одиницю часу, пропорційна наявній кількості цієї речовини в даний момент часу.

Варіант 5

1. Зінтегрувати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:
а) $y = xy' - (2 + y')^2$; **б)** $y'^3 + y^2 = xyu'$.
2. Зінтегрувати рівняння шляхом пониження порядку: $2y'' \ln y' = y'$.
3. Розв'язати задачу Коші:
 $y''' - xy''^2 = 0$, $y(3) = 7 \ln 2$, $y'(3) = \ln 2$, $y''(3) = -\frac{1}{4}$.
4. Човен сповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна $1,5$ м/с, а через 4 с його швидкість становить 1 м/с. Коли швидкість човна зменшиться до 1 см/с?

Варіант 6

1. Зінтегрувати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:
а) $y = 2xy' + y^2 y'^3$; **б)** $xy' \ln y' = 1$.
2. Зінтегрувати рівняння шляхом пониження порядку: $2y'(y'' + 2) = xy''^2$.
3. Розв'язати задачу Коші:

$$y''' = 3yy', \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 4,5.$$

4. На момент подання рекламних оголошень про запуск у торгіву мережу нового гаджету про останній знало 5% усього населення 45-тисячного міста. Розрахувати, скільки містян знатимуть про новий товар через 30 днів, якщо через 10 днів таких знавців побільшало в 8 разів. Вважати, що після рекламних оголошень швидкість зміни числа тих, хто знає про новинку, пропорційна як числу покупців, котрі знають про товар, так і числу покупців, котрі про нього ще не знають.

Варіант 7

1. Зінтегрувати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:

а) $y'^3 - xy'^2 - 4yy' + 4xy = 0$; б) $xy' - y = \ln y'$.

2. Зінтегрувати рівняння шляхом пониження порядку: $3y'^2 - 2yy'' = 4y^2$.

3. Розв'язати задачу Коші:

$$x^2 y''' = y''^2, \quad y(1) = \frac{5}{2}, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = \frac{1}{2}.$$

4. Куля входить у дошку, товщина якої 10 см, зі швидкістю 200 м/с, а вилітає з дошки, пробиваючи її, зі швидкістю 80 м/с. Знайти час руху кулі крізь дошку, вважаючи, що сила опору дошки руху кулі пропорційна квадрату швидкості руху.

Варіант 8

1. Зінтегрувати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:

а) $y = y'^2 + 2y'^3$; б) $y = xy' - 2y'^3$.

2. Зінтегрувати рівняння шляхом пониження порядку: $yy'' = y'^2 - y'^3$.

3. Розв'язати задачу Коші:

$$y'''^2 - y'^2 = y'^4, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$$

4. Футбольний м'яч вагою 0,4 кг кинули вгору зі швидкістю 20 м/с. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості й рівний 0,48 г за швидкості 1 м/с. Розрахувати час підйому м'яча і найбільшу висоту підйому.

Варіант 9

1. Зінтегрувати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:

а) $2yy' = x(y'^2 + 4)$; б) $\frac{x^2}{y'^2} = e^{2y'}$.

2. Зінтегрувати рівняння шляхом пониження порядку: $y'' + y'^2 = e^{-y}$.

3. Розв'язати задачу Коші:

$$x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = \frac{5}{2}, \quad y''(1) = -2.$$

4. На дні чану знаходиться 100 л 5%-го розчину солі. Чан починають наповнювати 10%-м розчином солі зі швидкістю 6 л за хвилину, тоді як суміш витікає з чану зі швидкістю 4 л за хвилину. Знайти масу солі в чані як функцію часу t .

Варіант 10

1. Зінтегрувати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:

а) $xy'^2 = y(2y' - 1)$; б) $y + xy' - y'^2 = 0$.

2. Зінтегрувати рівняння шляхом пониження порядку: $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.

3. Розв'язати задачу Коші:

$$(1 + \sin x)y''' = y'' \cos x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = y''(0) = 2.$$

4. Дослідити закон витікання води з циліндричного резервуару із горизонтальною віссю, якщо довжина циліндра $H = 2$ м, діаметр його боків $d = 1,5$ м, а отвір унизу має площу $s = 10$ см². Скористатися законом витікання води, згідно з яким швидкість витікання рівна $v = 0,6\sqrt{2gh}$, де g – прискорення сили тяжіння, h – висота рівня води над отвором.

Варіант 11

1. Зінтегрувати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:

а) $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$; б) $y(y - 2xy')^3 = y'^2$.

2. Зінтегрувати рівняння шляхом пониження порядку: $y''y''' = -1$.

3. Розв'язати задачу Коші:

$$4y''y^3 = 16y^4 - 1, \quad y(0) = y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4. Вийнятий зі 100-градусної печі калач за 10 хв остигає згідно з законом випромінювання тепла (швидкість зміни температури тіла в будь-який момент часу пропорційна різниці температур тіла та навколишнього середовища) на повітрі, яке підтримується при сталій температурі, до 60°C. Визначити температуру повітря, якщо через 20 хв після виймання з печі калач охолов до температури 41 $\frac{1}{3}$ °C.

Варіант 12

1. Зінтегрувати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:

а) $xy' + \sqrt{1 - y'^2} - y = 0$; б) $\ln y' + \sin y' - x = 0$.

2. Зінтегрувати рівняння шляхом пониження порядку: $y(xy'' - y') + xy'^2 = 0$.
3. Розв'язати задачу Коші:
 $y'y''' - y''^2 = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$, $y''(1) = 1$.
4. Період напіврозпаду радіоактивної речовини складає 64 дні. Визначити початкову кількість радіоактивної речовини, якщо за 20 днів із цієї кількості розпадається 12 г речовини. Скористатися законом радіоактивного розпаду: кількість радіоактивної речовини, що розпадається за одиницю часу, пропорційна наявній кількості цієї речовини в даний момент часу.

Варіант 13

1. Зінтегрувати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:
 а) $y'^4 - y'^2 = y^2$; б) $y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}$.
2. Зінтегрувати рівняння шляхом пониження порядку: $yy'' - 3y'^2 = 8y^2$.
3. Розв'язати задачу Коші:
 $(x+1)y''' + y'' = x+1$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.
4. Посудина об'єму 50 л містить повітряну суміш (70% азоту та 30% кисню). У посудину затікає 0,02 л азоту за секунду, який неперервно перемішується, і витікає така ж кількість суміші. Через який час у посудині буде 88% азоту?

Варіант 14

1. Зінтегрувати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:
 а) $x(y'^2 - 1) = 2y'$; б) $x(1 - y') + y'^2 = y' + y$.
2. Зінтегрувати рівняння шляхом пониження порядку: $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.
3. Розв'язати задачу Коші:
 $y'''y' - y''^2 - y'^3 = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
4. Заповнена водою посудина має форму півкулі радіусу $R = 20$ см. За який час витече вся вода з посудини через прямокутний отвір $0,2 \times 0,1$ см, що міститься в центрі основи півкулі? Скористатися законом витікання води, згідно з яким швидкість витікання рівна $v = 0,6\sqrt{2gh}$, де g – прискорення сили тяжіння, h – висота рівня води над отвором.

Варіант 15

1. Зінтегрувати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:
 а) $xy'(y' + 2) = y$; б) $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$.
2. Зінтегрувати рівняння шляхом пониження порядку: $x^2y''' = y''^2$.

3. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' = 2yy', \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

4. Однорідний металевий предмет сталої температури занурили в посудину з рідиною, яка підтримується при температурі 60°C . Через 10 хв метал нагрівся до 20°C , а ще через 10 хв – до 40°C . Визначити початкову температуру металу, вважаючи, що метал нагрівається згідно з законом випромінювання тепла (швидкість зміни температури тіла в будь-який момент часу пропорційна різниці температур тіла та довкілля).

Варіант 16

1. Зінтегрувати рівняння та дослідити на особливі розв'язки:

а) $y'^2 + 4xy' - y^2 - 2x^2y = x^2(x^2 - 4)$; б) $2xy' - y = \ln y'$.

2. Зінтегрувати рівняння шляхом пониження порядку: $(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xyu'$.

3. Розв'язати задачу Коші:

$$yy''' = y'(2 - y''), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = y''(0) = 2.$$

4. Згідно з проведеними дослідженнями впродовж року з кожного грама радію розпадається 0,44 мг. Через скільки років розпадеться половина наявної кількості радію? Скористатися законом радіоактивного розпаду: кількість радіоактивної речовини, що розпадається за одиницю часу, пропорційна наявній кількості цієї речовини в даний момент часу.

Джерела:

1. Рего В. Л., Варга Я. В. Диференціальні рівняння першого порядку та методи їх інтегрування. – Навчальний посібник із курсу «Диференціальні рівняння», частина I. – Ужгород: 2021. – С. 94-121.
2. Рего В. Л., Варга Я. В., Король І. І. Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. – Навчальний посібник із курсу «Диференціальні рівняння», частина II. – Ужгород: 2022. – С. 4-30.