

До Модуля 1

Індивідуальні завдання №1 до розділу:

**ІНТЕГРОВНІ ТИПИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
ПЕРШОГО ПОРЯДКУ, РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ МОДЕЛІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ**

Варіант 1

- Зінтегрувати рівняння:
а) $(2y + 3)dx + (x + y - 3)dy = 0$; б) $(2y + \cos x + 1)dx + (2x + \sin y - 1)dy = 0$.
- Розв'язати задачі Коші:
а) $y' - xy^2 = 2xy$, $y(1) = 1$; б) $xy' - (x - 1)y = 3x$, $y(-2) = 1$.
- Знайти криві, у яких піддотична дорівнює сумі абсциси та ординати точки дотику.

Варіант 2

- Зінтегрувати рівняння:
а) $(y + \sqrt{x^2 - y^2})dx - xdy = 0$; б) $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$.
- Розв'язати задачі Коші:
а) $8x + 4y + 1 + (4x + 2y + 1)y' = 0$, $y(0) = 1$; б) $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$, $y(1) = -2$.
- Визначити криві, у яких піддотична є середнім арифметичним координат точки дотику.

Варіант 3

- Зінтегрувати рівняння:
а) $(x - 2y - 1)dx + (3x - 6y + 2)dy = 0$; б) $x(2 - 9xy^2)dx + y(4y^2 - 6x^3)dy = 0$.
- Розв'язати задачі Коші:
а) $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$, $y(1) = -1$; б) $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.
- Знайти криві, у яких піднормаль дорівнює різниці між радіус-вектором та абсцисою точки дотику.

Варіант 4

1. Зінтегрувати рівняння:

а) $\left(xye^{\frac{x}{y}} + y^2 \right) dx - x^2 e^{\frac{x}{y}} dy = 0$; **б)** $(2x^2y - 3y^3)dx + (7 - 6xy^2)dy = 0$.

2. Розв'язати задачі Коші:

а) $(x + y)dx + (x + y - 1)dy = 0$, $y(2) = 0$; **б)** $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$, $y(e) = 0$.

3. Знайти криві, у яких трикутник, утворюваний віссю Oy , дотичною та радіус-вектором точки дотику, є рівнобічним.

Варіант 5

1. Зінтегрувати рівняння:

а) $(x + 2y + 1)dx + (2x + 4y + 3)dy = 0$; **б)** $(x + \sin x + \sin y)dx + \cos y dy = 0$.

2. Розв'язати задачі Коші:

а) $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$, $y(-1) = 0$; **б)** $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$, $y(1) = 1$.

3. Визначити криву, яка проходить через початок координат і поділяє прямокутник, утворений координатними осями та перпендикулярами, опущеними на них із будь-якої точки кривої, у відношенні 2:1.

Варіант 6

1. Зінтегрувати рівняння:

а) $(2\sqrt{xy} - y)dx - xdy = 0$; **б)** $y' - 10(x + 1)^3 \cdot \sqrt[10]{y^9} = \frac{20y}{x + 1}$.

2. Розв'язати задачі Коші:

а) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, $y(2) = 8$; **б)** $\frac{3x^2 + y^2}{y^2} dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3} dy = 0$, $y(0) = 1$.

3. Знайти криві, у яких трикутник, утворюваний нормаллю в будь-якій її точці з осями координат, рівновеликий із трикутником, утворюваним віссю абсцис, дотичною та нормаллю.

Варіант 7

1. Зінтегрувати рівняння:

а) $\left(x - y \cos \frac{y}{x} \right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$; **б)** $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y} dy = 0$.

2. Розв'язати задачі Коші:

а) $xy' + y = y^2$, $y(1) = \frac{1}{2}$; **б)** $2x(x^2 + y)dx = dy$, $y(2) = \sqrt{3}$.

3. Знайти криві, у яких нормаль збігається з радіус-вектором точки дотику.

Варіант 8

1. Зінтегрувати рівняння:

а) $2x^2 yy' + y^2 = 2$; б) $yx^{-1} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0$.

2. Розв'язати задачі Коші:

а) $(y - 1) dx + (2x + y + 1) dy = 0$, $y(-1) = 3$;

б) $(1 + y^2 \sin 2x) dx - 2y \cos^2 x dy = 0$, $y(-\pi) = \pi$.

3. Знайти криві, у яких піддотична дорівнює довжині радіус-вектора точки дотику.

Варіант 9

1. Зінтегрувати рівняння:

а) $xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x}$; б) $(2y + 3) dx + (x + y - 3) dy = 0$.

2. Розв'язати задачі Коші:

а) $xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$, $y(1) = e^2$; б) $3x^2(1 + \ln y) dx - \left(2y - \frac{x^3}{y}\right) dy = 0$, $y(-2) = 1$.

3. Довести, що крива, усі нормалі до якої проходять через одну й ту ж фіксовану точку, є колом.

Варіант 10

1. Зінтегрувати рівняння:

а) $(y + 2) dx + (y - 2x - 2) dy = 0$; б) $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right) dx + \frac{(x^2 + 1) \cos y}{\cos 2y - 1} dy = 0$.

2. Розв'язати задачі Коші:

а) $1 = 4x\sqrt{y}(1 - \sqrt{y}y')$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; б) $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1$, $s(0) = \ln 2$.

3. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику та віссю абсцис, є величина стала, рівна a^2 .

Варіант 11

1. Зінтегрувати рівняння:

а) $(2xy + y^2) dx + (2x^2 + 3xy + 4y^2) dy = 0$; б) $(y + \sqrt{xy}) dx = x dy$.

2. Розв'язати задачі Коші:

а) $5x^4 + (y + 4 - x^5)y' = 0$, $y(-1) = 0$; б) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$, $y(0) = 1$.

3. Визначити криві, усі дотичні до яких проходять через початок координат.

Варіант 12

1. Зінтегрувати рівняння:

а) $(3x + 2y - 1)dx + (x + 1)dy = 0$; б) $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$.

2. Розв'язати задачі Коші:

а) $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$; б) $y' \sin x - y \cos x = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

3. Знайти криві, для яких тангенс кута нахилу дотичної в будь-якій її точці в n разів більший за тангенс кута нахилу прямої, що проходить через цю точку і початок координат.

Варіант 13

1. Зінтегрувати рівняння:

а) $(2y - 2x)dx + (y - 3x)dy = 0$; б) $\left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y}\right)dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2} dy$.

2. Розв'язати задачі Коші:

а) $3y^2 y' - y^3 = 2e^{2x} - 1$, $y(-1) = 3$; б) $e^x \sin^3 y + (1 + e^{2x}) \cos y \cdot y' = 0$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

3. Знайти криву, яка проходить через точку $(2,3)$ і має властивість: відрізок її довільної дотичної між осями координат ділиться в точці дотику навпіл.

Варіант 14

1. Зінтегрувати рівняння:

а) $(x - 2y + 4)dx + (3x - 2)dy = 0$; б) $2y' + 3e^x y + 3e^x y^{\frac{1}{3}} = 0$.

2. Розв'язати задачі Коші:

а) $x \sin y = y'(1 + x^2) \cos y$, $y(1) = \frac{\pi}{4}$; б) $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx = \left(\frac{\sin^2 x}{y^2} - y\right)dy$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}$.

3. Крива $y = \varphi(x)$ проходить через точку $(1,1)$ і має властивість: тангенс кута нахилу будь-якої дотичної до неї прямо пропорційний квадрату ординати точки дотику. Знайти рівняння цієї кривої.

Варіант 15

1. Зінтегрувати рівняння:

а) $(13x + y)dx + (y - 5x)dy = 0$; б) $\left(5x^2 + \frac{2\sin y}{x} + \frac{2}{x}\right)dx + \cos y dy = 0$.

2. Розв'язати задачі Коші:

а) $y'x = 2\sqrt{y}(\ln x - \sqrt{y})$, $y(2) = 1$; б) $(2x + y - 2)dx + (2 - 2x)dy = 0$, $y(2) = 3$.

3. Крива $y = \varphi(x)$ проходить через точку $(0, -2)$ і має властивість: тангенс кута нахилу дотичної до неї в будь-якій точці дорівнює ординаті цієї точки, збільшеній на три одиниці. Знайти рівняння цієї кривої.

Варіант 16

1. Зінтегрувати рівняння:

а) $(2x + y + 1)dx = (4x - y)dy$; б) $\frac{2}{x^3}dx + \left(\frac{1}{y^3} + \frac{12}{y} + \frac{4}{yx^2}\right)dy = 0$.

2. Розв'язати задачі Коші:

а) $(1 - 2xy)y' = y(y - 1)$, $y(-1) = 4$; б) $x^2y' - \cos 2y = 1$, $y(-2) = \frac{\pi}{3}$.

3. Знайти криву, яка проходить через точку $(0, 1)$ і має властивість: кутовий коефіцієнт будь-якої дотичної до неї дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.