МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
ДВНЗ «УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ПОЛЯК І.Й.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З ДИСЦИПЛІНИ СПЕЦІАЛІЗАЦІЇ «ОСНОВИ СТОХАСТИЧНОГО АНАЛІЗУ» ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 6.040201 «МАТЕМАТИКА»

Ужгород -2016

Постановка задачі про граничні теореми теорії ймовірностей.

При формальній побудові курсу теорії ймовірностей граничні теореми є надбудовою над елементарними главами, де задачі мають чисто арифметичний характер, але лише граничними теоремами розкривається пізнавальна цілісність теорії ймовірностей. Це обумовлено тим, що масові випадкові явища в своїй сутній дії строгі не випадкові закономірності, тому елементарні арифметичні підрахунки ймовірності, що відносяться до азартних ігор в роботах Паскаля, Ферма можна розглядати, як передісторії теорії ймовірностей. А справжня її історія починається з граничних теорем Муавра, Бернуллі, Пуасона, Лапласа.

В 1713р. Бернуллі розв'язав задачу, що відноситься до закону великих чисел

$$\forall\varepsilon>0 \quad P\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}1,\ \mu=\sum_{i=1}^{n}\mu_i;\ \mu_i=\begin{cases}1, & p\\ 0, & q\end{cases}.$$

Теорему Бернуллі можна записати так:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i-M\mu_i\right)\right|<\varepsilon\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$$

Введемо позначення $\xi_i=\dfrac{\mu_i}{n};M\mu_s=p;M\xi_i=\dfrac{p}{n}$, тоді

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-M\xi_i\right)\right|<\varepsilon\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}1 \qquad (1)$$

має місце для випадкових величин $\xi_i=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & p\\ 0, & q\end{cases}$.

Якщо для сум деяких випадкових величин має місце (1) то кажуть, що послідовність $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...$ підлягає ЗВЧ.

Першим, хто за довгий час узагальнив теорему Бернуллі був Чебишев. Результати Чебишева, ще більше узагальнив його учень Марков.

Чебишев поставив таку задачу: які повинні бути необхідні і достатні умови, щоб послідовність незалежних випадкових величин $\{\xi_n\}$ підлягала ЗВЧ. Перш за все випадкові величини $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...$ мають мати скінченні математичні сподівання. Цю поставлену задачу розв'язав у 1926р. радянський математик Колмогоров.

Другою відомою граничною теоремою була ЦГТ, перша форма якої була знайдена Лапласом у 1796р., потім вона значно узагальнювалась і нарешті Чебишевим задача поставлена так: знайти необхідні і достатні умови, які треба покласти на послідовність випадкових величин $\{\xi_n\}$ для того, щоб виконувалась умова:

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-M\xi_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{D\xi_i}}<x\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}\hat{O}\left(\tilde{o}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\tilde{o}}\mathring{a}^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (2)$$

Якщо для послідовності випадкових величин має місце (2) то кажуть, що для цієї послідовності $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ виконується ЦГТ.

Поставлену задачу Чебишева розв'язав Ляпунов, Марков. (т.Ляпунова із основного курсу т.й.).

Німецький вчений Ліндеберг в 1922р. узагальнив умову Ляпунова і знайшов необхідну і достатню умови.

В 1935році американський вчений Феллер довів, що умова Ліндерберга не лише достатня але й необхідна.

Отже, задача поставлена Чебишевим була розв'язана . Очевидно, в такій постановці задачі випадкові величини ξ_i повинні мати скінченне математичне сподівання і дисперсії, якщо ця умова не виконується, то формула не має місце.

В 20столітті значно узагальнили саму постановку задачі Чебишева, а саме Бернштейн узагагальнив задачу так: необхідність ідостатність умови мусить задовольняти послідовність $\{\xi_n\}$, щоб для неї можна було підібрати послідовності $\{A_n\}, \{B_n\}$так, щоб

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{B_n} - A_n < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \hat{O}(\tilde{o}).$$

Зокрема, якщо випадкові величини ξ_i мають скінченні $M\xi_i, D\xi_i; i = \overline{1, n}$

То ця формула запишеться так:

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D\xi_i}_{\,n}} - \frac{\sum M\xi_i}{\sqrt{\sum D\xi_i}} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \hat{O}(\tilde{o}), \text{ де } B_n = \sqrt{\sum D\xi_i}\,; A_n = \frac{\sum M\xi_i}{\sqrt{\sum D\xi_i}}.$$

Бернштейн знайшов удостатні умови у 20 роках 20століття. В1935р. Феллер довів, що умова Бернштейна і необхідна і достатня.

В тоерії ймовірностей велику роль відіграє нормальний закон розподілу, оскільки ЦГТ стосується збіжності до нормального закону, а тому виникло питання: до яких ще функцій розподілу можуть якимось чином нормовані суми випадкових величин.

Нормування такого виду $\frac{\xi_1}{B_n} - a_1; \frac{\xi_2}{B_n} - a_2; \frac{\xi_n}{B_n} - a_n;$ $\sum a_i = A_n$ є частиним випадком такого нормування

$$\xi_{1n} = \frac{\xi_1}{B_n} - a_1; \; \xi_{2n} = \frac{\xi_2}{B_n} - a_2; \; \xi_{kn} = \frac{\xi_k}{B_n} - a_k; \quad \frac{\sum^{n}\xi_i}{B_n} - A_n = \sum_{i=1}^{n}\xi_{in}\,. \tag{3}$$

Можна розглядати серії випадкових величин. Нехай задано послідовність серій незалежних випадкових величин:

$$\begin{array}{llll} \xi_{11}, & \xi_{12}, & \dots, & \xi_{1k_1} \\ \xi_{21,} & \xi_{22,} & \dots, & \xi_{2k_2} \\ \dots & & & \\ \xi_{n1}, & \xi_{n2,} & \dots, & \xi_{nk_n} \end{array}$$

Послідовність (3) є частинним випадком серій.

В теорії сумування незалежних випадкових величин найбільш загальна постановка задачі така: задано довільну послідовність серій незалежних випадкових величин і розглядаються суми $\zeta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ni}$ на доданки накладаються обмеження, щоб при великій кількості доданків окремі доданки мало впливали на суму. Припустимо, що $P\{\zeta_n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$. Які функцій $F(x)$ можуть бути в якості граничних законів? Ця задача в 1935р. була розв'язана в частинному випадку російським математиком Бавлі, а пізніше в 1936р. повністю розв'язана Хінчиним. Він знайшов весь клас граничних функцій розподілу для сум серій. В цьому ж році він поставив задачу про множину всіх можливих функцій розподілу для

$$\zeta_n' = \sum \frac{\xi_i}{B_n} - A_n \ .$$

Нехай дано послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ і при деякому підборі сталих $\{A_n\}, \{B_n\}$

$$P\{\zeta_n' < x\} = P\left\{\sum \frac{\xi_i}{B_n} - A_n < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x).$$

До якого класу функцій має належати $F(x)$. Суми $\zeta_n' = \sum \frac{\xi_i}{B_n} - A_n$ є частиним випадком суми $\zeta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ni}$. Отже клас функцій розподілу граничних для ζ_n' має бути підкласом класу для сум ζ_n.

В 1936р. поставлена задача розв'язана Леві. Питання про те, які функції розподілів належать до кожного з класів вивчене.

Безмежно подільні закони розподілу.

Означення.

Випадкова величина ξ називається безмежно подільною, якщо $\forall n \in N$ її можна зобразити у вигляді суми взаємно незалежних однаково розподілених випадкових величин $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, $F_n(x) = P\{\xi_i < x\}, i = \overline{1, n}$.

Означення.

Функцію розподілу $F(x)$ називають безмежно подільною якщо $\forall n \in N$, її можна зобразити у вигляді $n-$кратної згортки іншої функції розподілу $F(x) = F_n(x) * ... * F_n(x) -$ n разів.

Означення.

Характеристична функція $f(t)$ називається безмежно подільною якщо $\forall n \in N$ $f(t) = (f_n(t))^n$, $f_n(t)-$характеристична функція $\xi_i; i = \overline{1, n}.$

Всі три означення еквівалентні.

Приклади.

Основні властивості безмежно подільних випадкових величин.

Лема.

Для кожної характеристичної функції справедлива нерівність:

$1 - \operatorname{Re} f(2t) \le 4(1 - \operatorname{Re} f(t)).$

Доведення:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos tx + i \sin tx) dF(x) \qquad \operatorname{Re} f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx dF(x); \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) = 1.$$

$$1 - \operatorname{Re} f(2t) \le \int (1 - \cos 2tx) dF(x) = 2\int \sin^2 tx dF(x) = 2\int \left(1 - \cos^{2tx}\right) dF(x) =$$

$$= 2\int (1 - \cos tx)(1 + \cos tx) dF(x) \le 4\int (1 - \cos tx) dF(x) = 4(1 - \operatorname{Re} f(t)).$$

Теорема 1.

Характеристична функція безмежно подільної випадкової величини ніде не перетворюється в нуль.

Доведення:

Оскільки $f(t)$ - неперервна і $f(0) = 1$ то за теоремою про збереження знака існує окіл точки $t = 0$ де $f(t) > 0$.

Оскільки $f(t)$- безмежно подільна характеристична функція то за означенням $\forall n \in N$ $f(t) = (f_n(t))^n$, $f_n(t)-$характеристична функція $\xi_i; i = \overline{1, n}.$

$f_n(t) = \sqrt[n]{f(t)}$. $f_n(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$ і $|f_n(t)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$.

Якщо розглянути випадкову величину $\eta = \eta_1 - \eta_2; \eta_1, \eta_2$- незалежні однаково розподілені випадкові величини.

Характеристична функція випадкової величини η: $f^*(t)=Me^{it(\eta_1-\eta_2)}=\left|Me^{it\eta}\right|^2=\left|f(t)\right|^2$.

Якщо в лемі замість $\mathrm{Re}\, f(t)$ записати $\left|f(t)\right|^2$ то лема справедлива і $1-\left|f_n(2t)\right|^2\le 4\left(1-\left|f_n(t)\right|^2\right);\quad |t|<a.$ З цієї нерівності, якщо n велике то $\left|1-f\ (t)\right|<\varepsilon$, $1-\left|f_n(2t)\right|^2\le 4\left(1-\left|f_n(t)\right|^2\right)\le 8\varepsilon;\quad |t|<a.$ Починаючи з деякого номеру $1-\left|f_n(2t)\right|^2\le\varepsilon^*;\quad |t|<a.$ Позначимо $2t=\tau,$ то $|\tau|<2a$. Використовуючи цю нерівність декілька раз одержуємо справедливість теореми.

Теорема 2.

Сума скінченого числа незалежних безмежно подільних випадкових величин є безмежно подільна.

Доведення:

Доведемо для двох безмежно подільних випадкових величин ξ і η. Покажемо, що $\zeta=\xi+\eta$ - безмежно подільна випадкова величина. Доведемо у термінах характеристичних функцій, методом індукції.

Нехай $f_\xi(t), f_\eta(t), f_\zeta(t)$- характеристичні функції випадкових величин ξ,η,ζ відповідно. Тоді $\forall n\in N$ за означенням безмежно подільних характеристичних функцій

$f_\xi(t)=\left(f_\xi^{(n)}(t)\right)^n,\ f_\eta(t)=\left(f_\eta^{(n)}(t)\right),\ f_\zeta(t)=f_\xi(t)f_\eta(t)=\left(f_\zeta^{(n)}(t)\right)^n.$

Нехай $\zeta=\xi_1+...+\xi_k;\zeta_{k-1}=\xi_1+...+\xi_{k-1};\ f_\zeta=f_{\xi_{k-1}}f_{\xi_k}$.

Отже за математичною індукцією виконується.

Теорема 3.

Якщо послідовність безмежно подільних функцій розподілів збігається в основному до граничної функції розподілу то гранична функція розподілу безмежно подільна.

Доведення:

Нехай $F_k(x)$- безмежно подільна функція розподілу. $F_k(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}F(x)$, покажемо , що $F(x)$- безмежно подільна функція розподілу.

Нехай $f_k(t)$- характеристична функція , що відповідає $F_k(x)$, $f(t)$- характеристична функція, що відповідає $F(x)$.

$\forall n\in N$ за означенням $f_k(t)=\left(f_{jk}^{(n)}(t)\right)^n$, $f_k^{(n)}(t)-$характеристична функція . $\left(f_{jk}^{(n)}(t)\right)^n\xrightarrow[k\to\infty]{}f(t);\ f_k(t)\ne 0$, тому $f_k^{(n)}(t)\xrightarrow[k\to\infty]{}\sqrt[n]{f(t)}=f_n(t)$.

Оскільки $f_k^{(n)}(t)-$характеристична функція, то $f_n(t)$ характеристична функція.

$f_n(t)=\sqrt[n]{f(t)}\Rightarrow f(t)=\left(f_n(t)\right)^n$, $f_n(t)-$характеристична функція. Отже, гранична функція безмежно подільна.

Теорема 4.

Якщо $f(t)$-безмежно подільна характеристична функція і $c \in R, c > 0$, то $(f(t))^c$ - безмежно подільна характеристична функція.

Теорема 5.

Увесь клас безмежно подільних функцій розподілу складається з композиції закону Пуасона та з функцій, які являються граничними для послідовностей композицій закона Пуасона.

Доведення:

Необхідність:

$f(t)$- безмежно подільна характеристична функція то за означенням $\forall n \in N \quad f(t) = (f_n(t))^n$, $f_n(t)-$ характеристична функція $\xi_i; i = \overline{1,n}.$ тоді

$$\ln f(t) = n \ln f(t) = n \ln(1 + (f_n(t) - 1)) = n \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{s} (f_n(t) - 1)^s =$$

$$= n(f_n(t) - 1) + n \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{s} (f_n(t) - 1)^s .$$

$n(f_n(t) - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln f(t)$ а звідси $e^{n(f_n(t)-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t)$, $\quad f_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_n(x);$

$$e^{n\int (e^{itx} - 1) dF_n(x)} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t) \tag{4}$$

Тоді за означенням $\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1) dF_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} (e^{itx_k^*} - 1)(F_n(x_k) - F_n(x_{k-1}))$, якщо в (4) підставимо останню рівність і врахувавши, що $F_n(x_k) - F_n(x_{k-1}) = c_{nk}; nc_{nk} = \lambda_{nr}$ то одержимо $\prod \exp\left(\lambda_{nk}\left(e^{itx_k^*-1}\right)\right) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} f(t)$. Необхідність доведена.

Достатність:

Закон Пуасона безмежно подільний. За властивістю 2 і 3 функція розподілу буде безмежно подільною. Доведено.

Канонічне зображення безмежно подільних характеристичних функцій. Формула Леві – Хінчина.

Теорема.

Для того, щоб $f(t)$ була безмежно подільною характеристичною функцією необхідно і досить, щоб

$\ln f(t)=i\gamma t+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u)$, де $\gamma\in R; G(u)$- неспадна, обмежена функція. Таке зображення однозначне і $\forall$ $f(t)$ відповідає єдине γ і $G(u)$.

Необхідність: Нехай $f(t)$-безмежно подільна характеристична функція. Доведемо, що має місце формула Леві-Хінчина. За означенням $\forall n\in N$ $f(t)=(f_n(t))^n$, $f_n(t)-$характеристична функція $\xi_i; i=1,n.$ Раніше ми показали, що

$$n(f_n(t)-1)\xrightarrow[n\to\infty]{}\ln f(t),\text{ тому } n\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1\right)dF_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}\ln f(t) \qquad (1)$$

Розглянемо послідовність функцій $G_n(u)=n\int\limits_{-\infty}^{u}\frac{x^2}{1+x^2}dF_n(x)$. $G_n(u)$- неспадна.

Продиференціюємо її

$dG_n(u)=n\frac{u^2}{1+u^2}dF_n(x)$, $ndF_n(x)=\frac{1+u^2}{u^2}dG_n(u)$ і підставимо у (1), тоді

$$I_n(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu}-1\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG_n(u)\xrightarrow[n\to\infty]{}\ln f(t).$$

Покажемо, що послідовність $G_n(u)$ обмежена, тобто $\exists k\ \forall n,\forall u$ $\int\limits_{-\infty}^{u}dG_n(x)\le K.$

Доведемо сильніше твердження , що $\exists k\ \forall n,\forall u$ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dG_n(x)<K.$ Тоді запишемо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dG_n(x)=\int\limits_{|u|\le1}dG_n(u)+\int\limits_{|u|>1}dG_n(u)=A_n+B_n.$$

$$\operatorname{Re}I_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}\operatorname{Re}\ln f(t);\quad \operatorname{Im}I_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}\operatorname{Im}\ln f(t);$$

$$\operatorname{Re}I_n(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\cos tu-1)\frac{1+u^2}{u^2}dG_n(u);\ \operatorname{Re}\ln f(t)=\ln|f(t)|.$$

Ми одержали, що

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\cos tu-1)\frac{1+u^2}{u^2}dG_n(u);\xrightarrow[n\to\infty]{}\ln|f(t)|.$$

Помножимо цю рівність на (-1), щоб одержати невідємні величини

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\cos tu-1)\frac{1+u^2}{u^2}dG_n(u);\xrightarrow[n\to\infty]{}-\ln|f(t)|.$$

З означення границі $\forall\varepsilon>0$ буде виконуватись нерівність

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\cos tu-1)\frac{1+u^2}{u^2}dG_n(u)<-\ln|f(t)|+\varepsilon.$$

Тим більше будуть виконуватись нерівності :

$$-\int\limits_{|u|\le 1}^{+\infty}(\cos tu-1)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_n(u)<-\ln|f(t)|+\varepsilon\,. \qquad (2)$$

$$-\int\limits_{|u|>1}^{+\infty}(\cos tu-1)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_n(u)<-\ln|f(t)|+\varepsilon\,. \qquad (3)$$

Врахуємо, що

$\cos u=1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-...$, тоді при $|u|\le 1$ $\frac{1-\cos u}{u^2}=1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-...>\frac{1}{2}-\frac{1}{24}=\frac{11}{24}$.

При $t=1$запишемо нерівність (2)

$$-\ln|f(1)|+\varepsilon>\int\limits_{|u|\le 1}^{+\infty}(\cos u-1)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_n(u)>\int\limits_{|u|\le 1}^{+\infty}(\cos u-1)\frac{1}{u^2}\,dG_n(u)>\frac{11}{24}\int\limits_{|u|\le 1}^{+\infty}dG_n(u)=\frac{11}{24}A_n\,.$$

А звідси $A_n<\frac{24}{11}(-\ln|f(1)|+\varepsilon)$ тобто послідовність A_n обмежена в сукупності.

Для оцінки B_n використаємо нерівність (3) і розглянемо інтегральне середнє для $t\in[0;2]$ тоді

$$\frac{1}{2}\int_0^2(-\ln|f(t)|+\varepsilon)dt>\frac{1}{2}\int_0^2 dt\int\limits_{|u|>1}^{+\infty}(1-\cos tu)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_n(u),$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2(-\ln|f(t)|+\varepsilon)dt>\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\int\limits_{|u|>1}^{+\infty}\left\{\int_0^2(1-\cos tu)dt\right\}\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_n(u)=\int\limits_{|u|>1}\left(1-\frac{\sin 2u}{u}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_n(u).$$

Із очевидної нерівності $\left|1-\frac{\sin 2u}{2u}\ge 1-\left|\frac{\sin 2u}{2u}\right|\right|>\frac{1}{2}$, тоді

$\frac{1}{2}\int_0^2(-\ln|f(t)|)dt+\varepsilon>\int\limits_{|u|>1}\left(1-\frac{\sin 2u}{u}\right)dG_n(u)>\frac{1}{2}B_n$, а звідси випливає

$B_n<\int_0^2(\ln|f(t)|)dt+2\varepsilon$, а тоді $\forall n \quad \exists K\in R$, таке, що $\forall u \quad \int_{-\infty}^{+\infty}dG_n(u)=A_n+B_n<K.$

За другою теоремою Хеллі послідовність $G_n(u)$ неспадних рівномірно обмежених функцій збігається в основному до неспадної рівномірно обмеженої функції $G(u)$ і функція $f(u)$- неперервна, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)dG_n(u)\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)dG(u).$$

За першою теоремою Хеллі з будь-якої послідовності неспадних рівномірно обмежених функцій можна виділити підпослідовність, що збігається до неспадної обмеженої функції. А тому з послідовності $G_n(u)$ можна виділити підпослідовність $G_{nk}(u)$, яка збігається до $G(u)$, тоді

$$I_{nk}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itu}-1)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_{nk}(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_{nk}(u)+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_{nk}(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_{nk}(u)+it\gamma_{nk}. \qquad (4)$$

$I_{nk}=\operatorname{Re}I_{nk}+\operatorname{Im}I_{nk}\,.$

До цієї рівності застосуємо другу теорему Хеллі, тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG_{nk}(u)\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u),$$ а отже

$$I_n(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu}-1\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG_n(u)\xrightarrow[n\to\infty]{}\ln f(t).$$

Достатність:

Нам дано формула Л-Х.

За означенням інтеграла Стільтьєса

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{itu_k{}^*}-1-\frac{itu_k^*}{1+u_k^{*2}}\right)\frac{1+u_k^{*2}}{u_k^{*2}}\left(G(u_k)-G(u_{k-1})\right).$$

Нехай

$$a_k=\gamma_k-\frac{u_k^{*2}}{1+u_k^{*2}}\frac{1+u_k^{*2}}{u_k^{*2}}\left(G(u_k)-G(u_{k-1})\right);\;\; \lambda_k=\frac{1+u_k^{*2}}{u_k^{*2}}\left(G(u_k)-G(u_{k-1})\right);$$

$$\ln f(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{itu_k{}^*}-1-\frac{itu_k^*}{1+u_k^{*2}}\right)\frac{1+u_k^{*2}}{u_k^{*2}}\left(G(u_k)-G(u_{k-1})\right)+it\gamma_k,$$

$$\ln f(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(ita_k+\lambda_k\left(e^{itu_k^*}-1\right)\right).$$

За теоремою 5 $f(t)$ безмежно подільна характеристична функція. Покажемо єдність представлення. Для цього введемо в розгляд функцію

$$v(t)=2\ln f(t)-\int_{t-1}^{t+1}\ln f(z)dz;$$

$$v(t)=2it\gamma+2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u)-\int_{t-1}^{t+1}\left\{i\gamma z+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{izu}-1-\frac{izu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u)\right\}dz.$$

$$I_2=\left.\frac{i\gamma z^2}{2}\right|_{t-1}^{t+1}+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{t-1}^{t+1}e^{izu}-1-\frac{iuz}{1+u^2}\right)dz\frac{1+u^2}{u^2}dG(u)$$

$$=2i\gamma t+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu}\frac{2\sin u}{u}-2-\frac{2tui}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u).$$

$$v(t)=2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itu}\left(1-\frac{\sin u}{u}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u);\;\; v(x)=2\int_{-\infty}^{x}e^{itu}\left(1-\frac{\sin u}{u}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u).$$

Якщо порівняти $v(x)$ і $v(t)$, то $v(x)$ функція розподілу $v(t)$, а вона визначена однозначно

$$dv(x)=2\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)\frac{1+x^2}{x^2}dG(x);\;\; \frac{dv(x)}{2\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)\frac{1+x^2}{x^2}}=dG(x)$$

$f(t)\to v(t)\to v(x)\to G(u)\Rightarrow f(t)\to G(u)$ тоді стала γ визначається однозначно.

Формула Леві.

Теорема.

Для того, щоб $f(t)$ була безмежно подільною характеристичною функцією необхідно і досить, щоб

$$\ln f(t) = i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{0}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)dM(u) + \int_{0}^{+\infty}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dN(u),\text{де}$$

$\gamma;\sigma^2 \in R^2; M(u), N(u)$- неспадні функції, для яких виконуються умови:

1. $M(u)$ - визначена для $u<0$; $N(u)$- визначена для $u>0$.
2. $M(-\infty) = N(+\infty) = 0$.
3. $M(u)$ і $N(u)$ неперервні в тих і тільки тих точках області визначення , де у формулі Л.-Х. $G(u)$неперервна.
4. $\forall \varepsilon > 0 \quad \int_{-\varepsilon}^{0} u^2 dM(u) + \int_{0}^{+\varepsilon} u^2 dN(u) < +\infty$.

Доведення:

До формули Леві легко перейти, використовуючи формулу Л.-Х.
Позначимо:

$$M(u) = \int_{-\infty}^{u}\frac{1+x^2}{x^2}dG(x), u<0\text{; } N(u) = -\int_{u}^{+\infty}\frac{1+x^2}{x^2}dG(x), u>0\text{; } \sigma^2 = G(+0) - G(-0).$$

Дані функції задовольняють умовам 1)-4).
Розглянемо формулу Л.-Ч. і праву частину розіб'ємо на три доданки.

$$\ln f(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{0}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u) + \int_{-0}^{+0}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u) +$$

$$+ \int_{0}^{+\infty}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u).$$

$$\int_{-0}^{+0}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u) = \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\Bigg|_{u=0} \cdot \left(G(+0) - G(-0)\right) = -\frac{t^2\sigma^2}{t^2}.$$

Доведено.

Формула Колмогорова.

Теорема.

Для того, щоб $f(t)$ була безмежно подільною характеристичною функцією необхідно і досить, щоб

$\ln f(t) = i\gamma t + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - itu\right)\frac{1}{u^2}dK(u)$, де $\gamma \in R; K(u)$- неспадна, обмежена функція і така, що $K(-\infty) = 0, F(x)$- має скінченні математичні сподівання і дисперсію.

Доведення : Формулу Колмогорова легко одержати із формули Л.-Х.

поклавши $K(u) = \int\limits_{-\infty}^{u} \left(1 + x^2\right) dG(x)$.

$$\ln f(t) = i\gamma t + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\frac{dK(u)}{1+u^2} = i\gamma t + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - itu + itu - \frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{dK(u)}{u^2}$$

$= i\gamma t + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - itu\right)\frac{dK(u)}{u^2} + it\gamma'$, γ'- деяка стала.

Формула Колмогорова частинний випадок формули Л.-Х.

Канонічне зображення нормального закону та закону Пуасона.

1. Нормальний закон:

$$f(t) = \exp\left(i\alpha t - \frac{\beta^2 t^2}{2}\right); \ln f(t) = i\alpha t - \frac{\beta^2 t^2}{2}.$$

У формулі Л.-Х. : $\gamma = \alpha; G(u) = \begin{cases} 0, & u \le 0 \\ \beta^2, & u > 0 \end{cases}$.

У формулі Ліві : $\gamma = \alpha; M(u) = N(u) = 0; \sigma^2 = \beta^2$.

У формулі Колмогорова: $\gamma = \alpha; K(u) = \begin{cases} 0, & u \le 0 \\ \beta^2, & u > 0 \end{cases}$.

2. Закон Пуасона:

$f(t) = \exp \lambda\left(e^{it} - 1\right); \ln f(t) = \lambda\left(e^{it} - 1\right)$.

У формулі Л.-Х. $G(u) = \begin{cases} 0, & u \le 1 \\ a, & u > 1 \end{cases}$.

$$\ln f(t) = i\gamma t - 2a\left(e^{it} - 1 - \frac{it}{2}\right); a = \lambda / 2; \gamma = a = \lambda / 2 .$$

У формулі Ліві:

$\gamma = \lambda / 2; M(u) = 0;\ N(u) = \begin{cases} 0, & u \le 1 \\ \lambda, & u > 1 \end{cases}$.

У формулі Колмогорова:

$\gamma = \lambda;\ K(u) = \begin{cases} 0, & u \le 1 \\ \lambda, & u > 1 \end{cases}$.

Умови збіжності безмежно подільних законів.
Теорема.
Для того, щоб безмежно подільна послідовність функцій $F_n(x)$ збігалась до безмежно подільної функції розподілу $F(x)$ необхідно і досить, щоб у відповідних формулах Л.-Х.
$G_n(u)\xrightarrow[n\to\infty]{}G(u);\ \gamma_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\gamma.$
Доведення:
Достатність: Якщо $G_n(u)\xrightarrow[n\to\infty]{}G(u);$ то за другою теоремою Хеллі

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG_n(u)\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u)$$

І якщо $\gamma_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\gamma$, то і $i\gamma_n t\xrightarrow[n\to\infty]{}i\gamma t$.
Якщо попередні рівності додати одержимо, що $\ln f_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}\ln f(t)\Rightarrow$ $F_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}F(x)$.
Необхідність:
$F_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}F(x)\Rightarrow\ln f_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}\ln f(t)$.
Обидва логарифма можна представити , використовуючи формули Л.-Х.
$\operatorname{Re}\ln f_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}\operatorname{Re}\ln f(t);$

$\operatorname{Re}\ln f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos tu-1)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u)$, отже ми маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos tu-1)\frac{1+u^2}{u^2}dG_n(u)\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos tu-1)\frac{1+u^2}{u^2}dG(u).$$

З обмеженості за першою теоремою Хелі із $G_n(u)$ можна виділити збіжну підпослідовність $G_{nk}(u)\xrightarrow[n\to\infty]{}G(u);$
З іншого боку оскільки $\ln f_{nk}(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}\ln f(t)$, то за формулою Л.Х.

$$i\gamma_{nk}t+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG_{nk}(u)\xrightarrow[n\to\infty]{}i\gamma_1 t+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}dG_1(u)$$

$\gamma_1=\gamma;G_1(u)=G(u)$. Доведено.

Теорема.
Для того, щоб безмежно подільна послідовність функцій $F_n(x)$із скінченною дисперсією збігалась в основному до безмежно подільної функції розподілу $F(x)$ із скінченною дисперсією і при цьому послідовність дисперсій збігалася до дисперсії граничного закону необхідно і досить, щоб у відповідних формулах
$K_n(u)\xrightarrow[n\to\infty]{}K(u);\ \gamma_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\gamma.$
Доведення:
Достатність: Якщо $K_n(u)\xrightarrow[n\to\infty]{}K(u);\ \gamma_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\gamma.$
то за другою теоремою Хеллі

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu}-1-itu\right)\frac{1}{u^2}dK_n(u)\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu}-1-itu\right)\frac{1}{u^2}dK(u)$$

І якщо $\gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma$, то і $i\gamma_n t \xrightarrow[n\to\infty]{} i\gamma t$.

Якщо попередні рівності додати одержимо, що $\ln f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln f(t) \Rightarrow$ $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$.

$D\xi_n = K_n(+\infty)$; $D\xi = K(+\infty)$; $K_n(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} K(u); \Rightarrow D\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} D\xi$.

Необхідність:

$F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x); K_n(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} K(u); \gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma \; D\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} D\xi$.

$$\ln f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln f(t) \Rightarrow i\gamma_n t + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu} - 1 - itu\right)\frac{1}{u^2}\,dK_n(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} i\gamma t + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu} - 1 - itu\right)\frac{1}{u^2}\,dK(u)$$

При $t \neq 0$ поділимо обидві частини на t, тоді

$$i\gamma_n + \frac{1}{t}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu} - 1 - itu\right)\frac{1}{u^2}\,dK_n(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} i\gamma + \frac{1}{t}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu} - 1 - itu\right)\frac{1}{u^2}\,dK(u).$$

$\forall t$ і n $\left|e^{itu} - 1 - itu\right| = \left|1 + itu + \frac{(itu)^2}{2!} + \ldots - 1 - itu\right| \le \frac{t^2u^2}{2}$, тоді

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu} - 1 - itu\right)\frac{1}{u^2 t}\,dK_n(u)\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2u^2}{2|t|u^2}dK_n(u) < \frac{|t|}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}dK_n(u) = \frac{|t|}{2}K(+\infty).$$

$$\frac{|t|}{2}K_n(+\infty) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0;\ \gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma;\ \ln f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln f(t) \Rightarrow f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t).$$

Доведено.

Сумування незалежних випадкових величин.

Розглянемо послідовність серій незалежних в кожній серії випадкових величин

$\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_2}, \ldots$ і розглянемо $\zeta_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}$. Припустимо, що при деякому підборі $\{A_n\}$, $P\{\zeta_n - A_n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$. Які функцій $F(x)$ можуть бути в якості граничних законів?

Будемо розглядати послідовність серій двох типів: нескінченно малі та гранично сталі.

Означення.

Випадкові величини, що складають послідовність серій $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_2}, \ldots$ називають нескінченно малими, якщо

$\forall \varepsilon > 0 \quad \sup\limits_{1\le k\le k_n} P\{|\xi_{nk}| \ge \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Означення

Випадкові величини, що складають послідовність серій $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nk_2}, \ldots$ називають гранично сталими, якщо знайдеться послідовність $\{\alpha_{nk}\}$, що $\forall \varepsilon > 0 \quad \sup\limits_{1\le k\le k_n} P\{|\xi_{nk} - \alpha_{nk}| \ge \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Лема 1.

Якщо випадкові величини, що складають послідовність серій $\xi_{n1},\xi_{n2},...,\xi_{nk_2},...$ є гранично сталими, тобто знайдеться послідовність $\{\alpha_{nk}\}$ така, що $\forall\varepsilon>0$ $\sup\limits_{1\le k\le k_n} P\{|\xi_{nk}-\alpha_{nk}|\ge\varepsilon\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ то можна вибрати $\alpha_{nk}=m_{nk}$, де m_{nk}-медіана ξ_{nk}.

Лема 2.

Для того, щоб послідовність серій $\xi_{n1},\xi_{n2},...,\xi_{nk_2},...$ були нескінченно малі необхідно і досить, щоб

1. $\sup\limits_{1\le k\le k_n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}dF_{nk}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.
2. $\forall\varepsilon>0$ $\sup\limits_{1\le k\le k_n} P\{|\xi_{nk}|\ge\varepsilon\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Доведення. Треба показати, що з 1 випливає 2, а з 2 випливає 1.

Покажемо, що з 1 випливає 2. Розглянемо послідовність інтегралів

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}dF_{nk}\ge\int\limits_{|x|\ge\varepsilon}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}dF_{nk}\ge\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\int\limits_{|x|\ge\varepsilon}dF_{nk}(x)=\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}P\{|\xi_{nk}\ge\varepsilon|\}$$

$$\sup\limits_{1\le k\le k_n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}dF_{nk}\ge\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\sup\limits_{1\le k\le k_n}P\{|\xi_{nk}|\ge\varepsilon\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Покажемо, що з 2 випливає 1.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}dF_{nk}=\int\limits_{|x|<\varepsilon}\frac{x^2}{1+x^2}dF_{nk}+\int\limits_{|x|\ge\varepsilon}\frac{x^2}{1+x^2}dF_{nk}<\varepsilon^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dF_{nk}(x)+\int\limits_{|x|\ge\varepsilon}dF_{nk}(x)<$$

$\varepsilon^2+\int\limits_{|x|\ge\varepsilon}dF_{nk}(x)=\varepsilon^2+P\{|\xi_{nk}|\ge\varepsilon\}$. Якщо візьмемо $\varepsilon<\frac{1}{2}$, то $\varepsilon^2<\frac{\varepsilon}{2}$, тоді

$\sup\limits_{1\le k\le k_n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}dF_{nk}<\frac{\varepsilon}{2}+\sup\limits_{1\le k\le k_n}P\{|\xi_{nk}|\ge\varepsilon\}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Доведено.

Лема 3.

Якщо випадкові величини $\xi_{n1},\xi_{n2},...,\xi_{nk_2},...$ нескінченно малі, а $f_{nk}(t)$ їх характеристичні функції, то $\sup\limits_{1\le k\le k_n}|f_{nk}(t)-1|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Доведення.

$|f_{nk}(t)-1|=\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1)dF_{nk}(x)\right|\le\int\limits_{|x|<\varepsilon}|e^{itx}-1|dF_{nk}(x)+\int\limits_{|x|>\varepsilon}|e^{itx}-1|dF_{nk}(x)$. Із нерівностей $|e^{itx}-1|\le|tx|$ і $|e^{itx}-1|\le|e^{itx}|+1<2$ одержимо

$$\sup\limits_{0\le k\le k_n}|f_{nk}(t)-1|\le\sup\limits_{0\le k\le k_n}|t|\int\limits_{|x|<\varepsilon}|x|dF_{nk}(x)+2\sup\limits_{0\le k\le k_n}\int\limits_{|x|\ge\varepsilon}dF_{nk}(x)=\varepsilon\,|t|+2\sup\limits_{1\le k\le k_n}P\{|\xi_{nk}|\ge\varepsilon\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Граничний розподіл для **сум у випадку скінченої дисперсії.**

Теорема.

Нехай $\zeta_n=\sum\limits_{k=1}^{k_n}\xi_{nk}$.

1. $M\xi_{nk}$- скінченні математичні сподівання і $\sup\limits_{1\le k\le k_n}P\{|\xi_{nk}-M\xi_{nk}|\ge\varepsilon\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$;

2. $D\xi_{nk}$ - скінченні дисперсії і $\sum_{k=1}^{k_n} D\xi_{nk} < c, c = const$.

Для того, щоб при виконанні умов 1) і 2)і деякому підборі сталих $\{A_n\}$функції розподілів сум $P\{\zeta_n - A_n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$ необхідно і досить, щоб збігалися до тієї ж самої граничної функції розподілу безмежно подільної випадкової величини

$$\psi_n(t) = -iA_n t + \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ itM\xi_{nk} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1\right) dF_{nk}(x) + M\xi_{nk} \right\}.$$

Ці безмежно подільні випадкові величини називаються супроводжуючими для сум ζ_n.

Доведення.

Нехай $f_{nk}(t)$- характеристична функція ξ_{nk}.

Нам треба показати, що $\ln f_n(t) - \psi_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$f_n(t) = e^{-iA_n t} \prod_{k=1}^{k_n} f_{nk}(t)$- характеристична функція ζ_n.

Введемо в розгляд випадкові величини $\xi'_{nk} = \xi_{nk} - M\xi_{nk}$.

$f'_{nk}(t)$- характеристична функція ξ'_{nk}; $F'_{nk}(x)$ - функція розподілу ξ'_{nk}.

$$f'_{nk}(t) = e^{-itM\xi_{nk}} f_{nk}(t), \quad F'_{nk}(x) = F_{nk}(x + M\xi_{nk}).$$

Враховуючи ці позначення ми одержимо

$f_n(t) = e^{-iA_n t + it\sum_{k=1}^{k_n} M\xi_{nk}} \prod_{k=1}^{k_n} f'_{nk}(t)$. Прологарифмуємо

$\ln f_n(t) = -iA_n t + \sum_{k=1}^{k_n} \{itM\xi_{nk} + \ln f'_{nk}(t)\}$, тоді

$$\ln f_n(t) - \psi_n(t) = \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \ln f'_{nk}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1\right) dF'_{nk}(x) \right\}.$$

Внаслідок умови 1) $\sup\limits_{1\le k\le k_n} P\{|\xi_{nk} - M\xi_{nk}| \ge \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ випливає, що величини ξ'_{nk}- нескінченно малі. Застосуємо лему 3 до них і одержимо $\sup\limits_{1\le k\le k_n} |f_{nk}(t) - 1| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Позначимо $\alpha_{nk} = f'_{nk}(t) - 1$, тоді $\sup\limits_{1\le k\le k_n} |\alpha_{nk}(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Врахувавши це наша різниця запишеться, як $\sum_{k=1}^{k_n} \{\ln(1 + \alpha_{nk}) - \alpha_{nk}\}$ і треба показати, що вона прямує до нуля.

Скористаємось тим, що $\ln(1 + \alpha_{nk}) = \sum_{s=1}^{+\infty} (-1)^{s+1} \frac{\alpha_{nk}^s}{s!}$ і за означенням нескінченної малості маємо, що $|\alpha_{nk}| < \frac{1}{2}$і починаючи з деякого номеру $\frac{1}{1 - |\alpha_{nk}|} < 2$, тоді

$$\left|\sum_{k=1}^{k_n}\sum_{s=2}^{+\infty}(-1)^{s+1}\frac{\alpha_{nk}^s}{s}\right| \le \sum_{k=1}^{k_n}\sum_{s=2}^{+\infty}\frac{|\alpha_{nk}|^s}{s} \le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k_n}\sum_{s=2}^{\infty}|\alpha_{nk}|^2 = \frac{1}{2}\sum\frac{|\alpha_{nk}|^2}{1-|\alpha_{nk}|} \le \sum_{k=1}^{k_n}|\alpha_{nk}|^2 \le \sup_{1\le k\le k_n}|\alpha_{nk}|\sum_{k=1}^{k_n}|\alpha_{nk}|.$$

Перший множник прямує до нуля, а другий

$$\sum_{k=1}^{k_n}|\alpha_{nk}| = \sum_{k=1}^{k_n}|f'_{nk}(t)-1| = \sum_{k=1}^{k_n}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1\right)dF'_{nk}(x)\right| \le \sum_{k=1}^{k_n}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-itx\right)dF'_{nk}(x)\right| \le$$

Врахувавши $\left|e^{itx}-1-itx\right| \le \frac{t^2}{2}x^2$, одержимо

$$\le \sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2}{2}x^2 dF'_{nk}(x) = \frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 dF_{nk}(x+M\xi_{nk}) = \frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M\xi_{nk})^2 dF_{nk}(x) = \frac{t^2}{2}D\xi_n < \frac{ct^2}{2}$$

обмежений, тоді $\ln f_n(t)-\psi_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Зауваження $\Psi_n(t)$ можна зобразити за формулою Колмогорова

$$K_n(u) = \sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{u}x^2 dF'_{nk}(x);\ \gamma_n = -A_n + \sum_{k=1}^{k_n}M\xi_{nk}$$

$$\Psi_n(t) = i\gamma_n t + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itu}-1-itu\right)\frac{1}{u^2}dK_n(u).$$

Теорема 2.

Якщо виконуються умови 1) і 2)то для існування граничної функції розподілу необхідно і досить, щоб послідовність функцій $K_n(u) = \sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{u}x^2 dF'_{nk}(x)$ збігалась в основному до деякої неспадної обмеженої функції $K(u)$ і причому сталі $A_n = \sum_{k=1}^{k_n}M\xi_{nk} - \gamma - o(1)$. Тоді γ і функція $K(u)$ визначають граничну функцію $F(x)$.

Доведення:

За основною теоремою $\zeta_n - A_n$ і безмежно подільні супроводжуючі закони мають або не мають функції розподілу тоді $\gamma_n = -A_n + \sum_{k=1}^{k_n}M\xi_{nk}$. Якщо збіжність має місце, то гранична функція також безмежно подільна.

$$A_n + \sum_{k=1}^{k_n}M\xi_{nk} \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma,\ A_n = \sum_{k=1}^{k_n}M\xi_{nk} - \gamma - o(1).$$

Умови збіжності до нормального закону.

Теорема.

Для того, щоб при деякому підборі сталих $\{A_n\}$функції розподілів сум $P\{\zeta_n - A_n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$ збігались до стандартного нормального закону їх дисперсії прямували до одиниці, їх $\xi_{nk} - M\xi_{nk}$ були безмежно подільними необхідно і досить, щоб

1.1 $\sum\limits_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x + M\xi_{nk}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1;$

1.2 $\sum\limits_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|\ge\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x + M\xi_{nk}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ A_n = \sum\limits_{k=1}^{k_n} M\xi_{nk}$.

Доведення:

Покажемо, що виконується умова 1), тобто

$\sup\limits_{1\le k\le k_n} P\{|\xi_{nk} - M\xi_{nk}| \ge \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

За виконанням умови 1.2 теореми

$$\sup_{1\le k\le k_n} P\{|\xi_{nk} - M\xi_{nk}| \ge \varepsilon\} \le \sum P\{|\xi_{nk} - M\xi_{nk}| \ge \varepsilon\} = \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|\ge\varepsilon} dF_{nk}(x + M\xi_{nk}) \le$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|\ge\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x + M\xi_{nk}).$$

Але $\sum\limits_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|\ge\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x + M\xi_{nk}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, отже виконується умова 1).

Покажемо, що умови 1.1 і 1.2 дають 2). Ми можемо застосувати T1,T2. За формулою Колмогорова

$$K_n(u) = \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{-\infty}^{u} x^2 dF_{nk}(x + M\xi_{nk}) \xrightarrow[n\to\infty]{} K(u) = \begin{cases} 0, & u < 0 \\ 1, & u > 0 \end{cases}.$$

В розгорнутому вигляді будемо мати

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x + M\xi_{nk}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Друга умова також виконується, що доводить теорему.

Умови збіжності до закону Пуасона.

Теорема.

Для того, щоб при деякому підборі сталих $\{A_n\}$функції розподілів сум $P\{\zeta_n - A_n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x) = \sum\limits_{0\le k\le x} \frac{e^{-\lambda}}{k!} \lambda^k$, їх дисперсії збігались до λ необхідно і досить, щоб

1.1 $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x-1|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x+M\xi_{nk}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$;

1.2 $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x-1|\ge\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x+M\xi_{nk}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $A_n = \sum_{k=1}^{k_n} M\xi_{nk} - \lambda$.

Доведення:

Нехай $K(u) = \begin{cases} 0, & u<1 \\ \lambda, & u>1 \end{cases}$.

I. $K_n(u) = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{u} x^2 dF_{nk}(x+M\xi_{nk}) \to K(u) = \begin{cases} 0, & u<1 \\ \lambda, & u>1 \end{cases}$.

Нехай дано I. Покажемо, що з I випливають умови теореми.

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x-1|\ge\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{-\infty}^{1-\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) + \int_{1+\varepsilon}^{+\infty} x^2 dF_{nk}(x) \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{-\infty}^{1-\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \int_{-\infty}^{1+\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda - \lambda = 0.$$

Ми показали першу умову теореми.

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x-1|\le\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) \right\} = \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{-\infty}^{1+\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \int_{-\infty}^{1-\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda - 0 = \lambda,$$

отримали другу умову теореми.

Навпаки, якщо $u<1$, то можна покласти $u = 1-\varepsilon$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{1-\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) \le \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{-\infty}^{1-\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) + \int_{1+\varepsilon}^{+\infty} x^2 dF_{nk}(x) \right\} = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x-1|>\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

якщо $u>1$, то можна покласти $u = 1+\varepsilon$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{1+\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) \le \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{-\infty}^{1-\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) + \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda,$$ що і треба було довести.

Закон великих чисел.

Означення.

Послідовність випадкових величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$збігається до величини називають нескінченно малими, якщо

$\forall \varepsilon > 0 \quad \sup_{1\le k\le k_n} P\{|\xi_{nk}| \ge \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.