Інститут математики НАН України

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Ужгородський національний університет

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

Міжнародної наукової конференції

"ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ"

присвяченої 70-річчю академіка НАН України М.О.Перестюка

Ужгород, 19–21 травня, 2016 р.

Ужгород—2016

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine

Taras Shevchenko Kyiv National University

Uzhhorod National University

ABSTRACTS

of the International Scientific Conference

"DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS"

dedicated to the 70-th anniversary of academician of NAS of Ukraine Mykola Perestyuk

Uzhhorod, May, 19–21, 2016

Uzhhorod—2016

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ

Голова програмного комітету:

Самойленко А.М. - доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України, директор Інституту математики НАН України

Члени програмного комітету:

Король І. І. (заступник голови) (УжНУ, Ужгород)
Маринець В.В. (заступник голови) (УжНУ, Ужгород)
Ashirov O. (Туркменістан)
Бойчук О.А. (Ін-т матем. НАН України, Київ)
Бігун Я.Й. (ЧНУ, Чернівці)
Городній М.Ф. (КНУ, Київ)
Іванчов М.І. (ЛНУ, Львів)
Євтухов В.М. (ОНУ, Одеса)
Задирака В.К. (Ін-т кібернет. НАН України, Київ)
Ilolov M.I. (Таджикістан)
Каленюк П.І. (НУ "ЛП Львів)
Капустян О.В. (КНУ, Київ)
Karandzhulov L.I. (Болгарія)
Kenjebayev K.K. (Казахстан)
Kiguradze I.T. (Тбілісі, Грузія)
Конет І.М. (КПНУ, Кам'янець-Подільський)
Коробов В.І. (ХНУ, Харків)
Кушнір Р.М. (ІППММ, м. Львів)
Луковський І.О. (Ін-т матем. НАН України, Київ)
Макаров В.Л. (Ін-т матем. НАН України, Київ)
Парасюк І.О. (КНУ, Київ)
Перестюк М.О. (КНУ, Київ)
Петришин Р.І. (ЧНУ, Чернівці)
Пташник Б.Й. (ІППММ, Львів)
Ronto A. (Брно, Чехія)
Ronto M. (Мішкольц, Угорщина)
Самойленко В.Г. (КНУ, Київ)
Слюсарчук В.Ю. (НУВГП, Рівне)
Станжицький О.М. (КНУ, Київ)
Tvrdy M. (Прага, Чеська республіка)
Теплінський Ю.В. (КПНУ, Кам'янець-Подільський)
Трофімчук С.І. (Чілі)
Черевко І.М. (ЧНУ, Чернівці)
Чикрій А.О. (Ін-т кібернет. НАН України, Київ)

ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ КОМІТЕТ

Асроров Ф.А., Балога С.І., Гапак Т.С., Добридень А.В., Король Ю.Ю., Маринець К.В., Семчишин Г.Я.

Підготовка матеріалів до друку: Маринець К. В.

PROGRAMME COMMITTEE

Head of the Programme Committee:

Samoilenko A.M.- Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academic of NAS of Ukraine, Director of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine

Members of the Programme Committee:

Korol I.I. (Vice-Chairman), Uzhhorod, Ukraine
Marynets V.V. (Vice-Chairman), Uzhhorod, Ukraine
Ashirov O.P. (Ashgabat, Turkmenistan)
Boichuk O.A. (Kyiv, Ukraine)
Bigun Ya.I. (Chernivtsi, Ukraine)
Gorodnii M.F. (Kyiv, Ukraine)
Ivanchov M.I. (Lviv, Ukraine)
Jevtuhov V.M. (Odesa, Ukraine)
Zadiraka V.K. (Kyiv, Ukraine)
Ilolov M.I. (Dushanbe, Tajikistan)
Kalenjuk P.I. (Lviv, Ukraine)
Kapustyan O.V. (Kyiv, Ukraine)
Karandzhulov L.I. (Sofia, Bolgaria)
Kenjebayev K.K. (Astana, Kazakhstan)
Kiguradze I.T. (Tbilisi, Georgia)
Konet I.M. (Kamianets-Podilskyi, Ukraine)
Korobov V.I. (Kharkiv, Ukraine)
Kushnir R.M. (Lviv, Ukraine)
Lukovskij I.O. (Kyiv, Ukraine)
Makarov V.L. (Kyiv, Ukraine)
Parasyuk I.O. (Kyiv, Ukraine)
Perestyuk M. O. (Kyiv, Ukraine)
Petryshyn R.I. (Chernivtsi, Ukraine)
Ptashnyk B.J. (Lviv, Ukraine)
Ronto A. (Brno, Czech Republic)
Ronto M. (Miskolc, Hungary)
Slyusarchuk V.Yu. (Rivne, Ukraine)
Stanzhytskyj O.M. (Kyiv, Ukraine)
Tvrdy M. (Prague, Czech Republic)
Teplinskyj Ju.V. (Kamianets-Podilskyi, Ukraine)
Trofimchuk S.I. (Talca, Chile)
Cherevko I.M. (Chernivtsi, Ukraine)
Chikrii A.O. (Kyiv, Ukraine)

ORGANIZING COMMITTEE

Asrorov F.A., Baloga S.I., Hapak T.S., Dobryden A.V., Korol Yu.Yu., Marynets K. V., Semchyshyn G.Ya.

Preparation of abstracts to the publication: Marynets K. V.

Присвячується 70–річчю
академіка Миколи Олексійовича Перестюка

Перестюк Микола Олексійович — вчений у галузі теорії диференційних рівнянь, академік Національної академії наук України (2009), доктор фізико-математичних наук, професор, заслужений діяч науки і техніки України (2002), лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки (1996).

Народився 01 січня 1946 року в с. Плоска Славутського району Хмельницької області. У 1963 році закінчив із золотою медаллю Мирутинську середню школу і в цьому ж році вступив на механіко-математичний факультет Київського університету ім. Тараса Шевченка, з яким доля пов'язала все його подальше життя. Після закінчення навчання в університеті в 1968 році за рекомендацією Вченої ради факультету вступає до аспірантури, а вже з грудня 1969 року розпочинає працювати на факультеті: спочатку на посаді асистента, потім доцента (1974), професора (1986), завідувача кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь (1988) і за сумісництвом – декан механіко-математичного факультету (1987-2003).

Як вчений Микола Перестюк виріс в всесвітньо відомій Київській школі з нелінійної механіки Крилова-Боголюбова-Митропольского. Його вчителем є видатний математик сучасності академік А. М. Самойленко. Під його науковим керівництвом Микола Олексійович захистив у січні 1972 року кандидатську дисертацію, а в лютому 1986 року і докторську.

Микола Олексійович – автор понад 200 наукових і науково-методичних праць, серед яких 3 монографії, 20 підручників і навчальних посібників для студентів вузів, учителів середніх закладів освіти, деякі з них перекладені російською, англійською і французькою мовами.

Наукові інтереси М. О. Перестюка охоплюють широке коло складних та актуальних задач теорії диференціальних рівнянь і нелінійної механіки, які відносяться до розробки нового напрямку цієї теорії — диференціальних рівнянь з імпульсною дією, їх застосування до дослідження коливних процесів, які зазнають короткочасні (імпульсні) збурення.

М. О. Перестюк вперше встановив ефективні критерії стійкості розв'язків диференціальних рівнянь з імпульсною дією як у фіксовані моменти часу, так і в моменти попадання зображуючої точки в задані множини розширеного фазового простору. Ці критерії носять завершений і конструктивний характер і успішно використовуються при досдідженні стійкості руху конкретних механічних систем. Введення аналогу функції Гріна-Самойленка задачі про інваріантну множину лінійного розширення розривної динамічної системи дозволило розробити теорію збурення інваріантних множин розривних динамічних систем, яка багата за змістом для багатьох аспектів теорії компактних інтегральних множин нелінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

М. О. Перестюк розробив алгоритми наближеного розв'язку достатньо широкого класу диференціальних рівнянь з імпульсною дією, довів аналоги глибоких теорем М. М. Боголюбова по обгрунтуванню методу усереднення на нескінченому часовому проміжку, встановив ознаки існування розв'язків, що відповідають розривним коливним режимам.

Наукові результати М. О. Перестюка відомі спеціалістам і визнані ними. Ці результати доповідались на багатьох міжнародних, всесоюзних і республіканських конференціях, а також у лекціях М. О. Перестюка, прочитаних в університетах усіх країн СНД, Болгарії, Польщі, Угорщини, Чехії, Куби, Греції, Канади, США, Швеції, Фінляндії, Німеччини, Югославії, Бразилії, Італії, Турції.

Під науковим керівництвом Миколи Олексійовича захищено 21 кандидатську і 4 докторські дисертації. Його учні успішно працюють не тільки в Україні, а й в інших країнах: в США, Узбекистані, Казахстані, Туркменистані, Турції, Таджикистані, Іраці.

Микола Олексійович веде інтенсивну науково-громадську роботу. Він є членом семи редколегій наукових періодичних видань, в тому числі двох зарубіжних, головою спеціалізованої вченої ради по захисту докторських і кандидатських дисертацій при Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, членом такої ж ради в інституті математики НАН України.

М. О. Перестюк входить до складу бюро Відділення математики НАН Україні, комісії ДАК Міністерства освіти і науки України, є головою комісії з математики науково-методичної ради Міністерства освіти і науки України.

ЗМІСТ

ON THE NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LOADED IMPULSIVE HYPERBOLIC SYSTEM

Assanova A. T., Kadirbayeva Zh. M.

assanova@math.kz, apelman86pm@mail.ru
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan

Consider the nonlocal boundary value problem for system of loaded hyperbolic equations second order with impulse effects at the fixed moments on the rectangle $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \Big\{ M_i(t,x)\frac{\partial u(t_i+0,x)}{\partial x} + L_i(t,x)\frac{\partial u(t_i+0,x)}{\partial t} +$$

$$+ K_i(t,x)u(t_i+0,x) \Big\}, \qquad t \neq t_i, \tag{1}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$P_0(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} + S_0(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial x} = \varphi_0(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

$$P_i(x)\frac{\partial u(t_i+0,x)}{\partial x} - S_i(x)\frac{\partial u(t_i-0,x)}{\partial x} =$$

$$= \sum_{j=1}^{i-1} U_j(x)\frac{\partial u(t_j-0,x)}{\partial x} + \varphi_i(x), \qquad i = \overline{1,k}, \tag{4}$$

where $u = col(u_1, ..., u_n)$, the $(n \times n)$ matrices $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, the n vector-function $f(t,x)$ are continuous on Ω, the $(n \times n)$ matrices $M_i(t,x)$, $L_i(t,x)$, $K_i(t,x)$, $i = \overline{1,k}$, are continuous on Ω, the n vector - function $\psi(t)$ is continuously differentiable on $[0,T]$, the $(n \times n)$ matrices $P_j(x)$, $S_j(x)$, the n vector-functions $\varphi_j(x)$, $j = \overline{0,k}$, are continuous on $[0,\omega]$, the $(n \times n)$ matrices $U_s(x)$, $s = \overline{1,k}$ are continuous on $[0,\omega]$, $\quad 0 < t_1 < t_2 < ... < t_k < T$.

In this communication are studied of the questions of existence and uniqueness of solution to problem (1)–(4). Conditions of unique solvability of problem (1)–(4) are received in the terms of initial data and the algorithms of finding its solution are proposed.

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR COUPLED SYSTEMS OF PARABOLIC EQUATIONS WITH VARIABLE DELAY

Bokalo M.M, Ilnytska O.V.

mm.bokalo@gmail.com, ol.ilnytska@gmail.com
Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine

Let n, M, L be natural numbers; Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ with the boundary $\partial\,\Omega$; $T > 0$; $Q := \Omega \times (0, T]$, $\Sigma := \partial\,\Omega \times (0, T]$.

Consider a system

$$\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{i,kl}(x,t)\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x,t)\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_k} + a_i(x,t)u_i(x,t) -$$

$$-g_i\big(x,t,w(x,t),w_\tau(x,t)\big) = f_i(x,t), \quad (x,t) \in Q, \quad i = 1, ..., M, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v_j(x,t)}{\partial t} + b_j(x,t)v_j(x,t) - g_{M+j}\big(x,t,w(x,t),w_\tau(x,t)\big) =$$

$$= f_{M+j}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \quad j = 1, ..., L, \qquad (2)$$

where

$$w = (u_1, \dots, u_M; v_1, \dots, v_L),\ w_\tau(x,t) =$$

$$= (u_{1,\tau_1}, \dots, u_{M,\tau_M}; v_{1,\tau_{M+1}}, \dots, v_{L,\tau_{M+L}}) :=$$

$$:= \big(u_1(x,t-\tau_1(t)), \dots, u_M(x,t-\tau_M(t)); v_1(x,t-\tau_{M+1}(t)), \dots, v_L(x,t-\tau_{M+L}(t))\big),$$

and τ_s $(s = 1, ..., M + L)$ are continuous nonnegative functions on $[0, T]$.

For each $s \in \{1, \dots, M + L\}$ denote by $E_{s,0}$ a set that contains the numbers $t - \tau_s(t)$ such that $t - \tau_s(t) \leq 0$ when $t \in [0, T]$, and also the number 0.

Consider the problem of finding of vector-function $w = (u_1, \dots, u_M; v_1, \dots, v_L)$ such that $u_i \in C\big(\overline{\Omega} \times (E_{i,0} \cup (0, T])\big) \cap C^{2,1}(Q)$, $(i = 1, ..., M)$, $v_j \in C\big(\overline{\Omega} \times (E_{M+j,0} \cup (0, T])\big) \cap C^{0,1}(\overline{Q})$, $(j = 1, ..., L)$ which satisfies the system (1), (2), boundary conditions

$$R_i w(x,t) := u_i(x,t) = h_i(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \quad i = 1, ..., M,$$

and initial conditions

$$G_s w(x,t) := w_s(x,t) = w_{s,0}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times E_{s,0}, \quad s = 1, \dots, M + L.$$

Under certain additional conditions on the data-in the existence and uniqueness of the classical solution of this problem are proved. Also the estimate of its solution is obtained.

OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR SYSTEMS GOVERNED BY NONLINEAR PARABOLIC PROBLEM WITHOUT INITIAL CONDITIONS

Bokalo M.M., Tsebenko A.M.

mm.bokalo@gmail.com, amtseb@gmail.com
Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) be a bounded domain with a regular boundary Γ, $S := (-\infty, 0]$, $Q := \Omega \times S$, $\Sigma := \Gamma \times S$. For arbitrary $\omega \in \mathbb{R}$, $\alpha, \gamma \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(S)$ ($\alpha(t) > 0$ and $\gamma(t) > 0$ for almost every $t \in S$), and a Hilbert space X, we denote by $L^2_{\omega,\alpha,\gamma}(S; X)$ the space of functions $f : S \to X$ such that

$$\int_S \gamma(t) e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \|f(t)\|_X^2 dt < \infty.$$

Let $U := \{v \in L^{\infty}(Q) \,|\, v \geq 0 \quad \text{a. e. in} \quad Q\}$, U_∂ is a convex and closed set in U. Given control $v \in U$, the state $y \in L^2_{\omega,\alpha,\alpha}(S; H^1_0(\Omega)) \cap C(S; L^2(\Omega))$ of evolution system is defined as a weak solution of the problem

$$\begin{gathered} y_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, y, \nabla y) + a_0(x, t, y, \nabla y) \\ + v(x, t) g(x, t, y) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ \lim_{t \to -\infty} e^{2\omega \int_0^t \alpha(s)ds} \int\limits_{\Omega} |y(x, t; v)|^2 \, dx = 0. \end{gathered}$$

Here $f \in L^2_{\omega,\alpha,1/\alpha}(S; L^2(\Omega))$ and $a_i : Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($i = \overline{0, n}$) are Caratheodory functions.

The cost function has the form

$$J(v) = \|y(\cdot, 0; v) - z_0(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu \|v\|^2_{L^{\infty}(Q)}, \quad v \in U,$$

for given $z_0 \in L^2(\Omega)$ and $\mu = \text{const} > 0$.

The problem is to find element $u \in U_\partial$ such that

$$J(u) = \inf_{v \in U_\partial} J(v)\,.$$

Under some additional conditions on the data-in, we prove the existence of a solution of this problem.

ASYMPTOTIC DECOMPOSITION OF LINEAR SINGULARLY PERTURBED MULTISCALE SYSTEMS

Cherevko I.M., Osypova O.

i.cherevko@chnu.edu.ua, shurenkacv@gmail.com
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Ukraine

Let us consider a linear singularly perturbed system described by

$$\prod_{j=0}^{i} \varepsilon_j \dot{x}_i = \sum_{j=0}^{k} A_{ij} x_j, \ i = \overline{0,k}, \tag{1}$$

where $t \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $A_{ij} = A_{ij}(t), \ i,j = \overline{0,k}$, – are $n_i \times n_j$ matrices, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ are small positive parameters.

Let the following conditions are true:

1) matrices $A_{ij}(t), \ i,j = \overline{0,k}$, are uniformly bounded for $t \in \mathbb{R}$,

2) eigenvalues of $\lambda_j = \lambda_j(t), \ j = \overline{1,n_k}$, of the matrix $A_{kk}(t)$ satisfy inequality

$$\mathrm{Re}\lambda_j(A_{kk}) \leq -2\beta < 0.$$

The effective methods of decomposition of the singularly perturbed systems are based on the ideas of the integral manifolds method. The decomposition of system (1) will be performed in k stages.

Theorem. *Let the conditions 1), 2) be true. Then for sufficiently small parameters $\varepsilon_i, i = \overline{1,k}$, there exists the nonsingular transformation of variables which transforms the system (1) to $(k+1)$ independent subsystems*

$$\begin{cases} \dot{y}_0^k = B_{00}^k y_0^k, \\ \prod\limits_{j=0}^{i} \varepsilon_j \dot{y}_i^{k-i+1} = B_{ii}^{k-i+1} y_i^{k-i+1}, i = \overline{1,k}. \end{cases} \tag{2}$$

By completing k stages of decomposition of the system (1) by the scheme described in paper [1], we obtain the "block-diagonal"system (2), and the coefficients of the asymptotic decomposition of the transformation can be found from recurrent algebraic correlations.

1. *I. Cherevko and O. Osypova.* Asymptotic decomposition of linear singularly perturbed multiscale systems // Miskolc Mathematical Notes. – Vol. 16 (2015), No. 2, pp. 729–745.

ISOLATED BOUNDED SOLUTIONS TO NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR PROPERTIES

Dzhumabaev D. S., Abildaeva A. D.

dzhumabaev@list.ru, azizakz@mail.ru
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan

Consider the nonlinear ordinary differential equation

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad t \in R = (-\infty, \infty), \qquad x \in R^n, \tag{1}$$

where $f : R \times R^n \to R^n$ is continuous.

A bounded on R solution to Eq. (1) is called a solution to problem 1.

This report is devoted to the questions related to isolated solutions of problem 1. It is well-known that isolated in usual sense bounded on R solution to Eq. (1) are not stable with respect to perturbations of the right-hand side of differential equations.

Therefore, definition of a new isolated solution to problem 1 is introduced. The definition is a modification of the definition on isolated solution to nonlinear boundary value problems to ordinary differential equations given in [1].

Conditions for the existence of isolated solution to problem 1 and the stability of isolated solution to problem 1 by perturbations of the right-hand side of Eq. (1) are established. Using data of Eq. (1) we construct a nonlinear two-point boundary value problem for Eq. (1) on finite interval. Interrelations between properties of problem 1 and constructed regular boundary value problem are set.

1. *Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M.* A Parametrization Method for Solving Nonlinear Two-Point Boundary Value Problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. Vol. 47. №1. P. 37-61.

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH REGULARLY VARYING NONLINEARITIES

Evtukhov V.M., Korepanova K.S.

evmod@i.ua, ye.korepanova@gmail.com
Odessa National University, Ukraine

We consider a differential equation

$$y^{(n)} = \alpha p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}), \tag{1}$$

where $n \geq 2$, $\alpha \in \{-1, 1\}$, $p : [a, +\infty[\to]0, +\infty[$ is a continuous function, $a \in \mathbb{R}$, $\varphi_j : \Delta Y_j \to]0; +\infty[$ is a continuous and regularly varying when $y^{(j)} \to Y_j$ function of order σ_j, $j = \overline{0, n-1}$, where ΔY_j is some one-sided neighborhood of the point Y_0, Y_0 is equal to either 0 or $\pm\infty$.

Solutions of the equation (1), that is defined in some left neighborhood of $+\infty$, are monotonous functions and their derivatives of orders up to $n-1$ too. This set of solutions falls into two classes:
1) solutions, for each of that

$$\lim_{t \to +\infty} y^{(k-1)}(t) = \begin{cases} \text{or } \pm\infty, \\ \text{or } 0, \end{cases} \quad (k = \overline{1, n});$$

2) solutions, for each of that exists $k \in \{1, \ldots, n\}$ such as

$$y(t) = t^{k-1} \left[c + o(1)\right] \quad (c \neq 0) \quad \text{when} \;\; t \to +\infty. \tag{2}$$

The first class of solutions of the equation (1) were considered in the work of Klopot A.M. [1]. Necessary and sufficient conditions for the existence of these solutions were derived and asymptotic representations for such solutions when $t \to +\infty$ were established there.

In this paper we present necessary and sufficient conditions for existence of some solutions such as (2) of the equation (1) and more particular case. Moreover, we establish asymptotic formulas when $t \to +\infty$ for their derivatives of orders up to $n-1$ and solve a question of quantity of these solutions.

1. *Klopot, A.M.*, Asymptotic Representations of Solutions of n-Order Differential Equations with Regularly Varying Nonlinearitites, Dis. Kand. Phis.-Mat. Nauk, 2015, 148 p.

EXPONENTIAL DICHOTOMY OF LINEAR SYSTEMS AND ITS ROUGHNESS

Feketa P.

petro.feketa@fh-erfurt.de
University of Applied Sciences Erfurt, Germany

This contribution is devoted to the problem of preservation of expo-nential dichotomy (ED) property of linear system of differential equations under perturbations of the right-hand side. It is well-known [1] that ED property is being preserved under a sufficiently small perturbation. Moreover in [3] it has been proven that ED on semi-axis is robust when the corresponding perturbation term vanishes in infinity. Setting some additional 'commutativity' constraint [2], we further develop this theory to prove the roughness of ED on the whole real axis under such kind of perturbations. This approach was also applied to the invariant tori problem [8]. It has been proven that the perturbation term has to be sufficiently small only in non-wandering set of dynamical system [6,7] in order to preserve the invariant torus existence. Finally, these results have been extended to the problem of invariant toroidal set preservation for a certain class of discontinuous dynamical system [4,5].

1. *W.A. Coppel*, Dichotomies and Reducibility, *J. Diff. Eqs.*, **3**(4): 500-521, 1967.
2. *O. Leontiev, P. Feketa*, A new criterion for the roughness of exponential dichotomy on $\mathbb{R}$, *Miskolc Math. Notes*, **16**(2): 987-994, 2015.
3. *K.J. Palmer*, Exponential dichotomies and transversal homoclinic points, *J. Diff. Eqs.*, **55**(2): 225-256, 1984.
4. *M.O. Perestyuk, P.V. Feketa*, Invariant manifolds of one class of systems of impulsive differential equations, *Nonlinear Oscil.*, **13**(2): 260-273, 2010.
5. *M. Perestyuk, P. Feketa*, Invariant sets of impulsive differential equations with particularities in ω-limit set, *Abstr. Appl. Anal.*, **2011**(ID 970469): 14 p., 2011.
6. *M. Perestyuk, P. Feketa*, On preservation of invariant torus for multifrequency systems, *Ukrainian Math. J.*, **65**(11): 1661-1669, 2014.
7. *M. Perestyuk, P. Feketa*, On preservation of an exponentially stable invariant torus, *Tatra Mt. Math. Publ.*, **63**(1): 215-222, 2015.
8. *A.M. Samoilenko*, Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations, Kluwer, Dordrecht, 1991.

INITIAL–BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR COUNTABLE DEGENERATE HYPERBOLIC SYSTEM

Firman T. I., Peliushkevych O. V.

tarasfirman91@ukr.net, olpelushkevych@ukr.net
Ivan Franko National University in Lviv, Ukraine

Let us consider the initial-boundary value problem for countable semilinear hyperbolic system of differential equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} &= f_i(x,t,u_1,u_2,\ldots,v_1,v_2,\ldots), \;\; i \in \mathbb{N} \\ \frac{\partial v_j}{\partial x} &= g_j(x,t,u_1,u_2,\ldots,v_1,v_2,\ldots), \;\; j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1}$$

For system (1) define initial conditions

$$u_i(x,0) = q_i(x),\, 0 \le x \le l,\, i \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

and boundary conditions for $0 \le t \le T$

$$\begin{aligned} u_i(0,t) &= \gamma_i^0\Big(t, \big(u_s(0,t)\big)_{s\in I_l}\Big), \quad i \in I_0, \\ u_i(l,t) &= \gamma_i^l\Big(t, \big(u_s(l,t)\big)_{s\in I_0}\Big), \quad i \in I_l, \\ v_j(0,t) &= \psi_j\Big(t, \big(u_s(0,t)\big)_{s\in I_l}\Big), \quad j \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{3}$$

where I_0 and I_l – sets of indices

$$I_0 = \Big\{i \in \{1,\ldots\} : \lambda_i(0,t) > 0\Big\}, \qquad I_l = \Big\{i \in \{1,\ldots\} : \lambda_i(l,t) < 0\Big\}.$$

Using Banach theorem under certain assumptions on the continuity functions theorem of existence and uniqueness generalized continuous solutions of the problem (1)–(3) has been prooved.

1. *Andrusyak R. V.* Global classical solvability of a problem with nonlocal conditions for degenerate hyperbolic system of the first order equations / *R. V. Andrusyak, V. M. Kyrylych, O. V. Peliushkevych* // Mat. Stud. – 2012 – V. 38.– N 1. – P. 80–92.
2. *Firman T.* Mixed Problem for Countable Hyperbolic System of Linear Equations / *T. Firman, V. Kyrylych* // Azerbaijan Journal of Mathematics. – 2015. – V.5, №2. – P. 47.

OSCILLATORY PROPERTIES OF SOLUTIONS OF THE EMDEN–FOWLER TYPE DIFFERENTIAL SYSTEMS

Kiguradze I.

kig@rmi.ge

A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia

On an infinite interval $[a,+\infty[$, the Emden–Fowler type nonlinear differential system

$$u_1^{(n_1)} = p_1(t)|u_2|^{\lambda_1}\operatorname{sgn}(u_2), \quad u_2^{(n_2)} = p_2(t)|u_1|^{\lambda_2}\operatorname{sgn}(u_1) \tag{1}$$

is considered, where n_i $(i=1,2)$ are natural numbers, $\lambda_i > 0$ $(i=1,2)$, $a > 0$, and $p_i; [a,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ $(i=1,2)$ are continuous functions.

A solution (u_1,u_2) of system (1) defined on some interval $[a_0,+\infty[\, \subset [a,+\infty[$ is said to be proper if it is not identically zero in any neighbourhood of $+\infty$. A proper solution (u_1,u_2) is said to be oscillatory if each of its components has a sequence of zeros converging to $+\infty$.

We have investigated oscillatory properties of solutions of system (1) in the case where p_1 and p_2 are the functions of constant signs. In particular, we have proved the following theorem.

Theorem. *Let n_1+n_2 be even, $\lambda_1\lambda_2 > 1$, $p_1(t) \geq 0$, $p_2(t) \leq 0$ for $t \geq a$, and*

$$\int_a^{+\infty} p_1(s)\,ds = +\infty, \quad \liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_a^t (t-s)^{n_1-1} s^{(n_2-1)\lambda_1} p_1(s)\,ds}{t^{(n_2-1)\lambda_1}\int_a^t (t-s)^{n_1-1} p_1(s)\,ds} > 0.$$

Then every proper solution of system (**??**) *is oscillatory if and only if*

$$\int_a^{+\infty} t^{n_2-1}\Big[\int_a^t (t-s)^{n_1-1} p_1(s)\,ds\Big]^{\lambda_2} |p_2(t)|\,dt = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x t^{n_1-1}\Big[\int_t^x (s-t)^{n_2-1} |p_2(s)|\,ds\Big]^{\lambda_1} p_1(t)\,dt = +\infty.$$

Supported by the Shota Rustaveli National Science Foundation (Project # FR/317/5-101/12).

BOUNDED SOLUTIONS FOR BOUNDARY VALUE HYPERBOLIC PROBLEMS WITHOUT INITIAL CONDITIONS

Klyuchnyk R., Kmit I.

roman.klyuchnyk@gmail.com, kmit@informatik.hu-berlin.de
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Ukraine

Institute of Mathematics, Humboldt University of Berlin, Germany

We investigate a large class of linear boundary value problems for general first-order one-dimensional hyperbolic systems in the strip, namely

$$\partial_t u_j + a_j(x,t)\partial_x u_j + \sum_{k=1}^{n} b_{jk}(x,t)u_k = f_j(x,t), \quad (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}, \quad j \le n,$$

$$u_j(0,t) = (Ru)_j(t), \quad 1 \le j \le m, \ t \in \mathbb{R},$$
$$u_j(1,t) = (Ru)_j(t), \quad m < j \le n, \ t \in \mathbb{R},$$

where $R = (R_1, ..., R_n)$ is a linear bounded operator in the space of bounded and continuous functions.

We establish conditions for existence and uniqueness of bounded continuous solutions. For that we suppose that the non-diagonal part of the zero-order coefficients vanish at infinity. Moreover, we establish a dissipativity condition in terms of the boundary data and the diagonal part of the zero-order coefficients.

ON EXISTENCE AND UNIQUENESS OF MILD SOLUTION TO THE CAUCHY PROBLEM FOR ONE NEUTRAL STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION OF REACTION-DIFFUSION TYPE

Kravets V. I., Tsukanova A. O.

v_i_kravets@list.ru, shugaray@mail.ru

Tavrichesky State Agrotechnology University, Melitopol, Ukraine,

National Technical University of Ukraine "Kiev Polytechnic Institute"

Questions of existence and uniqueness of solutions to SDEs under some given initial-boundary conditions in various functional (particularly, in Hilbert) spaces are considered in number of works. Exists special interest for nonlinear SDEs, the essential feature of which is the phenomena of delay, — nonlinear SDEs of neutral type. In [1] its authors have considered an initial-value problem for an abstract equation of such type in Hilbert space, and have proved theorem on existence and uniqueness of its solution. However, conditions of this theorem in a general form are rather difficult to check while solving specific applied problems. Therefore it is important to find conditions, convenient to check, which are expressed in terms of coefficients of the equation. This is only possible in particular cases, one of which is investigated further.

For the following initial-value problem

$$d\Bigg(u(t,x)+\int\limits_{\mathbb{R}^d} b(t,x,u(\alpha(t),\xi),\xi)d\xi\Bigg)=\big(\Delta_x u(t,x)+f(t,u(\alpha(t)),x)\big)dt+$$

$$+\,\sigma(t,u(\alpha(t)),x)dW(t,x),\ 0<t\le T,\ x\in\mathbb{R}^d,\ T>0,$$

$$u(t,x)=\phi(t,x),\ -r\le t\le 0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ r>0,$$

$\{f,\sigma\}: [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$, $b\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$, $\phi\colon [-r,0]\times \times\mathbb{R}^d\times\Omega\to\mathbb{R}$, $\alpha\colon [0,T]\to[-r,\infty)$, the authors have introduced the concept of its mild solution, and have proved the theorem on its existence and uniqueness in $\mathfrak{B}_{2,T}$ — Banach space of random processes $\Phi\colon [0,T]\times\Omega\to L_2(\mathbb{R}^d)$ with the norm $\|\Phi\|_{\mathfrak{B}_{2,T}}=\sqrt{\sup\limits_{0\le t\le T}\mathbf{E}\,\|\Phi(t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}}$.

1. *Mahmudov N. I.* Existance, Uniqueness and Controllability Results for Neutral FSDEs in Hilbert Spaces / *A. M. Samoilenko, N. I. Mah-mudov, A. N. Stanzhitskii.* // Dynamic Systems and Applications. — 2008. — V. 17. — P. 53 — 70.

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS OF SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Kusik L. I.

ludakusik@mail.ru
National Marine University of Odessa, Ukraine

Consider the differential equation

$$y'' = f(t, y, y'), \tag{1}$$

where $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \longrightarrow \mathbf{R}$ is continuous function, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, Δ_{Y_i} $(i \in \{0, 1\})$ is a one-side neighborhood of Y_i and Y_i $(i \in \{0, 1\})$ is either 0 or $\pm\infty$.

We study Eq.(1) on one class $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- solutions, that defined as follows.

Definition 1. *A solution y of Eq. (1) on interval $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ is called $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- solution, where $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, if it satisfies conditions*

$$y^{(i)}(t) \in \Delta_{Y_i} \qquad \text{for } t \in [t_0, \omega[\ , \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1),$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{[y'(t)]^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0.$$

Assuming that the function f satisfies condition $(RN)_{\lambda_0}$, i.e. when f on $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- solution has representation

$$f(t, y(t), y'(t)) = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y(t))\varphi_1(y'(t))[1 + o(1)] \quad \text{as} \quad t \uparrow \omega,$$

where $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ is a continuous function and $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \longrightarrow]0, +\infty[$ $(i = 0, 1)$ are continuous functions of orders σ_i $(i = 0, 1)$ regular varying as $y^{(i)} \to Y_i$ $(i = 0, 1)$, in each case $\lambda_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_0 = \pm\infty$ we give necessary and sufficient conditions for existence of $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- solutions of Eq.(1). Moreover, the asymptotic behavior of these solutions of Eq.(1) and them derivative of first order as $t \uparrow t_*$ are established.

ON EXISTENCE RESULTS OF THE INTEGRAL BOUNDARY–VALUE PROBLEM INVESTIGATION

Marynets K. V.

katya_marinets@ukr.net
Uzhhorod National University, Ukraine

Let us observe the non–linear system of ordinary differential equations subjected to the boundary conditions with integral terms of the form:

$$\frac{dx\,(t)}{dt} = f\,(t, x\,(t))\,, \tag{1}$$

$$Ax(0) + \int_0^T P(s)k(s, x(s))ds + Cx(T) = d, \tag{2}$$

where $t \in [0, T]$, $f : G \to \mathbb{R}^n$, $G := [0, T] \times D$, A, $C \in L(\mathbb{R}^n)$, $detC \neq 0$, $k : [0, T] \times D \to \mathbb{R}^n$, $k \in F(G, M)$ $d \in \mathbb{R}^n$ are some given matrixes and vector and $P(\cdot)$ is a continuous n–dimensional matrix–function.

Suppose that the vector–function f in the right hand–side of the system of differential equations is continuous, where $D \subset \mathbb{R}^n$ is a closed and bounded domain, and let us put

$$D_0 := \left\{ \int_0^T P(s)k(s, x(s))ds | P(\cdot)k(\cdot, x(\cdot)) \in C(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

We establish necessary and sufficient conditions of existence of solutions of the original BVP (1), (2) in the space of continuously–differentiable functions $x : [0, T] \to D$ on the basis of topological indexes.

1. *Rontó, Miklós and Varha, Yana and Marynets, Kateryna*, Further results on the investigation of solutions of integral boundary value problems, Tatra Mountains, 63 (2015), 247–267.
2. *Marynets Kateryna*, On construction of the approximate solution of the special type integral boundary-value problem, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 6 (2016), 1–14.

OPTIMAL CONTROL OF STOCHASTIC SYSTEMS WITH QUADRATIC CONTROL CRITERION

Mogylova V. V., Vassilina G. K.

mogylova.victoria@gmail.com, v_gulmira@mail.ru
National Technical University of Ukraine, Ukraine
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan

Let us consider the following optimal control problem for linear and nonlinear stochastic systems with quadratic control criterion:

$$\begin{aligned}
&dx = [A(t)x + B(t)u]dt + [C(t)x + D(t)u]dw(t) + \\
&+ \int [M(t,v)x + G(t,v)u]\widetilde{\nu}(dt,dv), \\
&x(0) = y, \\
&I(y,u) = E(Kx(T),x(T)) + E\int_0^T [(N(t)u(t),u(t)) + (R(t)x(t),x(t))]dt \to inf,
\end{aligned}$$

where $x \in R^n$, $u \in R^m$, $w(t)$ is one-dimensional Wiener process, $\widetilde{\nu}(t,A) = \nu(t,A) - t\Pi(A)$, $\nu(t,A)$ is Poisson measure on R^1, A, B, C, D, M, G, N, R are continuous matrix on $[0,T]$, A, C, M, K, R are $n \times n$-dimensional matrix, B, D, G are $n \times m$-dimensional matrix, N is $m \times m$-dimensional matrix, $K, R(t)$ are symmetrical nonnegative matrix, $N(t)$ is positively defined matrix,
and in the nonlinear case:

$$\begin{aligned}
&dx = [f(x) + B(x)u]dt + g(x)dw(t) + \varepsilon D(x)udw_1(t), \\
&x(0) = y, \\
&I(y,u) = E\varphi(x(\tau)) + E\int_0^\tau [(\psi(x(t)) + (N(x(t))u(t),u(t))]dt \to inf,
\end{aligned}$$

where $x \in Q$ is bounded domain with smooth boundary, ε is small parameter, $y \in Q$, τ is the first exit moment from Q. $w_1(t)$, $w(t)$ are one-dimensional and n-dimensional Wiener processes with independent components.

Using the dynamic programming method the existence of the optimal control in the feedback control form was proved.

FILTERING PROBLEM FOR RANDOM FIELDS

Moklyachuk M. P.

mmp@univ.kiev.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine

Cosmological Principle (first coined by Einstein): the Universe is, in the large, homogeneous and isotropic. Last decades indicate growing interest to the spatio-temporal data measured on the surface of a sphere. These data includes cosmic microwave background (CMB) anisotropies, medical imaging, global and land-based temperature data, gravitational and geomagnetic data, climate model. Some basic results and references on the theory of isotropic random fields on a sphere can be found in the book by M. I. Yadrenko.

In this report we deal with the problem of mean square optimal linear estimation of the functional

$$A\zeta = \int_0^\infty \int_{S_n} a(t,x)\zeta(-t,x)\, m_n(dx)dt$$

which depends on unknown values of a periodically correlated (cyclostationary with period T) with respect to time isotropic on the unit sphere S_n in Euclidean space $\mathbb{E}^n$ random field $\zeta(t,x)$, $t \leq 0$, $x \in S_n$. Estimates are based on observations of the field $\zeta(t,x) + \theta(t,x)$ at points (t,x), $t \leq 0$, $x \in S_n$, where $\theta(t,x)$ is an uncorrelated with $\zeta(t,x)$ periodically correlated with respect to time isotropic on the sphere S_n random field. Formulas are derived for computing the value of the mean-square error and the spectral characteristic of the optimal linear estimate of the functional $A\zeta$ in the case of spectral certainty, where spectral densities of the fields are known. Formulas are proposed that determine the least favourable spectral densities and the minimax-robust spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A\zeta$ for concrete classes of spectral densities under the condition that spectral densities are not known exactly while classes $D = D_f \times D_g$ of admissible spectral densities are given.

1. *M. I. Yadrenko*, Spectral theory of random fields, Optimization Software Inc. Publications Division, New York, 1983.
2. *I. I. Dubovets'ka, O. Yu. Masyutka, and M. P. Moklyachuk*, Estimation problems for periodically correlated isotropic random fields, Methodology and Computing in Applied Probability, vol.17, no. 1, pp. 41–57, 2015.

FUNCTIONAL CALCULUS ON A WIENER TYPE ALGEBRA

Myaus O.M.

myausolya@mail.ru
Lviv Polytechnic National University, Ukraine

Let X, X' be complex Banach reflexive space and its dual, respectively, $\langle X \mid X' \rangle$ be the corresponding duality, the complete symmetric tensor product $X_\pi^{\odot n}$ endow with the projective norm $\|\cdot\|_\pi$. For every $F_n' \in X_\pi'^{\odot n}$ there exists a unique n-homogeneous polynomials F_n such that $F_n(x) := \langle x^{\odot n} \mid F_n' \rangle$ for all $x \in X$. Denote $\mathcal{P}_\pi^n(X) = \Big\{F_n \colon F_n' \in X_\pi'^{\odot n}\Big\}$ with the norm $||F_n|| := ||F_n'||_\pi, F_n' \in X_\pi'^{\odot n}$.

Let

$$W_\pi := \Big\{F = \sum_{n \geq 0} F_n \colon F_n \in \mathcal{P}_\pi^n(X)\Big\}$$

with the finite norm $||F|| = \sum ||F_n||$ be the nuclear Wiener type algebra.

Let U_t $(t \in \mathbb{R})$ be C_0-group of linear isometric operators on X. Then the C_0-group $\widehat{U}_t F(x) = F(U_t x) \quad (x \in B)$ over the Wiener algebra W_π is well-defined. Let $-A$ and $-\widehat{A}$ be the generator of U_t and $\widehat{U}_t$, respectively. For a fix $m \in \mathbb{Z}_+$, $a > 0$, $\omega(t) = C \prod\limits_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \dfrac{t}{it_k}\Big)$, $C = const \geq 1, 0 < t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \ldots$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{t_k} < \infty$ or $\omega(t) \equiv 1$ we define

$$L_1^{(m,a,\omega)}(\mathbb{R}) := \Big\{\varphi \in L_1(\mathbb{R}) \colon \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t^m \omega(at) \varphi(t)| dt < \infty\Big\},$$

and for all $\nu > 0$ define its Banach subspace

$$E_\nu^{(m,a,\omega)} := \Big\{\varphi(t) \in L_1^{(m,a,\omega)}(\mathrm{R}) \mid \ \sup\nolimits_{k \in \mathrm{Z}_+} \frac{\|D^k \varphi\|_{L_1^{(m,a,\omega)}(\mathbb{R})}}{\nu^k} < \infty\Big\}$$

where $E_\nu^{(m,a,\omega)} \subset E_\mu^{(m,a,\omega)}$ for $\nu \leq \mu$, and also $E^{(m,a,\omega)} := \bigcup_\nu E_\nu^{(m,a,\omega)}$.

Let $\widehat{E}^{(m,a,\omega)}$ be the Fourier-image of the space $E^{(m,a,\omega)}$, endowed with inductive topology under the Fourier transform.

We define $\widehat{\varphi}(\widehat{A})$ for every $\varphi \in E^{(m,a,\omega)}$, $\widehat{g}(\widehat{A})$ for every $g \in \big(E^{(m,a,\omega)}\big)'$ and study its properties. The following differential properties hold:

$\widehat{(D^k \varphi)}(\widehat{A}) = \widehat{A}^k \widehat{\varphi}(\widehat{A}), \quad \varphi \in E^{(m,a,\omega)},$

$\widehat{(D^k g)}(\widehat{A}) = \widehat{A}^k \widehat{g}(\widehat{A}), \quad g \in (E^{(m,a,\omega)})', \quad k = 1, 2, \ldots$

THE METHOD "SAM" INVESTIGATION OF PERIODIC SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ovezdurdiev H., Ashirov O. A.

Turkmenistan

At the of the 1970s of the XX century academician A. M. Samoilenko proposed numerical-analytical method of successive periodic solutions of nonlinear systems of ordinary differential equations. This method allows to find periodic solutions in the form of a uniformly convergent sequence of functions [1]. In addition, this method allows on the basis of approximations to the periodic solution, to judge the existence of such solutions. Thanks to the simplicity and accessibility, numerical and analytical method (here after the "SAM"method) successive periodic approximations, is widely used in the study of periodic systems of higher order, countable systems of differential equations with partial derivatives, systems described by ordinary differential equations with impulsive action and discontinuous right side [2-4].

Consider a system of differential equations of the form:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1}$$

where $(t,x) \in (-\infty,\infty)\times D, D$ - limited area R^n, $f(t,x)$ - continuous periodic on t function with the period T, satisfy the inequality:

$$f(t,x) \leq M, |f(t,x') - f(t,x'')| \leq K|x' - x''| \tag{2}$$

Probable also that the regions D, M and matrix K satisfy on the conditions of:

a) Set $D - \frac{M}{2}$ is not empty;

b) Eigenvalues of matrix $Q = \frac{K}{\pi}$ lie in a circle of single radius.

For systems of differential equations (1) with a continuous periodic in t with T the right side, satisfying the inequality (2) and conditions a), b) we construct a sequence of periodic functions

$$x_m(t,x_0) = x_0 + \int\limits_{\tau}^{t} [f(t, x_{m-1}(t,\tau,x_0)) - \overline{f(t, x_{m-1}(t,\tau,x_0))}]dt, \tag{3}$$

where $\overline{f(t, x_{m-1}(t,\tau,x_0))}$ - integral time average, that is

$$\overline{f(t, x_{m-1}(t,\tau,x_0))} = \frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T} f(t, x_{m-1}(t,\tau,x_0))dt \tag{4}$$

and it is proved that for $m \to \infty$ integral average converges uniformly relatively with

$$(t, \tau, x_0) \in R^2 \times D - \frac{M}{2} \tag{5}$$

to function $x^*(t, \tau, x_0)$, belonging to the area (5), periodical in t, τ with period T, satisfying system of differential equations

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_{\tau}^{t} [f(t, x(t, \tau, x_0)) - \overline{f(t, x(t, \tau, x_0))}] dt \tag{6}$$

where over line means integral time average, according to formula (4). In this work the basic ideas of the method "SAM"is used and investigates existence of solutions of differential equations system

$$\frac{d^2x}{d^2t} = f(t, x, \frac{dx}{dt}) \tag{7}$$

for given boundary conditions

$$A(0) + C(T) = d \tag{8}$$

where $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $f = (f_1, f_2, ..., f_n$, $d = (d_1, d_2, ..., d_n$ - points of n - dimensional Euclidean spaces R^n, A, C - constant matrixes, and $det \neq 0$. We believe and continuous in t, x, y $(x' = y)$ in area

$$t \in [0, T], x \in D_1 \subset R^n, y \in D_2 = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n, I_i = [a_i, b_i], i = 1, 2, ..., n; \tag{9}$$

and satisfies inequalities:

$$|f(t, x, y) \leq M|$$

, $|f(t, x', y') - f(t, x'', y'')| \leq K_1|x' - x''| + K_2|y' - y''|$ where $M = (M_1, M_2, ..., M_n)$ - vector with nonnegative components; K_1, K_2 - matrixes with nonnegative elements.

1. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. Киев: Вища школа, 1976.
2. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987.
3. *Овездурдыев Х.* Численно-аналитический метод исследования периодических решений дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. ДАН УССР. 1984. №2.
4. *Овездурдыев Х. Ашыров О.* Метод "САМ"для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. $\ddot{T}$urkmen ylmy halkara gatnasyklar $\grave{y}$olynda (Ylmy makalalar $\grave{y}$ygyndysy - 2013-I) Ашгабат: ЫЛЫМ. 2013.

ON OSCILLATORY SOLUTIONS OF HIGHER ORDER NONLINEAR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS

Partsvania N.[1,2]

ninopa@rmi.ge

[1]*A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia;*

[2]*International Black Sea University, Tbilisi, Georgia*

On an infinite interval $[a,+\infty[$, the functional differential system

$$u_1^{(n_1)}(t) = f_1\big(t, u_2(\tau_1(t))\big), \quad u_2^{(n_2)}(t) = f_2\big(t, u_1(\tau_2(t))\big) \tag{1}$$

is considered, where $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 2$, $a > 0$, while $f_i : [a,+\infty[\, \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $\tau_i : [a,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$ are continuous functions such that

$$f_i(t,0) = 0 \ \text{ for } \ t \geq a, \quad \lim_{t\to+\infty} \tau_i(t) = +\infty \ \ (i = 1,2).$$

If m is a natural number, then by $\mathcal{N}_m^0$ we denote the set of those $k \in \{1,\dots,m\}$ for which $k+m$ is even. For every natural k, we put

$$\varphi_k(t,x) = x\Bigg[|\tau_1(t)|^{n_1-1} + \int\limits_a^{\tau_1(t)} (\tau_1(t)-s)^{n_1-1}\big|f_1\big(s, x|\tau_2(s)|^{k-1}\big)\big|\, ds\Bigg].$$

We have investigated oscillatory properties of solutions of system (1). In particular, we have proved the following theorem.

Theorem. *Let the function f_1 be nondecreasing in the second argument and the function f_2 be nonincreasing in the second argument. If, moreover, for any $k \in \mathcal{N}_{n_2-1}^0$ and $x \neq 0$ the conditions*

$$\int\limits_0^{+\infty} |f_1(t,x)|\, dt = +\infty, \quad \int\limits_a^{+\infty} t^{n_2-1}|f_2(t,x)|\, dt = +\infty,$$

$$\int\limits_a^{+\infty} t^{n_2-k-1}\big|f_2(t,\varphi_k(t,x))\big|\, dt = +\infty$$

are fulfilled, then every nontrivial solution of system (1) is oscillatory.

Supported by the Shota Rustaveli National Science Foundation (Project # FR/317/5-101/12).

NUMERICAL METHODS OF SOLVING NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF VOLTERRA TYPE

Pelekh Ya. M.

Pelekh_Ya_M@ukr.net
Lviv Polytechnic National University, Ukraine

A new technique for the construction of numerical methods based on continued fractions is proposed. Consider a nonlinear Volterra integral equation

$$f(x) = \int_a^x F[x, y, f(y)]\, dy, \qquad x \in I_L, \tag{1}$$

where the function $F[x, y, f(y)]$ the smoothness needed for the computations. We break the interval $I_L = [a, b]$ into N parts of length $h = (b-a)/N$ and introduce the notation $x_{n+1} = a + ih$, $f_i = f(x_i)$. Applying the continued fraction and the idea of the construction of Runge-Kutta methods, we seek an approximate solution of Eq. (1) in the form

$$Y_2^{[k,l]} = \cfrac{c_{0,0}}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \cfrac{d_{k,0}}{1+ \ddots + \frac{d_{k,l-1}}{1+d_{k,l}}}}, \tag{2}$$

When $k+l=2$, $(k=1,2; l=0,1)$, the expression for $c_{0,0}$ and $d_{i,j}$ have the form

$c_{0,0} = h\delta_1$, $d_{0,0} = 1$, $d_{1,0} = \frac{\delta_2}{\delta_1}$, $(\delta_1 \neq 0)$, $d_{2,0} = \frac{\delta_1\delta_3 + \delta_2^2}{\delta_1^2}$, $d_{1,1} = \frac{d_{2,0}}{d_{1,0}}$,

$\delta_i = \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}k_j$, $k_j = F\left[a + \alpha_j h, a + \beta_j h, h\sum\limits_{m=0}^{j-1} \gamma_{jm}k_m\right]$, $\gamma_{j0} = 0$.

A characteristic feature of these algorithms is the fact that for certain values of the parameters it is possible to obtain both new and traditional numerical methods for the solution of nonlinear integral equations of Volterra type. The new nonlinear bilatery numerical methods for the solution of Volterra integral equation of the second kind are constracted. One of them gives upper approximation and the order love one of exact solution.

THE PROBLEM WITH MOVABLE BOUNDARIES FOR QUASI-LINEAR HYPERBOLIC SYSTEM IN CURVILINEAR DOMAIN

Polihas Ivan

ivan_polihas@bigmir.net
Lviv National University, Ukraine

In the curvilinear domain

$$R_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 | s_1(t) < x < s_2(t),\ s_1(0) = s_2(0) = 0\ , 0 < t < T\},$$

where functions $s_1, s_2 : [0,T] \to \mathbb{R}, s_1, s_2 \in C^1[0,T]$ we consider the following singular hyperbolic system of quasi-linear equations

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x,t,u(x,t)) \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u(x,t)) \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) = F_i(x,t,u(x,t)), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} = F_l(x,t,u(x,t)), \qquad (2)$$

where $i \in \{1,...,n\}, l \in \{n+1,...,m\}$.

For system (1)–(2) define initial and boundary conditions

$$u(0,0) = u^0, \qquad (3)$$

$$u_i(s_1(t),t) = k_i(t, u_1(s_2(t),t), u_2(s_1(t),t)), \qquad (4)$$

$$u_p(s_2(t),t) = k_p(t, u_1(s_2(t),t), u_2(s_1(t),t)), \qquad (5)$$

$$u_l(s_1(t),t) = k_l^1(t, u_1(s_2(t),t), u_2(s_1(t),t)), \qquad (6)$$

$$v_l(s_2(t),t) = k_l^2(t, u_1(s_2(t),t), u_2(s_1(t),t)), \qquad (7)$$

And the next inequality is satisfied:

$$\lambda_p(0,0,u^0) < s_1'(0) < 0 < s_2'(0) < \lambda_i(0,0,u^0). \qquad (8)$$

Theorem of existence and uniqueness of a local solution for system (1)–(8) in curvilinear sector were established applying the method of characteristics and the Banach fixed point theorem.

1. *Kyrylych V.* Sufficient conditions for the global solvability problem with continuous unknown outside for degenerate quasi-linear hyperbolic systems / V. Kyrylych // Mat. visn. Shevchenko Scientific Society. - 2009. - T. 6. - P. 123-139.(in Ukrainian).

ON THE INVESTIGATION OF SOLUTIONS OF STATE-DEPENDENT IMPULSIVE BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Rontó András and Rontó Miklós

ronto@math.cas.cz, matronto@uni-miskolc.hu
Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Czech Republic
Institute of Mathematics, University of Miskolc, Hungary

We consider the non-linear boundary value problem

$$u^{'}(t) = f\left(t, u(t)\right), \quad a.e. t \in [a, b]\,, \; Au\left(a\right) + Cu\left(b\right) = d, \tag{1}$$

with $-\infty < a < b < \infty$ and a continuous $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Eq. (1) is subject to the state-dependent impulse condition

$$u(t+) - u(t-) = \gamma\left(u\left(t-\right)\right) \text{ for } t \text{ such that } g\left(t, u\left(t-0\right)\right) = 0. \tag{2}$$

Here $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ and $g : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ are continuous, and the impulse instants $t \in (a, b)$ in (2) are unknown.

The set $G = \{(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n : g(t, x) = 0\}$, determined by the function g from (2) is called a *barrier.* For the sake of simplicity we consider here the case when the solution u meets the barrier G exactly once at the unknown point τ. We use here the techniques which have been applied in [1] and allow us to examine the solvability of problem (1)-(2) as well as to find approximate solutions. Our approach is based on the construction of two simple parameterized model problems on the pre-jump and after-jump intervals $[a, \tau]$ and $[\tau, b]$, respectively: $\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t)\right),\; t \in [a, \tau],\; x(a) = \xi,\; x(\tau) = \lambda$ and $\frac{dy(t)}{dt} = f\left(t, y(t)\right)$, $t \in [a, \tau],\; y(\tau) = \lambda + \gamma(\lambda),\; y(b) = \eta$. Under certain additional conditions we show that the solutions of the auxiliary problems can be obtained as limits of uniformly convergence successive approximations $\{x_m(t, \tau, \xi, \lambda)\}_{m=0}^{\infty}$ and $\{y_m(t, \tau, \lambda, \eta)\}_{m=0}^{\infty}$ of special forms. Numerical values of parameters τ, ξ, λ, η, corresponding to the solution of problem (1)-(2) should be found from the system of finitely many determining algebraic equations of dimension $3n + 1$.

1. *Irena Rachunková, Lukás Rachunek, András Rontó, Miklós Rontó*, A constructive approach to boundary value problems with state-dependent impulses, Applied Mathematics and Computation, 274, (2016), 726-744, dx.doi.org/10.1016/j.amc.2015.11.033.

DIFFERENTIAL AND PSEUDODIFFERENTIAL EQUATIONS FOR THE PARTICLES WITH ARBITRARY SPIN IN RELATIVISTIC FIELD THEORY AND QUANTUM MECHANICS

Simulik V.M.

vsimulik@gmail.com

Institute of Electron Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine

Relativistic wave equations for the particles of arbitrary spin suggested by Bhabha, Bargmann – Wigner, Rarita – Schwinger (for spin s=3/2) and other authors are under consideration. The comparison with the equations introduced recently by the author in Ukr. J. Phys., Vol. 60, N 10. 985–1006 (2015) and in J. Phys.; Conf. Ser. Vol. 670, 012047(1–16) (2016) is given. The three level consideration (relativistic canonical quantum mechanics, canonical Foldy – Wouthuysen type field theory, locally covariant field theory) is presented. The operator link between the relativistic canonical quantum mechanics and locally covariant field theory of arbitrary spin is found. The important partial examples of spin s=3/2 and spin s=2 cases are considered in details.

Contrary to the locally covariant field theory, where the wave equations are the partial differential equations, the corresponding wave equations in relativistic canonical quantum mechanics and in canonical Foldy – Wouthuysen type field theory contain the pseudodifferntial (so called square-root) operator $\sqrt{m^2c^4 - c^2\Delta}$. Nevertheless, in the physical models under consideration some consequences of the partial differential equations and pseudodifferntial equations application are shown to be the same.

ON EXISTENCE OF OSCILLATORY SOLUTIONS OF NONLINEAR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY

Sokhadze Z.

z.soxadze@gmail.com
A. Tsereteli State University, Kutaisi, Georgia

Sufficient conditions for the existence of oscillatory solutions of the functional differential equation

$$u^{(n)}(t) = f\big(t, u(\tau(t))\big) \tag{1}$$

are established, where $f : [0,+\infty[\,\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $\tau : [0,+\infty[\,\to \mathbb{R}$ are continuous functions such that

$$f(t,0) = 0, \quad \tau(t) < t \ \text{ for } \ t \geq 0, \quad \lim_{t\to+\infty} \tau(t) = +\infty.$$

In particular, the following theorem is proved.

Theorem. *Let $n \geq 3$ be an odd number and f be the function, nondecreasing in the second argument. If, moreover, for any odd number $k \in \{1,\dots,n-2\}$ and for arbitrary $x \neq 0$ the condition*

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{n-k-1}\big|f\big(t, x|\tau(t)|^{k-1}\big)\big|\,dt = +\infty$$

is fulfilled, then equation (1) has the $(n-1)$-parametric family of oscillatory solutions.

Supported by the Shota Rustaveli National Science Foundation (Project # FR/317/5-101/12).

ENERGY SCALING LAWS FOR KOHN–MULLER FUNCTIONAL

Robert V. Kohn and Oleksandr Misiats

om25@nyu.edu

Courant Institute, New York University, New York, NY, 10012

Consider the minimization problem for the simplest version of Kohn-Muller functional

$$I_\varepsilon(u) := \int_{R_1} (u_x^2 + \varepsilon |u_{yy}|) dxdy \to \min . \tag{1}$$

Here $R_1 = [0,1] \times [0,1]$, and the minimization is performed in the class of functions, satisfying either $u_y = 1$ or $u_y = -1$, and thus u_{yy} is a Radon measure with finite mass. Specifically, we minimize I_ε over

$$A_1 := \{u \in H^1(R_1), |u_{yy}| = 1 \text{ in } R_1, u(0,y) = -y, u(1,y) = y\}.$$

The functional (1) is a sum of elastic and surface energies, and can be used to model phase transitions in alloys, where the regions with $u_y = 1$ and $u_y = -1$ correspond to two distinct phases of a material. In particular, the minimization problem (1) leads to the austenite-martensite phase transition, first considered in [1].

Theorem 1. *(Global energy scaling law) Let u_ε be a minimizer of $I_\varepsilon[u]$ in A_1. Then*

$$\frac{1}{3} + 3^{2/3}\varepsilon^{2/3} \le I(u_\varepsilon, R_1) \le \frac{1}{3} + 2^{1/3}3^{2/3}\varepsilon^{2/3}$$

We also consider the elasticity version of this functional. Let

$$J_\varepsilon(u,v) := \int_{R_1} (|u_x + v_y|^2 + v_x^2 + \varepsilon |u_{yy}|) dxdy \to \min \tag{3}$$

and

$$A_2 := \{(u,v) \in H^1(R_1) \times H^1(R_1), |u_{yy}| = 1, u(0,y) = -y, u(1,y) = y\}.$$

Theorem 2. *(Global energy scaling law for the elasticity functional) Let $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ be a minimizer of $J_\varepsilon[u,v]$ in A_2. Then there are explicit C_{min} and C_{max} such that*

$$C_{min}\varepsilon^{4/5} \le J_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \le C_{max}\varepsilon^{4/5}.$$

1. *R. Kohn, S.Muller*, Surface Energy and Microstructure in Coherent Phase Transitions, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XLVII, 405-435, 1994.

TO THE THEORY OF THE EXCEPTIONAL CASE OF THE LINEAR CONJUGATION PROBLEM

Urbanovich T. M.

UrbanovichTM@gmail.com
Polotsk State University, Belarus

Let Γ be a simple smooth closed contour dividing the plane of the complex variable into the interior domain D^+ and the exterior domain D^-, let F be a finite set of points of the contour Γ and let $\alpha = (\alpha_\tau, \tau \in F)$ be a family of complex numbers. Let $A(z) = \prod_{\tau \in F}(z-\tau)^{\alpha_\tau}$, $z \in \overline{D^+}$. Let $\lambda^+ = (\lambda_\tau^+, \tau \in F)$ and $\lambda^- = (\lambda_\tau^-, \tau \in F)$ be families of complex numbers such that $\lambda^+ - \lambda^- = \alpha$. The problem is to find a function $\Phi(z) \in H_{\lambda^\pm}(\overline{D^\pm}, F)$ that is analytic outside Γ, vanishes at infinity, and satisfies the boundary condition

$$\Phi^+(t) - A(t)G_0(t)\Phi^-(t) = g(t), \tag{1}$$

where $g(t) \in H_{\lambda^+}(\Gamma, F)$ and $G_0(t) \in H_0(\Gamma, F)$ is an invertible function.

Theorem. *Let $X(z)$ be specially constructed canonical function (see [1]), and let*

$$æ = \sum_{\tau \in F} n_\tau, n_\tau = [Re(\delta_\tau + \alpha_\tau - \lambda_\tau^+)],$$

$$\delta_\tau = \frac{1}{2\pi i}\left((\ln G_0)(\tau - 0) - (\ln G_0)(\tau + 0)\right).$$

If $æ \geq 0$, then the general solution vanishing at infinity of problem (1) with righthand side $g(t) \in H_{\lambda^+}(\Gamma, F)$ in the class $H_{\lambda^\pm}(\overline{D^\pm}, F)$ is given by the formula

$$\Phi(z) = \begin{cases} A(z)\Psi(z), & z \in D^+, \\ \Psi(z), & z \in D^-, \end{cases} \tag{2}$$

where the function $\Psi(z)$ has the form $\Psi(z) = X(z)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(t)dt}{A(t)X^+(t)(t-z)} + P(z)\right)$, and the degree of the arbitrary polynomial $P(z)$ does not exceed $æ - 1$. If $æ < 0$, then the solution of problem (1) is unique and is given by formula (2) provided that the orthogonality conditions $\int_\Gamma \frac{g(t)}{A(t)X^+(t)} t^j dt = 0$, $j = 0, 1, ..., -æ - 1$, are satisfied. [For $æ \leq 0$ we set $P(z) = 0$.]

1. *Urbanovich T. M.* Exceptional Case of the Linear Conjugation Problem in Weighted Hölder Classes // Differential Equations. 2015. V. 51, No. 12. P. 1669–1673.

PROGRAMM MANIFOLD'S STABILITY OF CONTROL SYSTEM

Zhumatov S. S.

sailau.math@mail.ru

Institute of mathematics and mathematical modelling, Almaty, Kazakhstan

We consider an automatic control system

$$\dot{x} = f(t,x) - B\xi, \ \xi = \varphi(\sigma), \ \sigma = P^T\omega, \tag{1}$$

possessing by $(n-s)$-dimensional integral manifold $\Omega(t) \equiv \omega(t,x) = 0$, where $B(n\times r), \ P(s\times r)$ are matrices, $x(n\times 1)$ is a state vector of object, $f(n\times 1)$ is a vector-function, $\xi(r\times 1)$ is a control vector on deviation from a given programm manifold, satisfying to conditions of local quadratic connections. Since $\Omega(t)$ is integral for system (1) is valid $\dot{\omega} = F(t,x,\omega)$. Here $F(t,x,\omega)$ is Erugin's function, satisfying to next condition $F(t,x,0) \equiv 0$. Setting $F = -A\omega$, $-A(s\times s)$ is Hurvitz matrix we obtained

$$\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi, \ \xi = \varphi(\sigma), \ \sigma = P^T\omega, \tag{2}$$

We construct Lyapunov function for system (2) in the form

$$V = \omega^T L\omega + \int_0^\sigma \beta^T\varphi(\sigma)d\sigma, \tag{3}$$

provided that exist diagonal matrices β, θ and $L = L^T$. Applying the S-procedure $S = \varphi^T\theta(\sigma - K^{-1})$ [1] and taking derivative of this function (3) at times by virtue of system (2) we get $\dot{V}$ with the same signee.

Theorem. *Let Etugin's function is in the linear form for the vector function ω and matrix $-A-HB\mu P^T, \varphi(\sigma) = \mu\sigma$, has $k \geq 1$ eigenvalues on the right-hand side semi-place. If exists Lyapunov function (3) which derivative by virtue of the system (2) has the same signee, then programm manifold $\Omega(t)$ is instable with respect to vector function ω.*

1. *Zhumatov S. S., Krementulo V. V., Maygarin B. Zh.* Lyapunov's second method in problems of stability and motion control, Almaty, Nauka, 1999 (in Russian).

ІНТЕГРАЛЬНІ МНОЖИНИ РОЗРИВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Асроров Ф. А.

farhod@univ.kiev.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Досліджується питання існування інтегральних множин одного класу лінійних і слабко нелінійних систем диференціальних рівнянь, що зазнають імпульсного впливу в момент попадання зображаючої точки в задані множини фазового простору. Однією з найважливіших достатніх умов для існування інтегральної множини є функція Гріна-Самойленка.

Розглядається нелінійно збурена система диференціальних рівнянь, розв'язки якої зазнають імпульсного збурення при досягненні фазовою точкою фіксованої гіперповерхні Γ

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \ \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + f(\varphi, x), \ \varphi \notin \Gamma, \\ \Delta x|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)x + I(\varphi, x). \end{cases} \tag{1}$$

Теорема. *Нехай функції $P(\varphi)$ і $B(\varphi)$ неперервні на $\Im_m$ 2π - періодичні матриці, функції f і I, що задають нелінійне збурення, вважаємо 2π - періодичними, неперервними на $\Im_m$ (кусково-неперервними з розривами першого роду при $\varphi \in \Gamma$) по першій змінній та ліпшицевими з константою $N > 0$ по другій змінній. Нехай $G(t, \tau, \varphi)$ - функція Гріна-Самойленка відповідної незбуреної імпульсної задачі. Тоді якщо константа N достатньо мала, матриця $G(t, \tau, \varphi)$ задовольняє оцінці $\|G(t, \tau, \varphi)\| \leq Ke^{-\gamma(t-\tau)}$, $t \geq \tau$, а функції $t_i(\varphi)$ - нерівності $t_{i+1}(\varphi) - t_i(\varphi) \geq \theta > 0$, то система (1) має асимптотично стійку інтегральну множину $x = u(\varphi)$, $u(\varphi + 2\pi) = u(\varphi)$, де $u(\varphi)$ - кусково-неперервна з розривами першого роду на множині Γ функція така, що*

$$\Delta u|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)u(\varphi) + I(\varphi, u(\varphi)).$$

1. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. - М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. - 304 с.
2. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. - К: Вища школа, 1987

ПРО ІСНУВАННЯ ІНВАРІАНТНОЇ МНОЖИНИ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Балога С. І.

baloga.switlana@i.ua

Ужгородський національний університет, Україна

Розглянуто лінійну систему диференціальних рівнянь в прямому добутку тора T^m і евклідового простору R^n

$$\dot{\varphi} = \epsilon a(\varphi), \;\; \dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{1}$$

в якій $\varphi \in T^m$, $x \in R^n$, $a(\varphi)$ — ліпшицева векторна функція на m-вимірному торі T^m, $a(\varphi + 2\pi) = a(\varphi)$, $A(\varphi)$ і $f(\varphi)$ — неперервні матрична та векторна 2π-періодичні по φ функції відповідно, ϵ – малий параметр.

Точку φ назвемо блукаючою [1], якщо існує такий окіл U і додатне T, що виконується умова

$$U(\varphi) \cup \varphi_t(U(\varphi)) = 0,$$

для $t \geq T$. Позначимо W множину блукаючих точок і $\Omega = T^m - W$ множину не блукаючих точок. З компактності тора T^m випливає, що множина Ω не порожня і компактна [1].

Нехай матрична функція $A(\varphi)$ на множині Ω стала $A(\varphi) = A$ для всіх $\varphi \in \Omega$. Встановлено, що якщо дійсні частини всіх власних чисел сталої матриці A від'ємні $Re(\lambda_j(A)) < 0$, $j = 1, 2, ..., n$, то знайдеться таке число $\epsilon_0 > 0$, що для всіх $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ система рівнянь (1) має асимптотично стійку інваріантну тороїдальну множину $x = u_\epsilon(\varphi)$ для довільної неперервної 2π-періодичної по φ_j, $j = 1, 2, ..., m$ функції $f(\varphi)$.

1. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л. ОГИЗ, 1947. — 448 стр.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова.– К.: Наук. думка, 1990.— 272 с.

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ УМОВАМИ САМАРСЬКОГО-ІОНКІНА.

Баранецький Я. О., Каленюк П. І.

baryarom@ukr.net, kalenyuk@gmail.com
НУ "Львівська політехніка Україна

Нехай $G = \{(t,x)\,;\, t \in (0,T)\,,\, x \in (0,1)\}\,,\, 0 < T < \infty,\, D_x, D_t-$ узагальнені похідні, $W_2^{2,1}(G) \equiv \{u \in L_2(G) : D_t u,\ D_x^2 u \in L_2(G)\}\,.$

Вивчається мішана задача

$$D_t u - D_x^2 u = f, f \in L_2(G)\,, u\left|_{t=0}\right. = 0 \tag{1}$$

$$\begin{cases} l_1 u \equiv au\left|_{x=0}\right. + b\,u\left|_{x=1}\right. = 0; \\ l_2 u \equiv D_x u\left|_{x=0}\right. - D_x\,u\left|_{x=1}\right. + c\,(u\left|_{x=0}\right. + u\left|_{x=1}\right.) = 0; \end{cases} \tag{2}$$

$$a, b, c \in (-\infty, +\infty)$$

При застосуванні методу відокремлення змінних виникає спектральна задача

$$-D_x^2 v = \lambda v, \lambda \in C, l_1 v = l_2 v = 0. \tag{3}$$

Властивості оператора $L(a,b,c)\ :\ L_2(0,1)\ \to\ L_2(0,1)$ задачі (3) $D(L(a,b,c)) \equiv \{v \in W_2^2(0,1),\ l_j v = 0,\ j = 1,2\}$, описує наступна

Теорема 1. *1). Граничні умови (2) регулярні за Біркгофом, але не посиленно регулярні. Спектр оператора $L(a,b,c)$ співпадає з спектром самоспряженого оператора $L(1,-1,c)$;*

2). У випадках $c \neq 0$, або $b \neq c$ спектр оператора $L(a,b,c)$ простий та система власних функцій разом із біортогональною системою необмежені за нормою простору $L_2(0,1)$. Існує приведена система власних функцій оператора $L(a,b,c)$, яка утворює базис Рісса в просторі $L_2(0,1)$;

3). У випадку $c = 0$, та $b \neq c$ оператор $L(a,b,0)$ є суттєво несамоспряженим оператором,тобто кратному спектру оператора відповідає зчисленна множина кореневих функцій. Існує приведена система кореневих функцій, яка утворює базис Рісса в просторі $L_2(0,1)$.

Теорема 2. *Для довільної функції $f \in L_2(G)$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) у вигляді ряду за системою кореневих функцій оператора $L(a,b,c)$.*

ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРИ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Бецко І. В.

betskoiv@mail.ru

Національний технічний університет України «КПІ», Україна

Досліджується питання існування і побудови неперервних розв'язків систем рівнянь вигляду

$$y(t+1) = Jy(t) + \tilde{B}y(qt) + F(t), \tag{1}$$

де $J = diag(J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m)), J_i, i = 1, \dots, m$ – квадратні $(n_i \times n_i)$ матриці вигляду

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & \epsilon & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \epsilon & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

причому $\sum_{i=1}^{m} n_i = n, \epsilon$ – як завгодно мала додатна стала, вектор-функція $F(t)$, стала q і матриця $\tilde{B}$ задоволяняють умови:

1. $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = 1, \dots, k, j = k+1, \dots, m, q > 0$;
2. $\theta = \max\{\frac{\tilde{b}_1}{1-(\lambda^*+\delta_1)}, \frac{\tilde{b}_2(\lambda_{**}^{-1}+\delta_2)}{1-(\lambda_{**}^{-1}+\delta_2)}\} < 1,$ де $\delta_i = \delta_i(\epsilon) \longrightarrow 0$

   при $\epsilon \longrightarrow 0, \tilde{b}_1 = |\tilde{B}_{11}| + |\tilde{B}_{12}|, \tilde{b}_2 = |\tilde{B}_{21}| + |\tilde{B}_{22}|,$

   $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \dots, k\}, \lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1, \dots, m\}$;
3. всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними й обмеженими при всіх $t \in R$ функціями.

Доведена наступна теорема.

Теорема. *Нехай виконуються умови* $1-3$. *Тоді система рівнянь (1) має неперервний і обмежений при* $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок* $y(t) = (y^1(t), y^2(t))$.

При виконанні умов $1-3$ *досліджено також властивості неперервних розв'язків системи (1) у випадку, коли* $F(t) \equiv 0$.

УСЕРЕДНЕННЯ В БАГАТОЧАСТОТНИХ СИСТЕМАХ ІЗ ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ І ПОЧАТКОВИМИ ТА ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ

Бігун Я. Й., Краснокутська І. В.

yaroslav.bihun@gmail.com, i.krasnokutska@chnu.edu.ua
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна

Багаточастотні системи звичайних диференціальних рівнянь із початковими, багатоточковими або інтегральними умовами методом усереднення з використанням оцінок осциляційних інтегралів досліджувались в монографії [1] та ін. Системи із $m \geq 1$ частотами у резонансному випадку з лінійно перетвореним аргументом й інтегральними умовами досліджено в [2].

У даній роботі розглядається задача

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \quad 0 \leq \tau \leq L, \tag{1}$$

$$a(\tau_1) = d_1, \quad \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} A(\tau, a(\tau))d\tau = d_2, \tag{2}$$

де $0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq L$, $a \in D \subset \mathbb{R}^m$, $\varphi \in T^m$, $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_q)$, $\lambda_i, \theta_i \in (0,1)$, $a_\lambda(\tau) = a(\lambda\tau)$.

Усереднення в системі (1) здійснюється за вектором швидких змінних φ_Θ і система набуває вигляду

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau} = X_0(\tau, \overline{a}_\Lambda), \quad \frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y_0(\tau, \overline{a}_\Lambda),$$

розв'язок якої задовольняє умови (2).

Встановлено умови, при виконанні яких відхилення розв'язків точної і усередненої задач має порядок $O(\varepsilon^\alpha)$, $0 < \alpha \leq (mq)^{-1}$. Доведено існування та єдиність розв'язку усередненої задачі, на підставі чого і для методу усереднення отримано аналогічні твердження для задачі (1), (2).

1. *Самойленко А.М.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань / А.М. Самойленко, Р.І. Петришин — К.: Наукова думка, 2004. — 474 с.
2. *Бігун Я.Й., Березовська І.В.,* Усереднення в багаточастотній системі диференціальних рівнянь із лінійно перетвореним аргументом і нетеровими крайовими умовами // Математичне та комп'ютерне моделювання. – Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка – 2011. – Вип. 5. – С. 10–19.

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ОСОБЛИВИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ІСТОТНО НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Білозерова М. О.

marbel@ukr.net

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Україна

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

у якому $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$[1] $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$ — неперервна функція, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ $(\ i = 0, 1)$ — неперервні функції, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — або проміжок $[y_i^0, Y_i[$[2] або — $]Y_i, y_i^0]$. Крім того, припускаємо, що кожна з функцій $\varphi_i(z)$ — правильно змінна функція при $z \to Y_i$ $(z \in \Delta_{Y_i})$ порядку σ_i, причому $\sigma_0 + \sigma_1 \ne 1$.

Розв'язок y рівняння (1) будемо називати $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язком, де $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, якщо він заданий на $[t_0, \omega[$ та при кожному $i \in \{0, 1\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

$P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язки рівняння (1), для яких $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ було детально досліджено у роботі [1]. Проте, в особливих випадках $\lambda_0 \in \{0, \pm\infty\}$ доводилося накладати додаткові обмеження на функції φ_0, φ_1. Наразі отримано необхідні та достатні умови існування та асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків рівняння (1), в якому права частина не задовольняє цим обмеженням.

1. *Белозерова М.А.* Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка с правильно меняющимися в окрестностях особых точек нелинейностями // Вісник Одеського нац. університету. Математика і механіка. – 2010. – **15**, Вип. 18. – С. 7-21.

[1] При $\omega > 0$ вважаємо, що $a > 0$.

[2] При $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ вважаємо $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ відповідно.

ПРО МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ

Бугрій О. М.

ol_buhrii@i.ua

Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $T, a > 0$, $\gamma \geq 2$ – деякі числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega$, $Q_{0,T} = \Omega \times (0, T)$.

Розглянуто мішану задачу

$$u_t - a\,\Delta(|u|^{\gamma-2}u) + g(x,t)|u|^{q(x)-2}u+$$

$$+\phi\Big(\int\limits_{\Omega} \epsilon(x,t,y)\big(u(x+y,t) - u(x,t)\big)\,dy\Big) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{1}$$

$$u|_{\Omega\times[0,T]} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{3}$$

де Δ – оператор Лапласа, $g, q, \phi, \epsilon, f, u_0$ – деякі функції, зокрема, $q = q(x)$ – змінний показник нелінійності рівняння. Лінійний аналог зідачі (1)-(3) виникає в моделях Мертона і Коу, які описують біржові коливання вартості активів опціонів європейського стилю виконання.

Знайдено умови існування узагальненого розв'язку мішаної задачі (1)-(3).

ПРО ОДИН НОВИЙ ПІДХІД ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Варга Я. В.

jana.varha@mail.ru
Ужгородський національний університет, Україна

Досліджується інтегральна крайова задача загального виду

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x\right), \, t \in [a, b]\,, \; \int\limits_a^b g(s, x(s), x^{'}(s))ds = d.$$

Нехай задані дві опуклі множини D_a та D_b, в яких шукаємо, відповідно, значення розв'язку (розв'язків) $x(a)$ та $x(b)$. Будуємо лінійну оболонку $D_{a,b}$ векторів $z \in D_a$ і $\eta \in D_b$, та її спеціальний векторний $\rho-$окіл $D := B\left(D_{a,b}, \rho\right)$. Припускається, що $f : [a, b] \times D \to \mathbb{R}^n$, $g : [a, b] \times D \times D^{'} \to \mathbb{R}^n$ є неперервні та локально ліпшицеві, де $D^{'} := \left\{f(t, y) : t \in [a, b]\,,\ y \in D\right\}.$

Задача полягає у дослідженні існування та наближеної побудови неперервно диференційовного розв'язку (розв'язків) $x : [a, b] \to D$, значення яких $x(a) \in D_a$ і $x(b) \in D_b$. Спочатку зводимо задачу до більш простого виду. Для цього вводимо наступні векторні параметри:

$$z := col(z_1, z_2, ..., z_n) = x(a),\ \eta := col(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n) = x(b)$$

і замість заданої інтегральної крайової задачі, подібно [1] вивчаємо наступну параметризовану двоточкову задачу „модельного типу“:

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x\right), t \in [a, b]\,,\ x(a) = z,\ x(b) = \eta.$$

Для дослідження розв'язків перетвореної задачі вводимо в розгляд наступну параметризовану послідовність функцій $\{x_m(t, z, \eta)\}_{m=0}^{\infty}$, яка задовольняє двоточкові умови $x(a) = z$, $x(b) = \eta$ для всіх $z, \eta \in \mathbb{R}^n$. Доводиться рівномірна збіжність цієї послідовності. Встановлено, що гранична функція $x_\infty(t, z, \eta)$ при значеннях параметрів $z = z^*, \eta = \eta^*$ буде розв'язком заданої задачі тоді і тільки тоді, коли пара (z^*, η^*) задовольняє спеціальну систему $2n$ алгебраїчних „визначальних рівнянь“.

1. *A. Rontó, M. Rontó and Y. Varha*, A new approach to non-local boundary value problems for ordinary differential systems, Applied Mathematics and Computation, 250 (2015), No. 1, 689-700, doi:10.1016/j.amc.2014.11.021.

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПОЧАТКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З МАКСИМУМОМ

Вітюк О. Н., Кічмаренко О. Д., Сапожнікова К. Ю.

vva@te.net.ua, olga.kichmarenko@gmail.com,kateryna.sapozhnikova@
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Україна

Функціонально-диференціальні рівняння виникають при моделюванні складних систем. Одним з найбільш цікавих є диференціальне рівняння з максимумом, яке містить максимум невідомої функції на інтервалі передісторії. У роботі [3] представлено дослідження диференціальних рівнянь з максимумом.

Розробка чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь з максимумом є актуальною, оскільки стандартні методи не можуть бути застосовані безпосередньо в разі немонотонності розв'язків. У доповіді буде розглянуто наступну задачу:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \max_{\tau\in[t-h,t]} x(\tau)),\ t \in [0,T], \quad x(t) = 0,\ t \in [-h, 0], \tag{1}$$

де $h > 0$ – константа.

У роботі [1] розроблено алгоритм побудови розв'язку задачі (1) за допомогою двох послідовностей, з обмеженням значення T.

Ми пропонуємо чисельний метод, який не вимагає побудови верхнього і нижнього квазірозв'язків та обмеження довжини інтервалу. Достатні умови існування і єдиність розв'язку задачі (1) були отримані в роботі [2]. Робота алгоритму ілюструється прикладами.

1. *A. Golev, S. Hristova, A. Rahnev.* An algorithm for approximate solving of differential equation with "maxima". //Computers and Mathematics with Applications. -2010.-V.60, Iss.10.- P.2771–2778.
2. *Витюк А.Н., О.Д.Кичмаренко, Е.Ю.Сапожникова.* О разрешимости начальной задачи для дифференциального уравнения с максимумом // Вісн. Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.-2015.-Т.20, Вип.1 (25).-С.29-39.
3. *Магомедов А.Р.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с максимумом/ А.Р.Магомедов. - Баку: Элм., 1991.-220 с.

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ ДВОВИМІРНИЙ НЕПЕРЕРВНИЙ С-ДРІБ

Гапак Т. С.

s_t_s@ukr.net

Ужгородський національний університет, Україна

Розглядається функціональний двовимірний неперервний С-дріб та його застосування для наближення функцій двох дійсних змінних.

$$D_n(x,y) = \Phi_0^n(x,y) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{b_{kk} * g_1(x - x_{k-1}) g_2(y - y_{k-1})}{\Phi_k^n(x,y)}, \qquad (1)$$

де $n = min\{n_1, n_2\}$ і

$$\Phi_0^n(x,y) = b_{00} + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n_1} \frac{b_{i0} * g_1(x - x_{i-1})}{1} + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n_2} \frac{b_{0i} * g_2(y - y_{i-1})}{1}$$

$$\Phi_k^n(x,y) = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{i=k+1}^{n_1} \frac{b_{ik} * g_1(x - x_{i-1})}{1} + \mathop{\mathrm{K}}_{i=k+1}^{n_2} \frac{b_{ki} * g_2(y - y_{i-1})}{1},$$

де $k = 1, 2, \ldots, n$, b_{ij}−коефіцієнти, $g_1(x)$ деяка неперервна функція на $[\alpha_x, \beta_x]$, $g_2(y)$− неперервна функція на $[\alpha_y, \beta_y]$ і вони здійснюють взаємооднозначне відображення.

За допомогою інтерполяційного ланцюгового дробу (1) наближаємо функцію двох змінних $f(x,y)$, яка неперервна на множині $G = [\alpha_x, \beta_x] \times [\alpha_y, \beta_y]$.

Використовуючи умову інтерполяції, встановлено алгоритм знаходження коефіцієнтів b_{ij}. А також знайдена оцінка залишкового члена цього інтерполяційного ланцюгового дробу.

1. **Гапак Т.С.** Квазіобернений функціональний інтерполяційний ланцюговий дріб, Наук. вісник Ужгородського ун-ту. Серія матем. і інформ., –2014.Вип.26 №2 –Р.18-24.

ФАКТОРИЗАЦІЯ ПОТОКІВ ЛАКСА НА СПРЯЖЕНОМУ ПРОСТОРІ ЦЕНТРАЛЬНОГО РОЗШИРЕННЯ ОПЕРАТОРНОЇ АЛГЕБРИ ЛІ

Гентош О. Є.[†], *Прикарпатський А. К.*[‡]

ohen@ukr.net, pryk.anat@ua.fm

[†] *Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАНУ, Львів, Україна*

[‡] *Краківська гірничо-гутнича академія, Польща*

Розглянемо на спряженому просторі $\mathcal{G}^*$ центрального розширення за допомогою 2-коциклу Маурера-Картана операторної алгебри Лі $\mathcal{G}$ із стандартним комутатором та інваріантним скалярним добутком, яка розкладається у пряму суму двох підалгебр Лі, тобто $\mathcal{G} = \mathcal{G}_- \oplus \mathcal{G}_+$, два потоки Лакса у вигляді

$$dl/dt = [(\nabla\gamma(l))_+,\ l - c\partial/\partial y], \tag{1}$$

$$d\tilde{l}/dt = [(\nabla\tilde{\gamma}(\tilde{l}))_+,\ \tilde{l} - c\partial/\partial y], \tag{2}$$

де $\mathcal{G}^* \simeq \mathcal{G}$, $\mathcal{G}_-^* \simeq \mathcal{G}_+$, $\mathcal{G}_+^* \simeq \mathcal{G}_-$, $l,\ \tilde{l} \in \mathcal{G}^*$, нижній індекс "+" позначає проекцію оператора на підалгебру Лі $\mathcal{G}_+$, $c \in \mathbb{C}$. Ці потоки породжуються $\mathcal{R}$-деформованою дужкою Лі-Пуассона та функціоналами Казимира γ і $\tilde{\gamma} \in I(\mathcal{G}^*)$ відповідно, градієнти яких задовольняють співвідношення:

$$[l - c\partial/\partial y,\ \nabla\gamma(l)] = 0, \quad [\tilde{l} - c\partial/\partial y,\ \nabla\tilde{\gamma}(\tilde{l})] = 0.$$

Якщо у початковий момент часу $\tilde{l}(0) - c\partial/\partial y = B^{-1}(0)(l(0)-$ $-c\partial/\partial y)B(0)$, де $B(0) \in \exp\mathcal{G}_+$, то існують такі оператори $A,\ B \in \exp\mathcal{G}_+$, що

$$l = AB^{-1}, \quad \tilde{l} = B^{-1}(A - c\partial B/\partial y), \tag{3}$$

і має місце

Теорема. *При перетворенні Беклунда (3) система двох потоків Лакса (1)-(2) на $\mathcal{G}^* \oplus \mathcal{G}^*$ еквівалентна до системи еволюційних рівнянь на $\mathbf{G}_+ \times \mathbf{G}_+$:*

$$dA/dt = (\nabla\gamma(l))_+A - A(\nabla\tilde{\gamma}(\tilde{l}))_+ + c(\partial(\nabla\gamma(l))_+/\partial y)B, \tag{4}$$

$$dB/dt = (\nabla\gamma(l))_+B - B(\nabla\tilde{\gamma}(\tilde{l}))_+. \tag{5}$$

де $\mathbf{G}_+$ – група Лі з відповідною алгеброю Лі $\mathcal{G}_+$.

За допомогою перетворення Беклунда (3) доведено також гамільтоновість системи (4)-(5).

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ НЕОСОБЛИВИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ІСТОТНО НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Гержановська Г. А.

hello_greta@mail.ru
Одеський національний університет імені І.І.Мечникова, Україна

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y')f(y,y'), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0,+\infty[$ — неперервні функції, $f : \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \to]0,+\infty[$ — неперервно диференційовна функція, $Y_i \in \{0,\pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — проміжок або $[y_i^0;Y_i[$, [1] або $]Y_i;y_i^0]$ $(i = 0,1)$. Крім того, вважається, що кожна з функцій $\varphi_i(z)$, (i=0,1) є правильно змінною функцією при $z \to Y_i$ $(z \in \Delta_{Y_i})$ порядку σ_i, $\sigma_0 + \sigma_1 \ne 1$, а функція f задовольняє умову

$$\lim_{\substack{v_k \to Y_k \\ v_k \in \Delta_{Y_k}}} \frac{v_k \cdot \frac{\partial f}{\partial v_k}(v_0,v_1)}{f(v_0,v_1)} = 0, \text{ рівномірно по } v_j \in \Delta_{Y_j},\ j \ne k,\ k,j = 0,1.$$

Асимптотичній поведінці розв'язків рівняння вигляду (1), у якому $f \equiv 1$, було присвячено багато робіт (див., наприклад, [1]). В цих дослідженнях права частина або у явному вигляді, або асимптотично була зображена у вигляді добутку функцій, кожна з яких залежала тільки від t, або тільки від y, або тільки від y', причому це грало важливу роль у методиці дослідження. Тому розглядається випадок функції f яка навіть асимптотично не зображується у вигляді добутку функцій лише від однієї змінної y або y'.

Отримані необхідні і достатні умови існування у рівняння (1) достатньо широкого класу розв'язків, а також асимптотичні зображення таких розв'язків та їх похідних при $t \uparrow \omega$.

1. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка / В.М. Евтухов, М.А. Белозерова // Укр. Мат. журнал. – 2008. – Т.60, №3. – С. 310–331.

[1] При $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ вважаємо $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ відповідно.

ПРО ОДИН КЛАС РОЗРИВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ПЛОЩИНІ

Гіщук Р. Р., Перестюк М. М.

gischuk@gmail.com, perestyuknn@gmail.com
Ужгородський національний університет, Україна

Досліджується дисипативна система диференціальних рівнянь на площині

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\alpha y + f(x),$$

$$\alpha > 0, \;\; f(0) = 0, \;\; xf(x) > 0, \;\; x \neq 0$$

що піддається імпульсному збуренню в момент попадання фазової точки $(x(t),\; y(t))$ на коло $x^2 + y^2 = r^2$. В результаті дії імпульсного збурення з цього кола фазова точка "перескакує"за певним законом в точку заданого еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

або ж іншої замкненої кривої, що охоплює початок координат на площині.

Встановлені достатні умови існування в таких системах одноімпульсних розривних циклів, досліджено їх стійкість. На простих прикладах показано, що коли фазова точка конкретної траєкторії нескінченне число разів попадає на множину імпульсної дії, то можуть виникати серйозні труднощі в дослідженні розривної динамічної системи. Наприклад, траєкторія може бути стійкою за Пуасоном і "замітати"частину площини, лебегова міра якої додатна. Таке явище відсутнє в неперервних динамічних системах.

1. *A.M. Samoilenko, N.A. Perestyuk*, Impulsive Differential Equations, World Scientific, Singapore, 1995, 462p.
2. *Marat Akhmet*, Principles of Discontinuous Dynamical Systems, Springer, 2010, 178p.

ГІПОТЕЗА С. П. РОБІНСОНА: ДОВЕДЕННЯ У ЧАСТКОВИХ ВИПАДКАХ

Головата О. М.

o_sumyk@yahoo.com

Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

Многочленом Чезаро $C_n^{\alpha}(z)$ порядку $\alpha > 0$ і степеня $n \in \mathbb{N}$ називається

$$C_n^{\alpha}(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha+1)_{n-k}}{(n-k)!} \frac{n!}{(\alpha+1)_n} z^k,$$

де $(\beta)_k := \beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)$.

Для аналітичної в одиничному крузі $\mathbb{D}$ функції $f := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k$ величина $C_n^{\alpha}(z,f) := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \frac{(\alpha+1)_{n-k}}{(n-k)!} \frac{n!}{(\alpha+1)_n} z^k$ називається n-ним середнім Чезаро функції f порядку α.

Середні Чезаро відіграють важливу роль в теорії апроксимації, сумуванні рядів, аналізі Фур'є та геометричній теорії функцій.

Нехай α, $\beta > 0$. Кажемо, що аналітична в одиничному крузі функція f така, що $f(0) = 1$, належить класу $\mathcal{T}(\alpha,\beta)^*$, якщо

$$f(z) * \tfrac{(1+xz)^{[\alpha]}(1+yz)^{\alpha-[\alpha]}}{(1-z)^{\beta}} \neq 0, \quad z \in \mathbb{D}, \quad x, y \in \overline{\mathbb{D}},$$

де оператор $*$ позначає згортку за Адамаром, $[\alpha]$ – найбільше ціле число, що не перевищує α.

Поштовхом для цього дослідження стала гіпотеза С.П. Робінсона, яка стверджує, що для всіх α і $\beta \geq 1$ многочлени Чезаро $C_n^{(\alpha+\beta-1)}(z)$ належать класу $\mathcal{T}(\alpha,\beta)^*$. С. Рушевай підтвердив істинність гіпотези для $\alpha = 1$ і $\beta \geq 1$. У всіх інших випадках гіпотеза Робінсона дуже важка для перевірки. Фактично відомі лише декілька представників класів $\mathcal{T}(\alpha,\beta)^*$ з $\alpha > 1, \beta > 0$ у явному вигляді.

Теорема. *Гіпотеза С. П. Робінсона справедлива у випадку, коли* $\alpha = 2$ *і* $\beta = 1, 2$, *а саме*

$$C_n^{(2)} \in \mathcal{T}(2,1)^*, \qquad C_n^{(3)} \in \mathcal{T}(2,2)^* \quad \text{для усіх } n \in \mathbb{N}.$$

1. *S.Ruscheweyh, O.Sumyk* On Cesáro means, Kaplan classes and a conjecture of S.P.Robinson// J.Math.Anal.Appl. - 2011.- V.383. - P. 451-460.

ОПЕРАТОРИ ШРЕДИНҐЕРА ЗІ СИНГУЛЯРНИМИ ПОТЕНЦІАЛАМИ

Головатий Ю. Д.

yu_holovaty@franko.lviv.ua

Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

В останні кілька десятиліть як у фізичній, так і математичній літературі активно вивчають оператори Шредингера із сингулярними потенціалами. Такі потенціали є узагальненими функціями з точковими носіями, тому відповідні оператори часто називають операторами з точковими взаємодіями. Історично точкові взаємодії виникли у квантовій механіці як границі операторів Шредингера з гладкими потенціалами, носії яких стягувалися до дискретної множини. Моделі, які опираються на концепцію точкових взаємодій, виявилися досить ефективними, бо адекватно описують квантовомеханічні процеси і одночасно дозволяють суттєво спростити обчислення.

У доповіді мова йтиметься про рівномірну резольвентну збіжність двопараметричної сім'ї операторів Шредингера

$$S_{\varepsilon,\nu} = -\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon^{-2}\Phi(\varepsilon^{-1}x) + \nu^{-1}\Psi(\nu^{-1}x), \quad \operatorname{dom} S_{\varepsilon,\nu} = W_2^2(\mathbb{R}),$$

коли додатні параметри ε та ν прямують до нуля. Тут Φ і Ψ – дійсні обмежені функції з компактними носіями. При певних додаткових умовах на функції Φ і Ψ потенціали сім'ї операторів $S_{\varepsilon,\nu}$ збігаються в сенсі узагальнених функцій до розподілу $\alpha\delta'(x) + \beta\delta(x)$, де $\delta(x)$ – функція Дірака.

1. *Yu. Golovaty*, 1D Schrödinger operators with short range interactions: two-scale regularization of distributional potentials. Integral Equations and Operator Theory, 2013, Vol. **75**, Issue 3, pp 341–362.

2. *Yu. Golovaty and R. Hryniv*, Norm resolvent convergence of singularly scaled Schrödinger operators and δ'-potentials. Proc. R. Soc. Edinb. A., 2013, **143**, pp 791–816.

ПРО ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМ ОПЕРАТОРНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ

Гончар І. В., Городній М. Ф.

goncharinna@ukr.net, gorodnii@mail.univ.kiev.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

Нехай X - скінченновимірний комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$; A, B, C - лінійні оператори в X, для яких існують обернені оператори A^{-1}, B^{-1}, C^{-1}.

У роботі досліджується питання про існування та єдиність обмеженого розв'язку різницевого рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + y_n,\ n \geq 1, \\ x_{n+1} = Bx_n + y_n,\ -m+1 \leq n \leq 0, \\ x_{n+1} = Cx_n + y_n,\ n \leq -m, \end{cases} \tag{1}$$

у якому $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ - задана, а $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ - шукана обмежені послідовності елементів простору X, m - фіксоване натуральне число.

Покладемо $S = \big\{\lambda \in \mathbb{C} \ \big|\ |\lambda| = 1\big\}$. Позначимо через $\sigma(T)$ спектр лінійного обмеженого в X оператора T і припустимо, що $\sigma(T) \cap S = \varnothing$. Нехай $\sigma_-(T)$ - частина спектру оператора T, яка лежать всередині кола S, а $\sigma_+(T) := \sigma(T) \setminus \sigma_-(T)$. Вважатимемо, що $\sigma_\pm(T) \neq \varnothing$. Тоді простір X розкладається в пряму суму інваріантних відносно T підпросторів $X = X_+(T) \dot{+} X_-(T)$ таким чином, що звуження T_-, T_+ оператора T на $X_-(T), X_+(T)$ мають спектри $\sigma_-(A), \sigma_+(A)$.

Теорема. *Різницеве рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ для довільної обмеженої послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*
i)$\sigma(A) \cap S = \varnothing, \sigma(C) \cap S = \varnothing$;
ii)$X = X_-(A) \dot{+} B^m(X_+(C))$.

Також знайдено явний вигляд відповідного до обмеженої послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ єдиного обмеженого розв'язку $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ різницевого рівняння (1). При виконанні умов теореми різницеве рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ для довільної обмеженої послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ і у випадку нескінченновимірнрого простору X.

КОРЕКТНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НЕЛОКАЛЬНИХ БАГАТОТОЧКОВИХ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ПСЕВДОБЕССЕЛЕВИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Городецький В. В., Мартинюк О. В.

alfaolga1@gmail.com, v.gorodetskiy@chnu.edu.ua
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна

У роботі розвинена теорія нелокальних багатоточкових за часом задач для еволюційних рівнянь з псевдобесселевими операторами скінченного та нескінченного порядків, побудованими за сталими та змінними символами, у випадку, коли функція, що задає багатоточкову задачу є елементом простору узагальнених функцій типу розподілів Соболєва-Шварца.

Досліджена структура та властивості фундаментальних розв'язків вказаних задач (властивість дельта-подібності при $t \to +0$, спеціальні оцінки похідних за просторовими змінними, диференційовність по часовому параметру t як абстрактних функцій цього параметра, властивості згорток фундаментальних розв'язків із узагальненими функціями із відповідних просторів узагальнених функцій).

Встановлена коректна розв'язність зазначених багатоточкових задач з граничними умовами, які є згортувачами з простору узагальнених функцій типу розподілів Соболєва-Шварца; при цьому розв'язок $u(t, \cdot)$ (при кожному $t > 0$) є елементом того ж простору основних функцій, що й фундаментальний розв'язок відповідної задачі. Знайдено аналітичне зображення розв'язків та доведено властивість локалізації.

Побудовано нові класи символів, не диференційовних у точці 0, які містять відомий клас символів, що задовольняють умову "параболічності". За допомогою таких символів побудовано нові класи псевдодиференціальних операторів, зокрема, псевдобесселевих операторів нескінченного порядку, а також простори основних функцій, у яких вказані оператори є неперервними, досліджена топологічна структура таких просторів та просторів, що є їхніми образами при відображенні Бесселя. Досліджені топологічно спряжені простори до просторів основних функцій, властивості перетворення Бесселя узагальнених функцій з цих просторів.

ПРО РЕГУЛЯРНІСТЬ ДЕЯКИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА МНОГОВИДАХ

Грод І. М.

igrod@ukr.net

Тернопільський національний педагогічний університет, Україна

Одним з важливих питань в якісній теорії диференціальних рівнянь є знаходження умов збереження інваріантних многовидів при збуреннях. Ця задача тісно пов'язана із властивостями певного виду систем лінеарізованих по частині змінних. Такі системи диференціальних рівнянь прийнято називати лінійними розширеннями динамічних систем на многовидах [1]. Тут, для таких систем, досліджується питання існування функції Гріна-Самойленка задачі про інваріантні многовиди з використанням знакозмнних функцій Ляпунова.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x\right), \frac{dy}{dy} = A\left(x\right) y, \tag{1}$$

де $x \in R^m, y \in R^n$, $f\left(x\right)$–вектор-функція, визначена, неперервна на R^m і локально задовольняє умову Ліпшиця, матриця $A\left(x\right)$ є $n \times n$–вимірною, елементами якої є дійсні функції, визначені на R^m, неперервні і обмежені.

Теорема. *Нехай система (1) така, що знайдуться симетричні, $n \times n$-вимірні матриці $S_i(x) \in C^{'}(R^m; a)$, і деякі комутативні матриці $C_i(x) \in C^{'}(R^m)$, $i = \overline{1,3}$, для яких, при $x \in R^n$, виконуються умови*

$$\left\langle \left[\dot{S}_i\left(x\right) + S_i\left(x\right) A^T\left(x\right) + A\left(x\right) S_i\left(x\right)\right] C_i(x)x, C_i(x)x \right\rangle \geq$$
$$\geq \|(C_i(x) - C_{i-1}(x))x\|^2, i = 2, 3,$$

$$\left\langle \left[\dot{S}_1\left(x\right) + S_1\left(x\right) A^T\left(x\right) + A\left(x\right) S_1\left(x\right)\right] C_1(x)x, C_1(x)x \right\rangle \geq \|C_1(x)x\|^2,$$

$$\det(C_3(x)) \neq 0.$$

Тоді система (1) має єдину функцію Гріна задачі про обмежені інваріантні многовиди.

1. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. -Киев: Наук. думка, 1990.-270 с.

ЧИСЕЛЬНО – АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ДВОТОЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ВИРОДЖНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Грушовський О. М.

oleksandr_hrushovskyj@ukr.net
Ужгородський Національний університет, Україна

Розглядається вироджена диференціальна система [1]

$$B(t)x' = A(t)x + f(t,x), \tag{1}$$

з імпульною дією

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x + b_i, \tag{2}$$

підпорядкована двоточковим краєвим умовам

$$A_1 x(a) + A_2 x(b) = d, \tag{3}$$

де $rankB(t) = n - r = const\ \forall t \in [a,b]$, $r > 0$, вектор-функція $f(t,x)$ є неперервною, $(n \times n)$–матриці $A(t)$, $B(t)$ – матриці з неперервними компонентами, $a \leq \tau_1 < \ldots < \tau_p < b,\ \ p < \infty$, A_1 і A_2 – $(n \times n)$ – матриці та n –вимірний вектор d є сталими.

Припускаємо, що система (1)-(2) зводиться до центральної канонічної форми [2].

Для таких систем розроблено та обгрунтовано чисельно–аналітичний метод дослідження існування та наближеної побудови розв'язків. Встановлено необхідні та достатні умови існування розв'язків, знайдено оцінки похибки побудованих наближень.

1. *Самойленко А.М., Шкіль М.І, Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянт з виродженнями. - К.: Вища школа, 2000.
2. *Король І. І.* Дослідження існування і побудова розв'язків крайових задач: автореф. дис. доктора фіз.-мат. наук : спец. 01.01.02 "Диференціальні рівняння". - Київ, 2011р. — 32 с.

ВИЗНАЧЕННЯ НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ У ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ З ВИРОДЖЕННЯМ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Гузик Н. М.

hryntsiv@ukr.net

Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$, де $h = h(t), h(t) > 0, t \in [0,T]$ — невідома функція, розглядається обернена задача визначення коефіцієнтів $a = a(t), a(t) > 0, t \in [0,T]$ та $b = b(t)$ в рівнянні

$$u_t = a(t)\psi(t)u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h(0)], \tag{2}$$

крайовими умовами Діріхле

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$h'(t) = -u_x(h(t),t) + \mu_3(t),\ t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\int_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

$$a(t)\psi(t)u_x(0,t) = \mu_5(t),\ t \in [0,T]. \tag{6}$$

Припускається, що $\psi = \psi(t)$ — монотонно зростаюча функція, така, що $\psi(t) > 0,\ t \in (0,T], \psi(0) = 0$. Дослідження проводиться у випадку слабкого виродження, коли $\lim\limits_{t\to 0} \int\limits_0^t \left(\int\limits_\tau^t \psi(\sigma)d\sigma\right)^{-\frac{1}{2}} d\tau = 0$.

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку

$$(a,b,h,u) \in (C[0,T])^2 \times C^1[0,T] \times C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T),$$

$$a(t) > 0,\ h(t) > 0, t \in [0,T]$$

задачі (1)-(6).

ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯННЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ У НЕФІКСОВАНІ МОМЕНТИ ЧАСУ

Данілов В. Я., Ковальчук Т. В., Івашкевич А. О.

annatytarenko@bigmir.net

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київський національний торговельно-економічний університет, Україна

Розглядається задача оптимального керування системою диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\dot{x} = A(x,t) + B(x,t)u,\ x \notin S$$

$$\Delta x\,|_{x \in S} = g(x) \tag{1}$$
$$x(0) = x_0$$

з критерієм якості

$$J(u) = \int_0^T (A^0(x,t) + B^0(u,t))dt \to inf, \tag{2}$$

де S – деяка гіперповерхня в R^d, $x_0 \in R^d$ – фіксований вектор, $T > 0$ – фіксоване, $t \in [0,T]$, $u \in U \subset R^m$, U – замкнена, опукла множина в R^m, $0 \in U$. $A(x,t)$ – d-мірна вектор-функція, $B(x,t)$ – $d \times m$-мірна матриця, g – d-мірна вектор-функція.

Знайдені достатні умови існування оптимальних керувань задачі (1), (2) в термінах правих частин системи та критерію якості.

НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ГІПЕРБОЛІЧНИМИ СИСТЕМАМИ НАПІВЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Дерев'янко Т. О., Кирилич В. М.

derevianko.taras@gmail.com, vkyrylych@ukr.net
Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

У доповіді йтиме мова про необхідні умови оптимальності в задачах оптимального керування напівлінійними системами гіперболічних рівнянь першого порядку в необмеженій за часом півсмузі з нелінійними крайовими умовами, системами гіперболічних рівнянь з навантаженими правими частинами та нелінійними крайовими умовами, системами з виродженими характеристиками (в сенсі ортогональності характеристик координатним осям) і нелінійними крайовими умовами, системами з нелокальними крайовими умовами, тощо.

Оптимальне керування гіперболічною системою квазілінійних рівнянь, що описує динаміку попиту Слуцького та застосування задач оптимального керування гіперболічними системами в неокласичній теорії споживання.

1. *Аргучинцев А. В.* Оптимальное управление гиперболическими системами. /*А. В. Аргучинцев* - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 168 с.
2. *Gugat M.* Optimal nodal control of networked hyperbolic systems: evaluation of derivatives / M. Gugat // Advanced Modeling and Optimization – 2005. – V. 7. – N 1. – P. 9–37.
3. *Derevianko T. O.* Problem of optimal control for a semilinear hyperbolic system of equations of the first order with infinite horizon planning / T. O. Derev'yanko, V. M. Kyrylych // Ukrainian Math. Journal. – 2015. – Vol. 67 – N 2. – P. 211–229.
4. *Дерев'янко Т. О.* Оптимальне керування квазілінійною системою гіперболічних рівнянь, що описує попит Слуцького . Т. О. Дерев'янко, В. М. Кирилич // Матем. студії. – 2015. – Т. 43. – N 1. – С. 66–77.

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ n-ГО ПОРЯДКУ

Дорошенко А. Г.

k1e1ik@list.ru

Одеський національний університет імені І.І.Мечникова, Одеса, Україна

Розглядається диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}), \tag{1}$$

де $n \geq 2$, $\alpha_k \in \{-1; 1\}$ $(k = \overline{1, m})$, $p_k : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ $(k = \overline{1, m})$- неперервні функції, $\varphi_{kj} : \triangle_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$ $(k = \overline{1, m};\ j = \overline{0, n-1})$- неперервні і правильно змінні при $y^{(j)} \longrightarrow Y_j$ функції порядків σ_{kj}, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\triangle_{Y_j}$ - однобічний окіл Y_j, Y_j дорівнює або 0, або $\pm\infty$.

Розв'язок y рівняння (1) будемо називати $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$- розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовільняє наступні умови

$$y^{(j)}(t) \in \Delta_{Y_j} \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(j)}(t) = Y_j \quad (j = \overline{0, n-1}),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\left[y^{(n-1)}(t)\right]^2}{y^{(n)}(t) y^{(n-2)}(t)} = \lambda_0.$$

В роботах В.М.Євтухова і О.М. Клопота (див., наприклад, [1]) досліджувалася ситуація, коли права частина рівняння (1) на досліджуваному класі розв'язків еквівалентна одному доданку. Метою цієї роботи є поширення цих результатів на випадок , коли на досліджуваному класі розв'язків в правій частині такого рівняння є декілька головних доданків.

1. *Євтухов В.М., Клопот О.М.* Асимптотика деяких класів рішень звичайних дифференціальних рівнянь n-го порядку з правильно мінливими нелінійностями//Укр. Мат. Ж. - 2013. - 56, №3. - С. 354 - 380.

НЕЛОКАЛЬНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Дрінь Я. М.

drin_yaroslav@i.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна

Дослідженням нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними у різних аспектах займалися багато математиків, використовуючи при цьому різні методи та підходи (М.Л. Горбачук, Б.Й. Пташник, З.М. Нитребич, П.І. Каленюк, В.К. Романко, С.Г. Крейн, В.М. Борок, О.А. Самарський, В.І. Чесалін та ін.). Одержані важливі результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків таких задач.

На сьогодні нелокальні багатоточкові за часом задачі для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь не досліджені, тому актуальною є побудова теорії нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного ПДР вигляду

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \varphi(A)u(t,x) = 0, \quad t \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

де $\varphi(A)$ – ціла функція від ПДО A, побудованого за точково-негладким або аналітичним символом, зокрема, $\varphi(A) = A$ ($\varphi(A)$ розглядається у різних зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій); при цьому умова

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = g \tag{2}$$

трактується у класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо g – узагальнена функція (така ситуація є природною, оскільки гранична функція може мати особливості в одній або декількох точках і може допускати регуляризацію у тому чи іншому просторі узагальнених функцій), розвинена методика дослідження ФР і класична розв'язність задачі (1), (2), коли $\varphi(A) \equiv A$.

1. *Дрінь Я.М.* Задача Коші та нелокальні задачі для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами: дис. доктора фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Я.М. Дрінь, Київ, 2015. – 339 с.

АСИМПТОТИКА СИНГУЛЯРНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПРАВИЛЬНО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Євтухов В. М., Клопот О. М.

emden@farlep.net, mrtark@gmail.com

Одеський національний університет імені І.І.Мечникова, Одеса, Україна

Розглядається диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{ij}\left(y^{(j)}\right), \qquad (1)$$

де $\alpha_i \in \{-1; 1\}, p_i : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[\ (-\infty < a < \omega \leq +\infty)$– неперервна функція, $\varphi_{ij} : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[\ (j = \overline{0, n-1})$ - неперервні і правильно змінні функції порядків σ_{ij} при $y^{(j)} \longrightarrow Y_j$, $i = \overline{1, m}$, $Y_j \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_j} – деякий однобічний окіл Y_j.

Розв'язок y рівняння (1) будемо називати сингулярним $P_{t_*}(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, t_*[\ (a \leq t_0 < t_* < \omega)$ і задовольняє наступні умови

$$\lim_{t \uparrow t_*} y^{(j)}(t) = Y_j \quad (j = \overline{0, n-1}), \quad \lim_{t \uparrow t_*} \frac{\left[y^{(n-1)}(t)\right]^2)}{y^{(n)}(t) y^{(n-2)}|(t)} = \lambda_0.$$

Метою роботи є встановлення умов існування у рівняння (1) сингулярних $P_{t_*}(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків, а також асимптотичних зображень цих розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно. При $t_* = \omega$ асимптотичні властивості $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$-розв'язків досліджувались в попередніх роботах авторів (див., наприклад, [1]).

1. *Евтухов В.М., Клопот А.М.* Дифференц. уравнения. - 2014. -Т.50, № 5.- С.584-600.

НЕПЕРЕРВНІ ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Єрьоміна Т. О.

ierominat@ukr.net
Національний технічний університет України
Київський політехнічний інститут, Україна

Будуються неперервні обмежені розв'язки систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$x\left(qt\right) = \Lambda x\left(t\right) + f\left(t, x\left(t\right), x\left(t+1\right)\right), \tag{4}$$

де $t \in \Re$, $\Lambda-$дійсна $(n \times n)$- матриця вигляду $\Lambda = diag\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$, $f : \Re \times \Re^n \times \Re^n \to \Re^n$, q - деяка дійсна стала, при певних припущеннях відносно λ_i, $i = \overline{1, n}$ та q, досліджується їх поведінка при $t \to \infty$. При цьому припускається, що виконуються наступні умови:

1. $|\lambda_i| \neq 0$, $i = 1, 2, ..., n$, $q > 0$;
2. вектор-функція $f\left(t, x, y\right)$ є неперервною обмеженою при всіх $t \in \Re$, $x \in \Re^n$, $y \in \Re^n$ і $f\left(t, 0, 0\right) \equiv 0$;
3. для довільних $t \in \Re$, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}} \in \Re^n$ виконується співвідношення $\left|f\left(t, \bar{x}, \bar{y}\right) - f\left(t, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}\right)\right| \leq l\left(\left|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\right| + \left|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\right|\right)$, де l - деяка додатна стала.

Справедлива наступна теорема.

Теорема. *Нехай виконуються умови 1)-3) і умови:*

1. $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$,
2. $\Delta = \frac{2l}{\bar{\lambda} - \lambda^*} < 1$, *де* $1 > \bar{\lambda} > \lambda^* = \max\left\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\right\}$.

Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t),$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, ...$ *- деякі неперервні обмежені при* $t \geq T > 0$ *вектор-функції, які задовольняють умові* $\lim\limits_{t \to +\infty} x_i(t) = 0$.

НОРМАЛЬНО РОЗВ'ЯЗНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Журавльов В. П.

vfz2008@ukr.net

Житомирський національний агроекологічний університет, Україна

Нехай $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — банахові простори з супремум нормами обмежених вектор-функцій, визначених на скінченному проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у банахових просторах $\mathbf{B}_1$ та $\mathbf{B}_2$, відповідно, $\mathbf{B}$ — банахів простір.

Розглянемо крайову задачу

$$(\varLambda z)(t) = \left(\begin{bmatrix} L \\ \ell \end{bmatrix} z \right)(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \alpha \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

де $L : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — лінійний обмежений узагальнено-оборотний оператор, $\ell = \operatorname{col}(l_1, l_2, l_3, \ldots) : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{B}$ — лінійний обмежений вектор-функціонал, $\alpha \in \mathbf{B}$.

Узагальнена оборотність оператора L означає, що нуль-простір $N(L)$ та ядро $R(L)$ доповнювальні у банахових просторах $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ та $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, відповідно і він нормально розв'язний. Тоді існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to N(L)$ та $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \to Y_L$, які розбивають простори $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ та $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ у прямі суми підпросторів $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) = N(L) \oplus X_L$, $\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) = Y_L \oplus R(L)$.

Теорема. *Нехай L и $\mathcal{L}$ — узагальнено оборотні оператори. Тоді неоднорідна крайова задача (1) розв'язна для тих и тільки тих $\varphi(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ та $\alpha \in \mathbf{B}$, які задовольняють умови*

$$(\mathcal{P}_{Y_L}\varphi)(t) = 0,$$

$$\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}}\{\alpha - \ell(L^-\varphi)(\cdot)\} = 0$$

і при цьому її загальний розв'язок має вигляд

$$z(t) = (\mathcal{P}_{N(\varLambda)}\hat{z}_0)(t) + (G\varphi)(t) + (\mathcal{P}_{N(L)}(\mathcal{L}^-\alpha))(t),$$

де $\hat{z}_0(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — довільний елемент, $\mathcal{P}_{N(\varLambda)} = \mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})}$, $\mathcal{L} = \ell\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to \mathbf{B}$, $\mathcal{P}_{N(\mathcal{L})} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \to N(\mathcal{L})$ та $\mathcal{P}_{Y_\mathcal{L}} : \mathbf{B} \to Y_\mathcal{L}$ — обмежені проектори,

$$(G\varphi)(t) = (L^-\varphi)(t) - (\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{L}^-\ell(L^-\varphi)(\cdot))(t)$$

— узагальнений оператор Гріна.

ІСНУВАННЯ ТА АСИМПТОТИКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ ГІБРИДНИХ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, НЕ РОЗВ'ЯЗНИХ ВІДНОСНО ПОХІДНИХ НЕВІДОМИХ ФУНКЦІЙ

Зернов О. Є., Кузіна Ю. В.

zernov@ukr.net, yuliak@te.net.ua

[1]*Південноукраїнський національний педогогічний університет ім. К.Д.Ушинського, м.Одеса,Україна*

[2]*Військова академія, м.Одеса,Україна*

В доповіді розглядаються задачі Коші для гібридних систем сингулярних диференціальних рівнянь, виду

$$\alpha(t)x'(t) = f_1(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t)),$$

$$y'(t) = f_2(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t)),$$
$$x(0) = 0, y(0) = 0.$$

та

$$\alpha_1(t)x'(t) = f_1(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t)),$$
$$\alpha_2(t)y'(t) = f_2(t, x(t), y(t), x'(t), y'(t)),$$
$$x(0) = 0, y(0) = 0.$$

тут $x : (0,\tau) \to \mathbb{R}$, $y : (0,\tau) \to \mathbb{R}$ - невідомі функції, $f_i : D \to \mathbb{R}$, $\alpha_i : (0,\tau) \to (0,+\infty)-$ неперервні функції, де $\alpha_i(t) \to 0,\ t \to t_0, i \in \{1,2\}$, $D \subset (0,\tau) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Методами функціонального аналізу та якісної теорії диференціальних рівнянь одержані достатні умови, при виконанні яких задачі, що розглядаються, мають неперервно диференційовні розв'язки $x : (0,\rho) \to \mathbb{R}$, $y : (0,\rho) \to \mathbb{R}$, $\rho > 0-$ достатньо мале; досліджені питання щодо кількості таких розв'язків та їх асимтотичних властивостей.

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ

Іванчов М. І., Кінаш Н. Є.

ivanchov@franko.lviv.ua, nataliiakinash@gmail.com
Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

У даній роботі в прямокутнику розглядається обернена задача для рівняння теплопровідності з невідомим старшим коефіцієнтом, який залежить від часової та просторової змінних. З використанням функції типу функції Гріна задачу зведено до рівняння стосовно невідомого коефіцієнта, існування розв'язку якої доводиться із застосуванням теореми Шаудера. При доведенні єдиності розв'язку використовується теорія інтегральних рівнянь Вольтерра.

В області $Q_T := \{(x, y, t) : 0 < x < h, 0 < y < l, 0 < t < T\}$ розглянемо обернену задачу для рівняння теплопровідності

$$u_t = a(y, t)u_{xx} + u_{yy} + f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q_T \tag{1}$$

з невідомим коефіцієнтом $a(y, t)$, початковою та крайовими умовами

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}, \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = \mu_{11}(y, t), \quad u|_{x=h} = \mu_{12}(y, t), \quad (y, t) \in [0, l] \times [0, T], \tag{3}$$

$$u|_{y=0} = \mu_{21}(x, t), \quad u|_{y=l} = \mu_{22}(x, t), \quad (x, t) \in [0, h] \times [0, T], \tag{4}$$

та умовою перевизначення

$$a(y, t)u_x(0, y, t) = \mu_3(y, t), \quad y \in [0, l],\ t \in [0, T], \tag{5}$$

де $D := \{(x, y) : 0 < x < h, 0 < y < l\}$. Під розв'язком задачі (1)-(5) будемо розуміти пару функцій

$$(a(y, t), u(x, y, t)) \in C^{\gamma,\gamma/2}([0, l] \times [0, T]) \times C^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_T), 0 < \gamma < 1,$$

що задовольняє умови (1)-(5) у класичному розумінні.

Крім того, $a(y, t) > 0, (y, t) \in [0, l] \times [0, T]$.

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі (1)-(5). Отримані результати можна використати для дослідження двовимірної задачі для рівняння теплопровідності з вільною межею.

МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНА ЗАДАЧА З КРАЙОВИМИ УМОВАМИ, ЩО МІСТЯТЬ МОМЕНТИ, ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЛЯМЕ

Ільків В. С.

ilkivv@i.ua

Національний університет „Львівська політехніка“, Україна

В області $\mathcal{Q} = [0,T] \times \mathbb{R}^p$ у просторах майже періодичних функцій досліджено задачу з інтегро-крайовими умовами, що містять моменти шуканої функції, для системи рівнянь з частинними похідними, яка узагальнює систему рівнянь Ляме, а саме

$$\sigma\partial_t^2 u = \mu^* \partial_x \bar{A}^\dagger A \partial_x^\dagger u + (\lambda^* + \mu^*) A \partial_x^\dagger \partial_x \bar{A}^\dagger u, \tag{1}$$

$$\alpha_j u|_{t=(j-1)T} + \beta_j \mathcal{M}(r_j; u) = \varphi_j, \quad j = 1, 2, \tag{2}$$

де A — квадратна матриця, $\bar{A}$ — матриця, комплексно спряжена з матрицею A, $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $\partial_x = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_p)$, $\partial_t = \partial/\partial t$; σ, λ^*, μ^* — додатні параметри, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ — комплексні вектори ($\|\vec{\alpha}\|\|\vec{\beta}\| > 0$), $\vec{r} = (r_1, r_2)$ — вектор з невід'ємними цілими координатами, $\mathcal{M}(r; u) = \int_0^T \frac{t^r}{r!} u(t, \cdot) dt$ — момент порядку r шуканої вектор-функції $u = u(t, x)$, $\|\cdot\|$ — евклідова норма, † — операція транспонування. Розв'язок u задачі (1), (2) і задані праві частини φ_1 і φ_2 умов (2) є векторами розміру p.

Для кожного $t \in [0,T]$ розв'язок u і праві частини φ_1 та φ_2 належать до просторів зі шкали $\{\mathbf{H}^q_{\mathcal{M}}\}_{q\in\mathbb{R}}$ просторів майже періодичних функцій зі спектром $\mathcal{M} = \{\mu_k = (\mu_{k1}, \ldots, \mu_{kp})\colon k \in \mathbb{Z}^p\}$, який підпорядкований умовам зростання $d_1\|k\|^{\theta_1} \le \|\mu_k\| \le d_2\|k\|^{\theta_2}$, де $\mathbf{H}^q_{\mathcal{M}}$ — простір Соболєва порядку q.

Встановлено умови розв'язності задачі (1), (2) у шкалі просторів $\mathbf{H}^q_{\mathcal{M}}$, залежність їх від векторів параметрів $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{r}$ та структуру розв'язку. Досліджено проблему малих знаменників, яка виникає при визначенні гладкості розв'язку і отримано оцінки знизу знаменників для майже всіх значень параметра T з довільного фіксованого відрізка $[T_0, T_1]$, де $0 < T_0 < T_1 < \infty$.

Частину результатів опубліковано: Математичні методи та фізико-механічні поля, 2013, № 4, с. 40–53 (Кузь А. М., Пташник Б. Й.), Буковинський математичний журнал, 2015, № 2, с. 21–41
(Ільків В. С., Нитребич З. М., Пукач П. Я.).

УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ НЕЛОКАЛЬНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СЛАБКОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ У ПРОСТОРАХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ-ТЕЙЛОРА

Ільків В. С., Страп Н. І.

ilkivv@i.ua, n.strap@i.ua

Національний університет „Львівська політехніка", Україна

Нехай $\mathcal{S}$ однозв'язна область проколотої у нулі комплексної площини, а $\mathcal{D}^p$ — циліндрична область $[0,T]\times\mathcal{S}^p$, де $T>0$, $p\geq 2$.

В області $\mathcal{D}^p$ розглянуто задачу з двоточковими нелокальними умовами для диференціально-операторного рівняння зі сталими коефіцієнтами та нелінійною (слабко нелінійною) правою частиною

$$\sum_{|\hat{s}|\leq n} a_{\hat{s}} B^s \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = \varepsilon f(u),$$

$$\mu \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=T} = 0, \qquad m=0,1,\ldots,n-1,$$

де $\hat{s}=(s_0,s)$, $s=(s_1,\ldots,s_p)\in\mathbb{Z}_+^p$, $|\hat{s}|=s_0+s_1+\ldots+s_p$, $a_{s_0,s}$ — комплексні коефіцієнти ($a_{n,0}=1$), ε, μ — комплексні параметри, u — шукана функція. Оператор $B=(B_1,B_2,\ldots,B_p)$ складений з операторів узагальненого диференціювання $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j=1,\ldots,p$, а $B^s=B_1^{s_1}\ldots B_p^{s_p}$, де степені операторів визначаються стандартно $B_j^0 u\equiv u$, $B_j^l u = B_j(B_j^{l-1}u)$ ($j=1,\ldots,p$, $l=1,\ldots,n$).

Встановлено умови розв'язності задачі у класах функцій багатьох комплексних змінних, що є рядами Діріхле-Тейлора з фіксованим спектром, асимптотику якого на нескінченності задає деяке додатне число. Доведення теореми про розв'язність даної задачі проводиться за допомогою ітераційної схеми Неша-Мозера. Зроблено наголос на метричному підході у поліциліндричній області коефіцієнтів $a_{\hat{s}}$ до оборотності лінеаризованих операторів, які використовуються у схемі, який дозволяє оцінити норми наближень до розв'язку і міру множини коефіцієнтів рівняння, для яких вони існують.

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМАХ З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Капустян О. А., Мазур О. К.

olena.kap@gmail.com, okmazur@ukr.net
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Національний університет харчових технологій

В роботі досліджується класична розв'язність ряду лінійно - квадратичних задач оптимального керування для еліптичних і параболічних рівнянь з нелокальними крайовими умовами в секторіальних областях. За допомогою біортонормованих систем функцій задача в еліптичному випадку редукується до зв'язаних між собою одновимірних задач оптимального керування, що дозволяє встановити її класичну розв'язність [1]. В параболічному випадку виникає нескінчена система зв'язаних між собою нескінченновимірних оптимізаційних задач. При додаткових умовах на вхідні дані задачі за допомогою рядів Фур'є-Бесселя вдається встановити класичну розв'язність задачі оптимального керування з напіввизначеним критерієм якості [2] та задачі з мінімальною енергією [3].

1. *Капустян В.О., Капустян О.А., Мазур О.К.* Задача оптимального керування для рівняння Пуассона з нелокальними крайовими умовами // Нелінійні коливання, 2013, т.16, №3, С.350-358
2. *Kapustyan V.O., Kapustian O.A., Mazur O.K.* The optimal control problem for parabolic equation with non-local boundary conditions in circular sector // Continuous and Distributed Systems, 2015, vol.15, P. 297-314
3. *Капустян О.А., Мазур О.К.* Розв'язність задачі оптимального керування з мінімальною енергією для однієї параболічної крайової задачі з нелокальними крайовими умовами // Журнал обчислювальної і прикладної математики, 2015, №3, С. 6-10

ГЛОБАЛЬНІ АТРАКТОРИ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ БЕЗ ЄДИНОСТІ

Капустян О. В., Романюк І. В.

kapustyanav@gmail.com, romanjuk.iv@gmail.com
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

В роботі методами теорії глобальних атракторів вивчається якісна поведінка імпульсних (або розривних) динамічних систем - автономних еволюційних систем, траєкторії яких зазнають імпульсних збурень в моменти зустрічі з фіксованою підмножиною фазового простору [1]. Основною проблемою при вивченні таких об'єктів є втрата неперервної залежності розв'язку від початкових даних. У випадку нескінченновимірних динамічних систем це приводить до можливого руйнування глобального атрактору [2]. В даній роботі досліджено дисипативні нескінченновимірні системи за умов на параметри, що не гарантують єдиності розв'язку задачі Коші. Введено поняття многозначної імпульсної ДС, обгрунтовано його корректність, встановлено критерій існування глобального атрактору та досліджено його властивості. Одержані результати застосовано до ряду нескінченновимірних імпульсних задач виду

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(u) + \varepsilon G(u), \\ u|_{t=0} = u_0 \in H, \\ \Delta u|_{u \in M} = I(u) - u, \end{cases}$$

де умови на відображення F, G, I та множину M забезпечують глобальну розв'язність та дисипативність, але не гарантують єдиності розв'язку. Для відповідної многозначної імпульсної ДС при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ доведено існування глобального атрактору в фазовому просторі H та досліджено його властивості.

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. - К: Вища школа, 1987
2. *Перестюк М.О., Капустян О.В.* Існування глобальних атракторів для імпульсних динамічних систем // Доповіді НАН України, 2015, № 12, С.13-18

ДВОВИМІРНА ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПОВНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ПЕРЕВИЗНАЧЕННЯ

Кінаш Н. Є.

kinashnataliia@gmail.com

Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

У області $Q_T := \{(x, y, t) : 0 < x < h, 0 < y < l, 0 < t < T\}$ розглядаємо задачу визначення пари функцій $(a(t), u(x, y, t))$

$$u_t = a(t)\Delta u + b_1(x, y, t)u_x + b_2(x, y, t)u_y + c(x, y, t)u + f(x, y, t), \tag{1}$$

$$(x, y, t) \in Q_T, \tag{2}$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in [0, h] \times [0, l], \tag{3}$$

$$u_x(0, y, t) = \mu_{11}(y, t),\ u_x(h, y, t) = \mu_{12}(y, t),\ (y, t) \in [0, l] \times [0, T], \tag{4}$$

$$u_y(x, 0, t) = \mu_{21}(x, t),\ u_y(x, l, t) = \mu_{22}(x, t),\ (x, t) \in [0, h] \times [0, T]$$

із нелокальною умовою перевизначення

$$\nu_1(t)u(0, y_0, t) + \nu_2(t)u(h, y_0, t) = \mu_3(t), \quad t \in [0, T], \tag{5}$$

де y_0 фіксоване значення із проміжку $[0, l]$.

На відміну від аналогічної задачі для рівняння теплопровідності [1], де існування та єдиність розв'язку доведені глобально, встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі на деякому звуженому проміжку часу. З цією метою застосовано метод функції Гріна, теорему Шаудера про нерухому точку та теорію інтегральних рівнянь Вольтерра.

1. *Кінаш Н.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності з нелокальною умовою перевизначення, Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат., **80**, 2015, 52-60.

БІФУРКАЦІЯ ЦИКЛІВ ОДНОГО КЛАСУ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Клевчук І. І.

klevchuk@yandex.ru

Чернівецький національний університет, Україна

Розглядається рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega_0 u + \varepsilon \left[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta)u \right] + (d_0 + ic_0)u^2\overline{u} \tag{1}$$

з періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{2}$$

де ε – малий додатний параметр.

Теорема. *Нехай $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\alpha > \gamma n^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (1), (2) має періодичні відносно t розв'язки*

$$u_n = u_n(t, x) = \sqrt{\varepsilon} r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx)) + O(\varepsilon),$$

де $r_n = \sqrt{(\alpha - n^2\gamma)\,|d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ці розв'язки експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$(d_0 r_n^2 - \gamma k^2)^2(\gamma^2 k^2 + \delta^2 k^2 - 2\gamma d_0 r_n^2 - 4\gamma^2 n^2 - 2\delta c_0 r_n^2) > 4\gamma^2 n^2 (c_0 r_n^2 - \delta k^2)^2$$

при всіх $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.

Цей метод можна застосувати до дослідження періодичних режимів систем із запізненням та рівняння спінового горіння

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \xi = 2\varepsilon \left[\frac{\partial \xi}{\partial t}\left(1 - \frac{4}{3}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^3 \xi}{\partial t \partial x^2} \right], \ \xi(t, x + 2\pi) = \xi(t, x), \tag{3}$$

де ε – малий додатний параметр, $\varrho > 0$. Біжучі хвилі задачі (3) мають вигляд $\xi_n(t, x) = \sqrt{1 - \dfrac{n^2}{\varrho^2}} \cos(t + nx) + O(\varepsilon)$, де $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 < \varrho^2$. Біжучі хвилі $\xi_n(t, x)$ експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли $n^2 < \dfrac{1}{6}(2\varrho^2 + 1)$.

ОЦІНКИ ДЛЯ РОЗПОДІЛУ СУПРЕМУМУ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ВИПАДКОВОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Козаченко Ю. В., Сливка-Тилищак Г. І.

ykoz@ukr.net, aslyvka@ukr.net

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
Ужгородський національний університет, Україна

Розглянемо неоднорідне рівняння теплопровідності, яке задане на прямій [1]:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \xi(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{2}$$

Нехай $\xi(x,t) = \{\xi(x,t), \quad x \in R, \ t > 0\}$ — вибірково неперервне з імовірністю одиниця випадкове поле з простору $Sub_\varphi(\Omega)$, таке що $\mathbb{E}\xi(x,t) = 0$, $\mathbb{E}(\xi(x,t))^2 < +\infty$.

Розв'язок задачі (1)— (2) можна записати у вигляді:

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos yx G(y,t) dy, \quad G(y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau} \tilde{\xi}(y,\tau) d\tau,$$

$$\tilde{\xi}(y,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos yx \xi(x,\tau) dx.$$

В роботі отримано оцінки для розподілу супремуму розв'язку задачі (1)— (2) на компакті і в нескінченній області [2].

1. *Kozachenko Yu. V., Slyvka-Tylyshchak A. I.* The Cauchy problem for the heat equation with a random right part from the space $Sub_\varphi(\Omega)$// Applied Mathematics. – 2014. – 5. – P. 2318–2333.
2. *Kozachenko Yu. V., Slyvka-Tylyshchak A. I.* On the increase rate of random fields from space on unbounded domains// Statistics, optimization and information computing. – June 2014. – Vol. 2. – P. 79–92.

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА З КЕРУВАННЯМ

Козлова Н. О., Ферук В. А.

nkozlovaa@gmail.com, feruk.viktor@gmail.com
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Розглядається інтегральне рівняння з керуванням

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) + \int_a^b K_1(t,s)u(s)ds, \tag{1}$$

у якому $K(t,s)$ та $K_1(t,s)$ – ядра, сумовні з квадратом в області $[a,b] \times [a,b]$, $f \in L_2[a,b]$, $x \in L_2[a,b]$, $u \in L_2[a,b]$. Ядра $K(t,s)$, $K_1(t,s)$ та функція f – відомі, а функції x та u – потрібно визначити. Будемо вважати, що породжуюче інтегральне рівняння без керування

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t) \tag{2}$$

при деяких неоднорідностях $f \in L_2[a,b]$ не має розв'язку.

Ставиться задача знаходження необхідних та достатніх умов, при яких, вводячи в праву частину рівняння (2) керування $u(t)$, рівняння (1) стає розв'язним.

Схема дослідження розглядуваного інтегрального рівняння ґрунтується на переході від рівняння (1) до еквівалентної зліченно-вимірної алгебраїчної системи рівнянь з керуванням, методи дослідження якої добре розвинуті [1], [2].

Побудовано загальний вигляд розв'язку $\{x(t), u(t)\}$ інтегрального рівняння з керуванням (1) та наведено умови існування єдиного розв'язку. Отримані результати проілюстровано на конкретних прикладах.

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht, Boston: VSP, 2004. - 317 p.
2. *Козлова Н.О., Ферук В.А.* Нетерові крайові задачі для інтегральних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2016. — Т. 19, № 1. - С.58-66.

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ПРАВИЛЬНО ТА ШВИДКО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Колун Н. П.

nataliiakolun@ukr.net

Одеський національний університет імені І.І.Мечникова, Одеса, Україна

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t) \varphi_i(y), \tag{1}$$

де $\alpha_i \in \{-1, 1\}$ $(i = \overline{1, m})$, $p_i : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ $(i = \overline{1, m})$- неперервні функції, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi_i : \Delta_{Y_0} \to]0, +\infty[$- при $i = \overline{1, l}$ неперервні і правильно змінні при $y \to Y_0$ функції порядків $\sigma_i \in \mathbb{R}$, а при $i = \overline{l+1, m}$ - двічі неперервно диференційовані функції такі, що $\varphi_i'(y) \neq 0$ при $y \in \Delta_{Y_0}$,

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi_i(y) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & +\infty, \end{cases} \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i(y) \varphi_i''(y)}{\varphi_i'^2(y)} = 1, \tag{2}$$

Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0}- деякий однобічний окіл Y_0.

У працях В.М.Євтухова і А.М.Клопота були отримані умови існування та асимптотика $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$- розв'язків, коли всі функції φ_i - правильно змінні при $y \to Y_0$ (див., наприклад, [1]).

Розв'язок y диференціального рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$– розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і $y(t) \in \Delta_{Y_0}$ при $t \in [t_0, \omega[$,

$$\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & \pm\infty, \end{cases} \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t) y(t)} = \lambda_0.$$

В силу умов (2) функції φ_i $(i = \overline{l+1, m})$ є швидко змінними при $y \to Y_0$, тобто права частина містить як правильно, так і швидко змінні нелінійності при $y \to Y_0$. Метою роботи є встановлення асимптотики $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$- розв'язків рівняння (1) при $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

1. *В.М.Евтухов, А.М.Клопот.* Дифференц. уравнения. - 2014. -Т.50, № 5.- С.584-600.

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ З ОПЕРАТОРАМИ ЛЕЖАНДРА, БЕССЕЛЯ, ФУР'Є

Конет І. М., Пилипюк Т. М.

konet51@ukr.net, t-myh@i.ua

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Україна

Розглянемо задачу про структуру обмеженого на множині

$$D_2 = \{(t, r) : \, t > 0; \, r \in I_2 = (0; R_1) \cup (R_1; R_2) \cup (R_2; \infty)\}$$

розв'язку диференціальних рівнянь параболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - a_1^2 \Lambda_{(\mu)}[u_1] + \gamma_1^2 u_1 = f_1(t, r), \, r \in (0; R_1),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - a_2^2 B_{\nu,\alpha}[u_2] + \gamma_2^2 u_2 = f_2(t, r), \, r \in (R_1; R_2),$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} - a_3^2 F[u_3] + \gamma_3^2 u_3 = f_3(t, r), \, r \in (R_2; +\infty)$$

з початковими умовами

$$u_j(t, r)\Big|_{t=0} = g_j(r); \quad r \in (R_{j-1}; R_j); \, j = \overline{1,3}; \, R_0 = 0; R_3 = +\infty, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u_j(t, r)\Big|_{r=0} < +\infty; \quad u_3(t, r)\Big|_{r=+\infty} < +\infty \tag{3}$$

та умовами спряження

$$\left(L_{j1}^k\Big[u_k(t, r)\Big] - L_{j2}^k\Big[u_{k+1}(t, r)\Big]\right)\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t); \, j, k = 1, 2, \tag{4}$$

де

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + cthr\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1 - chr} + \frac{\mu_2^2}{1 + chr}\right) -$$

– узагальнений диференціальний оператор Лежандра [1], $B_{\nu,\alpha} == \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\alpha + 1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu^2 - \alpha^2}{r^2}$ – диференціальний оператор Бесселя [1], $F = \frac{\partial^2}{\partial r^2}$ –диференціальний оператор Фур'є [1],

$$L_{jm}^k = \left(\alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}; \, j, m, k = 1, 2.$$

Зауважимо, що тільки у випадку $\delta_{jm}^{k} = \gamma_{jm}^{k} \equiv 0$ умови (4) збігаються з класичними умовами спряження [2].

Інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку мішаної параболічної задачі спряження (1)-(4) побудовано методом гібридного інтегрального перетворення типу Лежандра-Бесселя-Фур'є зі спектральним параметром [3].

1. *Конет І.М.* Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах / І.М. Конет. Т.М. Пилипюк. – Кам'янець-Подільський: Видавництво Абетка-Світ, 2016. – 244 с.
2. *Конет І.М.* Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І.М. Конет. – Кам'янець-Подільський: Видавництво Абетка-Світ, 2013. – 120 с.
3. *Пилипюк Т.М.* Гібридне інтегральне перетворення типу Лежандра-Бесселя-Фур'є на полярній осі зі спектральним параметром в умовах спряження / Т.М. Пилипюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. /Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. – Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2010. – Вип.3. – С. 165-179.

ЗАСТОСУВАННЯ ПОТЕНЦІАЛІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОВИМІРНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ З НЕЛОКАЛЬНОЮ КРАЙОВОЮ УМОВОЮ ФЕЛЛЕРА-ВЕНТЦЕЛЯ

Копитко Б. І., Шевчук Р. В.

bohdan.kopytko@gmail.com, r.v.shevchuk@gmail.com
Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Україна

В теорії випадкових процесів при вивченні процесу дифузії в обмеженій або напівобмеженій області виникає ситуація, коли продовження руху дифундуючої частинки після її потрапляння на межу області здійснюється стрибками. Питання про знаходження напівгрупи операторів, якій відповідає дифузійний процес з властивістю стрибкоподібного виходу з межі області приводить до постановки граничної задачі для лінійного параболічного рівняння другого порядку з нелокальною крайовою умовою. Оскільки загальний вигляд крайових умов для одновимірного (за просторовою змінною) дифузійного процесу (однорідного за часовою змінною) було встановлено в роботах В. Феллера [1] та А.Д. Вентцеля [2], то ці умови були названі крайовими умовами Феллера-Вентцеля.

Тут одновимірна параболічна початково-крайова задача Вентцеля (з комбінацією похідної за просторовою змінною та нелокальної складової) розглянута для випадку неоднорідного дифузійного процесу в криволінійній області і в припущенні, що коефіцієнти рівномірно параболічного оператора є гельдеровими за обома змінними, а бічні межі області задовольняють умову Гельдера за часовою змінною з показником $> \frac{1}{2}$. Для розв'язання даної задачі застосовано метод звичайних параболічних потенціалів.

1. *Feller W.*, The parabolic differential equations and associated semi-groups of transformations, Ann. Math. **55** (1952), 468–518.
2. *Вентцель А.Д.*, Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка, ДАН СССР **111** (1956), №2, 269–272.

УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ ЛІНІЙНИХ БАГАТОКРОКОВИХ МЕТОДІВ

Король І.Ю., Король І.І.

Ужгородський національний університет, Україна

Розглядається задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(t, y), \quad y(y_0) = y_0. \tag{1}$$

Як відомо, лінійні багатокрокові методи розв'язання задачі (1) будують на основі формули

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j y_{n-j} + h \sum_{i=-s}^{q} b_i f(t_{n-i}, y_{n-i}), \tag{2}$$

де a_j, $j=\overline{0,p}$, $b_i, i=\overline{-s,p}$ – невідомі коефіцієнти. Для знаходження коефіцієнтів a_j і b_i задачу (1) замінюють еквівалентним інтегральним співвідношенням, а підінтегральну функцію – інтерполяційним поліномом. Однак, для одержання широкого спектру формул лінійних багатокрокових методів такий підхід є досить трудомісткий.

Нами запропоновано підхід до побудови систем лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів, який дає можливість отримати широкий набір методів довільного порядку як явного, так і неявного типу. Для побудови таких систем формулу (2) подаємо у вигляді

$$\sum_{j=j1}^{j2} a_j y_{n-j} + hb_{-1} y'_{n+1} = h \sum_{j=0}^{q} b_j y'_{n-i} = y_{n+1}. \tag{3}$$

Для всіх лінійних методів пропонується формувати систему рівнянь $Cx=d$, де матриця C утворюється з матриці A, вектора стовпця b і матриці B, що відповідають доданкам лівої частини системи (3), а вектор стовпець d відповідає правій частині (3). Компоненти A, b, B, d і C формуються автоматично. За допомогою вектора x одержуються формули відповідного багатокрокового методу.

Для прикладу наведемо форму одержання неявної формули Адамса-Мултона другого порядку, реалізовану засобами пакету Mathcad: $j_1 := 0$ $j_2 := 0$ $s:=1$ $q:=1$ $(k\ A\ b\ B\ C\ d\ x):=JNBM(j1, j2, s, q)$ $k=2$

$$A=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & -1 & -1\\1 & 0 & -2\end{pmatrix} d=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} x=\begin{pmatrix}1\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot (f_{n+1} - f_n)$, де JNBM – створена в Mathcad функція.

ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ВИРОДЖЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ В ФІКСОВАНІ МОМЕНТИ ЧАСУ

Король Ю. Ю.

korol_yura@ukr.net

Ужгородський національний університет, Україна

Розглянемо вироджену імпульсну систему, визначену на прямому добутку тора та евклідового простору, яка зведена до центральної канонічної форми

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi), \quad \begin{bmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} M(t,\varphi) & 0 \\ 0 & E_s \end{bmatrix} x + f(t,\varphi), \tag{1}$$

$$\Delta x_1|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x_1 + b_i \tag{2}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $x = col(x_1, x_2)$, де $x_1(t,\varphi), x_2(t,\varphi)-$ відповідно $n-s$ та $s-$вимірні вектор-функції, $\varphi \in \mathbf{T}^m, \mathbf{T}^m$ – $m-$вимірний тор, $f(t,\varphi) = col(f_1(t,\varphi), f_2(t,\varphi))$; $a(t,\varphi), f(t,\varphi), M(t,\varphi)-$ неперервні(кусково-неперервні з розривами першого роду при $t = \tau_i$) по t, неперервні і $2\pi-$періодичні по $\varphi_v, v = 1, ..., m$, обмежені при всіх $t \in \mathbb{R}$ векторні і матрична функції відповідно, $f_2(t,\varphi) \in \mathbb{C}^{l-1}(\mathbf{T}^m)$, функція $a(t,\varphi)$ задовольняє умову Ліпшиця по $\varphi \in \mathbf{T}^m$,E_{n-s}, E_s- одиничні матриці $n-s$ та $s-$го порядку відповідно, $I-$ квазідіагональна матриця, $B_i(\varphi)$ і b_i- рівномірно обмежені по i матриці і сталі вектори відповідно, $det(E + B_i(\varphi)) \neq 0$ для будь-якого $\varphi \in \mathbf{T}^m$.

У припущенні, що однорідна невироджена імпульсна система експоненціально-дихотомічна на всій дійсній осі, отримано єдиний обмежений на всій дійсній осі розв'язок системи (1), (2), який має вигляд

$$x(t,\varphi) = \\ = \begin{pmatrix} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi)) f_1(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)))ds + \\ + \sum\limits_{-\infty \leq \tau_i \leq +\infty} G(t,\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) b_i \\ -\sum\limits_{k=0}^{l-1} \sum\limits_{i_1+...+i_m=k} I^k \frac{\partial^k f_2(t,\varphi)}{\partial\varphi_1^{i_1}...\partial\varphi_m^{i_m}} a_1^{i_1}(t,\varphi)...a_m^{i_m}(t,\varphi) \end{pmatrix}$$

МОДЕЛЬ ФІНАНСОВОГО РИНКУ, ЗАДАНА ЛІНІЙНИМ СТОХАСТИЧНИМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ РІВНЯННЯМ ЗІ СТОХАСТИЧНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ДИФУЗІЇ

Кучук-Яценко С. В., Мішура Ю. С., Мунчак Є. Ю.

kuchuk.iatsenko@gmail.com, myus@univ.kiev.ua,
yevheniamunchak@gmail.com

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

Розглядаються дві моделі фінансових ринків зі стохастичною волатильністю, яка задається функціоналом від процесу Орнштейна-Уленбека або процесу Кокса–Інгерсолла–Росса.

У рамках першої моделі ринок описується парою стохастичних диференціальних рівнянь, з яких перше є лінійним відносно ціни акції, а друге – рівнянням Ланжевена:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(Y_t) S_t dW_t, \quad dY_t = -\alpha Y_t dt + k d\widetilde{W}_t.$$

Друга модель є моделлю Хестона, яка задається наступною парою стохастичних диференціальних рівнянь:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{Z_t} S_t dW_t, \quad dZ_t = (b - Z_t)dt + k\sqrt{Z_t} d\widetilde{W}_t.$$

Досліджуються питання безарбітражності та точного обчислення ціни Європейського опціона купівлі (див. [1]). Із застосуванням методів числення Маллявена (див. [2]) встановлено вигляд функції щільності випадкової величини, яка виражає середнє значення волатильності протягом часу до виконання опціона. Отриманий результат дозволяє обчислити ціну опціона за мінімальною мартингальною мірою у випадку, коли вінерівський процес, що породжує еволюцію ціни активу та вінерівський процес, який задає волатильність, є незалежними. Автори висловлюють подяку Кулику О.М. за вагомий внесок у дослідження.

1. *Kuchuk-Iatsenko S. and Mishura Y.*: Pricing the European call option in the model with stochastic volatility driven by Ornstein-Uhlenbeck process. Exact formulas, Modern Stoch. Theory Appl., 2015, **2(3)**, 233-249.
2. *Nualart D.*: The Malliavin Calculus and Related Topics, Probability and Its Applications, Second edition, Springer-Verlag Berlin, 2006.

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ БАГАТОШАРОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ КОНСТРУКЦІЙ ЗА ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО НАГРІВАННЯ

Кушнір Р. М., Попович В. С.

dyrector@iapmm.lviv.ua
ІППММ ім. Підстригача НАН України, м. Львів

Характерною особливістю розвитку сучасної ракетної, авіаційної та іншої техніки є застосування нових конструкційних матеріалів на заміну традиційним, зокрема шаруватих. В основі розрахунків на міцність і надійність таких конструкцій за дії на них інтенсивних експлуатаційних температурних і силових факторів лежать знання про їх термопружний стан. Для адекватного визначення компонент термопружного стану за їх експлуатації в умовах високих температур слід виходити із моделі термочутливого тіла, в якій враховується залежність теплових та механічних характеристик, а також параметрів теплообміну від температури. Достовірне визначення компонент термопружного стану багатошарових конструкцій, які працюють в умовах високих температур, спричинених внутрішніми тепловиділеннями та складним теплообміном з довкіллям за одночасного силового навантаження пов'язане з побудовою адекватних математичних моделей та розробкою ефективних методів побудови їх розв'язків. Ці моделі для визначення розподілів температури є нелінійними задачами теплопровідності, для побудови розв'язків яких класичні методи математичної фізики є малопридатні. Відповідні моделі для визначення компонент термопружного стану є крайовими задачами для рівнянь в звичайних чи частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, побудова зручних для числового аналізу аналітичних розв'язків має практичний інтерес. З цією метою розроблено метод визначення напружено-деформованого стану багатошарових циліндричних конструкцій при їх експлуатації в умовах високих температур, який передбачає методику побудови розв'язку нелінійної задачі теплопровідності та отримані аналітичні формули для обчислення компонент напружено-деформованого стану, які містять вирази для розподілів температури та масових сил у шарах циліндра, їх товщин та функціональних залежностей механічних характеристик від температури.

ПРО ІСНУВАННЯ АНАЛІТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЯКІ ЧАСТКОВО РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНИХ

Ліманська Д. Є., Самкова Г. Є.

liman.diana@gmail.com, samkovagalina@i.ua
Одеський Національний Університет ім.І.І.Мечникова, Україна

Розглядається система диференціальних рівнянь вигляду:

$$A(z)Y' = B(z)Y + f(z, Y, Y'), \tag{1}$$

де $A, B : D_1 \to \mathbb{C}^{p\times n}, D_1 = \{z : |z| < R_1, R_1 > 0\} \subset \mathbb{C}$, $A(z), B(z)-$ аналітичні матриці в області D_1, пучок матриць $A(z)\lambda - B(z)$ є сингулярним при $z \to 0$, функція $f : D_1 \times G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}^p, G_k \subset \mathbb{C}^n, 0 \in G_k, k = 1, 2, f(z, Y, Y')$ є аналітичною в $D_{10} \times G_{10} \times G_{20}, D_{10} = D_1 \setminus \{0\}, G_{k0} = G_k \setminus \{0\}, k = 1, 2$. Вивчаються питання існування аналітичних розв'язків системи (1) у припущеннях, що $p < n$ та $rang A(z) = p$ при $z \in D_1$.

Для додаткових функцій $Y = col(Y_1\ \ Y_2), Y_1 : D_1 \to \mathbb{C}^p, Y_2 : D_1 \to \mathbb{C}^{n-p}$ наведено перетворення системи (1) до системи

$$Y_1^{'} = P\left(z\right)Y + F\left(z, Y_1, Y_2, Y_1^{'}, Y_2^{'}\right), \tag{2}$$

де $P : D_1 \to \mathbb{C}^{p\times p}, P(z)-$ аналітична матриця в області D_1,
$F : D_{10} \times G_{110} \times G_{120} \times G_{210} \times G_{220} \to \mathbb{C}^p, G_{1j} \times G_{2j} = G_j, G_{j1} \in \mathbb{C}^p$, $G_{j2} \in \mathbb{C}^{n-p}, G_{jk0} = G_{jk} \setminus \{0\}, j, k = 1, 2, F(z, Y_1, Y_2, Y_1', Y_2')-$ аналітична вектор-функція в області $D_{10} \times G_{110} \times G_{120} \times G_{210} \times G_{220}$.

Вивчаються розв'язки системи (2), які задовольняють умовам

$$Y_1^{(k)}\left(z\right) \to 0 \text{ при } z \to 0,\ z \in D_{10}, k = 0; 1. \tag{3}$$

Задача (2)-(3) досліджується у двух випадках, коли функція Y_2 має у точці $z = 0$ усувну особливу точку або полюс порядку r. У кожному з випадків знайдені достатні умови, коли задача Коши (2)-(3) має хоча б один аналітичний роз'язок у підобласті області D_{10}. Відповідно система (1) має хоча б один аналітичний розв'язок в оболасті з точкою $z = 0$ на межі.

1. *Ліманска Д. Є., Самкова Г. Є.* Про поведінку розв'язків деяких систем диференціальних рівнянь, які частково розв'язані відносно похідних. ВІСНИК ОНУ, 2014, Одеса.

ПРО НЕПЕРЕРВНУ ЗАЛЕЖНІСТЬ ВІД ПАРАМЕТРА ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСАМИ

Лісовська В. П.

v.lisovskaya@i.ua

ДВНЗ «Київський національний економічний університет», Україна

Відомо багато публікацій про системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією, присвячених дослідженню асимптотичних властивостей розв'язків, питанням обмеженості та асимптотичної стійкості розв'язків та іншим питанням теорії диференціальних рівнянь. Першими звернули увагу на необхідність побудови математичної теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією А.Д. Мишкіс та А.М. Самойленко.

Теорія диференціальних рівнянь з імпульсною дією досягла значного розвитку в останні десятиліття. Систематичне викладення цієї теорії зроблено в монографії [1]. Найбільш значний вклад в дослідження імпульсних систем зроблено відомими вченими київської школи нелінійної механіки Ю.О. Митропольським, А.М. Самойленко, М.О. Перестюком та їхніми учнями.

Разом з тим, відомо багато задач теорії і практики, математичною моделлю яких є так звані сингулярно збурені імпульсні системи. Відомі задачі, розв'язання яких зводиться до дослідження періодичних розв'язків сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією. В макроекономіці, зокрема, системою з імпульсною дією у фіксовані моменти часу є замкнена динамічна модель Леонтьєва.

Ця робота присвячена дослідженню питання існування, побудови періодичного розв'язку сингулярно збуреної імпульсної системи

$$\left\{ \begin{array}{r} \varepsilon\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x,y,\varepsilon), \frac{dy}{dt} = B(t)y + C(t)x + g(t,x,y), t \neq t_i, \\ \Delta x\mid_{t=t_i} = \varepsilon M_i x + I(x,y,\varepsilon), \Delta y\mid_{t=t_i} = K_i y + G_i(x,y,\varepsilon), \end{array} \right.$$

дослідженню залежності таких розв'язків від параметра ε, а також визначенню граничних властивостей цих розв'язків при $\varepsilon \to 0$.

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.*, Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища школа, 1987. – 288с.

ПРО НАБЛИЖЕНИЙ СИНТЕЗ КЕРУВАННЯ З ДВОМА ТОЧКАМИ ПЕРЕКЛЮЧЕННЯ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ПРОЦЕСУ

Ловейкін Ю. В., Сукретна А. В.

yuriyl@ua.fm, sukretna@gmail.com
Київський національній університет імені Тараса Шевченка, Україна

Розглядається задача оптимального керування з напіввизначеним критерієм якості для процесу, що описується крайовою задачею для параболічного рівняння зі швидко осцилюючими коефіцієнтами.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з гладкою межею і для $\varepsilon \in (0,1)$ керований процес в циліндрі $\bar{Q}_T = [0,T] \times \bar{\Omega}$ описується крайовою задачею

$$\begin{cases} y_t^\varepsilon(x,t) = A^\varepsilon(y^\varepsilon(x,t)) + g^\varepsilon(x)v(t),\ (t,x) \in Q_T, \\ y^\varepsilon(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega, t \in [0,T], \\ y^\varepsilon(x,0) = y_0^\varepsilon(x),\ x \in \bar{\Omega}; \end{cases} \tag{1}$$

де $A^\varepsilon := \mathrm{div}(a^\varepsilon \overrightarrow{\nabla})$, $a^\varepsilon(x) = ((a_{ij}^\varepsilon(x)))_{i,j=1}^n$ вимірна симетрична матриця, що задовольняє умови рівномірної еліптичності та обмеженості, $g^\varepsilon, y_0^\varepsilon \in L_2(\Omega)$, ε – малий параметр.

На керування накладено обмеження

$$v(\cdot) \in U = \{v \in L_2(0,T) : |v(t)| \leq \xi \text{ майже скрізь на } [0;T]\}. \tag{2}$$

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб на розв'язках (1) при $v(\cdot) \in U$ мінімізувати напіввизначений критерій якості

$$J^\varepsilon(v) = \left(\int_\Omega q(x)y^\varepsilon(x,T)dx\right)^2 + \gamma \int_0^T v^2(t)dt, \tag{3}$$

де $q \in L_2(\Omega)$, $\gamma > 0$.

У випадку, коли оптимальне керування має дві точки переключення при виході на обмеження знизу та зверху, побудовано оптимальне програмне керування та оптимальне керування у формі зворотного зв'язку. Крім того, оскільки отриманий оптимальний синтез не є зручним з точки зору практичного використання (задається за допомогою нескінченних рядів та нерегулярно залежить від малого параметру), запропоновано та обґрунтовано закон наближеного усередненого синтезу, що має необхідні екстремальні властивості.

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ ТА УЗАГАЛЬНЕНИМИ ФУНКЦІЯМИ

Лопушанська Г. П., Рапіта В. Р.

lhp@ukr.net,vrapita@gmail.com

Львівський нвціональний університет імені Івана Франка, Україна

Вивчаємо обернену задачу

$$u_t^{(\beta)} - u_{xx} - b(t)u = g(t)F_0(x), \quad (x,t) \in Q := (0,l) \times (0,T], \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \quad u_t(x,0) = F_2(x), \quad x \in (0,l), \tag{3}$$

$$(u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot)) = F(t), \quad t \in [0,T] \tag{4}$$

для рівняння з дробовою похідною Рімана – Ліувілля

$$v_t^{(\beta)}(x,t) = f_{-\beta}(t) * v(x,t)$$

порядку $\beta \in (0,2)$, де $f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ для $\lambda > 0$ і $f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t)$ для $\lambda \leq 0$, $\Gamma(z)$ – гама-функція, $\theta(t)$ – функція Хевісайда, F_0, F_1, F_2 – задані узагальнені функції, g, F – задані неперервні функції, $(u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot))$ – значення невідомої узагальненої функції u на заданій основній функції φ_0 для кожного $t \in [0,T]$. Друга з умов (3) відсутня у випадку $\beta \in (0,1]$.

Нехай $\mathcal{D}(\bar{Q}) = \{v \in C^\infty(\bar{Q}) : (\frac{\partial}{\partial t})^k v|_{t=T} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+\}$, $\mathcal{D}[0,l] = C^\infty[0,l]$, $\mathcal{D}(0,l) = C^\infty(0,l)$, штрихами позначаємо простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) на відповідних просторах основних функцій,

$\mathcal{D}'_C(\bar{Q}) = \{v \in \mathcal{D}'(\bar{Q}) : (v(\cdot,t), \varphi(\cdot)) \in C[0,T] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}[0,l]\}$.

Застосовуючи метод функції Гріна, за припущень

$g \in C[0,T], F_j \in \mathcal{D}'[0,l], \quad j = 0,1,2,$

$F, F^{(\beta)} \in C[0,T],\ F(t) \neq 0,\ t \in [0,T], \quad \varphi_0 \in \mathcal{D}(0,l)$

та умов узгодження даних

$(F_1, \varphi_0) = F(0), \quad (F_2, \varphi_0) = F'(0)$

доводимо існування розв'язку $(u,b) \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q}) \times C[0,T]$ задачі (1)-(4). Для єдиності її розв'язку достатньо, щоб $F(t) \neq 0,\ t \in [0,T]$.

РЕГУЛЯРНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ

Лопушанський А. О.

alopushanskyj@gmail.com

Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника, Україна

Серед достатніх умов на праву частину параболічного рівняння, що забезпечують класичну розв'язність абстрактної задачі Коші, відзначимо результат Да Прато і Грісварда: права частина має значення в проміжних просторах інтерполяційних неперервних шкал. Цей результат поширюємо на випадок комплексних інтерполяційних шкал та рівняння з дробовою похідною.

Нехай задана пара банахових просторів $(V_0, \|\cdot\|_0)$ та $(V_1, \|\cdot\|_1)$ над $\mathbb{C}$ з неперервним та щільним вкладенням $E_{10}\colon V_1 \hookrightarrow V_0$. Зафіксуємо кут $\omega_0 \in (\pi/2, \pi)$ і співставимо йому в площині $\mathbb{C}$ замкнений сектор з виколотою точкою $\{0\}$ і його замикання, відповідно $\Lambda_0 = \bigcup\{l_\omega\colon \omega \in [-\omega_0, \omega_0]\}$ і $\Lambda = \Lambda_0 \bigcup \{0\}$, де $l_\omega = \left\{re^{i\omega}\colon r > 0\right\}$ — промінь з кутом $\omega \in [0, 2\pi]$. Нехай

$$\mathcal{A} = \left\{A \in \mathcal{L}(V_1; V_0)\colon \ \sup\nolimits_{\lambda\in\Lambda} \left\|(\lambda E_{10} - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} = K(A) < \infty\right\}.$$

Кожен з операторів $A \in \mathcal{A}$ генерує аналітичну півгрупу в просторі V_0 і має від'ємний тип.

Зафіксуємо оператор $J \in \mathcal{A}$. Через $V_\vartheta := \mathcal{D}\left[(-J)^\vartheta\right]$ позначимо область визначення оберненого до $(-J)^{-\vartheta}$ оператора $(-J)^\vartheta$ із нормою графіка $\|x\|_{V_\vartheta} := \left\|(-J)^\vartheta x\right\|_{V_0}$. Тоді V_ϑ — проміжний простір для інтерполяційної пари $\{V_0; V_1\}$, породжений методом комплексної інтерполяції.

Нехай $f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ при $\lambda > 0$, $f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t)$ при $\lambda \le 0$, де $\Theta(t)$ – одинична функція Хевісайда, $\Gamma(\lambda)$ – Гамма-функція, $D_t^\beta g := \frac{d}{dt}(f_{1-\beta} * g)(t) - f_{1-\beta}(t)g(0)$ – похідна Капуто (регуляризована дробова похідна) порядку $\beta \in (0,1)$ функції $g(t)$,

$C^{\beta,\eta} := \{v \in C\big([0,T]; V_{1+\eta}\big) : \quad \exists \quad D_t^\beta v \in C\big((0,T]; V_\eta\big)\}$.

Доводимо, що при $A \in \mathcal{A}$, $\beta, \theta \in (0,1]$, $\eta \in [0,\theta)$, $f \in C\big([0,T]; V_\theta\big)$, $h \in V_\theta$ існує єдиний розв'язок $u \in C^{\beta,\eta}$ задачі

$$D_t^\beta u = Au(t) + (f_{1-\beta} * f)(t), \quad t \in [0,T], \quad u(0) = h.$$

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРОМ ЕЙЛЕРА

Лучко В. С., Лучко В. М.

vsluchko@gmail.com, vmluchko@gmail.com

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна

В області $Q = (0, T) \times (0, \infty)$ розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = A_2 x^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + A_1 x \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + A_0 u(t,x) + f(t,x), \tag{1}$$

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \tag{2}$$

тут функції $\varphi(x)$ та $f(t,x)$ відомі, які апріорі допускають перетворення Фур'є, $A_j = const$, $j = 1, 2, 3$.

Теорема. *Нехай рівняння (1) параболічне, тобто $A_2 > 0$ та виконуються умови:*

а) якщо початкова функція неперервна і обмежена $\varphi \in \mathcal{C}(0, \infty)$, неоднорідність рівняння задовольняє рівномірну умову Гельдера

$$|f(t,\beta) - f(t,\tau)| \le L_0 |\beta - \tau|^\alpha |f|_\alpha, \quad 0 < \alpha \le 1, \tag{3}$$

то розв'язок задачі (1)–(2) в області Q подається формулою

$$u(t,x) = \int\limits_0^{+\infty} G(t, \ln x - \ln \eta) \varphi(\eta) \frac{1}{\eta} d\eta +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{+\infty} G(t - \tau, \ln x - \ln \eta) f(\tau, \eta) \frac{1}{\eta} d\eta, \tag{4}$$

де

$$G\left(t, \ln \frac{x}{\eta}\right) = \frac{1}{\sqrt{4A_2 \pi t}} e^{A_0 t} \exp\left\{ \frac{\left(\ln \frac{x}{\eta} + (A_1 - A_2)t\right)^2}{4A_2 t} \right\}$$

і для його похідних правильні оцінки

$$\left| |x|^m t^{\frac{|m|}{2}} D_x^{|m|} u(t,x) \right| \le c \left(|\varphi|_{\mathcal{C}} + x^\alpha t^{\frac{\alpha+m}{2}} |f|_\alpha \right), \quad m = 1, 2;$$

б) якщо початкова функція задовольняє рівномірну умову Гельдера

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le L_1 |x - y|^\alpha |\varphi|_\alpha, \quad 0 < \alpha \le 1,$$

неоднорідність рівняння задовольняє рівномірну умову Гельдера (3), то розв'язок задачі (1)–(2) подається формулою (4) в області Q і для його похідних правильні оцінки

$$\left||x|^{m-\alpha}t^{\frac{|m|-\alpha}{2}}D_x^{|m|}u(t,x)\right| \leq c\left(|\varphi|_\alpha + t^{\frac{m}{2}}|f|_\alpha\right), \quad m = 1, 2;$$

в) якщо початкова функція задовольняє нерівність

$$|\varphi(x)| \leq e^{a\ln^2 x}|\varphi|_\alpha,$$

при $x \to \infty$, a – деяка додатна константа, неоднорідність рівняння задовольняє нерівномірну умову Гельдера

$$|f(t,\beta) - f(t,\eta)| \leq L_0|\beta - \eta|^\alpha|f|_\alpha\left[e^{k(t)\ln^2\beta} + e^{k(t)\ln^2\eta}\right], \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

де $k(t) = \frac{a(c-\varepsilon)}{c-at}$, то розв'язок задачі (1),(2) подається формулою (4) в області $Q = (0, t_1) \times (0, \infty)$, де $t_1 = \frac{c}{a}$ і для похідних розв'язку правильні оцінки

$$\left||x|^m D_x^{|m|}u(t,x)\right| \leq ce^{k(t)\ln^2 x}\left(t^{-\frac{|m|}{2}}\frac{1}{\sqrt{c-at}}|\varphi|_\alpha + x^\alpha t^{\frac{\alpha}{2}}|f|_\alpha\right),$$

$m = 1, 2$.

1. *I. Dimovski* A transform approach to operational calculus for the general Bessel-type differential operator. C.R. Acad. Bulgare Sci. 27, No 2 (1974), 155-158.
2. *I. Dimovski, V.Hristov, M.Sifi* Mean-periodic solutions of Euler differential equations. In: Proc. 16-th Colloq. of Tunisian Math. Soc., Sousse, March 2008.

УМОВИ ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНОСТІ ЛОКАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КЛЕЙТОНА–ГОРДОНА

Макаров В. Л., Сембер Д. А.

makarov@imath.kiev.ua, semberdmytro@gmail.com
Інститут математики НАН України, м. Київ, Україна

Доведено теорему про існування та єдиність локального розв'язку наступної задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна–Гордона

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \mathbb{N}(u(x,y)) = f(x,y),$$

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u'_y(x,y)|_{y=0} = \psi(x),$$

$(x,y) \in \Omega, \Omega = \big\{(x,y)|-\infty < x < +\infty,\ y > 0\big\}$, яка зведена до еквівалентного інтегрального рівняння:

$$u(x,y) = \overline{u}_1(x,y) + \frac{1}{2}\int\limits_0^y \int\limits_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} \mathbb{N}(u(\xi,\eta))d\xi d\eta, \tag{1}$$

де $\overline{u}_1(x,y) = \frac{1}{2}\big(\phi(x+y) + \phi(x-y)\big) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_0^y\int\limits_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} f(\xi,\eta)d\xi d\eta$.

Теорема. *Нехай функція $\mathbb{N}(u)$ задовольняє умовам*

$$\mathbb{N}(u) \in C^1(\mathbb{R}^1),\ \mathbb{N}(u) \geq 0,\ \forall u,\ \ \mathbb{N}(u) - \mathbb{N}(v) \geq 0,\ u \geq v,$$

і, крім того, нехай $\phi(x) \in C^2(\mathbb{R}^1)$, $\psi(x) \in C^1(\mathbb{R}^1)$, $f(x,y) \in \Omega_{y^*}$, $\|\overline{u}_1\|_{0,\infty,\Omega_{y^*}} = \max\limits_{(x,y)\in\Omega_{y^*}} |\overline{u}_1(x,y)| = \kappa < \infty$. Тоді інтегральне рівняння (1) має розв'язок в області $\Omega_{y^*} = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^1, y \in [0,y^*]\}$, де y^* – верхня границя області визначення функції $F(y) = G^{-1}\big(G(\kappa) + \frac{y^2}{2}\big)$, яка містить функцію $G(u) = \int\limits_{u_0}^{u} \frac{dt}{\mathbb{N}(t)}$, $u \geq 0$, $u_0 > 0$.

Якщо додатково виконується умова $\big|\mathbb{N}(u) - \mathbb{N}(v)\big| \leq \omega_1\big(|u-v|\big)$, де $\omega_1(u)$ невід'ємна, неспадна, неперервна функція для $u \geq 0$, то розв'язок інтегрального рівняння (1) буде єдиним.

РОЗРИВНІ ЦИКЛИ ОДНІЄЇ ІМПУЛЬСНОЇ СИСТЕМИ

Мамса К. Ю., Перестюк Ю. М.

ekaterinamamsa@gmail.com, Perestyuk@gmail.com
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Розглядається осцилятор під дією імпульсної сили
$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \qquad \dot{x} \neq 0,$
$\Delta\dot{x}|_{\dot{x}=0} = \alpha x, \qquad \alpha < 0.$

В лінійному випадку (коли $\varepsilon = 0$) при певному значенні коефіцієнта $\alpha = \alpha^*$ всі розв'язки такого рівняння є періодичними, а траекторією кожного з них є двоімпульсний розривний цикл.

Запровадивши змінні (a, φ) за формулами

$$x = acos\varphi, \dot{x} = a(-\frac{\delta}{2}cos\varphi + \Omega sin\varphi),$$

$$\Omega^2 = \omega^2 - \frac{\delta^2}{4},$$

дістаємо систему рівнянь
$\frac{da}{dt} = -\frac{\delta}{2}a + \frac{\varepsilon}{\Omega}f(acos\varphi, a(-\frac{\delta}{2}cos\varphi + \Omega sin\varphi))sin\varphi,$
$tg\varphi \neq \frac{\delta}{2\Omega}$
$\frac{d\varphi}{dt} = -\Omega + \frac{\varepsilon}{a\Omega}f(acos\varphi, a(-\frac{\delta}{2}cos\varphi + \Omega sin\varphi))cos\varphi$
$a^+|_{tg\frac{\delta}{2\Omega}} = a\frac{cos\varphi_0}{cos\varphi^*},$
$\varphi^+|_{tg\varphi=\frac{\delta}{2\Omega}} = \varphi + \varphi^* - \varphi_0$
де $\varphi_0 = arctg\frac{\delta}{2\Omega}, \qquad \varphi^* = arctg\frac{\alpha^* + \frac{\delta}{2}}{\Omega}$

Для цієї системи встановлені достатні умови на функцію $f(x, \dot{x})$, що забезпечують при малих значеннях параметра ε існування в ній єдиного асимптотично стійкого двоімпульсниго розривного циклу.

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М., Наука, 1974. -502с.
2. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive Differential Equations. - world Scientific, Singapore, 1995.
3. *Yu. Perestyuk* Discontinuous oscillations in one impulsive system, Journal of Mathematical Sciences, vol. 194, no. 4, 2013.

ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ В ОБЛАСТЯХ ІЗ СКЛАДНОЮ СТРУКТУРОЮ КРАЮ

Маринець В. В., Питьовка О. Ю.

vasyl-marynets@rambler.ru, oxana_pityovka@bigmir.net
Ужгородський національний університет,
Мукачівський державний університет, Україна

Розглядається один підхід дослідження крайових задач для рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу в областях із складною структурою краю, а саме досліджується задача: в просторі функцій $C^{(1.1)}(\overline{D}) \cap C(\overline{D})$, де $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, $D_1 = \{(x,y) \mid x \in [x_0, x_1], y \in (y_0, y_1]\}$, $D_2 = \{(x,y) \mid x \in [x_0, x_1], y \in (y_1, g_1(x))\}$, $D_3 = \{(x,y) \mid x \in (x_1, x_2], y \in (g_2(x), y_1]\}$, а $x_0 < x_1 < x_2$, $y_0 < y_1 < y_2$, $y = g_r(x)$ $(x = k_r(y))$, $x \in [x_{r-1}, x_r]$, $r = 1,2$ — "вільні криві", $g_r(x) > 0$, $g_1(x_{r-1}) = y_r$, $g_2(x_r) = y_{r-1}$, знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered} D^{(1.1)}U(x,y) + A_1(x,y)U_x(x,y) + A_1(x,y)U_y(x,y) = \\ = f(x,y,U(x,y)) := f[U(x,y)], \end{gathered} \tag{1}$$

$U(x,y) := (u_i(x,y))$, $f[U(x,y)] := (f_i[U(x,y)])$, $i = \overline{1,n}$ — вектор–функції, $A_r(x,y) := (\delta_{i,j} a_{i,j}^{(r)}(x,y))$, $r = 1,2$, $j = \overline{1,n}$ функціональні матриці, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, який задовольняє крайові умови

$$\begin{gathered} U(x_0,y) = \Psi(y),\ \Psi(y) \in C^1[y_0,y_1],\ \Psi(y_0) = \Phi(x_0), \\ U(x,y_0) = \Phi(x),\ \Phi(x) \in C^1[x_0,x_1],\ U(x,g_r(x)) = \Omega_r(x), \\ x \in [x_{r-1},x_r],\ \Omega_r(x) \in C^1[x_{r-1},x_r],\ r = 1,2, \\ \Omega_1(x_0) = \Psi(y_1),\ \Omega_2(x_1) = \Phi(x_1), \end{gathered} \tag{2}$$

де $\Psi(y) := (\psi_i(y))$, $\Phi(x) := (\varphi_i(x))$, $\Omega_r(x) := (\omega_{i,r}(x))$, $i = \overline{1,n}$, $r = 1,2$ — задані неперервно диференційовані вектор-функції.

При умові, що $A_1(x,y) \in C(D) \cap C^{(1.0)}(D_1 \cup D_3)$, $A_2(x,y) \in C(D) \cap C^{(0.1)}(D_1 \cup D_2)$, $F[U(x,y)] \in C_1^*(\overline{B})$, $F[U(x,y)] := f[U(x,y)] + [A_{2y}(x,y) + A_1(x,y)A_2(x,y)]U(x,y)$, $f : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$, $\overline{B} \subset \mathbb{R}^{n+2}$, $\overline{B}_1 \subset \mathbb{R}^{2(n+1)}$, $Pr_{xOy}\overline{B}_1 = \overline{D}$, будується одна модифікація двостороннього методу дослідження крайової задачі (1)—(2), встановлюються достатні умови існування та єдиності її розв'язку, його регулярності або іррегулярності, одержано апостеріорну оцінку похибки знайденого наближеного розв'язку.

ПОЧАТКОВО-ІНТЕГРАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Медвідь О. М., Симотюк М. М.

medvid@ukr.net, quaternion@ukr.net

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна

Позначимо: Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$; $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \Omega^p$; $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$; $(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_p x_p$; $D_x = D\left(-i\partial_{x_1}, \ldots, -i\partial_{x_p}\right)$; $W^{\gamma}_{\alpha,\beta}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \gamma > 0)$ — простір, отриманий в результаті поповнення простору скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \varphi_k \exp(ik, x)$ за нормою

$$\|\varphi(x); W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\| = \Big(D \sum_{|k| \geq 0} |\varphi_k|^2 (1 + |k|)^{2\alpha} \exp(2\beta |k|^{\gamma})\Big)^{1/2}.$$

Розглянемо задачу

$$\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + D \sum_{j=0}^{n-1} A_j(D_x) \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j} = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega^p, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=0} = \varphi_j(x),\ j = \overline{1,l},\ \int_0^{t_1} t^{j-1} u(t,x) dt = \varphi_{l+j}(x),\ j = \overline{1,r}, \tag{2}$$

де $l + r = n$, $0 < t_1 \leq T$, $A_j(\xi)$, $j = \overline{0, n-1}$, — многочлени з комплексними коефіцієнтами.

Встановлено умови коректної ров'язності задачі (1), (2) у просторах $C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$. За допомогою метричного підходу [1, 2] доведено, що ці умови виконуються для майже всіх (стосовно фрактальних мір Гаусдорфа) чисел $t_1 \in (0, T]$.

1. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
2. *Rogers C.A.* Hausdorff measures. – Cambridge: Cambridge University Press, 1970. – 179 p.

СПЕКТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРА ШРЕДІНГЕРА З БЕЗВІДБИВНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

Мельник Б. О., Микитюк Я. В.

bohdmelnyk@gmail.com

Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

В доповіді розглядається самоспряжений оператор Шредінгера, що діє у просторі $L_2(\mathbb{R})$ за формулою

$$T_q = -\frac{d^2}{dx^2} + q, \tag{1}$$

у якій q є безвідбивним потенціалом спеціальної конструкції. Цей потенціал q ми будуємо наступним чином. Нехай H – сепарабельний нескінченновимірний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot \mid \cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$, а $\mathcal{B} := \mathcal{B}(H)$– множина всіх неперервних самоспряжених операторів, які діють з H в H. Позначимо через $K \in \mathcal{B}$ – додатний оператор з простим спектром. Нехай ρ циклічний вектор оператора K, який належить області визначення оператора $K^{-1/2}$. Можна довести, що тоді існує єдиний додатний оператор $G \in \mathcal{B}$, для якого

$$KG + GK = (\cdot \mid \rho)\rho.$$

Покладемо за означенням $G(x) := e^{-xK}Ge^{-xK}$, де $x \in \mathbb{R}$. Позначимо через $A \in \mathcal{B}$ додатній оператор, що комутує з K і задамо $\mathcal{B}$-значну функцію $S(x) = [(A^2 + G(x))^{-1/2}A]^2$. Функція $S(x)$ допускає аналітичне продовження в смугу

$$\Pi := \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, \ \ |y| < \tfrac{\pi}{2\|K\|}\}.$$

Як наслідок числова функція $\mathbb{R} \ni x \mapsto (S'(x)\rho \mid \rho)$ має лише ізольовані нулі на дійсній осі. Отже, формула

$$q(x) := -4\frac{\|S'(x)\rho\|^2}{(S'(x)\rho \mid \rho)} \tag{2}$$

задає функцію q майже скрізь на дійсній осі.

Теорема. *Нехай T_0 – незбурений оператор Шредінгера. Тоді Формула (2) задає безвідбивний потенціал q, який допускає аналітичне продовження в смугу* Π. *Більше того, оператор T_q унітарно еквівалентний прямій сумі $T_0 \oplus (-K^2)$ і $|q(x)| \leq 2\|K\|$.*

НЕЛІНІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Ментинський С. М., Пелех Я. М.

serge.mentynsky@i.ua, Pelekh_Ya_M@ukr.net
Національний університет "Львівська політехніка", Україна

Розглянемо на відрізку $I_L : [x_0, x_0 + L]$ задачу Коші для нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$u'(x) = F\left[x, u(x), \int\limits_{x_0}^{x} g[x, s, u(s)]\, ds\right], \tag{1}$$

$$u(x_0) = u_0, x \in [x_0, x_0 + L]. \tag{2}$$

Припустимо, що розв'язок (1), (2) існує і єдиний, а функції F і g володіють необхідною гладкістю. Поділимо відрізок на N частин $\sigma_h = \{x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = x_0 + L\}$ з кроком $h = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, N-1}$. Наближений розв'язок задачі (**??**), (**??**) в точці $x_1 = x_0 + h$ шукаємо у вигляді ланцюгового дробу:

$$u_1^{[k,l]} = \frac{P_{[k,l]}}{Q_{[k,l]}} = \cfrac{c_0}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \cfrac{d_{k,0}}{1+\cfrac{d_{k,1}}{1+\ddots+d_{k,l}}}}, \tag{3}$$

При $k + l = 2$, $(k = 1, 2; l = 0, 1)$:
$c_0 = u_0$, $d_{1,0} = -\frac{\delta_1}{c_0}$, $d_{1,1} = \frac{\delta_1^2 - c_0\delta_2}{\delta_1 c_0}$, $d_{2,0} = \frac{\delta_1^2 - c_0\delta_2}{c_0^2}$,
$\delta_1 = a_{11}hk_1$, $\delta_2 = h(a_{21}k_1 + a_{22}k_2)$,
$k_1 = F[x_0 + \alpha_1 h_1, u_0, 0]$, $k_2 = F[x_0 + \alpha_2 h, x_0 + \beta_{21}hk_1, \gamma_{21}K_1]$,
$K_1 = hg[x_0 + \alpha h, x_0 + \beta h, u_0 + \gamma hk_1]$,
де a_{11}, a_{21}, a_{22}, α, α_1, α_2, β, β_{21}, γ- параметри.

Теорема. *Якщо* $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{2}{3}$, $\beta_{21} = \gamma_{21} = \frac{2}{3}$, $\beta = \gamma = \frac{1}{3}$, $a_{11} = 1$, $a_{21} = -\frac{3}{4}$, $a_{22} = \frac{3}{4}$, *то*

$$R_{[1,1]} = u(x_0 + h) - u_1^{[1,1]} = O\left(h^3\right)$$

Для знаходження наближень в наступних точках x_n $(n \geq 2)$ використовуємо формулу (3) і метод рухомого початку.

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВІДРИВОМ ТА ЗАПІЗНЕННЯМ

Мисло Ю. М.

julia.pah@gmail.com

Ужгородський національний університет, Україна

Досліджується розв'язок системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією та запізненням , яка описує залежність між зрілими і незрілими біологічними видами, вигляду:

$$\dot{x}_i(t) = \alpha(t)x_m(t) - \gamma(t)x_i(t) - \alpha(t)e^{\int_{t-h}^{t}\gamma(s)\mathrm{d}s}x_m(t-h), \tag{1}$$

$$\dot{x}_m(t) = \alpha(t)e^{\int_{t-h}^{t}\gamma(s)\mathrm{d}s}x_m(t-h) - \beta(t)x_m^2(t), \tag{2}$$

для $t \neq t_k$ та імпульсним впливом

$$x_m(t_k + 0) = (1 + d_k)x_m(t_k) \tag{3}$$

в момент часу t_k, $k \in \mathbb{Z}$.

Припускається, що послідовність $\{t_k\}$ моментів імпульсного впливу має рівномірну майже періодичну різницю, послідовність $\{d_k\}$ є майже періодичною, $d_k \in (-1, d]$, $d > 0$, функції $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ є кусково-неперервними додатними і майже періодичними.

В нашій системі $x_i(t)$ і $x_m(t)$ задають щільність незрілих та зрілих популяцій, відповідно. Народжуваність незрілої популяції в час $t > 0$ є пропорційною до існуючої зрілої популяції з показником народжуваності $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ є показником смертності незрілих, $\beta(t)$ – показник смертності і перенаселення зрілих, h – час дозрівання. Умова $\alpha(t)e^{\int_{t-h}^{t}\gamma(s)\mathrm{d}s}x_m(t-h)$ визначає перехід від незрілих до зрілих.

Припускається невід'ємність розв'язків (1)–(3) з початковими умовами

$$x_i(0) = \varphi_i > 0, \tag{4}$$

$$x_m(\theta) = \psi_m(\theta), \quad \theta \in [-h, 0], \quad \psi_m(0) > 0. \tag{5}$$

1. *Myslo Y. M., Tkachenko V. I.* Global attractivity in almost periodic single species models. Functional Differential Equations, 2011, **18**, № 3-4, P. 269–278.
2. *Akchmet M.* Principles of Discontinuous Dynamical Systems. — New York: Springer, 2010, 176 p.

СТІЙКІСТЬ І ФОРМИ УМОВНОЇ РІВНОВАГИ БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ ПРИ ПОГЛИБЛЕННІ СВЕРДЛОВИН РОТОРНИМ СПОСОБОМ

Мойсишин В. М.

math@nung.edu.ua

Івано-Франківський націон. техн. університет нафти і газу, Україна

Розв'язано загальну задачу стійкості багаторозмірної бурильної колони при натуральних граничних умовах на долоті. Враховано кінцеві сили і моменти; розподілені по довжині зусилля від ваги труб, внутрішньотрубної і затрубної промивальної рідини; інерційне навантаження від обертання компонування ротором; втрати тиску на долоті, в трубі та затрубному просторі. Оцінено вплив основних режимно-технологічних факторів на критичні значення параметрів задачі [1]. Складено і розв'язано системи рівнянь Кірхгофа - Клебша, які описують просторові форми умовної рівноваги бурильної колони під дією комплексу навантажень, що, крім зусиль, перелічених вище, враховує сили і моменти тертя труб об стінку вертикальної або похилої свердловини. Запропоновано шляхи практичної реалізації нових, загальніших формул для параметрів пружної лінії компонування. Це, зокрема, знаходження координат початку формування ґвинтової спіралі; розрахунок осьового навантаження, що передається колоною труб на вибій; визначення втрат моменту тертя по довжині бурильної колони; статичний розрахунок компонування на міцність [1]. Розроблено теоретичні основи вивчення взаємодії бурильної колони зі стінкою свердловини довільного профілю. Обґрунтовано доцільність використання в таких задачах кутів Ейлера - Крилова, знайдено формули для кривини і кручення пружної лінії компонування. Узагальнено схему кутових зміщень Ейлера - Крилова на випадок характеристики осі свердловини відносно сторін світу. Запропоновано загальну схему розв'язку рівнянь Кірхгофа для невільної ділянки труб у свердловині довільного профілю при голономних та неголономних в'язках [2, 3].

1. *Мойсишин В.М.* Основи механіки бурильної колони при поглибленні свердловин роторним способом: Дис. докт. техн. наук. – Івано-Франківськ: ІФДТУНГ, 1996. – 498 с.
2. *Векерик В.И. Мойсишин В.М.* Уравнения равновесия участков бурильной колонны в скважине произвольно ориентированной в пространстве: Монография. – 2-е изд. – Івано-Франківськ: Факел, 2007. – 138 с.
3. Стійкість і коливання бурильної колони: Монографія / В.М. Мойсишин, Б.Д. Борисевич, Ю.Л. Гаврилів, С.Д. Зінченко. – Івано-Франківськ: Лілея-НВ, 2013. – 590 с.

ПРО МНОЖИНУ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОРІДНОЇ ДВОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Нитребич З.М.[1], *Маланчук О.М.*[1,2]

znytrebych@gmail.com, Oksana.Malan@gmail.com
[1]*Нац. ун-т "Львівська політехніка", Україна,*
[1,2]*Львівський нац. медичний ун-т ім. Д. Галицького, Україна*

Відомо [1], що задачі з багатоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними є некоректними крайовими задачами. Це, здебільшого, пов'язано з існуванням нетривіальних розв'язків відповідних однорідних задач.

Досліджено множину розв'язків однорідної задачі:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial t} + b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]U(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(0,x) + A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial t}(0,x) = 0, \\ &B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(h,x) + B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial U}{\partial t}(h,x) = 0, \quad h > 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

Диференціальні вирази $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ в рівнянні (1) є довільними диференціальними поліномами або виразами нескінченного порядку з цілими символами. В умовах (2) $A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $A_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – диференціальні поліноми з комплексними коефіцієнтами, причому для $\nu \in \mathrm{C}$ виконуються умови: $|A_1(\nu)|^2 + |A_2(\nu)|^2 \neq 0$, $|B_1(\nu)|^2 + |B_2(\nu)|^2 \neq 0$.

Встановлено, що множина розв'язків задачі (1), (2) визначається характеристичним визначником $\Delta(\nu)$. У випадку $\Delta(\nu) \neq 0\ \forall \nu \in \mathrm{C}$ задача (1), (2) має лише тривіальний розв'язок. У протилежному випадку задача (1), (2) має нетривіальні цілі розв'язки. Для їх побудови використано диференціально-символьний метод [2].

1. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
2. *Каленюк П.І., Нитребич З.М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во НУ "Львівська політехніка". – 2002. – 292 с.

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ

Пагіря М. М.

pahirya@gmail.com

Мукачівський державний університет, Україна

Функції комплексної змінної на деякому компакті з $\mathbb{C}$ наближають багаточленами, узагальненими багаточленами, апроксимаціями Паде або ланцюговими дробами. Розвинення функцій в ланцюгові дроби часто мають більш широку область збіжності і більш стійкі до похибок заокруглення при обчисленнях.

Функція може бути розвинута в ланцюговий дріб або виходячи із її розвинення в степеневий ряд, або як розв'язок диференціального рівняння Ріккаті [1], або із відношення гіпергеометричних функцій [2], або за допомогою формули Тіле [3].

Проведенні подальші дослідження формули Тіле. Зокрема встановлені властивості обернених похідних Тіле — формули суми, добутку та частки двох функцій, складеної та оберненої функцій, багаточлена та дробово–раціональної функції. Отримана формула типу Тіле, яка ґрунтується на обернених похідних 2–го типу [4]. Знайдено взаємозв'язок обернених похідних 2–го типу із похідними функції та оберненими похідними Тіле, а також доведені властивості обернених похідних 2–го типу. Отримані розвинення функцій в ланцюговий дріб за допомогою формули типу Тіле та встановлені області збіжності отриманих розвинень.

1. *Хованский А.Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. – Москва: ГИТТЛ, 1956. — 203 с.
2. *Cuyt A.,Brevik Petersen V.,Verdonk B., Waadeland H.,Jones W.B.* Handbooks of Continued Fractions for Special Functions. – Springer, 2008. —XVI+431 p.
3. *Thiele T.N.* Interpolationsprechnung. – Leipzig: Commisission von B. G. Teubner, 1909.– XII + 175 s.
4. *Пагіря М.М.* Обернені похідні 2–го типу та їх властивості // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2009. – Вип. 18. – С. 99–105.

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ВИНИКНЕННЯ БАГАТОЧАСТОТНИХ КОЛИВАНЬ У ШВИДКО-ПОВІЛЬНІЙ СИСТЕМІ НЕЛІНІЙНОЇ МЕХАНІКИ

Парасюк І. О., Репета Б. В.

pio@univ.kiev.ua, bogdan.repeta@gmail.com

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

Розглядається система нелінійних осциляторів із слабким та повільним зв'язком

$$\ddot{w} + \Omega_0^2(u)w = 2\varepsilon\Lambda(u)\dot{w} + F(w, \dot{w}, u, \mu), \quad \dot{u} = \mu G(w, \dot{w}, u, \mu), \tag{1}$$

у якій $w \in \mathbb{R}^n$ — конфігураційні змінні, $u \in \mathbb{R}^m$ — повільно змінні параметри, ε, μ — малі статичні параметри, $\Lambda(\cdot)$, $\Omega_0(\cdot)$ — гладкі діагональні матриці, $F(\cdot), G(\cdot)$ — гладкі нелінійні вектор-функції. Розглянуто випадок, коли система $\dot{u} = G(0, 0, u, 0)$ має функцію Ляпунова $V(\cdot)$ морсівського типу, а множини стійкості $\{u : \Lambda(u) < 0\}$ та абсолютної нестійкості $\{u : \Lambda(u) > 0\}$ тривіального положення рівноваги першої підсистеми при $\mu = 0$ непорожні, причому всі стаціонарні точки функції $V(\cdot)$ належать області нестійкості.

За певних додаткових припущень щодо відсутності резонансів між компонентами матриці $\Omega_0(u)$ та характеру нелінійності вектор-функції $F(\cdot)$ доведено, що кожній стаціонарній точці функції $V(\cdot)$ відповідає набір інваріантних торів системи (1) всіх вимірів $1, \dots, n$, причому асимптотично стійкими можуть бути лише n-вимірні тори. Показано, що майже всі додатні півтраєкторії системи (1) з деякого околу так званої повільної поверхні $w = \dot{w} = 0$ фазового простору демонструють явище динамічної біфуркації багаточастотних коливань. А саме: поки компонента $u(t)$ розв'язку системи перебуває в зоні стійкості, спостерігається затухання коливань компонент фазового вектора $(w(t), \dot{w}(t))$; далі впродовж повільної еволюції компонента $u(t)$ залишає зону стійкості та входить в окіл деякої стаціонарної точки, який належить зоні нестійкості; після цього відбувається перехідний процес і додатна півтраєкторія притягується до деякої траєкторії на n-вимірному інваріантному торі системи, який відповідає зазначеній стаціонарній точці; як наслідок, система виходить на усталений багаточастотний режим коливань.

ПРО МАКСИМАЛЬНИЙ ПОРЯДОК РОЗПОДІЛУ В КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНОМУ РІВНЯННІ

Пахолок Б. Б.

bogdanbp@ukr.net
Національний університет “Львівська політехніка”, Україна

Розглядається квазідиференціальне рівняння

$$\mathrm{K}\,[X(t)] \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} (A_{ij}(t) X^{(n-i)}(t))^{(m-j)} = F(t), \tag{1}$$

де $(l \times l)$ матриці-функції $A_{ij}(t)$ задовольняють умови:
1)$A_{00}^{-1}(t)$ – вимірна і обмежена на деякому інтервалі I дійсної осі;
2) $A_{i0}(t),\ A_{0j}(t) \in L_2(I)\,,\ \ \forall i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$;
3) $A_{ij}(t)$ – узагальнені матриці-функції типу міри для $i = \overline{1,n},\ \ j = \overline{1,m.}$

Для рівняння (1) досліджено питання про максимальний порядок розподілу $F(t)$, при якому рівняння (1) є коректним в узагальненому сенсі. Отримано ряд наслідків з основної теореми.

ОДНОНАПРАВЛЕНІ ІЗОТРОПНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА В ПРОСТОРІ КЕРРА

Пелих В. О., Тайстра Ю. В.

pelykh@iapmm.lviv.ua, ythelloworld@gmail.com
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Україна

Проблема дослідження чи отримання розв'язків рівнянь фізичних полів (Максвелла, Дірака) у ріманових просторах (де, на відміну від плоского, вони не зводяться до рівняння Д'Аламбера) викликана зв'язаним характером рівнянь. Ми пропонуємо метод розщеплення систем рівнянь у спінорному формалізмі першого порядку з використання ізотропної бази Ньюмена-Пенроуза. Зокрема, нами розглянуто неоднорідну систему рівнянь для спінора Максвелла у метриці Керра, яка описує гравітаційне поле (ріманів простір), створене тілом масою з питомим кутовим моментом . Розглядаємо випадок, коли обидва головних ізотропних напрямки електромагнітного поля збігаються з головним ізотропним напрямком тензора Вейля. Відповідне поле є однонаправленим ізотропним полем. У цьому випадку у координатах Бойера-Ліндквіста у тетраді Кіннерслі система рівнянь Максвелла зводиться до двох рівнянь в частинних похідних першого порядку відносно невідомої комплексної функції. Ми отримуємо її розв'язок в аналітичному вигляді, який у випадку відокремлення змінних має особливості у точках $\varphi = 0, \pi$ і був, як вважаємо, безпідставно втраченим у роботах Тькольського, Старобінського і Чандрасекара. Вказуємо на можливі використання цього результату для вивчення чорної діри Керра.

ЯКІСНИЙ АНАЛІЗ СИСТЕМИ ДВОХ ЗГАСАЮЧИХ СТОХАСТИЧНИХ АПЕРІОДИЧНИХ ОСЦЕЛЯТОРІВ

Перегуда О. В.

perol@ukr.net

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

Розглядається система двох гармонічних осциляторів з тертям для випадку $|h_i| > k_i$ $i = 1, 2$ (згасаючий аперіодичний процес), що описується системою двох лінійним диференціальних рівняннь другого порядку

$$\begin{cases} \ddot{u}_1(t) + 2h_1\dot{u}_1(t) + k_1^2 u_1(t) = 0, \\ \ddot{u}_2(t) + 2h_2\dot{u}_2(t) + k_2^2 u_2(t) = 0, \\ u_1(0) = u_{10}, \dot{u}_1(0) = \dot{u}_{10}, \\ u_2(0) = u_{20}, \dot{u}_2(0) = \dot{u}_{20} \end{cases} \tag{1}$$

де $u_{0i}, \dot{u}_{0i}$ — початкові положення і швидкості осциляторів $\left(u_{i0}^2 + \dot{u}_{i0}^2 > 0\right)$; $k_i > 0$, h_i – коефіцієнти тертя осциляторів; $u_i(t), \dot{u}_i(t)$ – положення і швидкість осциляторів в момент часу $t > 0$; $i = 1, 2$.

При випадковому збуренні вздовж вектора фазової швидкості "білим шумом" у формі Іто початкова система (1) перетворюється у систему рівнянь Іто.

При заданих випадкових збуреннях розглядається загальна система рівнянь вигляду:

$$\dot{x}(t) = Bx(t)\dot{\xi}(t)$$

де

$$\dot{\xi}_1(t) = g_{11}(t) + g_{21}(t)\dot{w}_1(t);$$

$$\dot{\xi}_2(t) = g_{12}(t) + g_{22}(t)\dot{w}_2(t);$$

$g_{ij}(t)$– невипадкові функції; $\dot{w}_i(t)$– "похідна" від вінерівського процесу ("білий шум" у формі Іто),B - матриця відповідних коефіцієнтів початкової системи (1).

Отримано явний вигляд розв'язків відповідної стохастичної системи рівнянь Іто. Проведено якісний аналіз поведінки амплітуди та фази системи згасаючих стохастичних гармонічних осциляторів. Для отриманого розв'язку відповідної системи стохастичних рівнянь Іто побудовані різні моделі згасаючих аперіодичних осциляторів.

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Петришин Р. І.

r.petryshyn@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна

Розглядається система рівнянь з повільними та швидкими змінними [1] та запізненням $\Delta > 0$ вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \tau), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \tau), \quad \tau \in [0, L],$$

і умовами

$$x(\tau) = f(x(\tau_1), \dots, x(\tau_r), \tau), \quad \tau \in [-\Delta, 0],$$

$$\varphi(\tau) = g(\tau) + \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^\tau \Omega(t)dt, \quad \tau \in [-\Delta, 0],$$

$$\Phi(x(\tau_1), \dots, x(\tau_r)) = 0, \quad \tau_\nu \in (-\Delta, L), \quad \nu = \overline{1, r}.$$

Тут x і φ — відповідно n- і m-вимірні вектори, Φ — r-вимірна вектор-функція, $\tau_1, \dots, \tau_r$ — невідомі параметри, ε — малий додатний параметр.

Для розв'язання цієї задачі, тобто для знаходження $x(\tau), \varphi(\tau), z$, де $z = (\tau_1, \dots, \tau_r)$, використано метод усереднення за всіма швидкими змінними φ, φ_Δ. Зазначимо, що при малих ε мала зміна часової змінної τ породжує велику зміну величини φ. Цим обумовлено відносно простий вигляд початкової умови для φ.

Знайдено достатні умови існування єдиного розв'язку x, φ, z вихідної задачі і встановлено ефективну оцінку його відхилення від розв'язку усередненої задачі.

1. *Самойленко А.М.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань / А.М. Самойленко, Р.І. Петришин — К.: Наукова думка, 2004. — 474 с.

ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ СИНГУЛЯРНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ЗА ДОПОМОГОЮ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ

Процак Л. В.

protsak_l_v@ukr.net

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, Україна

В класі неперервно диференційовних на $\mathbb{R}_+$ вектор-функцій із значеннями в $\mathbb{R}^n$ розглядається сингулярна крайова задача

$$y' = f(x, y), \quad y(+0) = \lambda, \quad y(+\infty) = 0,$$

де $f(\cdot,\cdot) \in \mathrm{C}^2\left(\mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n\right)$, а $\lambda \in \mathbb{R}^n$ — параметр керування. Припускається, що існують границі

$$\lim_{x\to+0} x f'_y(x, 0) = A, \quad \lim_{x\to+\infty} f'_y(x, 0) = B, \quad \lim_{x\to+\infty} \|f(x, 0)\| = 0,$$

спектри матриць A та B не перетинаються з прямими $\operatorname{Re} z = 1$ та $\operatorname{Re} z = 0$ відповідно, а задача

$$y' = f(x, 0) + f'_x(x, 0)y, \quad y(+0) = \lambda, \quad y(+\infty) = 0$$

має сім'ю розв'язків $y = y^0_u(x)$, $\lambda = \Lambda u + \eta$, де $u \in \mathbb{R}^k$ — вектор-параметр сім'ї, Λ — $(n \times k)$-матриця, $\eta \in \mathbb{R}^n$ — сталий вектор. Базуючись на ідеї чисельно-аналітичного методу А. М. Самойленка, побудовано $(n \times n)$-матриці-функції $K(x, s)$ та $P(x)$, які зводять вихідну задачу до системи інтегральних рівнянь з параметрами

$$y_u(x) = y^0_u(x) + \int\limits_0^\infty K(x, s)F(x, y_u(s))\mathrm{d}s, \; \int\limits_0^\infty P(x)F(x, y_u(s))\mathrm{d}s = 0,$$

з деякою функцією $F(\cdot,\cdot) \in \mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n\right)$. Знайдено умови, що гарантують збіжність методу послідовних наближень для першого рівняння системи. Якщо для деякого $i \gg 1$ існує розв'язок u_i другого рівняння при $y_u(x)$ рівному i-му послідовному наближенню, то $y^{[i]}_{u_i}(x)$ є наближеним розв'язком вихідної крайової задачі. Знайдено оцінку швидкості збіжності методу.

ЗАДАЧІ З ДАНИМИ НА ВСІЙ МЕЖІ ОБЛАСТІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ І СИСТЕМ РІВНЯНЬ

Пташник Б. Й.

ptashnyk@lms.lviv.ua

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна

Подано огляд результатів автора та його учнів, які стосуються розв'язності задач із даними на всій межі області для лінійних гіперболічних рівнянь і систем рівнянь високого порядку. Їх можна об'єднати такою постановкою. В області $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 < t < T, x \in \Omega\}$, Ω — p-вимірний паралелепіпед, евклідів простір $\mathbb{R}^p$ або обмежена однозв'язна область із $\mathbb{R}^p$ із гладкою межею, $p \in \mathbb{N}$, для рівняння (системи рівнянь)

$$\frac{\partial^{2n} u(t,x)}{\partial t^{2n}} + \sum_{q=0}^{2n-1} A_q\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^q u(t,x)}{\partial t^q} = f(t,x), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

знайти розв'язок, який за змінною t задовольняє умови

$$\sum_{j=1}^{2} \sum_{q=0}^{2n-1} B_{jq}^r\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^q u(t_j,x)}{\partial t^q} = \varphi_r(x), \quad r = 1, 2, \ldots, 2n, \tag{2}$$

а також певні умови за змінними $x_1, \ldots, x_p$ (періодичності, майже періодичності чи умови типу Діріхле), де $A_q\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $B_{jq}^r\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — лінійні диференціальні вирази порядку не вищого, ніж $2n$, $t_1 = 0$, $t_2 = T$. Розглядаємо такі часткові випадки умов (2):

а) $\frac{\partial^{j-1} u(0,x)}{\partial t^{j-1}} = \varphi_j(x), \quad \frac{\partial^{j-1} u(T,x)}{\partial t^{j-1}} = \varphi_{n+j}(x), \quad j = 1, \ldots, n;$

б) $\frac{\partial^{j-1} u(0,x)}{\partial t^{j-1}} = 0,\ j = 1, \ldots, m,\ \frac{\partial^{q-1} u(T,x)}{\partial t^{q-1}} = 0,\ q = 1, \ldots, 2n-m;$

в) $\frac{\partial^{2(j-1)} u(0,x)}{\partial t^{2(j-1)}} = \varphi_j(x), \quad \frac{\partial^{2(j-1)} u(T,x)}{\partial t^{2(j-1)}} = \varphi_{n+j}(x), \quad j = 1, \ldots, n;$

г) $\frac{\partial^{2(j-1)} u(0,x)}{\partial t^{2(j-1)}} = \varphi_j(x), \quad \frac{\partial^{2j-1} u(T,x)}{\partial t^{2j-1)}} = \varphi_{n+j}(x), \quad j = 1, \ldots, n.$

Вказані задачі, взагалі, є умовно коректними, а їхня розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників, для оцінок знизу яких використано метричний підхід [1]. Встановлено коректність задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) значень T та для майже всіх векторів, складених із коефіцієнтів рівнянь.

1. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частиными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

ПРО КЛАСИ КОРЕКТНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ У НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Пукач П. Я.

ppukach@gmail.com

Національний університет "Львівська політехніка", Україна

Доповідь присвячена дослідженню мішаної задачі з крайовими умовами Діріхле для нелінійної гіперболічної системи другого порядку

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} (A_i(x,t)u_t)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x,t)u_{x_i} + \\ + C(x,t)u + G(x,t,u_t) = F(x,t) \qquad (1)$$

в необмеженій за просторовими змінними області. Рівняння і системи вигляду (1), які моделюють коливні процеси у середовищі з опором, вивчають у теорії пружності [1].

В області $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 < T < \infty$ розглядаємо для системи (1) мішану задачу з початковими умовами

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad (2)$$

$$u_t|_{t=0} = \varphi_1(x) \qquad (3)$$

та крайовою умовою

$$u|_{S_T} = 0, \qquad (4)$$

де $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$ – бічна поверхня області Q_T. У системі (1) квадратні матриці A_{ij}, A_i, B_i $(i,j = 1,...,n)$ та матриця C є дійснозначними і мають порядок $m \in \mathbb{N}$, $u = \mathrm{col}(u_1,...,u_m)$, $G = \mathrm{col}(G_1,...,G_m)$, $F = \mathrm{col}(F_1,...,F_m)$, $\varphi_i = \mathrm{col}(\varphi_{i1},...,\varphi_{im})$, $i = 1,2$.

У цій доповіді отримано класи коректності розв'язку задачі (1)-(4), які є певними ваговими соболевськими просторами функцій, що описують якісну поведінку розв'язку на нескінченності. Ця поведінка залежить від правої частини системи та початкових даних задачі.

1. *Pukach P. Ya.* Qualitative research methods of mathematical model of nonlinear vibrations of conveyor belt // Journal of Mathematical Sciences, Volume 198, Issue 1, Pages 31-36, April 2014.

МЕТОД КВАЗІКЛАСИЧНИХ ЛОКАЛІЗОВАНИХ СТАНІВ ДЛЯ РІВНЯНЬ ШРЕДИНГЕРА ТА ДІРАКА

Рейтій О. К.

okreity@gmail.com
Ужгородський національний університет

Нерідко трапляється так, що для розв'язання квантово-механічної задачі достатньо знайти хвильову функцію не у всьому конфігураційному просторі, а тільки в околі деякого многовиду M меншої розмірності, де вона в основному зосереджується. Стани, що описуються такими хвильовими функціями, називаються "локалізованими". Гамільтоніан в цьому випадку природно розкласти за координатами, перпендикулярними до многовиду M, в околі якого вихідне рівняння Шредінгера чи Дірака допускає відокремлення змінних.

В праці розглянуто квазікласичні локалізовані стани, які зосереджені поблизу деякої класичної траєкторії і описують взаємодію електрона з атомами та зовнішніми полями. На цій основі розвинуто новий підхід – *метод квазікласичних локалізованих станів* (надалі *метод КЛС*) – що дозволяє отримувати асимптотичні ров'язки хвильових рівнянь з потенціалами бар'єрного типу, які володіють аксіальною симетрією і не допускають повного відокремлення змінних.

В рамках розвинутого методу побудовано рекурентну схему отримання розв'язків квазікласичного типу рівнянь Шредингера й Дірака в класично дозволених та заборонених областях. Знайдено універсальні правила зшивання розв'язків в околі точок повороту, докладно проаналізовано дискретний спектр релятивістської двоцентрової задачі Z_1eZ_2 в границі об'єднаних та роз'єднаних атомів. Обчислено перші два члени асимптотичного (за великими міжцентровими відстанями) розкладу величини обмінного розщеплення адіабатичних термів в релятивістській задачі Z_1eZ_2. Також, розв'язано як нерелятивістську, так і релятивістську задачі про водневоподібний атом (іон) у зовнішньому електростатичному полі та розраховано асимптотику ймовірності тунельної іонізації атома (іона) в такому полі. Одержані для обох квантово-механічних задач результати добре узгоджуються з результатами інших авторів, але мають значно ширшу область застосовності.

НАБЛИЖЕНИЙ РЕГУЛЯТОР ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ШВИДКО КОЛИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Русіна А. В.

rusina.alina@gmail.com

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - обмежена область, $\varepsilon \in (0,1)$ - малий параметр. В циліндрі $Q = (0,T) \times \Omega$ розглядається задача оптимального керування

$$\begin{cases} y_{tt}(t,x) = A^\varepsilon y(t,x) + u(t,x), \quad (t,x) \in Q, \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \\ y|_{t=0} = y_0^\varepsilon, \ y_t|_{t=0} = y_1^\varepsilon, \end{cases} \tag{1}$$

$$J(y,u) = \int\limits_\Omega y^2(T,x)dx + \int\limits_Q u^2(t,x)dtdx \to \inf, \tag{2}$$

$$u \in L^2(Q), \tag{3}$$

де $y_0^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, $y_1^\varepsilon \in L^2(\Omega)$, $A^\varepsilon = div(a^\varepsilon \nabla)$, $a^\varepsilon(x) = a(\frac{x}{\varepsilon})$, $a = ((a_{ij}))$ - вимірна, симетрична, періодична матриця, що задовольняє умови рівномірної еліптичності та обмеженості: $\exists\ v_1 > 0,\ v_2 > 0$

$$\forall\ \eta, x \in \mathbb{R}^n \quad v_1 \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\eta_i\eta_j \le v_2 \sum_{i=1}^n \eta_i^2. \tag{4}$$

Відомо [1], що задача (1)-(3) має єдиний розв'язок $\{y^\varepsilon, u^\varepsilon\}$ в класі $W(0,T) \times L^2(Q)$, де

$$W(0,T) = \{y \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \mid \frac{dy}{dt} \in L^2(0,T; L^2(\Omega))\}.$$

В роботі запропоновано процедуру побудови оптимального синтезу задачі (1)-(3) та обґрунтувано його наближену формулу за допомогою переходу до усереднених параметрів.

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. - М.,Мир, 1972. - 416 с.

2. *Егоров А.И.* Оптимальное управление линейными системами. - К.: Вища школа, 1988. - 278 с.

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ БАГАТОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Семчишин Г. Я.

haly_semchushun@mail.ru

Ужгородський національний університет, Україна

Розглядається вироджена нелінійна система диференціальних рівнянь

$$J\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t,y), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

підпорядкована лінійним багатоточковим крайовим умовам

$$A_1 y(0) + A_2 y(t_2) + \ldots + A_{k-1} y(t_{k-1}) + A_k y(T) = d, \tag{2}$$

де J – $(n \times n)$-вимірний нільпотентний блок Жордана, $A(t)$ – $(n\times\ n)$-вимірна матриця, $f(t,y)$ – n-вимірна вектор-функція, $f(t,y) \in C[0,T]$; $A_1, A_2, \ldots, A_k$ – $((n-1)\times n)$-вимірні сталі матриці, d – $(n-1)$-вимірний вектор-стовпець сталих, $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = T$.

У припущені, що $f_n(t,y) = f_n(t, y_2, \ldots, y_n) = f_n(t,v)$, вироджена багатоточкова крайова задача (1), (2) зводиться до багатоточкової крайової задачі з нелінійними крайовими умовами

$$\frac{dv}{dt} = \bar{A}(t)v(t) + \bar{f}(t,v), \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{k} B_i v(t_i) + g\left(v(t_1), v(t_2), \ldots, v(t_k)\right) = d. \tag{4}$$

Із використанням параметризації

$$z_i \coloneqq v(t_i) = (v_1(t_i), v_2(t_i), \ldots, v_{n-1}(t_i))^\top = (z_{i1}, z_{i2}, \ldots, z_{in-1})^\top, i = \overline{1,k},$$

нелінійні багатоточкові крайові умови (4) набувають вигляду

$$\sum_{i=1}^{k} B_i v(t_i) = d - g(z_1, z_2, \ldots, z_k). \tag{5}$$

У випадку, коли відповідна (3), (5) лінійна однорідна багатоточкова крайова задача має тільки тривіальний розв'язок, за допомогою чисельно-аналітичного методу досліджено питання існування та наближеної побудови розв'язків.

КОНФОРМНОІНВАРІАНТНІ ДВОВИМІРНІ КВАЗІЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Сєров М. І., Сєрова М. М., Блажко Л. М.

mserov@gmail.com, mvusata@gmail.com, LBlazhko@ukr.net
Полтавський національний технічний університет, Україна

Оскільки основні фізичні закони, рівняння руху, різні математичні моделі володіють явною або неявною, геометричною або негеометричною, локальною або нелокальною симетріями, то у сучасних дослідженнях у математичній фізиці важливу роль відіграє принцип симетрії.

Цікавим об'єктом дослідження внаслідок свого широкого застосування є квазілінійні хвильові рівняння.

Розглянемо квазілінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$F^{\mu\nu}\left(u, \underset{1}{u}\right) u_{\mu\nu} + G\left(u, \underset{1}{u}\right) = 0, \tag{1}$$

де $F^{\mu\nu}\left(u, \underset{1}{u}\right)$, $G\left(u, \underset{1}{u}\right)$ — довільні гладкі функції, $u = u(x) \in R^1$, $x = (x_0, \vec{x}) \in R^{1+n}$, $\underset{1}{u}$ — сукупність всеможливих похідних першого порядку функції u, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $\mu, \nu = \overline{0, n}$.

Теорема. *Рівняння (1) інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,2)$ з базисними генераторами*

$$\begin{aligned} AC(1,2) = \langle \partial_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x^\mu \partial_\nu - x^\nu \partial_\mu + m^{\mu\nu}(u)\partial_u, \quad D = x_\gamma \partial_\gamma, \\ K_\mu = 2x^\mu D - x^2 \partial_\mu + 2x_\nu m^{\mu\nu} \partial_u \rangle, \end{aligned} \tag{2}$$

де $m^{\mu\nu} = m^{\mu\nu}(u)$ задаються формулами

$$m^{\nu\mu}(u) = -m^{\mu\nu}(u), \quad m^{01} = \sinh u, \quad m^{02} = 1, \quad m^{12} = \cosh u \tag{3}$$

тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд

$$\Box u = (\lambda\sqrt{u^2} + \dot{\alpha}u)\frac{u^2}{\alpha u}, \tag{4}$$

де λ — довільна стала,

$$\alpha u \equiv \alpha_\mu u^\mu = \cosh u \cdot u_0 - u_1 + \sinh u \cdot u_2,$$

$$\dot{\alpha} u \equiv \dot{\alpha}_\mu u^\mu = \sinh u \cdot u_0 + \cosh u \cdot u_2.$$

ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ НАВАНТАЖЕНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Симотюк М. М., Хомяк Д. В.

quaternion@ukr.net, khomiak.dmytro@gmail.com
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

Нехай H_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, — простір, який є поповненням множини скінченних тригонометричних поліномів $\varphi = \sum \varphi_k \exp(ikx)$ за нормою

$$\|\varphi(x); H_\alpha\| = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi_k|^2 (1+|k|)^{2\alpha}};$$

$\overline{H}^m_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, — простір вектор-функцій $\vec{\varphi} = col(\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$ таких, що $\varphi^j \in H_\alpha$, $j = 1, \ldots, m$, з нормою

$$\|\vec{\varphi}(x); \overline{H}^m_\alpha\| = \max_{1\le j\le m} \|\varphi^j(x); H_\alpha\|.$$

В області $\{(t,x) : t \in (0,T), x \in \Omega\}$, $\Omega = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{u}(t,x) \equiv \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + A_1 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t \partial x} + A_2 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} = \vec{f}(t,x) + N[\vec{u}], \qquad (1)$$

$$\vec{u}(t_1, x) = \vec{\varphi}_1(x), \quad \left.\frac{\partial \vec{u}(t,x)}{\partial t}\right|_{t=t_2} = \vec{\varphi}_2(x), \quad 0 \le t_1 < t_2 \le T, \qquad (2)$$

де L — строго гіперболічний вираз, $\vec{u}(t,x) = col(u^1(t,x), \ldots, u^m(t,x))$, $\vec{f}(t,x) = (f^1(t,x), \ldots, f^m(t,x))$, $\vec{\varphi}_j(x) = col(\varphi^1_j(x), \ldots, \varphi^m_j(x))$, A_j, $j = 1,2$, — квадратні матриці розміру $m \times m$, елементи яких є комплексними числами, $N[\vec{u}] = \sum_{j=1}^M B_j \vec{u}(\tau_j, x)$, B_j, $j = 1, \ldots, M$, — квадратні матриці розміру $m \times m$, елементи яких є комплексними числами, $0 \le \tau_1 < \ldots < \tau_M \le T$, $\{t_1, t_2\} \cap \{\tau_1, \ldots, \tau_M\} = \emptyset$.

Знайдено умови коректної розв'язності задачі (1), (2) у шкалі просторів $\overline{H}^m_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. За допомогою метричного підходу [1] встановлено метричні оцінки знизу для малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку.

1. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

УСЕРЕДНЕННЯ НЕЧІТКИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЗАПІЗНЕННЯМ

Скрипник Н. В.

talie@ukr.net

Одеський національний університет імені І.І.Мечникова, Україна

Нехай $(\mathbb{E}^n, D)-$ метричний простір відображень $u : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, що задовольняють наступним вимогам: 1) u напівнеперервне зверху по Беру; 2) u нормальне; 3) u нечітко опукле; 4) замикання множини $\{y \in \mathbb{R}^n : u(y) > 0\}$ компактне.

Розглянемо нечітке інтегральне рівняння з запізненням

$$x(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t f(t, s, x(s), x(s-\tau))ds, \tag{1}$$
$$x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0], x_0 = \varphi(0).$$

Рівнянню (1) поставимо у відповідність усереднене нечітке інтегральне рівняння з запізненням

$$\bar{x}(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t \bar{f}(t, \bar{x}(s), \bar{x}(s-\tau))ds, \tag{2}$$
$$\bar{x}(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0], x_0 = \varphi(0),$$

де

$$\bar{f}(t, x, z) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t, s, x, z)ds. \tag{3}$$

Теорема. *Нехай в області $Q = \{(t, s, x, z) : t, s \geq 0, x, z \in G \subset \mathbb{E}^n\}$ виконуються наступні умови:*

1) нечіткі відображення $f(t, s, x, z), \bar{f}(t, x, z)$ неперервні, обмежені та задовільняють умові Ліпшица по x, z;

2) нечітке відображення $\int_0^t f(t, s, x, z)ds$ рівномірно неперерне на $\mathbb{R}_+$ для будь якого неперервного $x : \mathbb{R}_+ \to G$.

3) початкове відображення $\varphi(t)$ неперевне на $[-\tau, 0]$;

4) рівномірно відносно $t, t_1 \geq 0, x, z \in G$ існує межа (3);

5) розв'язок $\bar{x}(\cdot)$ рівняння (2) існує при $t \geq 0$ та $\varepsilon \in [0, \sigma]$ і належить G з деяким ρ-околом.

Тоді для усіх $\eta > 0$ та $L > 0$ існує $\varepsilon^0 \in (0, \sigma]$ таке, що для усіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ та $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедлива оцінка $D(x(t), \bar{x}(t)) < \eta$, де $x(t)$ і $\bar{x}(t)$ - розв'язки рівнянь (1) і (2) відповідно.

ТЕОРІЯ ФАВАРА-АМЕРІО ДЛЯ РІВНЯНЬ БЕЗ H-КЛАСІВ

Слюсарчук В. Ю.

V.E.Slyusarchuk@gmail.com

Національний університет водного господарства та природокористування, Україна

Нехай E – банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_E$, C^0 – банаховий простір неперервних і обмежених функцій $x:\mathbb{R}\to E$ з нормою $\|x\|_{C^0}=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|x(t)\|_E$ і $\mathfrak{M}$ – банаховий простір обмежених функцій $x:\mathbb{Z}\to E$ з нормою $\|x\|_{\mathfrak{M}}=\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|x(n)\|_E$.

Розглянемо диференціальне та різницеві рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(t,x(t)),\ \ t\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

$$x(t+1)=f(t,x(t)),\ \ t\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

$$y(n+1)=g(n,y(n)),\ \ n\in\mathbb{Z}, \tag{3}$$

де $f:\mathbb{R}\times E\to E$ і $g:\mathbb{Z}\times E\to E$ – такі відображення, що для кожних майже періодичних $x\in C^0$ і $y\in\mathfrak{M}$ функції $f(t,x(t))$ і $g(n,y(n))$ є майже періодичними елементами просторів C^0 і $\mathfrak{M}$ відповідно.

Наведено умови майже періодичності обмежених розв'язків рівнянь (1) – (3), отримані в [1]–[5].

1. *Слюсарчук В. Е.* Почти периодические решения дискретных уравнений // Изв. РАН. Сер. матем. – 2016. – **80**, № 2. – С. 125–138.
2. *Слюсарчук В. Е.* Условия существования почти периодичности решений нелинейных разностных уравнений в банаховом пространстве // Матем. заметки. – 2015. – **97**, № 2. – С. 277–285.
3. *Слюсарчук В. Е.* Исследование нелинейных почти периодических дифференциальных уравнений, не использующее H-классы этих уравнений // Матем. сб. – 2014. – **205**, № 6. – С. 139–160.
4. *Слюсарчук В. Е.* Условия почти периодичности ограниченных решений нелинейных дифференциально-разностных уравнений // Изв. РАН. Сер. матем. – 2014. – **78**, № 6. – С. 179–192.
5. *Slyusarchuk V. Yu.* Almost periodic solutions of difference equations with discrete argument on metric space // Miskolc Mathematical Notes. – 2014. – **15**, № 1. – P. 211–215.

ПРО НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЗА ПАРАМЕТРОМ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ПРОСТОРАХ ГЕЛЬДЕРА–ЗІГМУНДА

Солдатов В. О.

soldatovvo@ukr.net
Інститут математики НАН України, Україна

Нехай задано ціле число $m \geq 1$ і дійсні числа $s > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $a < b$. Розглянемо таку крайову задачу, залежну від параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) \equiv y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \tag{1}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = q(\varepsilon). \tag{2}$$

Припускаємо, що для кожного $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ вона є тотальною щодо простору Гельдера-Зігмунда $(\mathcal{C}^{(s+1)})^m := \mathcal{C}^{(s+1)}([a,b], \mathbb{C}^m)$, тобто шукана вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon)$ належить до $(\mathcal{C}^{(s+1)})^m$, і довільно задано $A(\cdot,\varepsilon) \in (\mathcal{C}^{(s)})^{m\times m} := \mathcal{C}^{(s)}([a,b], \mathbb{C}^{m\times m})$, $f(\cdot,\varepsilon) \in (\mathcal{C}^{(s)})^m$, $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ і лінійний неперервний оператор $B(\varepsilon) : (\mathcal{C}^{(s+1)})^m \to \mathbb{C}^m$.

Для задачі (1), (2) розглянемо такі граничні умови при $\varepsilon \to 0+$:

(i) $A(\cdot,\varepsilon) \to A(\cdot,0)$ в $(\mathcal{C}^{(s)})^{m\times m}$;

(ii) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^m$ для кожного $y \in (\mathcal{C}^{(s+1)})^m$;

(iii) $f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0)$ в $(\mathcal{C}^{(s)})^m$; **(iv)** $q(\varepsilon) \to q(0)$ в $\mathbb{C}^m$.

Розглянемо ще одну умову:

(0) гранична однорідна крайова задача $L(0)y(t,0) = 0$, $a \leq t \leq b$, $B(0)y(\cdot,0) = 0$ має лише тривіальний розв'язок.

Означення. Кажемо, що розв'язок крайової задачі (1), (2) неперервний за параметром ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються такі умови:

$(*)$ існує число $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ таке, що для усіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1)$, $f(\cdot,\varepsilon) \in (\mathcal{C}^{(s)})^m$, $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^m$ ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot,\varepsilon) \in (\mathcal{C}^{(s+1)})^m$;

$(**)$ якщо виконуються умови (iii) та (iv), то $y(\cdot,\varepsilon) \to y(\cdot,0)$ в $(\mathcal{C}^{(s+1)})^m$ при $\varepsilon \to 0+$.

Теорема 1. *Розв'язок крайової задачі (1), (2) неперервний за параметром ε при $\varepsilon = 0$ тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умови* (0), (i), (ii).

Теорема 2. *Припустимо, що крайова задача (1), (2) задовольняє умови* (0), (i), (ii). *Тоді її розв'язок має при $\varepsilon \to 0+$ однакові за порядком похибку $\|y(\cdot,0) - y(\cdot,\varepsilon)\|_{(\mathcal{C}^{(s+1)})^m}$ і нев'язку*

$$\|L(\varepsilon)y(\cdot,0) - f(\cdot,\varepsilon)\|_{(\mathcal{C}^{(s)})^m} + \|B(\varepsilon)y(\cdot,0) - q(\varepsilon)\|_{\mathbb{C}^m}.$$

Ці результати отримано спільно з В.А. Михайлецем і О.О. Мурачем.

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НА ЧАСОВИХ ШКАЛАХ.

Станжицький О. М., Лаврова О. Є.

ostanzh@gmail.com, lavrova_olia@mail.ru

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

Нехай $\mathbf{T}$ – часова шкала – довільна, непорожня, замкнена підмножина дійсних чисел. [1]

На часовій шкалі $\mathbf{T}$, $\sup \mathbf{T} = +\infty$, розглядається наступна задача оптимального керування:

$$\begin{cases} x^{\Delta} = f(t, x(t), u(t)), \\ e = (t_1, x(0), x(t_1)) \in S. \end{cases} \tag{1}$$

з критерієм якості типу Майєра:

$$J(x(0), u) = \Phi_1(e) \to \inf, \tag{2}$$

і критерієм якості Больца :

$$J(x(0), u) = \int_{[t_0, t_1)_{\mathbf{T}}} L(t, x(t), u(t)) \Delta t + \Phi_1(e) \to \inf \tag{3}$$

на відрізку $[0, T_0]_{\mathbf{T}}$, $0 \in \mathbf{T}$, $T_0 \in \mathbf{T}$, $x \in D$ – фазовий вектор, D – область в $\mathbf{R}^d$, $x(0) \in K \subset D$, K – компакт, t_1 – момент першого виходу розв'язку $x(t)$ на границю області D, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ – вектор керування, U – замкнена множина, вектор-функція $\Phi : [0, T_0]_{\mathbb{T}} \times D \times U \to \mathbb{R}^d$ – неперервна на S, а множина S визначається рівняннями $\Phi_j(e) = 0$ при $j = \overline{2, k}$, $\Phi = \{\Phi_j\}_{j=1}^{k}$.

В роботі отримано достатні умови існування оптимального керування для задач (1), (2) і (1), (3).

1. *M. Bohner and A. Peterson.* Dynamic equations on time scales. An introduction with applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001.

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Стехун А. О.

angela_stehun@mail.ru

Одеська державна академія будівництва та архітектури, Одеса, Україна

Розглядається диференціальне рівняння

$$y''' = \alpha_0 p(t) y L(y), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$- неперервна функція, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $L : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$- неперервна і повільно змінна функція при $y \to Y_0$, Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0}- деякий однобічний окіл Y_0.

Згідно з теорією правильно змінних функцій

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{L(\lambda y)}{L(y)} = 1 \quad \text{для будь якого} \quad \lambda > 0,$$

тобто рівняння (1) є асимптотичне близьким при $y \to Y_0$ до лінійного диференціального рівняння третього порядку.

Розв'язок y диференціального рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ – розв'язком, де $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє наступні умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) \in \{0, \pm\infty\} \ (k = 1, 2),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y''(t)]^2}{y'''(t) y'(t)} = \lambda_0.$$

Для рівняння (1) встановлено необхідні і достатні умови існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ – розв'язків в особливих випадках $\lambda_0 \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \pm\infty\}$, а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення таких розв'язків та їх похідних до другого порядку включно. При $L(y) \equiv 1$, коли рівняння (1) є лінійним, результати дослідження доповнюють відомі результати із монографії [1].

1. *И.Т. Кигурадзе, Т.А. Чантурия.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990. – 430 с.

МЕТОД КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ В ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧАХ ДИФУЗІЇ

Сухорольський М.А., Сохан П.Л., Івасик Г.В.

SokhanP@gmail.com, Ivasyk-G@yandex.ua
Національний університет "Львівська політехніка", Україна

Розглянемо плоску задачу про дифузію речовини у безмежному середовищі за наявності в ньому циліндричного тіла. Динамічний стан середовища створюється об'ємними джерелами. Рівняння задачі формулюємо в будь-якій площині, перпендикулярній до твірної циліндра. Нехай $w = \varphi(z)$ – однолисте конформне відображення області $\overline{D}$ (зовнішності напрямної циліндра) на круг $\overline{K}$ і $z = h(w)$ – обернене до нього відображення. При цьому крива ∂D відображається на коло ∂K. Рівняння дифузії запишемо в прямокутній системі координат з використанням комплексних змінних $w = u + iv$, $\overline{w} = u - iv$ у вигляді $\partial_t^1 U = 4a^2\partial_{w\overline{w}}^2 U - f$, де u, v і t – лінійні та часова координати; $U = U(w, \overline{w}, t)$, $f = f(w, \overline{w}, t)$ – дійсні функції. Перейдемо до нових змінних $z = h(w)$, $\overline{z} = \overline{h(w)}$, одержимо таке рівняння: $\partial_t^1 U = 4a^2 \left|\varphi'(z)\right|^{-2} \partial_{z\overline{z}}^2 U - f$. Розв'язок цього рівняння в $\overline{D}$ за однорідних початкових умов (що не є принциповим) і граничної умови $U|_{z\in L} = 0$ шукаємо у вигляді суми ряду за системою функцій $\left\{\Phi_{m,k(m)}(z, \overline{z})\right\}_{k=1}^{\infty}$, $(m = 0, \pm 1, ...)$, де $\Phi_{-m,k(m)}(z, \overline{z}) = \Phi_{m,k(m)}(\overline{z}, z)$; $\Phi_{m,k(m)}(z, \overline{z}) = J_m\left(\lambda_{k(m)}\varphi(z), \lambda_{k(m)}\overline{\varphi(z)}\right)$; $J_m(w, \overline{w}) = w|w|^{-1}J_m(|w|)$; $J_m(w, w) = J_m(w)$ – функції Бесселя першого роду m-го порядку; $\lambda_{k(m)}$, $(k = 1, 2, ...)$ – додатні корені рівняння $J_m(\lambda) = 0$. Введені величини є власними функціями і власними числами такої крайової задачі: $4|\varphi'(z)|^{-2}\partial_{z\overline{z}}^2 U + \lambda^2 u = 0$, $U|_{z\in\partial D} = 0$. Отже, якщо функція $f(w, \overline{w}, t)$ зображується збіжним рядом $f(z, \overline{z}, t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} f_{m,k}(t)\Phi_{m,k(m)}(z, \overline{z})$, де $f_{m,k}(t) = \left\|J_{m,k(m)}\right\|^2 \iint\limits_D f(z, \overline{z}, t)\Phi_{m,k(m)}(\overline{z}, z)|\varphi'(z)|dxdy$, то узагальнений (відносно множини функцій, що розвиваються у слабко збіжні ряди за даною системою) розв'язок задачі [1] шукаємо операційним методом і він такий:

$$U(z, \overline{z}, t) = -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_{m,k(m)}(z, \overline{z}) \int_0^t e^{-a^2\lambda_{k(m)}^2(t-\tau)} f_{m,k}(\tau)d\tau.$$

Одержаний розв'язок задовольняє сформульовану граничну умову, оскільки $J_m\left(\lambda_{k(m)}|\varphi(z)|, \lambda_{k(m)}\left|\overline{\varphi(z)}\right|\right)\Big|_{z\in\partial D} =$ $J_m\left(\lambda_{k(m)}|w|, \lambda_{k(m)}|\overline{w}|\right)\big|_{w\in\partial K} = J_m\left(\lambda_{k(m)}\right) = 0$. Розв'язок проілюстровано відображеннями $w = z + \sqrt{z^2 - c}$ і $w = (1/\sqrt{2})\left(\sqrt{z^2 + c} + \sqrt{z^2 - c}\right)$, що відповідають площині з еліптичним або хрестоподібним включеннями.

МЕТОД УКОРОЧЕННЯ У ПОБУДОВІ ІНВАРІАНТНИХ ТОРІВ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРІ ОБМЕЖЕНИХ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Теплінський Ю. В.

yuriy-teplinsky@yandex.ua

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Україна

Добре відомо, що метод укорочення К.П. Персидського [1], створений для дослідження зліченних систем диференціальних рівнянь, знайшов подальшого застосування у розв'язуванні багатьох задач теорії еволюційних рівнянь різних типів, визначених у просторах обмежених числових послідовностей [2–5]. У цьому повідомленні розглянуто застосування цього методу разом із методом функції Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори лінійних розширень динамічних систем на торах до побудови та дослідження властивостей гладкості інваріантних торів диференціальних, різницевих та диференціально-різницевих рівнянь, визначених у цих просторах.

1. *Персидский К.П.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения в нелинейных пространствах. — Алма-Ата: Наука, 1976. — 247 с.
2. *Samoilenko A.M. and Teplinskii Yu.V.* Countable Systems of Differential Equations. — VSP, Utrecht-Boston, 2003. — 287 p.
3. *A. M. Samoilenko, Yu. V. Teplinsky.* Elements of Mathematical Theory of Evolutionari Equations in Banach Spaces. — Singapore: World Scientific. Series A, Volume 86. — 2013, 400 p.
4. *Teplinskiy Y.V., Pasyuk K.V.* Infinite Dimensional Invariant Tori for Countable Systems of Differential-Difference Equations // Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications. - Sofia: Academic publishing house "Prof. Marin Drinov". - 2011. - P. 217-228.
5. *Теплінський Ю.В.* Інваріантні тори диференціально-різницевих рівнянь у просторах обмежених числових послідовностей. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. — 130 с. — (Препринт / МОН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка; 2015).

СПІВІСНУВАННЯ РІЗНИХ ТИПІВ ТРАЄКТОРІЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Федоренко Ю. В., Мясін С. С.

juliamfed@gmail.com

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

Доповідь присвячено задачі співіснування траєкторій, тобто одночасному існуванню різних типів траєкторій в динамічній системі. Найбільш відомим результатом в цьому напрямку є наступна теорема: якщо динамічна система, яка породжена неперервним відображенням інтервалу в себе, має періодичну траєкторію періоду n, то вона має і періодичну траєкторію з будь-яким періодом n' таким, що $n \succ n'$, де "$\succ$" — порядок Шарковського на множині натуральних чисел, а саме

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ ... \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ ... \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ ... \succ 2 \succ 1.$$

Розв'язок задачі співіснування траєкторій суттєво залежить від класу динамічних систем та класифікації їх траєкторій. Описано співіснування періодичних та гомоклінічних траєкторій динамічних систем, що породжуються деякими класами 1) неперервних відображень площини в себе [1], 2) систем диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійною імпульсною дією в нефіксовані моменти часу [2] та 3) дволистих систем диференціальних рівнянь другого порядку [3]. Дослідження використовує відповідні результати для неперервних відображень інтервалу, при цьому їх періодичні траєкторії, більш детально ніж за періодами, класифікуються за циклічними перестановками та символьними кодами, а гомоклінічні траєкторії розрізняються, використовуючи класифікацію їх ω-граничних множин.

1. *Fedorenko V.V., Sharkovsky A.N.* Homoclinic trajectories in one-dimensional dynamics. J. of Difference Eq. and Appl., 2012, v. 18, № 4, 579–588.
2. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища школа, 1987. – 288 с.
3. *Гаушус Э.В.* Исследование динамических систем методом точечных преобразований. – М.: Наука, 1976. – 368 с.

МІШАНА ЗАДАЧА З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПОХІДНИХ У ГІПЕРБОЛІЧНІЙ СИСТЕМІ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ІЗ РІЗНИМИ ХАРАКТЕРИСТИЧНИМИ НАХИЛАМИ

Флюд О. В.

oflyud@yahoo.com

Львівський національний університет ім. І. Франка, Україна

В області $\Omega = \{(x,t) \in R^2 : \ 0 < x, \ 0 < t < T\}$ розглянемо сингулярно збурену гіперболічну систему рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,t,u,v), \quad (x,t) \in \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \varepsilon\dfrac{\partial v}{\partial x} = g(x,t,u,v), \quad (x,t) \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

за умов

$$\begin{cases} u(x,0) = u(0,t) = 0, \\ v(x,0) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

де ε – малий додатний параметр. За певних умов гладкості на вихідні дані та умов погодження побудовано та обґрунтовано асимптотичне розвинення за степенями малого параметра розв'язку задачі (1)-(2) довільного порядку. Одержані результати доведені із використанням методики робіт [1-3].

1. *Бутузов В.Ф.* Об одной сингулярно возмущенной системе уравнений в частных производных первого порядка./Бутузов В.Ф., Каращук А.Ф.// Матем. заметки. – 1995. – Т. 57,
   Вып. 3. – С. 338-349.
2. *Кирилич В.М.* Обощеная непрерывная разрешимости задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперборлических систем квазилинейных уравнений./Кирилич В.М., Филимонов А.М.// Матем. студії. – 2008. – Т. 30. – № 1. – С. 42-60.
3. *Мауленов О.* О разрешимости смешанной задачи для вырожденной полулинейной гиперборлической системы на отрезке./Мауленов О., Мышкис А.Д.// Изв. АН КазССР. Сер. физ. - мат. – 1981. – № 5. – С. 25-29.

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ НА ГЕОМЕТРИЧНОМУ ГРАФІ

Флюд В. М.[1,2], *Головатий Ю. Д.*[1]

yu_holovaty@franko.lviv.ua, v.flyud@ukrpost.ua

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна*

[2] *Опольська політехніка, Польща*

Нехай Γ – компактний зірковий граф в $\mathbb{R}^3$, який складається з n ребер $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ зі спільною вершиною a. Об'єднання решти вершин називатимемо межею графа і позначатимемо $\partial\Gamma$. Шукатимемо задану на графі Γ функцію $u\colon \Gamma \times (0,T) \to \mathbb{R}$, яка є розв'язком задачі

$$\partial_t^2 u - k(x,\varepsilon)\,\partial_x^2 u + q(x)u = f(x,t), (x,t) \in \Gamma \times (0,T), \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x), x \in \Gamma, \tag{2}$$

$$u(x,t) = \mu(t), (x,t) \in \partial\Gamma \times (0,T). \tag{3}$$

З фізичних міркувань розв'язок u у вершині a повинен бути неперервним

$$u_{\gamma_1}(a,t) = u_{\gamma_2}(a,t) = \cdots = u_{\gamma_n}(a,t) \tag{4}$$

та справджувати умову балансу сил натягу

$$\left(k_{\gamma_1}\partial_{\gamma_1} u + k_{\gamma_2}\partial_{\gamma_2} u + \cdots + k_{\gamma_n}\partial_{\gamma_n} u\right)(a,t) = 0, \tag{5}$$

де $t \in (0,T)$. Тут u_{γ_k} – звуження функції u на ребро γ_k, а $\partial_{\gamma_k} u(a,\cdot)$ – значення похідної за просторовою змінною у вершині a вздовж ребра γ_k в напрямку від цієї вершини. Коефіцієнт жорсткості $k(x,\varepsilon)$ є додатним на Γ для кожного $\varepsilon > 0$, але може стати нульовим при $\varepsilon = 0$ на усіх чи частині ребер графа. Крім того, швидкість виродження $k(x,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ на різних ребрах може відрізнятися. Модель описує коливання системи струн, з'єднаних в одній точці і, взагалі кажучи, із різними коефіцієнтами жорсткості.

Досліджено асимптотичну поведінку u_ε, коли параметр ε стає малим. Побудовані повні розвинення розв'язків стосовно степенів малого параметру ε для різних випадків виродження коефіцієнта $k(x,\varepsilon)$ та доведена їхня асимптотична коректність.

РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Хома Н. Г., Хома-Могильська С. Г., Хохлова Л. Г.

khoma.nadiya@gmail.com, larysa_khokhlova@ukr.net
ТНЕУ, ТНПУ імені Володимира Гнатюка

При дослідженні крайових періодичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку $u_{tt} - u_{xx} = F[x, t, u, u_x u_t]$ як лінійних, так і нелінійних [1-3], нами було застосовано нетрадиційний метод пошуку їх розв'язків. На відміну від [4], де використовуються методи функціонального аналізу для відшукання розв'язку вказаних задач у вигляді ряду $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(t) sinkx$, що автоматично забезпечує виконання крайових умов $u(0,t) = u(\pi,t)$, проте вимагає накладання додаткових умов, ми спочатку шукаємо періодичний розв'язок, а потім перевіряємо виконання крайових умов. Спираючись на результати В. М. Кирилича [5] і враховуючи отримані нами результати, можна знайти розв'язки крайових задач без початкових умов для гіперболічних рівнянь в спеціально виділених класах функцій.

1. *Хома Г. П.* Т-періодичні розв'язки гіперболічних рівнянь другого порядку [Текст]/ Г. П. Хома, Н. Г. Хома, С. Г. Хома-Могильська //Наукові дослідження та їх практичне застосування: Сборник научных трудов SWorld. – Выпуск 3 (36). Том **27**. – Иваново Маркова AD, 2014. – С. 85-89.
2. *Хома Н. Г.* Класичний розв'язок однієї задачі Діріхле [Текст] / Н. Г. Хома, Л. Г. Хома, П. В. Цинайко // Доп. НАН України. – 2000. – № 9. – С. 41-44.
3. *Самойленко А. М.* Окремий випадок існування 2π–періодичних розв'язків крайових задач для гіперболічних рівнянь другого порядку [Текст] / А. М. Самойленко, Н. Г. Хома, С. Г. Хома-Могильська //Доповіді НАН України. – 2010. – № 10. – С. 27–32.
4. *Rabinowitz P.* Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations [Text] / P. Rabinowitz //Comm. Pure Appl.Math. – 1967. – **20**, № 1. – P. 145–205.
5. *Кирилич В. М.* Крайова задача без початкових умов для лінійної однорідної системи рівнянь гіперболічного типу [Текст] / В. М. Кирилич, А. Д. Мишкіс // Доп. АН УРСР. – 1991. – Сер А, № 5. – С. 8–10.

ПРО НАПІВГРУПУ ФЕЛЛЕРА ДЛЯ БАГАТОВИМІРНОГО ДИФУЗІЙНОГО ПРОЦЕСУ З ВІДБИТТЯМ В ОБЛАСТІ З МЕМБРАНОЮ

Цаповська Ж. Я.

tzhannet@yahoo.com

Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

Нехай D – обмежена область в R^n, $n \geq 2$, з гладкою межею S. Ще одна гладка замкнена поверхня S_0 вважається заданою в середині області D. Вона розділяє цю область на дві відкриті множини: D_1 – з межею $S_1 = S_0$ і D_2 – з межею $S_2 = S_0 \cup S$. Припускаємо, що гіперповерхні S і S_0 належать до класу Гельдера $H^{2+\lambda}$, $\lambda \in (0, 1)$.

Нехай в областях D_1 і D_2 задані твірні диференціальні оператори L_1 і L_2 відповідно двох однорідних необривних дифузійних процесів, коефіцієнти яких неперервно продовжуються на $\overline{D}_1 = D_1 \cup S_1$ і $\overline{D}_2 = D_2 \cup S_2$. Припустимо також, що в точках гіперповерхонь S і S_0 задані відповідно крайова умова та умова спряження типу Вентцеля [1], за допомогою яких описуються властивості процесів після потрапляння дифундуючої частинки на межі областей. При цьому розглядається випадок, коли умова спряження визначається крайовим диференціальним оператором Вентцеля загального вигляду, а крайова умова – лише тією його частиною, що відповідає за відбиття процесу.

Ставиться задача побудувати напівгрупу операторів T_t, $t \geq 0$, якій відповідає однорідний процес Феллера на $\overline{D} = D \cup S$ такий, що у внутрішніх точках областей D_1 і D_2 він збігається із заданими там дифузійними процесами, керованими операторами L_1 і L_2 відповідно, а його поведінка в точках S та S_0 визначається крайовою умовою та умовою спряження Вентцеля.

Шукану напівгрупу отримано нами методом класичної теорії потенціалу як розв'язок відповідної параболічної задачі спряження, до якої редукується вихідна задача. Побудований процес ми трактуємо як процес дифузії в області D з відбиттям в точках межі S та з мембраною, розташованою на гіперповерхні S_0.

1. *Вентцель А.Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теория вероятн. и ее применения. 1959. – 4, № 2. – С. 172-185.

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ ШВИДКО ТА ПРАВИЛЬНО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Чепок О. О.

olachepok@ukr.net

Одеський національний університет імені І.І.Мечникова, Одеса, Україна

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}, p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ $(i \in \{0, 1\})$ — неперервні функції, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — однобічний окіл Y_i.

Крім того, вважаємо, що функція φ_1 є правильно змінною (див. [1], розділ 1.4, стор. 17) при $z \to Y_1$ $(z \in \Delta_{Y_1})$ порядку σ_1, а функція φ_0 двічи неперервно диференційовна на Δ_{Y_0} та така, що

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & +\infty, \end{cases} \qquad \lim_{\substack{z \to Y_0 \\ z \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_0(z)\varphi_0''(z)}{\left(\varphi_0'(z)\right)^2} = 1. \tag{2}$$

Розв'язок y рівняння (1) будемо називати $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язком, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[$ і задовольняє умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

З умов (2) випливає (див. [1], розділ 3.1, стор. 139), що функція φ_0 та її похідна першого порядку є швидко змінними при $y \to Y_0$. Для $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків рівняння (1), для яких $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$, отримано необхідні і достатні умови їх існування, а також асимптотичні зображення цих розв'язків та їх похідних першого порядку.

1. *Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.* Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge university press. Cambridge. - 1987. - 494p.

ПРО ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

Чернікова О. С.

chol@ukr.net

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

Для системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{x} = f(t, x),\ t \neq \tau_i, \qquad \Delta x|_{t=\tau_i} = I_i(x), \tag{1}$$

де $x \in \mathbf{R}^n$, $t \geq 0$, $\{\tau_i\}, i = 1, 2, \ldots$ – послідованість моментів часу імпульсної дії, $\tau_{i+1} > \tau_i$, $\tau_i \to \infty$ при $i \to \infty$, пропонуються деякі варіанти достатніх умов рівномірної та рівномірної граничної обмеженості розв'язків, а також достатні умови різних типів обмеженості розв'язків відносно частини змінних (означення відповідних понять прийнято згідно з [1-3]) . Результати встановлено шляхом застосування методу допоміжних функцій, модифікованого для випадку імпульсних систем [4,5].

Поряд із системою (1) розглядається збурена система

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x),\ t \neq \tau_i, \qquad \Delta x|_{t=\tau_i} = I_i(x) + G_i(x), \tag{2}$$

для якої досліджуються питання збереження властивостей обмеженості , якими володіють розв'язки системи (1); встановлюються достатні умови евентуальної рівномірної (рівномірної граничної) обмеженості розв'язків системи (2). Одержані результати допускають поширення на випадок нефіксованих моментів часу імпульсної дії ($t = \tau_i(x)$).

1. *Bernfeld S.*, SIAM J. Math. Anal. - 1972.- V.3.-№.2.-P. 358-370.
2. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.*: Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных, М.: Наука, 1987. - 256 с.
3. *Лапин К.С.*, Дифференциальные уравнения.-2014.-Т.50.-№3.-С.309-316.
4. *Гургула С.И., Перестюк Н.А.*, Мат. Физика.-1982.-№31.-С.9-14.
5. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.*: Impulsive differential equations; World Scientific: Singapore- New Jersey- London, 1995. - 462 p.

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ВИГЛЯДІ ПОДВІЙНИХ РЯДІВ

Чорненька О. В., Яковець В. П.

elenagolovch@rambler.ru, yvp-95@ukr.net

Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя, Україна;
ДВНЗ "Університет менеджменту освіти Україна

У даній роботі досліджується питання про побудову асимптотики розв'язку системи

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{1}$$

де $x(t,\varepsilon)$ – шуканий двовимірний вектор, t– дійсна змінна $t \in [0;T]$, ε– малий дійсний параметр, $A(t)$– квадратна матриця другого порядку, яка допускає розвинення у вигляді степеневого ряду $A(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k t^k$. Передбачається, що головна матриця A_0 має одне власне значення λ_0 кратності два, якому відповідає елементарний дільник такої самої кратності. Доведено таке твердження.

Теорема. *Якщо виконується умова* $(HA_1\varphi, \psi) \neq 0$, *то система (1) має два лінійно незалежних розв'язки вигляду* $x_i(t,\varepsilon) = u_i(t,\varepsilon) exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t(\lambda_0 + \lambda_i(\tau,\varepsilon))d\tau\right), i = 1;2,$ *де функції* $\lambda_i(t,\varepsilon)$ *та вектори* $u_i(t,\varepsilon)$, *подаються у вигляді подвійних розвинень*

$$\lambda_1(t,\varepsilon) = \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r} \lambda_{rs}^{(1)} \varepsilon^s \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^r, u_1(t,\varepsilon) = \varphi + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{r} u_{rs}^{(1)} \varepsilon^s \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^r,$$

$$\lambda_2(t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{r+1} \lambda_{rs}^{(2)} \varepsilon^s \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^r, u_2(t,\varepsilon) = H\varphi + \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{r+1} u_{rs}^{(2)} \varepsilon^s \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^r.$$

H – напівобернена матриця до матриці $A_0 - \lambda_0 E$, φ - власний вектор матриці A_0, що відповідає її власному значенню λ_0, та ψ - елемент нуль простору матриці, спряженої до $A_0 - \lambda_0 E$.

За умови $Re(\lambda_0) < 0$ і $\frac{t}{\varepsilon} < 1$ виведено відповідну асимптотичну оцінку

$$||x_m - \widetilde{x}|| \leq c\varepsilon^2 \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^{m+2}.$$

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКІВ БЛИЗЬКИХ ДО ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Шарай Н. В., Шинкаренко В. М.

shinkar@te.net.ua, rusnat@i.ua

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеський національний економічний університет, Україна

Розглядається диференціальне рівняння

$$y^{'''} = \alpha_0 p(t) y |\ln |y||^{\sigma}, \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $\sigma \in R$, $p : [a, w) \longrightarrow (0, +\infty)$ – неперервна функція; $a < w \leq +\infty$.

Для рівнянь другого порядку вигляду (1) асимптотику розв'язків було досліджено в роботі В. М. Євтухова і Абу-Эль-Шаура Муси Джабера [1].

Розв'язок y рівняння (1), який задано на проміжку $[t_y, w) \subset [a, w)$ називаємо $P_w(\lambda_0)$ розв'язком, якщо він задовольняє наступним умовам:

$$\lim_{t \longrightarrow w} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } \pm\infty, \end{cases} \ (k = 0, 1, 2), \quad \lim_{t \longrightarrow w} \frac{(y^{''})^2}{y^{'''} y^{'}} = \lambda_0$$

У роботі [2] встановлено необходні та достатні умови існування у рівняння (1) $P_w(\lambda_0)$ розв'язків для різних дійсних значень λ_0. Отримано асимптотику таких розв'язків та їх похідних до другого порядку при $t \longrightarrow w$.

Наступним етапом дослідження було одержання результатів у критичних випадках, а саме $\lambda_0 = \pm\infty$ та $\lambda_0 = 0$. Доведено теореми про існування у рівняння (1) $P_w(\pm\infty)$ розв'язків, $P_w(0)$ розв'язків та виведено асимптотичні розвинення таких розв'язків, їх похідних першого та другого порядків при $t \longrightarrow w$.

1. Asymptotic behaviour of solutions of second order nonlinear differential equations close to linear equations / Evtukhov V.M., Mousa Jaber Abu Elshour // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. - 2008. - 43. - P. 97-106.
2. Асимптотические представления решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка / Н. В. Шарай, В. Н. Шинкаренко // Нелінійні коливання, 2015, т. 18, N 1, – с. 133-144

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ЗГИНУ ПЛАСТИН З СИСТЕМОЮ ЩІЛИН ТА КОНТАКТНИХ ТРІЩИН

Шацький І. П., Даляк Т. М.

ipshatsky@gmail.com, tdalyak@gmail.com

Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Микитинецька, 3, м. Івано-Франківськ, 76002, Україна

Розглядається пружна рівновага необмеженої ізотропної пластини $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times [-h, h]$, послабленої системою розрізів. Частина дефектів (L_1) є тріщинами, береги яких можуть контактувати за згину, інша частина (L_2) — вузькі щілини з вільними від в'язей поверхнями.

Напружено-деформований стан пластини поза дефектами описуємо бігармонічними рівняннями класичних теорій плоского напруженого стану та згину пластин:

$$\Delta\Delta\varphi = 0,\ \Delta\Delta w = 0,\ (x,\, y) \in \mathbf{R}^2 \backslash (L_1 \cup L_2). \tag{1}$$

На тріщинах виконуються нерівності контакту вздовж лінії:

$$N_n^{\pm} = 0,\ M_n^{\pm} = m^{\pm}(s),\ [u_n] \geq h|[\vartheta_n]|,\ s \in L_1';$$

$$[u_n] = h|[\vartheta_n]| > 0,\ M_n^{\pm} - m^{\pm}(s) = hN_n^{\pm}\mathrm{sgn}[\vartheta_n],\ N_n \leq 0,\ s \in L_1'';$$
$$[u_n] = 0,\ [\vartheta_n] = 0,\ |M_n^{\pm} - m^{\pm}(s)| \pm hN_n^{\pm} \leq 0,\ s \in L_1''';$$
$$N_{nt}^{\pm} = 0,\ P_{nt}^{\pm} = p^{\pm}(s) + C,\ s \in L_1; \tag{2}$$

на щілинах задається зовнішнє згинальне навантаження:

$$N_n^{\pm} = 0,\ N_{nt}^{\pm} = 0,\ M_n^{\pm} = m^{\pm}(s),\ P_{nt}^{\pm} = p^{\pm}(s) + C,\ s \in L_2. \tag{3}$$

Тут $L_1 = L_1' \cup L_1'' \cup L_1'''$; L_1', L_2 — відкриті ділянки дефектів, L_1'' — ділянки контакту вздовж лінії, L_1''' — повністю закриті ділянки; C — набір довільних сталих.

Крім того, відсутні напруження на безмежності:

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0,\ M_x = M_{xy} = M_y = 0,\ (x, y) \to \infty. \tag{4}$$

Розв'язки задачі (1)—(4) побудовано методом сингулярних інтегральних рівнянь. Зокрема, для колінеарних дефектів отримано аналітичні результати.

РОБАСТІСТЬ ГЛОБАЛЬНИХ АТРАКТОРІВ ЕВОЛЮЦІЙНИХ СИСТЕМ БЕЗ ЄДИНОСТІ

Шкляр Т. Б.

t.shkliar@gmail.com

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Для багатьох параболічних та гіперболічних дисипативних систем відомим є результат щодо існування глобального атрактору - компактної інваріантної підмножини фазового простору, що притягує всі траєкторії системи [1]. Цей результат зберігається і в тому випадку, коли на нелінійний доданок не накладаються умови гладкості [2], тобто глобальний атрактор є стійким (робастним) щодо неперервних збурень правої частини задачі. Натомість відповідь на питання про стійкість глобального атрактору щодо многозначних збурень правої частини суттєво залежить від типу рівняння. Для параболічних систем типу реакції-дифузії з нелінійністю $f(u)$ показано, що глобальний атрактор зберігається (і є близьким до атрактору незбуреної системи) у випадку неавтономних многозначних збурень $[f(u) - f_\varepsilon(t,u), f(u) + f_\varepsilon(t,u)]$, де в певному сенсі $f_\varepsilon \to 0$ [3]. Для гіперболічних рівнянь можна показати, що найпростіше многозначне ліпшицеве збурення руйнує глобальний атрактор.

1. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in Mechanics and Physics. - N.Y: Springer, 1988 //
2. *Kapustyan O.V., Mel'nik V.S., Valero J., Yasinsky V.V.* Global attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness. - K: Naukova Dumka, 2008
3. *Шкляр Т.Б.* Глобальний атрактор неавтономного еволюційного включення типу реакції-дифузії // Наукові Вісті НТУУ КПІ, 2011, №4, С. 98-104

Покажчик