Курс: «Диференціальні рівняння» **ст. викл. Рего В. Л.**
До Модуля 1
Цикл лекцій по темах розділу:

РІВНЯННЯ В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ ТА ЗВІДНІ ДО НИХ

1. Рівняння в повних диференціалах. Умова Ейлера

Означення 1. Диференціальне рівняння (ДР) вигляду

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad (1.1)$$

де M і N – задані неперервні функції своїх аргументів, називається ***рівнянням у повних диференціалах*** (РПД), якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $f(x,y)$. У такому випадку ДР (1.1) подається у вигляді

$$df(x,y) = 0,$$

а отже, його загальний інтеграл визначається рівністю

$$f(x,y) = C. \qquad (1.2)$$

Теорема 1.1 (*умова Ейлера*). Для того, щоб ДР (1.1) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і досить виконання ***умови Ейлера***

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (1.3)$$

Доведення. Нехай ДР (1.1) є рівнянням у повних диференціалах. Тоді воно подається у вигляді

$$df(x,y) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0. \qquad (1.4)$$

Порівнюючи (1.4) із (1.1), отримуємо рівності

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y). \qquad (1.5)$$

Система (1.5) має розв’язок за виконання умови

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

оскільки для неперервної функції шлях обчислення мішаної похідної не змінює результату. Підставивши в останню рівність значення частинних похідних із (1.5), одержимо умову Ейлера (1.3).

Нехай тепер виконується умова Ейлера (1.3). Покажемо, що тоді (1.1) є РПД, тобто існує така функція $f(x,y)$, повним диференціалом якої є ліва частина рівності (1.1). Припустимо, що така функція існує, тоді вона є розв’язком системи (1.5). Побудуємо цей розв’язок.

Із першого рівняння системи (1.5) маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \varphi(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} M'_y(t,y)dt + \varphi'(y),$$

де x_0 – довільна стала з області визначеності підінтегральної функції, а $\varphi(y)$ – довільна функція змінної y.
Застосувавши в останній рівності умову Ейлера (1.3), одержимо

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} N'_x(t,y)dt + \varphi'(y) = N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y).$$

Тоді на підставі другого з рівнянь системи (1.5)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \quad \Rightarrow \quad N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y) = N(x,y) \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = N(x_0,y),$$

звідки

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt + C_1,$$

де C_1 – довільна стала, y_0 – деяке значення з області визначеності підінтегральної функції. Отже, шукана функція $f(x,y)$ існує і дається формулою

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt + C_1,$$

а це означає, що ДР (1.1) є рівнянням у повних диференціалах.
Зауважимо, що доведення теореми дає одночасно спосіб побудови загального інтеграла (1.2) РПД (1.1). Підставивши знайдену $f(x,y)$ в (1.2) і поклавши для визначеності $C_1 = 0$ – це не змінює загальності результату, оскільки рівність (1.1) уже містить довільну сталу, – отримаємо загальний інтеграл РПД (1.1) у вигляді

$$\int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt = C.$$

Зауваження. Іноді ДР, що не є рівняннями в повних диференціалах, вдається зінтегрувати, виділивши повні диференціали з частини доданків. Це зокрема стосується ДР, які містять вирази $xdy + ydx = d(xy)$, $xdy - ydx = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = -y^2 d\left(\frac{x}{y}\right)$ тощо. Розв'язування таких рівнянь часто можна значно спростити шляхом введення відповідних підстановок.

2. Інтегрувальний множник. Теореми про існування інтегрувального множника

Припустимо, що ДР (1.1) не є РПД, тобто для нього не виконується умова Ейлера (1.3).

Означення 1. ***Інтегрувальним множником*** для ДР (1.1) називається така функція $\mu(x,y)$, після домноження на яку ліва частина ДР (1.1) стає повним диференціалом, тобто для рівняння

$$(\mu M)dx + (\mu N)dy = 0$$

виконується умова Ейлера:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

З останньої рівності маємо:

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y},$$

або

$$N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (2.1)$$

Таким чином, будь-який розв'язок $\mu(x,y)$ диференціального рівняння з частинними похідними (ДРЧП) (2.1) є інтегрувальним множником для ДР (1.1).
Практичний інтерес становлять випадки, коли інтегрувальний множник є функцією одного аргумента: $\mu=\mu(x)$, $\mu=\mu(y)$ або $\mu=\mu(\omega)$, де $\omega=\omega(x,y)$.

Теорема 2.1 [***існування інтегрувального множника*** $\mu(x)$]. Для того, щоб для ДР (1.1) існував інтегрувальний множник $\mu=\mu(x)$, необхідно й досить виконання умови

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\varphi_1(x). \qquad (2.2)$$

<u>Доведення</u>. Нехай для ДР (1.1) існує інтегрувальний множник $\mu=\mu(x)$. Тоді ця функція є розв'язком ДРЧП (2.1), яке у випадку $\mu=\mu(x)$ можна записати у вигляді

$$\frac{\mu'(x)}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}.$$

Ліва частина останньої рівності є функцією тільки змінної x, тому для існування розв'язку права частина також повинна бути функцією тільки змінної x, тобто має виконуватися умова (2.2), бо інакше інтегрувальний множник залежатиме від іншої змінної y як від параметра, що суперечить припущенню.
Нехай тепер виконується умова (2.2). Тоді для інтегрувального множника $\mu(x)$ із (2.1) одержимо звичайне ДР

$$\frac{\mu'(x)}{\mu}=\varphi_1(x).$$

Останнє рівняння очевидно має розв'язок, наприклад

$$\mu(x)=\mathrm{e}^{\int\varphi_1(x)dx}. \qquad (2.3)$$

Отже, для ДР (1.1) існує інтегрувальний множник $\mu(x)$, який можна знайти за формулою (2.3).

Теорема 2.2 [***існування інтегрувального множника*** $\mu(y)$]. Для того, щоб для ДР (1.1) існував інтегрувальний множник $\mu=\mu(y)$, необхідно й досить виконання умови

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\varphi_2(y). \qquad (2.4)$$

<u>Доведення</u>. Нехай для ДР (1.1) існує інтегрувальний множник $\mu=\mu(y)$. Тоді ця функція є розв'язком ДРЧП (2.1), яке у випадку $\mu=\mu(y)$ можна записати у вигляді

$$\frac{\mu'(y)}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}.$$

Ліва частина останньої рівності є функцією тільки змінної y, тому для існування розв'язку права частина також повинна бути функцією тільки змінної y, тобто має виконуватися умова (2.4), бо інакше інтегрувальний множник залежатиме від іншої змінної x як від параметра, що суперечить припущенню.

Нехай тепер виконується умова (2.4). Тоді для інтегрувального множника $\mu(y)$ із (2.1) одержимо звичайне ДР

$$\frac{\mu'(y)}{\mu}=\varphi_2(y).$$

Останнє рівняння очевидно має розв'язок, наприклад

$$\mu(y)=e^{\int \varphi_2(y)dy}. \tag{2.5}$$

Отже, для ДР (1.1) існує інтегрувальний множник $\mu(y)$, який можна знайти за формулою (2.5).

Теорема 2.3 **[*існування інтегрувального множника* $\mu(\omega)$]**. Для того, щоб для ДР (1.1) існував інтегрувальний множник $\mu=\mu(\omega)$, де $\omega=\omega(x,y)$, необхідно й досить виконання умови

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x}-M\frac{\partial \omega}{\partial y}}=\varphi_3(\omega). \tag{2.6}$$

Доведення. Нехай для ДР (1.1) існує інтегрувальний множник $\mu=\mu(\omega)$, де $\omega=\omega(x,y)$ деяка відома функція двох змінних. Тоді $\mu=\mu(\omega)$ є розв'язком ДРЧП (2.1), яке у цьому випадку можна записати у вигляді

$$\frac{\mu'(\omega)}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x}-M\frac{\partial \omega}{\partial y}}.$$

Ліва частина останньої рівності є функцією тільки змінної ω, тому для існування розв'язку права частина також повинна бути функцією тільки змінної ω, тобто має виконуватися умова (2.6), бо інакше інтегрувальний множник залежатиме від інших змінних x, y як від параметрів, що суперечить припущенню.

Нехай тепер виконується умова (2.6). Тоді для інтегрувального множника $\mu(\omega)$ із (2.1) одержимо звичайне ДР

$$\frac{\mu'(\omega)}{\mu}=\varphi_3(\omega).$$

Останнє рівняння очевидно має розв'язок, наприклад

$$\mu(\omega)=e^{\int \varphi_3(\omega)d\omega}. \tag{2.7}$$

Отже, для ДР (1.1) існує інтегрувальний множник $\mu(\omega)$, де $\omega=\omega(x,y)$, який можна знайти за формулою (2.7).

Зрозуміло, що випадок $\mu=\mu(\omega)$ є значно складнішим для реалізації, ніж два попередні, адже тут для відшукання інтегрувального множника спершу необхідно підібрати аргумент $\omega=\omega(x,y)$, для якого справджується критерій (2.6).

Найоптимальнішим є варіант, коли підбором функції $\omega(x, y)$ ліву частину рівності (2.6) вдається перетворити на сталу величину, адже тоді критерій виконується автоматично. Інакше пробують задовольнити критерій (2.6), підставляючи замість $\omega(x, y)$ простіші аргументи, наприклад: $x \pm y$, $x^2 \pm y^2$, xy, xy^{-1} або $x^{-1}y$. Якщо домогтися виконання умови Теореми 2.3 таким чином не вдалося, то доцільніше шукати інші шляхи інтегрування ДР (1.1).

Зауважимо, що інтегрувальні множники можна підібрати і для деяких вивчених раніше інтегровних типів ДР першого порядку. Зокрема, для лінійного ДР

$$y' + p(x)y = q(x)$$

існує інтегрувальний множник

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)dx},$$

який можна отримати з застосуванням Теореми 2.1.

Для ДР з відокремлюваними змінними

$$f_1(x)f_2(y)dx + g_1(x)g_2(y)dy = 0$$

існує очевидний інтегрувальний множник

$$\mu(x, y) = \frac{1}{f_2(y)g_1(x)},$$

звідки випливає: відокремлення змінних зводиться до домноження на деякий інтегрувальний множник. Цю властивість можна використати для знаходження інтегрувальних множників інших інтегровних типів ДР першого порядку, що зводяться до ДР з відокремлюваними змінними. Зокрема, для нелінійного однорідного рівняння вигляду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

де M і N – однорідні функції однакового виміру, інтегрувальний множник виражається формулою

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xM(x, y) + yN(x, y)}.$$

Джерело:

Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – Стор. 94-103.