

До Модуля 2

Індивідуальні завдання №4 до розділу:

**ІНТЕГРОВНІ ТИПИ НЕЛІНІЙНИХ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ**

Постановка завдань:

1 - 3. Зінтегрувати диференціальне рівняння.

4 - 5. Розв'язати задачу Коші.

Варіант 1

1. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$. 2. $xy'' + y' - x^2 - 1 = 0$. 3. $yy'' + y'^2 = \frac{y^2}{x^2}$.

4. $y'y''' - 3y''^2 = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = y''(1) = 1$.

5. $y'' + y'^2 + 2y' = 0$, $y(0) = \ln 2$, $y'(0) = -1$.

Варіант 2

1. $xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}$. 2. $2y'' \ln y' = y'$. 3. $x^2 - \frac{1}{y''^2} = 1$.

4. $y''' - y''y' = y''$, $y(0) = y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$.

5. $y'' + 2 \sin y \cos^3 y = 0$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = -1$.

Варіант 3

1. $4y' + y'' = 4xy''$. 2. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$. 3. $y'''y' - 3y''^2 = 0$.

4. $xy''' + y'' - x - 1 = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = \frac{3}{4}$, $y''(1) = 1$.

5. $y'' = 32 \sin^3 y \cos y$, $y(2) = \frac{\pi}{2}$, $y'(2) = 4$.

Варіант 4

1. $y'' - (1 + 2 \operatorname{tg}^2 x)y = 0$. 2. $2xy'y'' = y'^2 - 1$. 3. $xy''' - y''^2 = 0$.

4. $y''y''' + 1 = 0$, $y(1) = y'(1) = y''(1) = 1$.

5. $y^3 y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.

Варіант 5

1. $xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}$. 2. $2y'' \ln y' = y'$. 3. $2xy'y'' = y'^2 - 1$.

4. $y''' - xy''^2 = 0$, $y(3) = 7 \ln 2$, $y'(3) = \ln 2$, $y''(3) = -\frac{1}{4}$.

5. $y''y^3 + 36 = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.

Варіант 6

1. $(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xy y'$. 2. $2y'(y'' + 2) = xy''^2$. 3. $yy'' - y'^2 = \frac{y^2}{x^2}$.
 4. $y''' = 3yy'$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \frac{9}{2}$.
 5. $yy'' + y = y'^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = \sqrt{3}$.

Варіант 7

1. $y'' \operatorname{tg} 5x = 5y'$. 2. $2y'(y'' + 2) = xy''^2$. 3. $3y'^2 - 2yy'' = 4y^2$.
 4. $x^2 y''' = y''^2$, $y(1) = \frac{5}{2}$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = \frac{1}{2}$.
 5. $y''(1 + 2 \ln y') = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Варіант 8

1. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$. 2. $y'' \operatorname{cth} x - y' + \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 0$. 3. $y'' = 2yy'$.
 4. $y'''^2 - y'^2 = y'^4$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.
 5. $yy'' - 2xy'^2 = 0$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, $y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{27}$.

Варіант 9

1. $x = y''^2 + 1$. 2. $y'' + y'^2 = e^{-y}$. 3. $y'' + \frac{2x}{x^2 + 1} y' = 2x$.
 4. $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$, $y(1) = 0$, $y'(1) = \frac{5}{2}$, $y''(1) = -2$.
 5. $(x^2 + 1)y'' - 2xy' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Варіант 10

1. $y'' + \frac{2x}{x^2 + 1} y' = 2x$. 2. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$. 3. $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$.
 4. $(1 + \sin x)y''' = y'' \cos x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = y''(0) = 2$.
 5. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$.

Варіант 11

1. $(1 - x^2)y'' + xy' = 2$. 2. $y(xy'' - y') + xy'^2 = 0$. 3. $(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xy y'$.
 4. $y'y''' - y''^2 = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$, $y''(1) = 1$.
 5. $3xy'^2 y'' = y'^3 + \frac{x^4}{9}$, $y(1) = \frac{2}{7}$, $y'(1) = \frac{1}{3}$.

Варіант 12

1. $y'' \operatorname{th} x - y' + \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 0$. 2. $xyy'' - xy'^2 - 2yy' - y^2 = 0$. 3. $y''y''' = -1$.
4. $x^2y''' + y''^2 = 0$, $y(1) = 2\ln 2$, $y'(1) = \ln 2$, $y''(1) = -\frac{1}{2}$.
5. $4y''y^3 = 16y^4 - 1$, $y(0) = y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Варіант 13

1. $yy'' - 3y'^2 = 8y^2$. 2. $x^3y'' - (y - xy')^2 = 0$. 3. $y'' - xy' - y = 1$.
4. $(x+1)y''' + y'' = x+1$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.
5. $y'' = 2\sin^3 y \cos y$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = 1$.

Варіант 14

1. $y'' \operatorname{tg} x - y' \operatorname{csc} x = 0$. 2. $xyy'' + xy'^2 - 3yy' = 0$. 3. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.
4. $y'''y' - y''^2 - y'^3 = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
5. $y'' = 2\sin^3 y \cos y$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = 1$.

Варіант 15

1. $x^2y''' = y''^2$. 2. $y'' - y'^2 = 0$. 3. $xyy'' - xy'^2 = yy'$.
4. $x^3y''' + x^2y'' = \sqrt{x}$, $y(1) = -9$, $y'(1) = 2$, $y''(1) = -1$.
5. $y'' = 2yy'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Варіант 16

1. $x^2y'' = y'^2$. 2. $yy''' = y'y''$. 3. $(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xyy'$.
4. $yy''' = y'(2 - y'')$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 2$.
5. $y'' \operatorname{ctg} x - y' - \frac{1}{\sin^3 x} = 0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Варіант 17

1. $(1+x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$. 2. $xy'' + y' - x^2 - 1 = 0$. 3. $yy'' + y'^2 = \frac{y^2}{x^2}$.
4. $y'y''' - 3y''^2 = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = y''(1) = 1$.
5. $y'' + y'^2 + 2y' = 0$, $y(0) = \ln 2$, $y'(0) = -1$.

Варіант 18

1. $xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}$. 2. $2y'' \ln y' = y'$. 3. $x^2 - \frac{1}{y''^2} = 1$.

4. $y''' - y''y' = y''$, $y(0) = y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$.

5. $y'' + 2 \sin y \cos^3 y = 0$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = -1$.

Варіант 19

1. $4y' + y'' = 4xy''$. 2. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$. 3. $y'''y' - 3y''^2 = 0$.

4. $xy''' + y'' - x - 1 = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = \frac{3}{4}$, $y''(1) = 1$.

5. $y'' = 32 \sin^3 y \cos y$, $y(2) = \frac{\pi}{2}$, $y'(2) = 4$.

Варіант 20

1. $y'' - (1 + 2 \operatorname{tg}^2 x)y = 0$. 2. $2xy'y'' = y'^2 - 1$. 3. $xy''' - y''^2 = 0$.

4. $y''y''' + 1 = 0$, $y(1) = y'(1) = y''(1) = 1$.

5. $y^3 y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.

Варіант 21

1. $y'' = xy' + y + 1$. 2. $1 + y'^2 = 2yy''$. 3. $2xy'y'' = y'^2 - 1$.

4. $y''' - xy''^2 = 0$, $y(3) = 7 \ln 2$, $y'(3) = \ln 2$, $y''(3) = -\frac{1}{4}$.

5. $y''y^3 + 36 = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.

Варіант 22

1. $(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xy'y'$. 2. $2y'(y'' + 2) = xy''^2$. 3. $yy'' - y'^2 = \frac{y^2}{x^2}$.

4. $y''' = 3yy'$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = \frac{9}{2}$.

5. $yy'' + y = y'^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = \sqrt{3}$.

Варіант 23

1. $y'' \operatorname{tg} 5x = 5y'$. 2. $3y'^2 - 2yy'' = 4y^2$. 3. $x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}$.

4. $x^2 y''' = y''^2$, $y(1) = \frac{5}{2}$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = \frac{1}{2}$.

5. $y''(1 + 2 \ln y') = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Варіант 24

1. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$. 2. $y'' \operatorname{cth} x - y' + \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 0$. 3. $y'' = 2yy'$.

4. $y'''^2 + y'^2 = y'^4$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

5. $yy'' - 2xy'^2 = 0$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, $y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{27}$.

Варіант 25

1. $x = y''^2 + 1$. 2. $y'' + y'^2 = e^{-y}$. 3. $y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' = 2x$.

4. $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$, $y(1) = 0$, $y'(1) = \frac{5}{2}$, $y''(1) = -2$.

5. $(x^2 + 1)y'' - 2xy' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Джерело: *Рего В. Л., Варга Я. В., Король І. І.* Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. – Навчальний посібник із курсу «Диференціальні рівняння», частина II. – Ужгород: 2022. – С. 4-30.