ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ІНТЕГРОВНІ ТИПИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

1. Диференціальні рівняння вищих порядків. Основні поняття та означення

Диференціальне рівняння (ДР) n-го порядку має загальний вигляд

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

або, якщо його можна розв'язати відносно n-ї похідної,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}). \tag{1.2}$$

(1.1) називається ***неявним***, а (1.2) – ***явним*** ДР n-го порядку.

Означення 1. Будь-яка n разів неперервно диференційовна в області визначення ДР (1.1) функція $y = \varphi(x)$, яка після підставлення в ДР (1.1) замість шуканої функції перетворює його в тотожність, називається ***розв'язком*** цього ДР.

Означення 2. ***Загальним розв'язком*** ДР (1.1) n-го порядку називається функція $y = \varphi(x, C_1, ..., C_n)$, залежна від n довільних сталих, якщо:

а) вона справджує ДР (1.1) за будь-яких значень C_1, ..., C_n;

б) за заданих початкових умов

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad ..., \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{1.3}$$

сталі C_1, ..., C_n можна підібрати таким чином, що функція $y = \varphi(x, C_1, ..., C_n)$ задовольнятиме ці умови (за припущення, що початкові значення x_0, y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ належать області, де виконуються умови існування розв'язку).

За відшукання загального розв'язку ДР n-го порядку часто отримується співвідношення вигляду

$$\Phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0, \tag{1.4}$$

яке визначає шуканий загальний розв'язок у неявному вигляді. Це співвідношення називається ***загальним інтегралом*** ДР n-го порядку.

Знаючи загальний інтеграл (1.4), можна відтворити відповідне ДР вигляду (1.1). Для цього слід виключити сталі C_1, ..., C_n із системи рівнянь

$$\Phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0; \quad \frac{\partial^k \Phi}{\partial x^k} = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Рівність $\psi(x, y, y', ..., y^{(k)}, C_1, ..., C_k) = 0$ називається проміжковим інтегралом ДР (1.1), якщо після її диференціювання $(n-k)$ разів і виключення сталих одержуємо ДР (1.1).

Означення 3. Будь-яка функція, що отримується з загального розв'язку ДР n-го порядку за конкретних значень сталих C_1, ..., C_n, називається ***частинним розв'язком*** цього ДР. Графік частинного розв'язку називається ***інтегральною кривою*** заданого ДР n-го порядку.
Розв'язати (зінтегрувати) ДР n-го порядку означає:
1) знайти його загальний розв'язок (якщо початкові умови не задані) або
2) знайти той частинний розв'язок ДР, який справджує задані початкові умови (якщо такі є).

Означення 4. Задача знаходження частинного розв'язку ДР n-го порядку (1.1), який справджує початкові умови (1.3), називається ***задачею Коші*** для цього ДР.

Розглянемо умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші для явного (1.2) та неявного (1.1) ДР n-го порядку.

Теорема 1.1 **(*про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для явного ДР* n-*го порядку*)**. Нехай права частина рівняння (1.2) $f(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})$
а) визначена й неперервна по всіх аргументах у замкнутій області D: $|x-x_0|\le a$, $|y^{(k)}-y_0^{(k)}|\le b$, $k=\overline{0,n-1}$, де a, b – додатні сталі; тоді $f(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})$ є також обмеженою в D, тобто існує така додатна стала M, що $|f(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})|\le M$ в області D;
б) справджує умову Ліпшиця за аргументами y, y', ..., $y^{(n-1)}$ в області D, тобто існує така стала $L>0$ (***стала Ліпшиця***), що

$$|f(x,y_1,y_1',...,y_1^{(n-1)})-f(x,y_2,y_2',...,y_2^{(n-1)})|\le$$
$$\le L(|y_1-y_2|+|y_1'-y_2'|+...+|y_1^{(n-1)}-y_2^{(n-1)}|$$

в області D.
Тоді існує єдиний розв'язок $y=\varphi(x)$ ДР (1.2), визначений і неперервний на проміжку $|x-x_0|\le h$, де $h=\min\{a,b/M\}$, який у точці $x=x_0$ набуває значень $y^{(k)}(x_0)=y_0^{(k)}$, $k=\overline{0,n-1}$.
Теорема 1.1 доводиться аналогічно до теореми Коші для ДР першого порядку: для застосування методу Пікара ДР (1.2) попередньо зводиться до системи ДР першого порядку.

Теорема 1.2 **(*про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для неявного ДР* n-*го порядку*)**. Нехай ліва частина ДР (1.1) $F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})$ в деякому h-околі точки M_0 з координатами $(x_0,y_0,y_0',...,y_0^{(n)})$, де $y_0^{(n)}$ – розв'язок рівняння $F(x_0,y_0,y_0',...,y_0^{(n-1)},y^{(n)})=0$, неперервна разом із частинними похідними першого порядку за всіма аргументами і справджує умови: $F(M_0)=0$, $\partial F(M_0)/\partial y^{(n)}\ne 0$. Тоді для всіх $x\in[x_0-h,x_0+h]$ ДР (1.1) має єдиний розв'язок $y=\varphi(x)$, який справджує початкові умови (1.3).

Доведення. Якщо $\partial F/\partial y^{(n)} \neq 0$ у точці M_0, то згідно з теоремою про існування неявної функції ДР (1.1) визначає $y^{(n)}(x)$ як однозначну функцію інших аргументів: $y^{(n)} = f_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ у деякому h-околі точки M_0. Функція $f_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ неперервна за всіма аргументами і матиме неперервні частинні похідні першого порядку, тобто в розглядуваній області (h-околі точки M_0) справджує умови Теореми 1.1. Тому явне ДР $y^{(n)} = f_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, а отже, і неявне ДР (1.1), визначає в h-околі точки M_0 єдину функцію $y = \varphi(x)$, яка справджує початкові умови (1.3).

2. Деякі інтегровні типи нелінійних диференціальних рівнянь вищих порядків

Розв'язки деяких нелінійних ДР вищих порядків вигляду (1.1) можна знайти шляхом зведення вихідного рівняння до ДР нижчого порядку. Розглянемо деякі інтегровні типи ДР, які допускають пониження порядку.

1. ***ДР вигляду*** $y^{(n)} = f(x)$ розв'язується n-кратним інтегруванням:

$$y(x) = \int \overset{(n)}{\dots} \int f(x)dx^n + \sum_{i=0}^{n-1} C_i x^i = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-\xi)^{n-1} f(\xi)d\xi + \sum_{i=0}^{n-1} C_i x^i \,, \qquad (2.1)$$

де $x_0 = const$. Формула (2.1) називається ***формулою Коші***. Очевидно, що за всіх $C_i = 0$ розв'язок (2.1) справджуватиме початкові умови $y^{(k)}(x_0) = 0$, $k = \overline{0, n-1}$.

2. ***Якщо ДР не містить шуканої функції,*** тобто має вигляд

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0, \qquad (2.2)$$

де $0 < k < n$, то підстановка $y^{(k)} = z(x)$ понижує його порядок на k одиниць: після її введення у ДР (2.2) отримуємо ДР $(n-k)$-го порядку

$$F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0.$$

3. ***Якщо ДР не містить незалежної змінної,*** тобто має вигляд

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \qquad (2.3)$$

то його порядок можна понизити підстановкою $y' = p(y)$, де $p(y(x))$ – нова невідома функція. Тоді маємо:

$$y'' = p'p\,,$$

$$y''' = (p''p + p'^2)\cdot p = p''p^2 + p'^2 p\,,$$

$$y^{(4)} = (p'''p^2 + 4p''p'p + p'^3)\cdot p = p'''p^3 + 4p''p'p^2 + p'^3 p$$

тощо. Оскільки вирази для $y^{(k)}$ містять похідні функції $p(y)$ тільки до порядку $(k-1)$, то після підкладання у ДР (2.3) отримаємо на порядок нижче ДР для визначення $p(y)$:

$$F_1(y, p, p', ..., p^{(n-1)}) = 0.$$

4. ***Однорідні ДР вищих порядків.*** Нехай ліва частина ДР (1.1) $F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})$ є однорідною функцією відносно шуканої функції та її похідних, тобто для довільного $\lambda \neq 0$

$$F(x,\lambda y,\lambda y',\dots,\lambda y^{(n)}) = \lambda^m F(x,y,y',\dots,y^{(n)}). \tag{2.4}$$

Тоді порядок ДР (1.1) можна понизити підстановкою $y = \mathrm{e}^{\int z(x)dx}$, де $z(x)$ нова невідома функція. Маємо: $y' = \mathrm{e}^{\int z(x)dx} \cdot z = yz$, $y'' = y(z' + z^2)$, $y''' = y(z'' + 3z'z + z^3)$ тощо. Підклавши похідні в ДР (1.1) і взявши в (2.4) $\lambda = 1/y$ ($y \neq 0$), для визначення $z(x)$ отримаємо ДР на порядок нижче: $F_2(x,z,z',\dots,z^{(n-1)}) = 0$.

5. ***Квазіоднорідні ДР вищих порядків.*** ДР (1.1) буде квазіоднорідним (узагальнено-однорідним) тоді, коли для довільного $k \neq 0$ виконується умова

$$F(kx,k^m y,k^{m-1}y',\dots,k^{m-n}y^{(n)}) = k^{\alpha} F(x,y,y',\dots,y^{(n)}). \tag{2.5}$$

Порядок такого ДР понижується введенням нової незалежної змінної t і нової шуканої функції $z(t)$ згідно з підстановками $x = \mathrm{e}^t$, $y = \mathrm{e}^{mt} \cdot z(t)$. Виразивши всі похідні $y^{(s)}(x)$ через $z^{(r)}(t)$ з урахуванням рівності $t = \ln x$ – наприклад,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(m-1)t} \cdot \left[\frac{dz}{dt} + mz(t)\right],$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \mathrm{e}^{(m-2)t} \cdot \left[\frac{d^2z}{dt^2} + (2m-1)\frac{dz}{dt} + m(m-1)z(t)\right]$$

тощо, і поклавши у (2.5) $k = \mathrm{e}^{-t} \neq 0$, для визначення функції $z(t)$ отримаємо ДР n-го порядку типу (2.3), яке не містить незалежної змінної t. Це рівняння згідно з викладеним вище зводиться до ДР $(n-1)$-го порядку заміною $z' = p(z)$.

6. ***Якщо ДР (1.1) можна перетворити до точної похідної*** за змінною x від деякої функції $\varphi(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$, тобто ДР (1.1) подається у вигляді $d\varphi/dx = 0$, то його першим проміжковим інтегралом буде співвідношення $\varphi(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}) = C_1$. Ця рівність є ДР на порядок нижчим за (1.1).

3. Способи інтегрування найпростіших диференціальних рівнянь вищих порядків

Розглянемо детальніше способи розв’язування деяких простіших інтегровних типів диференціальних рівнянь вищих порядків.

1. ***Диференціальне рівняння вигляду***

$$F(x,y^{(n)}) = 0. \tag{3.1}$$

а) Якщо рівняння (3.1) розв’язне відносно $y^{(n)}$, тобто подається у вигляді $y^{(n)} = f(x)$, тоді його загальний розв’язок знаходиться за формулою Коші (2.1).

б) Якщо рівняння (3.1) розв'язне відносно незалежної змінної *x*, тобто подається у вигляді $x = f(y^{(n)})$, тоді його можна зінтегрувати методом введення параметра

$$y^{(n)} = p\,.$$

Із двох останніх рівностей маємо:

$$x = f(p) \quad \Rightarrow \quad dx = f'(p)dp\,; \tag{3.2}$$

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = p \quad \Rightarrow \quad dy^{(n-1)} = pdx\,,$$

звідки

$$dy^{(n-1)} = pf'(p)dp\,. \tag{3.3}$$

Функцію $y(p)$ знаходимо зі співвідношення (3.3) *n*-кратним інтегруванням із урахуванням рівності (3.2):

$$y^{(n-1)} = \int pf'(p)dp + C_1,$$

$$\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = \int pf'(p)dp + C_1 \quad \Rightarrow \quad dy^{(n-2)} = \left(\int pf'(p)dp + C_1\right)dx = \left(\int pf'(p)dp + C_1\right)f'(p)dp\,,$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int pf'(p)dp + C_1\right)f'(p)dp + C_2$$

тощо. Позначивши кінцевий результат *n*-кратного інтегрування співвідношення (3.3) через $y = g(p, C_1, ..., C_n)$, отримаємо загальний розв'язок ДР (3.1) у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = f(p), \\ y = g(p, C_1, ..., C_n). \end{cases}$$

в) Якщо рівняння (3.1) допускає подвійну параметризацію у вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(p), \\ y^{(n)} = \psi(p), \end{cases} \tag{3.4}$$

тоді з формул (3.4) маємо:

$$x = \varphi(p) \quad \Rightarrow \quad dx = \varphi'(p)dp\,; \tag{3.5}$$

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \psi(p) \quad \Rightarrow \quad dy^{(n-1)} = \psi(p)dx\,,$$

звідки

$$dy^{(n-1)} = \psi(p)\varphi'(p)dp\,. \tag{3.6}$$

Функцію $y(p)$ знаходимо зі співвідношення (3.6) *n*-кратним інтегруванням із урахуванням рівності (3.5):

$$y^{(n-1)} = \int \psi(p)\varphi'(p)dp + C_1,$$

$$\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = \int \psi(p)\varphi'(p)dp + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad dy^{(n-2)} = \left(\int \psi(p)\varphi'(p)dp + C_1\right)dx = \left(\int \psi(p)\varphi'(p)dp + C_1\right)\varphi'(p)dp\,,$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int \psi(p)\varphi'(p)dp + C_1\right)\varphi'(p)dp + C_2$$

тощо. Позначивши кінцевий результат n-кратного інтегрування співвідношення (3.6) через $y = g(p, C_1, ..., C_n)$, отримаємо загальний розв'язок ДР (3.1) у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(p), \\ y = g(p, C_1, ..., C_n). \end{cases}$$

Зауважимо, що всі формули випадку ***в)*** очевидно поширюються на випадок ***б)***, якщо в (3.4) покласти

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \equiv f(p), \\ y^{(n)} = \psi(p) \equiv p. \end{cases}$$

2. *Диференціальне рівняння вигляду*

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0. \qquad (3.7)$$

а) Якщо рівняння (3.7) розв'язне відносно $y^{(n)}$, тобто подається у вигляді $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$, тоді його аналогічно до ДР типу (2.2) можна зінтегрувати шляхом введення нової невідомої функції

$$y^{(n-1)} = z(x) \quad \Rightarrow \quad y^{(n)} = z'(x).$$

Маємо:

$$\frac{dz}{dx} = f(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{f(z)} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{f(z)} = x + C_1.$$

Виразивши з останньої рівності $z = \varphi(x, C_1)$, для знаходження загального розв'язку ДР (3.7) одержимо рівняння

$$y^{(n-1)} = \varphi(x, C_1),$$

яке можна зінтегрувати із застосуванням формули Коші (2.1).

б) Якщо рівняння (3.7) допускає подвійну параметризацію у вигляді

$$\begin{cases} y^{(n)} = \varphi(p), \\ y^{(n-1)} = \psi(p), \end{cases} \qquad (3.8)$$

тоді з формул (3.8) маємо:

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \varphi(p) \quad \Rightarrow \quad dy^{(n-1)} = \varphi(p)dx,$$

$$y^{(n-1)} = \psi(p) \quad \Rightarrow \quad dy^{(n-1)} = \psi'(p)dp,$$

звідки

$$dx = \frac{\psi'(p)}{\varphi(p)}dp \quad \Rightarrow \quad x = \int \frac{\psi'(p)}{\varphi(p)}dp + C_1; \qquad (3.9)$$

$$\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = \psi(p) \quad \Rightarrow \quad dy^{(n-2)} = \psi(p)dx = \frac{\psi(p)\psi'(p)}{\varphi(p)}dp. \qquad (3.10)$$

Функцію $y(p)$ знаходимо зі співвідношення (3.10) $(n-1)$-кратним інтегруванням із урахуванням рівності (3.9):

$$y^{(n-2)} = \int \frac{\psi(p)\psi'(p)}{\varphi(p)}dp + C_2,$$

$$\frac{dy^{(n-3)}}{dx}=\int\frac{\psi(p)\psi'(p)}{\varphi(p)}dp+C_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad dy^{(n-3)}=\left(\int\frac{\psi(p)\psi'(p)}{\varphi(p)}dp+C_2\right)dx=\left(\int\frac{\psi(p)\psi'(p)}{\varphi(p)}dp+C_2\right)\frac{\psi'(p)}{\varphi(p)}dp,$$

$$y^{(n-3)}=\int\left(\int\frac{\psi(p)\psi'(p)}{\varphi(p)}dp+C_2\right)\frac{\psi'(p)}{\varphi(p)}dp+C_3$$

тощо. Позначивши кінцевий результат $(n-1)$-кратного інтегрування співвідношення (3.10) через $y=g(p,C_2,...,C_n)$, отримаємо загальний розв'язок ДР (3.7) у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x=\int\dfrac{\psi'(p)}{\varphi(p)}+C_1, \\ y=g(p,C_2,...,C_n). \end{cases}$$

Зауважимо, що всі формули випадку ***б)*** очевидно поширюються і на випадок, коли рівняння (3.7) розв'язне відносно $y^{(n-1)}$, тобто подається у вигляді $y^{(n-1)}=f(y^{(n)})$, якщо в (3.8) покласти

$$\begin{cases} y^{(n)}=\varphi(p)\equiv p, \\ y^{(n-1)}=\psi(p)\equiv f(p). \end{cases}$$

3. *Диференціальне рівняння вигляду*

$$F(y^{(n)},y^{(n-2)})=0. \tag{3.11}$$

а) Якщо рівняння (3.11) розв'язне відносно $y^{(n)}$, тобто подається у вигляді $y^{(n)}=f(y^{(n-2)})$, тоді його аналогічно до ДР типу (2.2) можна зінтегрувати шляхом введення нової невідомої функції

$$y^{(n-2)}=z(x) \quad \Rightarrow \quad y^{(n)}=z''(x). \tag{3.12}$$

Маємо:

$$z''=f(z) \quad \Rightarrow \quad 2z'z''=2f(z)z',$$

звідки

$$\frac{d(z'^2)}{dx}=2f(z)\frac{dz}{dx} \quad \Rightarrow \quad d(z'^2)=2f(z)dz \quad \Rightarrow \quad z'^2=2\int f(z)dz+C_1,$$

а отже,

$$\frac{dz}{dx}=\pm\sqrt{2\int f(z)dz+C_1} \quad \Rightarrow \quad dx=\pm\frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz+C_1}}, \tag{3.13}$$

тобто

$$x=\pm\int\frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz+C_1}}+C_2.$$

Тепер повернемося до заміни (3.12):

$$\frac{dy^{(n-3)}}{dx}=z \quad \Rightarrow \quad dy^{(n-3)}=zdx=\pm\frac{zdz}{\sqrt{2\int f(z)dz+C_1}}. \tag{3.14}$$

Функцію $y(z)$ знаходимо зі співвідношення (3.14) $(n-2)$-кратним інтегруванням із урахуванням рівності (3.13):

$$y^{(n-3)} = \pm\int \frac{zdz}{\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} + C_3,$$

$$\frac{dy^{(n-4)}}{dx} = \pm\int \frac{zdz}{\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} + C_3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad dy^{(n-4)} = \left(\pm\int \frac{zdz}{\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} + C_3 \right) dx =$$

$$= \pm\left(\pm\int \frac{zdz}{\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} + C_3 \right) \frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}},$$

$$y^{(n-4)} = \pm\int\left(\pm\int \frac{zdz}{\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} + C_3 \right) \frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} + C_4$$

тощо. Позначивши кінцевий результат $(n-2)$-кратного інтегрування співвідношення (3.14) через $y = g(z, C_1, C_3, ..., C_n)$, отримаємо загальний розв'язок ДР (3.11) у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \pm\int \dfrac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} + C_2, \\ y = g(z, C_1, C_3, ..., C_n). \end{cases}$$

б) Якщо рівняння (3.11) допускає подвійну параметризацію у вигляді

$$\begin{cases} y^{(n)} = \varphi(p), \\ y^{(n-2)} = \psi(p), \end{cases} \tag{3.15}$$

тоді з формул (3.15) маємо:

$$y^{(n-1)} = \frac{dy^{(n-2)}}{dx} = \psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

$$y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \psi''(p)\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + \psi'(p)\frac{d^2p}{dx^2} \equiv \varphi(p). \tag{3.16}$$

Отримане співвідношення (3.16) є ДР другого порядку типу (3.7). Зінтегрувавши його, знаходимо $x = \omega(p, C_1, C_2)$. Тоді згідно з (3.15)

$$\frac{dy^{(n-3)}}{dx} = \psi(p) \quad \Rightarrow \quad dy^{(n-3)} = \psi(p)dx = \psi(p)\omega'(p, C_1, C_2)dp. \tag{3.17}$$

Функцію $y(p)$ знаходимо зі співвідношення (3.17) $(n-2)$-кратним інтегруванням із урахуванням рівності $dx = \omega'(p, C_1, C_2)dp$:

$$y^{(n-3)} = \int \psi(p)\omega'(p, C_1, C_2)dp + C_3,$$

$$\frac{dy^{(n-4)}}{dx} = \int \psi(p)\omega'(p, C_1, C_2)dp + C_3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad dy^{(n-4)} = \left(\int \psi(p)\omega'(p, C_1, C_2)dp + C_3\right)dx =$$

$$= \left(\int \psi(p)\omega'(p, C_1, C_2)dp + C_3\right)\omega'(p, C_1, C_2)dp,$$

$$y^{(n-4)} = \int \left(\int \psi(p)\omega'(p, C_1, C_2)dp + C_3\right)\omega'(p, C_1, C_2)dp + C_4$$

тощо. Позначивши кінцевий результат $(n-2)$-кратного інтегрування співвідношення (3.17) через $y = g(p, C_1, ..., C_n)$, отримаємо загальний розв'язок ДР (3.11) у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \omega(p, C_1, C_2), \\ y = g(p, C_1, ..., C_n). \end{cases}$$

Зауважимо, що всі формули випадку ***б)*** очевидно поширюються і на випадок, коли рівняння (3.11) розв'язне відносно $y^{(n-2)}$, тобто подається у вигляді $y^{(n-2)} = f(y^{(n)})$, якщо в (3.15) покласти

$$\begin{cases} y^{(n)} = \varphi(p) \equiv p, \\ y^{(n-2)} = \psi(p) \equiv f(p). \end{cases}$$

Джерела:

Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Для втузов, т. 2. – М.: Наука, 1970. – С. 59-62.

Маринець К. В. Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи диференціальних рівнянь першого порядку. – Навчальний посібник з курсу «Диференціальні рівняння», частина II. – Ужгород: «Говерла», 2017. – С. 3-19.