МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
ДВНЗ «УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ПОЛЯК І.Й.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З ДИСЦИПЛІНИ «ТЕОРІЯ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ» ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ 111 «МАТЕМАТИКА»

Ужгород -2016

ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ
1.НАЙПРОСТІШИЙ ПОТІК

Першою задачею, з якою повинно починатись кожне серйозне дослідження, по теорії масового обслуговування можна вважати вивчення того потоку вимог, які поступають на обслуговуючий прилад. Так, для підрахунку втрат частинок лічильника, необхідно знати, як поступають ці частинки в лічильник ззовні. Точно так при організації роботи телефонної станції необхідно враховувати особливості пошуку викликів, що поступають від абонентів на телефонну станцію.

В цьому випадку розглядаються найпростіший випадок потоків, коли ймовірність надходження в проміжок часу t рівно k вимог задається формулою

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \lambda > 0$$

константа.

Поступаючий потік при цьому вважається таким, що для любої скінченної групи не перетинаючихся відрізків часу числа з'явившихся вимог представляють собою випадкові величини.

ОЗНАЧЕННЯ. ПОНЯТТЯ ОДНОРІДНОГО ПОТОКУ

Означення. Потоком однорідних подій називається скінченна або злічення послідовність $\{\tau_n\}$ випадкових величин, визначена на одному й тому ж імовірнісному просторі при умові, що в будь-який фіксований інтервал часу (a,b) з ймовірністю 1 попадає скінчене число цих величин.

Якщо дане t співпадає з r елементами послідовності $\{\tau_n\}$, скажемо, що в момент t відбувається r подій потоку.

Якщо τ_n упорядковані так, що

$$\tau_n < a \le \tau_{n+1} \le \tau_{n+2} \le \ldots \le \tau_{n+k} < b \le \tau_{n+k+1},$$

то τ_{n+i} називається моментом настання i–вої події потоку однорідних подій в півінтервалі $[a,b)$.

Лема. Число $\nu(a,b)$ подій потоку в півінтервалі $[a,b)$ є випадкова величина.

Д о в е д е н н я . Маємо

$$\{\nu(a,b) \ge k\} = \bigcup_{n_1 \prec n_2 \prec \cdots \prec n_k} \{a \le \tau_{n_1} < b, \ldots, a \le \tau_{n_k} < b\}$$

Залишається лише помітити, що скінчене або злічене число об'єднань випадкових подій є випадкова величина.

ЯКІСНІ ПОСИЛАННЯ І ЇХ АНАЛІЗ

Визначимо властивості стаціонарності, відсутність післядії і ординарності потоку однорідних подій.

Стаціонарність потоку означає, що для будь-якої групи із скінченого числа неперетинаючих відрізків часу ймовірність появи в них відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_n$ вимог залежить тільки від цих чисел і від довжини вказаних проміжків часу, але не залежить від їх розміщення на осі часу.

Наприклад, ймовірність появи k вимог в проміжку часу $(T, T+t)$ не залежить від T і являється функцією тільки від k і t.

Відсутність післядії полягає в тому, що ймовірність появи k вимог на протязі проміжку часу $(T, T+t)$ не залежить від того. Скільки вимог і як поступали до цього проміжку.

Таким чином, ще припущення означає, що умовна ймовірність поступлення k вимог за проміжок $(T, T+t)$ обчислена при довільному припущенні про надходження вимог до цього проміжку співпадає з безумовною ймовірністю тієї ж події.

Ординарність потоку вимог виражає собою умову практичної неможливості двох або декількох вимог в один і той же проміжок часу.

Позначення через $P_{>1}(h)$ ймовірність появи в проміжку довжини h двох або більше вимог.

Умова ординарності потоку полягає в тому, що при $h \to 0$

$$\frac{P_{>1}(h)}{h} \to 0$$

або ж

$$P_{>}(h) = o(h).$$

Потік однорідних подій, що задовольняє сформульованим умовам, називається найпростішим потоком.

РІВНЯННЯ НАЙПРОСТІШОГО ПОТОКУ

Позначимо через $P_k(t)$ – ймовірність того, що на протязі проміжку часу t до обслуговування буде представлено k вимог. В силу стаціонарності потоку ця ймовірність не залежить ні від вибору початку підрахунку, ні від всієї передісторії. Умови, що визначають простіший потік дозволять однозначно з точністю до одного параметру, знайти формули для ймовірностей $P_k(t)$.

Для простоти міркувань добавимо до трьох перерахованих припущень ще одне, згідно якого

$$P_1(h) = \lambda h + o(h), \qquad (1)$$

де λ – деяке число.

Визначимо імовірність того, що на протязі проміжку часу $t+h$ поступить рівно k вимог. Ця подія може здійснитись різними $k+1$ способами.

Визначимо наступні можливості:

1. За проміжок часу t поступають всі k вимог, а за проміжок h – жодної вимоги.
2. За проміжок часу t поступають $k-1$ вимога, а за проміжок часу h – одна вимога і т.д.

За проміжок часу t не настане жодної вимоги, а за час h всі k вимог.

Використовуємо формулу повної ймовірності.

$$P_k(t+h)=\sum_{j=0}^{k}P_j(t)p_{k-j}(h).$$

Введемо поняття

$$R_k=\sum_{j=0}^{k-2}P_j(t)p_{k-j}(h)$$

Зауважимо, що величини $P_k(t)$ як імовірнісні не можуть перевищувати одиниці.

Таким чином

$$R_k\le\sum_{j=0}^{k-2}p_{k-j}(h)=\sum_{s=2}^{k}P_s(h)$$

Поширимо сумування в правій частині до нескінченності тим самим ми тільки підсилимо попередню нерівність:

$$R_k\le\sum_{s=2}^{\infty}P_s(h)=P_{>1}(h)$$

Згідно умови ординарності потоку

$$P_{>1}(h)=o(h)$$

В результаті одержимо рівність

$$P_k(t+h)=P_k(t)P_0(h)+P_{k-1}(t)P_1(t)+o(h) \qquad (2)$$

В цій рівності можемо замінити $P_1(h)$ на $\lambda h+o(h)$ в силу умови (1).

Окрім того

$$P_0(h)=1-\sum_{s=1}^{\infty}P_s(h)=1-P_1(h)-\sum_{s=2}^{\infty}P_s(h)= \qquad (2')$$
$$=1-P_1(h)-P_{>1}(h)=1-\lambda h+o(h)$$

Тепер рівність (2) перепишеться у вигляді

$$P_k(t+h)=P_k(t)(1-\lambda h)+P_{k-1}(t)\lambda h=o(h)$$

Із якої випливає

$$\frac{P_k(t+h)-P_k(t)}{h}=P_{k-1}(t)\lambda-\lambda P_k(t)+o(h)$$

Нехай $h\to 0$. Оскільки границя правої частини існує, то існує і границя лівої частини.

В результаті граничного переходу одержимо

$$\frac{dP_k(t)}{dt}=-\lambda P_k(t)+\lambda P_{k-1}(t) \tag{3}$$

При виведенні цієї формули ми припускали, що $k\geq 1$. Надаючи k різні значення, одержимо нескінчену систему для визначення нескінченого числа невідомих нам ймовірностей $P_k(t)$. Таким чином, рівняння (3) представляє собою нескінчену систему диференціальних різницевих рівнянь.

До цієї системи ми повинні добавити ще одне рівняння, якому задовольняє функція $P_0(t)$

$$P_0(t+h)=P_0(t)P_0(h)$$

або

$$P_0(t+h)=P_0(t)(1-\lambda h+o(h)) \quad \Rightarrow \quad \frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\lambda P_0(t)+o(h)$$

Граничним переходом знаходимо

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t) \tag{4}$$

Розв’язок рівнянь

Останнє рівняння моє розв’язок

$$P_0(t)=Ce^{-\lambda t} \tag{5}$$

Для визначення сталої C скористаємося (2′)

$$P_0(0)=1$$

В той же час із (5)

$$P_0(0)=C$$

Порівнюючи останні дві рівності знаходимо $C=1$.

А тому $P_0(t)=e^{-\lambda t}$. (6)

Підставивши $P_0(t)$ в рівняння для визначення $P_0(t)$ одержимо

$$P_1(t)=\lambda te^{-\lambda t}$$

Послідовною підстановкою вже знайдених нерівностей і рівняння (3) можемо одержати $P_k(t)$ з довільними індексами.

При $k\geq 0$

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \tag{7}$$

Введемо заміну

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} V_k(t)$$

В термінах функції $V_k(t)$ рівняння (3) і (4) приймають вигляд

$$V_k(t) = \lambda V_{k-1}(t), \quad (k = 1,2,\ldots)$$

$$\text{і } V_0'(t) = 0$$

Початкові умови

$$V(0) = P_0(0) = 1, \quad V_k(0) = P_k(0) = 1$$

При врахування початкових рівнянь для $V_k(t)$ одержимо рівність (2)

$$V_0(t) = 1; \quad V_1(t) = \lambda t; \quad V_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!}; \quad k \geq 0 \quad V_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

(лекція 2)

Вивід додаткового припущення із трьох основних.

При виводі рівняння, в результаті яких було знайдено простіший вигляд потоку ми ввели умову (1).

Розглянемо проміжок довжиною 1 і позначимо через Θ ймовірність того, що за цей термін не з'явиться жодна вимога, тобто.

$$\Theta = P_0(1).$$

Розіб'ємо розглянутий проміжок часу n рівних частин. Для того, щоб за весь проміжок часу не з'явилось вимог, необхідно і досить, щоб вони не з'явились ні в одному з n рівних частин проміжку.

Звідси і із припущення стаціонарності потоку і відсутності післядії одержимо рівність

$$\Theta = P_0\left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

Отже, $P_0\left(\frac{1}{n}\right) = \Theta^{\frac{1}{n}}$

Ймовірність відсутності вимог в проміжку часу довжиною $\frac{k}{n}$ дорівнює

$$P_0\left(\frac{k}{n}\right) = \Theta^{\frac{k}{n}}$$

Нехай t – деяке невід'ємне число.

Для любого t можна знайти таке ціле k, щоб при заданому n виконувалась нерівність

$$\frac{k-1}{n} \leq t < \frac{k}{n}$$

Оскільки ймовірність $P_0(t)$ не зростаюча функція часу, то

$$P_0\left(\frac{k-1}{n}\right) \geq P_0(t) \geq P_0\left(\frac{k}{n}\right)$$

Таким чином, функція $P_0(t)$ задовольняє нерівностям

$$\Theta^{\frac{k-1}{n}} \geq P_0(t) \geq \Theta^{\frac{k}{n}}$$

Нехай $n \to \infty$, тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k-1}{n} = t$$

А тоді

$$P_0(t) = \Theta^t$$

Оскільки $P_0(t)$ – як імовірність, то $0 \leq P_0(t) \leq 1$.

І можливі три випадки

1) $\Theta = 0$ 2) $\Theta = 1$ 3) $0 < \Theta < 1$.

Два перші випадки малоцікаві.

В першому з них при любому t $P_0(t) = 0$, а значить ймовірність одержати, за проміжок часу будь-якої довжини хоча б однієї вимоги дорівнює 1. Іншими словами, з імовірністю 1 в проміжку часу любої довжини з'явиться нескінчена кількість вимог.

В другому випадку $P_0(t) = 1$ при любому $t > 0$, а отже ніякого потоку вимог немає.

Для теоретичних і практичних цілей інтерес представляє собою третій випадок. В цьому випадку покладемо $\Theta = e^{-\lambda}$, де λ – деяке задане число.

Із припущень стаціонарності і відсутності післядії, ми знайшли

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \tag{8}$$

Зауважимо, що при виводі цієї формули зовсім не припускається, що потік одинарний.

Функція розподілу довжини проміжку між двома послідовними настаннями подій потоку дорівнює

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \tag{9}$$

Оскільки за проміжок часу t якесь число вимог настає, то

$$P_0(t) + P_1(t) + P_{>1}(t) = 1$$

При досить маленьких t і із умови ординарності потоку, і із (8) знаходимо

$$P_1(t) = 1 - \lambda t + o(t)$$

Ця рівність і умова ординарності приводить нас до (1).

ІНТЕНСИВНІСТЬ І ПАРАМЕТР ПОТОКУ

Середнє число вимог, що поступають за час t, дорівнює

$$M\mu(t)=\sum_{k=1}^{\infty}kP_k(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!}=e^{-\lambda t}e^{\lambda t}\lambda t=\lambda t.$$

$\mu(t)$ – число вимог, що поступають за проміжок часу t.

Математичне сподівання числа вимог, що поступають за одиницю часу називається інтенсивністю потоку. Позначимо інтенсивність буквою μ.

Для простого потоку $\mu=\lambda$ величина λ носить назву параметра потоку.

Для простого потоку інтенсивність співпадає з параметром потоку.

Позначимо через $\Pi_1(t)$ ймовірність настання за проміжок часу t хоча б однієї вимоги, тобто покладаємо

$$\Pi_1(t)=\sum_{k=1}^{\infty}P_k(t)=1-P_0(t).$$

Для простішого потоку має місце гранична рівність

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Pi_1(t)}{t}=\lambda \tag{10}$$

Цю рівність будемо вважати означенням параметра потоку.

Для довільного стаціонарного потоку, для якого $\exists \lim_{t\to 0}\frac{\Pi_1(t)}{t}$ виконується нерівність

$$\mu\ge\lambda$$

Дійсно,

$$M\mu(t)=\mu t=\sum_{k=1}^{\infty}kP_k(t)\ge\sum_{k=1}^{\infty}P_k(t)=\Pi_1(t)\quad \mu t\ge\Pi_1(t)\quad \mu\ge\frac{\Pi_1(t)}{t}$$

Звідси одержимо справедливість нерівності

ОБСЛУГОВУВАННЯ З ОЧІКУВАННЯМ

Постановка задачі (Ерланг).

На m однакові прилади поступає найпростіший потік вимог інтенсивністю λ.

Якщо в момент надходження вимог є хоча б один вільний прибор, то вимога зразу починає обслуговуватись.

Якщо всі прилади зайняті, то нова вимога, стає в чергу за всіма тими, вимогами, які поступили раніше і ще не почались обслуговуватись. Прилад, що звільнився негайно приступає до обслуговування чергової вимоги. Зауважимо, що кожен прилад обслуговує в кожен момент часу не більше однієї вимоги.

Довжина обслуговування представляє собою випадкову величину з одним і тим же розподілом ймовірностей $F(x)$.

Припускається, що при $x \geq 0$

$$F(x) = 1 - e^{-\mu x} \qquad (1)$$

де $\mu > 0$ стала.

При показниковому розподілу довжини обслуговування розподіл довжини роботи, що залишилась для обслуговування не залежить від того, скільки воно вже тривало.

Дійсно, нехай $f_a(t)$ означає ймовірність того, що обслуговування, яке вже продовжується час a, буде тривати, ще не менше, ніж час t.

Довжина обслуговування розподілена показниково $f_0(t) = e^{-\mu t}$, ясно, що $f_0(t) = e^{-\mu a}$, $f_0(a+t) = e^{-\mu(a+t)}$ $f_0(a+t) = f_0(a) f_a(t)$, то

$$\bar{e}^{\mu(a+t)} = \bar{e}^{\mu a} f_a(t) \Rightarrow f_a(t) = \bar{e}^{\mu t} = f_0(t)$$

Без сумніву, в реальній обстановці показниковий час обслуговування являється, як правило, лише грубим наближенням до дійсності. Так, не рідко час обслуговування не може бути менше, ніж деяка визначена величина. Припущення (1) зводиться до того, що вимоги потребують лише короткочасні операції близькі до 0.

Виникає задача звільнитись від зайвого обмеження, припущення (1).

Ерланг знайшов вдалі розподіли довжини обслуговування.

Було запропоновано так званий розподіл Ерланга, густина якого задається формулою

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 0, t \leq 0 \\ \mu \dfrac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu t}, t > 0 \end{cases},$$

де $\mu > 0,\quad k$ – цілі додатні числа

Розподіл Ерланга представляє собою розподіл суми k назалежних доданків, кожне з яких має розподіл (1)

$$F(x) = 1 - e^{-\mu x}$$

Позначений через η – час обслуговування. Тоді середня довжина обслуговування дорівнює

$$M\eta = \int_0^{+\infty} x dF(x) - \mu \int_0^{+\infty} x e^{-\mu x} dx = \frac{1}{\mu}.$$

Легко обчислити дисперсію довжини обслуговування

$$D\eta = \mu\eta^2 - (\mu\eta)^2 = \frac{1}{\mu^2}.$$

ПРОЦЕС ОБСЛУГОВУВАННЯ ЯК МАРКІВСЬКИЙ ВИПАДКОВИЙ ПРОЦЕС (лекція 3)

Нехай в кожен момент розглядувана система може знаходитися в одному із слідуючих станів:

В момент t в системі знаходиться k вимог $(k=0,1,2,\ldots)$. Якщо $k \le m$, т о в системі знаходиться і обслуговується k вимог, а $m-k$ приладів вільні.

Якщо $k > m$, то m вимог обслуговуються, а $k-m$ знаходяться в черзі і очікують обслуговування.

Позначимо через E_k стан, коли в системі знаходяться k вимог.

Таким чином, система може знаходитись в станах $E_0, E_1, \ldots, E_k, \ldots$

Позначимо через $P_s(t)$ ймовірність того, що система в момент часу t знаходиться в сатані E_s.

Нехай в деякий момент часу t_0 наша система знаходиться в стані E_i. Доведемо, що наступні течії процесу обслуговування не залежить в розумінні теорії ймовірностей від того, що проходило до моменту часу t_0.

Дійсно, наступні течії процесу обслуговування визначається трьома моментами:

1. моментами закінчення обслуговування в момент часу t_0.
2. моментами появи нових вимог
3. довжина обслуговування вимог, що поступили після t_0

В силу особливостей показникового розподілу час (довжина) частини обслуговування, що залишилась, не залежить від того, як довго вже тривало обслуговування до моменту t_0. Оскільки потік вимог простий, то минуле не впливає на те, як багато вимог з'явиться після моменту t_0. Накінець час обслуговування вимог, що з'явились після t_0, ніяк не залежить від того, що і як обслуговувалось до моменту t_0.

Відомо, що випадкові процеси, для яких майбутні події залежать тільки від досягнутого в даний момент стану і не залежить від того, як проходив розвиток в минулому, називаються процесами Маркова або процесами без післядії.

Ми довели зараз, що система з очікуванням в випадку простого потоку і показникового часу обслуговування представляє собою випадковий процес Маркова.

СКЛАДАННЯ РІВНЯНЬ ДЛЯ ЙМОВІРНОСТІ $P_k(t)$

Задача полягає в тому, щоб знайти рівняння, яким задовольняють ймовірності $P_k(t)$.

Одне із таких рівнянь очевидне, а саме для любого t

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P_k(t) = 1 \qquad (2)$$

Знайдемо спочатку ймовірність того, що в момент $t+h$ всі прилади вільні. Це може відбутись слідуючими способами:

1. в момент t всі прилади були вільні і за час h нових вимог не надійшло.
2. в момент t один прилад зайнятий обслуговуванням вимоги, всі інші прилади вільні, за час h обслуговування було завершено і нових вимог ненадійшло.
3. Інші можливості: були зайняті два або три прилади і за час h робота на них завершена і нових вимог ненадійшло– і їх ймовірності $o(h)$.

Імовірність першого з вказаних подій дорівнює

$$P_0(t)e^{-\lambda t} = P_0(t)(1-\lambda h + o(h)) \quad \begin{cases} P_0(t+h) = P_0(t)P_0(h) \\ P_0(t+h) = P_0(t)(1-\lambda h + o(h)) \end{cases}$$

Імовірність другої події

$$P_1(t)e^{-\lambda h}\left(1-e^{\mu h}\right) = P_1(t)\mu h + o(h)$$

Таким чином

$$P_0(t+h) = P_0(t)(1-\lambda h) + \mu h P_1(t) + o(h)$$

Звідси

$$P_0(t+h) - P_0(t) = -\lambda h P_0(t) + \mu h P_1(t) + o(h)$$

або

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) + o(h)$$

і

$$P_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t). \qquad (3)$$

Перейдемо тепер до складання рівнянь для $P_k(t)$ при $k \geq 1$.

Розглянемо окремо два різних випадки: $1 \leq k < m$ і $k \geq m$.

Нехай $1 \leq k < m$. Перерахуємо тільки ті стани із яких можна перейти в стан E_k в момент $t+h$.

Ці стани такі:

В момент t система знаходилась в стані E_k, за час h нових вимог не надійшло і один прилад не закінчив обслуговування. Імовірність цієї події

$$P_k(t)e^{-\lambda h}\left(e^{-\mu h}\right)^k = P_k(t)(1-\lambda h - k\mu h + o(h))$$

В момент t система знаходилась в системі E_{k-1}, за час h поступила нова вимога, але жодна вимога, що знаходилась на обслуговуванні до кінця не обслужилась.

Ймовірність цієї події дорівнює

$$P_{k-1}(t)\left(1-e^{-\lambda h}\right)\left(e^{-\mu y}\right)^{k-1} = \lambda h P_{k-1}(t) + o(h)$$

В момент t система знаходилась в стані E_{k+1} за час h нових вимог не надходило, но одна вимога була обслужена.

Ймовірність дорівнює

$$P_{k+1}(t)e^{-\lambda h}C_{k+1}^{h}\left(e^{-\mu h}\right)^{k}\left(1-e^{-\mu h}\right)=P_{k+1}(t)(k+1)\mu h \ +o(h).$$

Всі інші можливості переходу в стан E_k за проміжок часу h мають ймовірність, що дорівнює $o(h)$.

А тоді (зібравши всі ці ймовірності) одержимо

$$P_k(t+h)=P_k(t)(1-\lambda h-k\mu h)+\lambda hP_{k-1}(t)+(k+1)\mu khP_{k+1}(t)+o(h)$$

Нескладними перетвореннями для $1\le k<m$ одержимо

$$P_k'(t)=-(\lambda+k\mu)P_k(t)+\lambda P_{k-1}(t)+(k+1)\mu P_{k+1}(t) \qquad (4)$$

Подібними міркуваннями для $k\ge m$ одержимо

$$P_k'(t)=-(\lambda+m\mu)P_k(t)+\lambda P_{k-1}(t)+m\mu P_{k+1}(t) \qquad (5)$$

Для визначення ймовірностей $P_k(t)$ ми одержали нескінчену систему диференціальних рівнянь (2)-(5).

ВИЗНАЧЕННЯ СТАЦІОНАРНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

(лекція 4)

В теорії масового обслуговування вивчають лише розв'язки при $t\to\infty$. Існування таких розв'язків, що встановлено, називаються ерпозичними теоремами. В розглядуваній задачі, виявляться, що граничні або як говорять стаціонарні ймовірності існують. Введемо для них позначення P_k, а $P_k'(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}0.$

Рівняння (3), (4), (5) для стаціонарних ймовірностей мають вигляд

$$-\lambda P_0+\mu P_1=0 \qquad (6)$$

При $1\le k<m$

$$\lambda P_{k-1}-(\lambda+k\mu)P_k+(k+1)\mu P_{k+1}=0 \qquad (7)$$

При $k\ge m$

$$\lambda P_{k-1}-(\lambda+m\mu)P_k+m\mu P_{k+1}=0 \qquad (8)$$

До цих рівнянь добавляємо нормовану умову

$$\sum_{k=0}^{+\infty}P_k=1 \qquad (9)$$

Для розв'язку одержаної алгебрагічною системи введемо позначення:

Для $1\le k<m$

$$z_k=\lambda P_{k-1}-k\mu P_k$$

При $k\ge m$

$$z_k=\lambda P_{k-1}-m\mu P_k$$

Система рівнянь (6)-(8) в цих позначеннях приймає такий вигляд

$$z_1=0;\quad z_k-z_{k+1}=0 \text{ при } k\ge 1$$

Звідки одержуємо, що при всіх $k \geq 1$

$$z_k = 0.$$

Тобто при $1 \leq k < m$

$$k\mu P_k = \lambda P_{k-1} \tag{10}$$

А при $k \geq m$

$$m\mu P_k = \lambda P_{k-1} \tag{11}$$

Введемо для зручності позначення

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Рівняння (10) дозволяє зробити висновок, що при $1 \leq k < m$

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0 \tag{12}$$

При $k \geq m$ із (11)

$$P_k = \left(\frac{\rho}{m}\right)^{k-m} P_m$$

А отже при $k \geq m$

$$P_k = \frac{\rho^k}{m!\mathrm{m}^{\mathrm{k-m}}} P_0 \tag{13}$$

Залишається знайти лише P_0. Для цього в (9) підставимо вираз P_k із (12) і (13).

В результаті одержимо

$$P_0\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{\rho^k}{k!} + \frac{m^m}{m!}\sum_{k=m+1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{m}\right)^k\right] = 1$$

Для нескінченної суми, що стоїть в квадратних дужках будемовважати, що

$$\rho < m \tag{14}$$

При цьому припущенні знаходимо рівність

$$P_0^{-1} = \sum_{k=0}^{m}\frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{m+1}}{m!(m-\rho)} \tag{15}$$

Якщо умова (14) не виконана, тобто $\rho \geq m$, то ряд, що стоїть в квадратних дужках розбіжний, а отже P_0 повинно дорівнювати нулю. але при цьому, як випливає із (12) і (13) при всіх $k \geq 1$ можна зробити висновок, що при $\rho \geq m$, за час що проходить черга прямує до ∞ по ймовірності.

Приклад.

Нехай лікар встигає задовільно оглянути хворого, заповнити його історію хвороби в середньому за 15 хв.

Органи, що це планують із цього роблять висновок: за чотири години лікар повинен прийняти 16 людей.

Однак хворі приходять в випадковий момент часу. В результаті при такому підрахунку пропускної здібності лікаря до нього неминуче збирається черга, оскільки при такому підрахунку пропускної здібності ρ приймає значення, що дорівнює 1.

Тим же висновкам відносяться і розрахунки числа працюючих нас в магазинах, числа офіціантів і т.д.

У всіх інших випадках в майбутньому будемо вважати, що умова (14) виконується.

Довжина очікування представляє собою випадкову величину, яку позначимо через γ. Позначимо через $P\{\gamma > t\}$ ймовірність того, що довжина очікування перевищує t і через $P_k\{\gamma > t\}$ ймовірність нерівності. Що вказана в дужках, при умові, що в момент надходження вимоги, для якого ми підрахували довжину очікування, в черзі вже знаходиться k вимог. В силу формули повної ймовірності маємо рівність

$$P\{\gamma > t\} = \sum_{k=m}^{\infty} P_k P\{\gamma > t\} \qquad (16)$$

Для $m = 1$ і $m = 2$ знайдемо прості формули

$$\text{при } m = 1,\ P_0 = 1 - \rho \qquad (17)$$

А при $m = 2$

$$P_0 = \frac{2-\rho}{2+\rho} \qquad (18)$$

Обчислимо тепер ймовірність того, що всі прилади будуть зайняті в який-то навмання взятий момент.

Очевидно, що ця ймовірність дорівнює

$$\Pi = \sum_{k=m}^{\infty} P_k = \frac{m^m}{m!} \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{\rho}{m}\right)^k P_0 = \frac{\rho^m P_0}{(m-1)!(m-\rho)} \qquad (19)$$

Ця формула для $m = 1$ приймає простий вигляд

$$\Pi = \rho \qquad (20)$$

При $m = 2$

$$\Pi = \frac{\rho^2}{2+\rho} \qquad (21)$$

У формулі (20) $\rho < 1$, а в (21) $\rho < 2$

ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ДОВЖИНИ ОЧІКУВАННЯ

Якщо в момент надходження вимоги в черзі вже знаходиться $k-m$ вимог, то оскільки обслуговування проходить в порядку черговості, вимога, яка поступила порівняно довго чекати, коли будуть обслужені $k-m+1$ вимога. Нехай $g_s(t)$ означає ймовірність того, що за проміжок часу довжиною t після надходження вимоги, яка нас цікавить, закінчилась , обслуговуватись рівно s вимог.

А тому має місце при $k \geq m$ рівність

$$P_k\{\gamma > t\} = \sum_{s=0}^{k-m} g_s(t).$$

Оскільки розподіл довжини обслуговування є показниковим і не залежить від того, скільки вимог знаходиться в черзі і ні від того, яка довжина обслуговується інших вимог, то ймовірність за час t не завершить ні одного обслуговування (тобто ймовірність того, що не звільниться ні один прилад) дорівнює

$$g_0(t) = e^{-m\mu t}$$

Якщо всі прилади зайняті обслуговуванням і ще є досить достатня черга вимог, які очікують обслуговування, то потік обслуговування буде простішим. Дійсно, в цьому випадку всі три вимоги – стаціонарність, відсутність післядії і ординарність вимогам. Ймовірність звільнення за проміжок часу t рівно s приладів дорівнює

$$g_s(t) = e^{-m\mu t}\frac{(m\mu)^s}{s!}$$

I

$$P_k\{\gamma > t\} = \sum_{s=0}^{k-m} e^{-m\mu t}\frac{(m\mu)^s}{s!}$$

А отже

$$P\{\gamma > t\} = P_m e^{-m\mu t}\sum_{k=m}^{\infty}\left(\frac{\rho}{m}\right)^{k-m}\sum_{h=0}^{k-m}\frac{(m\mu)^s}{s!}$$

Але ймовірності P_k відомі

$$P_k = \left(\frac{\rho}{m}\right)^{k-m} P_m$$

Тому

$$P\{\gamma > t\} = P_m e^{-m\mu t}\sum_{k=m}^{\infty}\left(\frac{\rho}{m}\right)^{k-m}\sum_{h=0}^{k-m}\frac{(m\mu)^s}{s!}$$

Очевидними перетвореннями праву частину приводимо до вигляду

$$P\{\gamma > t\} = P_m e^{-m\mu t} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(m\mu)^s}{s!} \sum_{k=m+s}^{\infty} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{k-m} =$$

$$= P_m e^{-m\mu t} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(m\mu t)^s}{m^s s!} \sum_{k=m+s}^{\infty} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{k-m-s} = \frac{P_m}{1-\frac{\rho}{m}} e^{-m\mu t} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^s}{s!} =$$

$$= \frac{P_m}{1-\frac{\rho}{m}} e^{-(m\mu-\lambda)t}$$

Із формули (13) і (19) випливає що $P_m = \Pi\left(1-\frac{\rho}{m}\right)$, тому при $t > 0$

$$P\{\gamma > t\} = \Pi e^{-(m\mu-\lambda)t} \tag{22}$$

Очевидно, що при $t < 0$

$$P\{\gamma > t\} = 1$$

Функція $P\{\gamma > t\}$ має в точці $t = 0$ розрив неперервності, що дорівнює ймовірності застати всі прибори занятими.

(лекція 6)

Формула $P\{\gamma > t\} = \Pi e^{-(m\mu-\lambda)t}$ дозволяє знайти всі числові характеристики довжини очікування.

Наприклад, математичне сподівання довжини очікування або середня довжина очікування дорівнює

$$a = M\gamma = -\int_0^{+\infty} t dP\{\gamma > t\} = \Pi \int_0^{+\infty} t(m\mu-\lambda)e^{-(m\mu-\lambda)t} dt$$

Нескладні перетворення приводять нас до формули

$$a = \frac{\Pi}{\mu(m-\rho)} \tag{23}$$

Дисперсія величини γ дорівнює

$$D\gamma = M\gamma^2 - (M\gamma)^2 = \frac{\Pi(2-\Pi)}{\mu^2(m-\rho)^2}$$

Пояснення.

$$a=\Pi(m\mu-\lambda)\int_0^{+\infty} te^{-(m\mu-\lambda)t}dt=\left\{\begin{matrix} u=t & dv=e^{-(m\mu-\lambda)t}dt \\ du=dt & v=-\dfrac{1}{(m\mu-\lambda)}e^{-(m\mu-\lambda)t}\end{matrix}\right\}=$$

$$\Pi(m\mu-\lambda)\left[-\frac{t}{(m\mu-\lambda)}e^{-(m\mu-\lambda)t}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{(m\mu-\lambda)}e^{-(m\mu-\lambda)t}dt\right]=$$

$$=\Pi\int_0^{+\infty} e^{-(m\mu-\lambda)t}dt=-\frac{\Pi}{(m\mu-\lambda)}e^{-(m\mu-\lambda)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{\Pi}{(m\mu-\lambda)}=\frac{\Pi}{\mu(m-\rho)}.$$

$$M\gamma^2=\Pi\int_0^{+\infty} t^2(m\mu-\lambda)e^{-(m\mu-\lambda)t}dt=\Pi(m\mu-\lambda)\int_0^{+\infty} t^2e^{-(m\mu-\lambda)t}dt=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=t^2 & dv=e^{-(m\mu-\lambda)t}dt \\ du=2tdt & v=-\dfrac{1}{(m\mu-\lambda)}e^{-(m\mu-\lambda)t}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\Pi(m\mu-\lambda)\left[-\frac{t^2}{(m\mu-\lambda)}e^{-(m\mu-\lambda)t}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2t}{(m\mu-\lambda)}e^{-(m\mu-\lambda)t}dt\right]=$$

$$=2\Pi\int_0^{+\infty} te^{-(m\mu-\lambda)t}dt=\left\{\begin{matrix} u=t & dv=e^{-(m\mu-\lambda)t}dt \\ du=dt & v=-\dfrac{1}{(m\mu-\lambda)}e^{-(m\mu-\lambda)t}\end{matrix}\right\}=$$

$$=2\Pi\left[-\frac{t}{(m\mu-\lambda)}e^{-(m\mu-\lambda)t}\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{(m\mu-\lambda)}\int_0^{+\infty} e^{-(m\mu-\lambda)t}dt\right]=$$

$$=-\frac{2\Pi}{(m\mu-\lambda)}e^{-(m\mu-\lambda)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{2\Pi}{(m\mu-\lambda)^2}=\frac{2\Pi}{\mu^2(m-\rho)^2}.$$

$$D\gamma=M\gamma^2-(M\gamma)^2=\frac{2\Pi}{\mu^2(m-\rho)^2}-\frac{\Pi^2}{\mu^2(m-\rho)^2}=\frac{\Pi(2-\Pi)}{\mu^2(m-\rho)^2}.$$

Формула (23) дає середню довжину очікування однієї вимоги. Знайдемо середню витрату часу вимогами, що прийшли в систему обслуговування на проміжку часу T. За час T поступає λT вимог в середньому загальна витрати ними часу на очікування в середньому дорівнює

$$a\lambda T = \frac{\Pi\lambda T}{\mu(m-\rho)} = \frac{\Pi\rho T}{(m-\rho)} \qquad (24)$$

Приведемо невеликі арифметичні підрахунки, які продемонструють нам, як швидко зростають сумарні втрати на очікування із зміною величини ρ. При цьому ми обмежимося випадком $T=1$ і розглянемо лише малі значення m: $m=1$ або $m=2$

При $m=1$ і в силу $\Pi=\rho$

$$a\lambda = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

При $\rho = 0{,}1;\quad 0{,}3;\quad 0{,}5;\quad 0{,}7;\quad 0{,}9.$ значення $a\lambda$ приблизно дорівнює $0{,}011;\quad 0{,}267;\quad 0{,}500;\quad 1{,}633;\quad 8{,}800.$

При $m=2$ і в силу (21)

$$\Pi = \frac{\rho^2}{2+\rho}$$

$$a\lambda = \frac{\rho^3}{4-\rho^2}$$

При $\rho = 0{,}1;\quad \rho = 1;\quad \rho = 1{,}5;\quad \rho = 1{,}9.$

Значення $a\lambda$ приблизно дорівнює $0{,}0003;\quad 1{,}350;\quad 17{,}587.$

Наведені дані ілюструють відомий факт відносно великої чутливості системи обслуговування , вже достатньо сильно загружених, до зростання загрузки споживач при цьому відразу відчуває значне зростання довжини очікування. Цей факт обов’язково треба врахувати при розрахунку загрузки обладнання в системах масового обслуговування.

<u>Приклад.</u>

При проектуванні морського порту можна:

1. Будувати два порти і в кожному з них встановити по одній пристані і приписати до кожного з цих портів однакову кількість суден.
2. побудувати один порт з двома пристанями.
3. побудувати один порт з однією пристанню і всі механізми загрузки і розгрузки зосередити в цьому порту.

Який із запропонованих проектів слід вважати оптимальним з точки зору мінімізації втрат часу на очікування загрузочно-погрузочних операцій?

Обробка реальних даних по ряду портів показала, що гіпотезу простішого потоку приходящих в порт суден, також як гіпотезу показникового розподілу довжини загрузочно-розгрузочних операцій в першому наближенні можна приймати з достатньою точністю (Гнеденко, зубів).

ρ	0,1	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
I	0,0222	1,0000	1,8000	3,2660	6,4000	16,2000
II	0,0020	0,3333	0,6750	1,3451	2,8444	7,6737
III	0,0111	0,5000	0,9000	1,6330	3,2000	8,1000

Нехай інтенсивність всього потоку суден дорівнює 2λ, тоді по першому проекту із двох портів поступають потоки і інтенсивності λ; по другому і третьому проектах в порти поступають потоки інтенсивності 2λ.

Якщо параметр, що характеризує швидкість розгрузки по першому і другому проектах дорівнює μ, то по третьому проекту він дорівнює 2μ.

В таблиці ми звели результати розрахунків.

В якості параметра вибрано відношення $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Варіанти 1-3 вказані в рядках таблиці I, II, III, в яких вказані середні втрати часу всіма суднами, що прийшли за одиницю часу.

Порівняння показує, що перший варіант невдалий, а другий самий вдалий.

Порівняння другого і третього варіантів слід проводити далі, оскільки необхідно врахувати затрати на будівництво.

ПРОЦЕСИ ЗАГИБЕЛІ І РОЗМНОЖЕННЯ
(лекція 6)

Всі розглядувані вище задачі привели нас до систем диференціальних рівнянь і методи одержання цих рівнянь були майже однакові.

Дійсно, виникає питання про те, що ми розглянули два часткових випадки загальної теорії. В теорії ймовірностей відомий клас випадкових процесів харківського типу, в якому міститься тільки, що вивчені задачі так і багато інших.

Цей клас процесів почали вивчати в зв’язку з біологічними поставками задач про число популяцій, поширення епідемій і т.п. Такі процеси одержали назву процесів гибелі і розмноження.

Оскільки математична схема, що вивчається в них, носить досить загальний характер, процеси гибелі і розмноження одержали широке застосування в багатьох прикладних питаннях, і по своєму фізичному характеру дуже далекі від біологічних.

Наприклад, багато задач теорії надійності, наприклад, теорії резервування, часто розглядають з позиції цього типу процесів.

Нехай система в кожен момент часу може знаходитись в одному із станів $E_{0,}E_{1,}E_{2,}\dots$, множина яких скінчена або злічена. В силу багатьох причин стани системи з часом змінюються, причому за проміжок часу довжина h система із стану E_n в момент часу t і імовірністю $\lambda_n h + o(h)$

переходить в стан E_{n+1} із імовірністю $\mu_n h + o(h)$ в стан E_{n-1}. Імовірності того, що за проміжок часу $(t, t+h)$ система перейде в стан E_{n+k} або в стан E_{n-k} при $k > 1$ нескінченно малі в порівнянні з h. Звідси випливає, що ймовірність за той же проміжок часу залишається в стані E_n дорівнює $1 - \lambda_n h - \mu_n h + o(h)$. Сталі λ_n і μ_n залежать від n, але не залежать від t і від того, яким шляхом система прийшла в цей стан. Однак цю теорію можна поширити і на той випадок, коли λ_n і μ_n залежать від t.

Випадкові процеси такого типу якраз являється процесами гибелі і розмноження. Якщо під E_n розуміють подію, яка полягає в тому, що численність популяцій дорівнює n, то перехід з стану E_n в стан E_{n+1} означає що чисельність популяцій збільшується на одиницю. Аналогічно переходу із стану $E_n \to E_{n-1}$ слід вважати як гибель одного члена популяції.

Якщо при будь-якому $n \geq 1$ справедливі рівності $\mu_n = 0$, тобто якщо можливі тільки переходи $E_n \to E_{n+1}$, то процес називається процесом розмноження. (чисте розмноження). Якщо ж $\lambda_n = 0, \quad (n = 0,1,2,\ldots)$, тобто переходи $E_n \to E_{n+1}$ не можливі, то процес називається процесом загибелі.

Простіший процес, який ми розглядали, представляє собою процес розмноження для нього $\lambda_n = \lambda$ для всіх $n \geq 0$.

Процес обслуговування з очікуванням представляє собою процес загибелі і розмноження, для нього $\lambda_n = \lambda$, $\mu_k = k\mu \quad 1 \leq k \leq m$, і $\mu_k = m\mu$ при $k \geq m$.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПРОЦЕСА

Позначимо через $P_k(t)$ ймовірність того, що система в момент часу t знаходиться в стані E_k. Логічними міркуваннями ми переходимо до наступної системи диференціальних рівнянь

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) \qquad (1)$$

і при $k \geq 1$

$$P_k'(t) = -(\lambda_k + \mu_k) P_k(t) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(t) + \mu_{k+1} P_{k+1}(t) \qquad (2)$$

Зроблені позначення трохи невдалі, оскільки ми не відмітили із якого стану E_i почала змінюватись система. Так, щоб вичерпні позначення були б такі: $P_{i,j}(t)$ – ймовірність того, що система виявилась в момент часу t в стані E_j, якщо в момент 0 вона знаходиться в системі E_i. В попередніх задачах стан системи був E_0.

Рівняння (1) і (2) мають простий вигляд, коли при всіх $k \geq 1$ мають місце рівності $\mu_k = 0$, тобто для процесів чистого розмноження. В цьому випадку шляхом послідовного інтегрування вдається знайти одну функцію одну за одною.

Можна виписати загальний розв'язок і впевнитись, що функції $P_k(t)$ невід'ємні при будь-якому k і t. Однак якщо λ_k при зростанні k зростають досить швидко, то може трапитись, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) < 1$$

Теорема Феллера.

Для того, щоб при всіх значеннях t розв'язки $P_k(t)$ рівнянь чистого розмноження задовольняли умові $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1$ необхідно і досить, щоб розбігався ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{-1} \tag{3}$$

<u>Доведення.</u>

Розглянемо чистинну суму

$$S_n(t) = P_0(t) + \ldots + P_n(t) \tag{4}$$

Із рівнянь розмноження випливає, що

$$S_n'(t) = -\lambda P_n(t)$$

Звідси інтегруванням від $[0;t]$ знаходимо

$$1 - S_n(t) = \lambda_n \int_0^t P_n(t) dt \tag{5}$$

(якщо замість початкової умови $P_0(t) = 1$ ми візьмемо іншу, а саме $P_i(t) = 1$, то ця рівність має місце при $n \geq i$).

Оскільки всі члени суми (4) невід'ємні, то при кожному фіксованому значенні t сума $S_n(t)$ зі зростанням n не спадає. Отже, існує границя

$$\lim_{n \to \infty} (1 - S_n(t)) = \mu(t)$$

В силу (5) робимо висновок, що

$$\lambda_n \int_0^t P_n(t) dt \geq \mu(t)$$

Звідси випливає, що

$$\int_0^t S_n(z) dt \geq \mu(t) \left(\frac{1}{\lambda_0} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n} \right)$$

Оскільки при будь-яких t і n має місце нерівність $S_n(t) \le 1$, то

$$t \ge \mu(t)\left(\frac{1}{\lambda_0} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

Якщо ряд (3) розбіжний, то із останньої нерівності випливає, що при всіх t повинно виконуватись рівність $\mu(t) = 0$.

Взявши до уваги (6) одержимо, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1$$

Із (5) випливає, що

$$\lambda_n \int_0^t P_n(t)dt \le 1$$

А отже

$$\int_0^t S_n(z)dt \le \frac{1}{\lambda_0} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n}$$

При $n \to \infty$ одержуємо

$$\int_0^t (1 - \mu(t))dt \le \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-1}$$

Якщо $\mu(t) = 0$ при всіх t, то ліва частина нерівності дорівнює t, а оскільки t довільне, то ряд, що стоїть в правій частині, розбіжний.

Теорема доведена.

Означення. Нехай $F(t)$ функція розподілу невід'ємної випадкової величини ξ. Функція комплексної змінної S

$$\varphi(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dF(t)$$

Називається перетворенням Лапласа-Стільтьєса функції $F(t)$ випадкової величини ξ.

Якщо розподіл неперервний, тобто $F(t) = \int_0^t p(x)dx.$, де $p(x)$ густина ймовірності, то

$$\varphi(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} p(t)dt$$

Якщо $F(t)$ дискретний розподіл, то

$$\varphi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{-sx_k}$$

Оскільки $F(+0) = 0,$ то

$$\varphi(s) = F(+0) + \int_0^{+\infty} e^{-st} p(t) dt$$

Властивості перетворення Лапласа-Стільтьєса

1. Функція $\varphi(s)$ визначена при будь-яких комплексних s з невід'ємною дійсною частиною і неперервна по s при $\operatorname{Re} s \geq 0$.
2. В області $\{\operatorname{Re} s > 0\},\quad \varphi(\mathrm{s})$ – аналітична функція.
3. $\varphi(0) = 1; \quad |\varphi(s)| \leq 1$ при $\operatorname{Re} s \geq 0$.
4. $|\varphi(s)| < 1;$ при $\operatorname{Re} s > 0$, якщо $F(+0) < 1,$ $\varphi(s) \to 0$ при , якщо $F(+0) = 0.$
5. якщо $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – незалежні випадкові величини з перетвореннями $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)$, то перетворення $\xi_1 + \ldots + \xi_n$ дорівнює $\varphi_1(s) \cdot \varphi_2(s) \cdot \ldots \cdot \varphi_n(s).$
6. Якщо $M|\xi|^k < \infty$, то
$$M\xi^k = (-1)^k \varphi^k(0)$$

Нехай $s > 0$, маємо

$$F(t) = \int_0^t dF(t) \leq \int_0^t e^{-s(x-t)} dF(x) \leq e^{st} \varphi(s) \qquad (7)$$

Нерівність (7) і буде основною для доведення теорем Феллера.

Нехай t_n – момент попадання процесу розмноження в стан n.

$$t^* = \lim_{n \to \infty} t_n$$

Тоді $t_n = z_0 + z_1 + \ldots z_{n-1}$, де z_k незалежні випадкові величини

$$P\{z_n > t\} = e^{-\lambda kt}, \quad t \geq 0.$$

Перетворенням Лапласа-Стільтьєса z_k буде

$$\varphi_k(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st - \lambda_k t} dt = \frac{1}{1 + \frac{s}{\lambda k}}$$

Покладемо $s = 1$ із (7), знайдемо

$$P\{t^* < t\} \le P\{t_n < t\} \le \frac{e^t}{\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{1}{\lambda k}\right)} < \frac{e^t}{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda_k}}$$

Останній вираз прямує до нуля при $n \to \infty$, якщо ряд (3) розбіжний, звідси випливає $P\{t^* < t\} = 0$ для будь-якого t.

Залишається помітити, що

$$P\{t^* < t\} = 1 - \sum_{h=0}^{\infty} P_k(t).$$

Якщо ряд (3) збіжний, то

$$Mt_{n=} \frac{1}{\lambda_0} + \ldots + \frac{1}{\lambda_{n-1}}$$

Одержимо

$$M(t_n - t_N) = \frac{1}{\lambda_N} + \ldots + \frac{1}{\lambda_{n-1}} < \varepsilon^2$$

Якщо N досить велике, то

$$P\{t_n - t_N > \varepsilon\} \le \frac{M\{t_n - t_N\}}{\varepsilon} = \varepsilon$$

І по аксіомі неперервності

$$P\{t^* - t_N \ge \varepsilon\} \le \varepsilon.$$

$P\{t_N < x\} > x \quad \forall x > 0,$ оскільки t_N – сума незалежних випадкових величин з додатними густинами.

Звідси

$$P\{t^* < t\} \ge P\{t_N < t - \varepsilon, t^* - t_N \le \varepsilon\} \ge P\{t_N < t - \varepsilon\}(1-\varepsilon) > 0.$$

НЕНАПОВНЕНИЙ РЕЗЕРВ БЕЗ ВІДНОВЛЕННЯ

Припустимо, що у нас система, що складається із одного основного елемента і n еквівалентних йому елементів, що знаходяться в ненаповненому резерві. Основний елемент знаходиться наповненим і в проміжку часу $(t, t+h)$ може відновитись з ймовірністю $\lambda h + o(h)$.

Як тільки основні елементи відповідають йому на зміну в роботу включається один з резервних, який таким чином стає вже основним.

Система відмовляє, як тільки відмовляють всі елементи – основний і всі резервні.

Позначимо через E_k подію, яка полягає в тому, що в системі відмовили k елементів.

В момент $t = 0$ система знаходиться в стані E_0.

Задача полягає в тому, щоб визначити ймовірності станів E_k в момент часу t. Перебування в стані E_{n+1} в момент t означає, що система втримала до моменту t.

Зауважимо, що в розглядуваній задачі ми маємо випадок чистого розмноження, причому $\lambda_k = \lambda$ при $0 \le k \le n$ і $\lambda h = 0$ при $k > n$.

Ряд (3) розбіжний, оскільки є такі λ_k, що $\lambda k = 0$.

Таким чином, рівність (3) обов’язково виконано.

Рівняння (1) і (2) для розглядуваної задачі має вигляд

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

При $1 \le k \le n$

$$P_k'(t) = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t),$$

При $k = n+1$

$$P_{n+1}'(t) = \lambda P_n(t)$$

Послідовний розв’язок цієї системи рівнянь і виконання початкових умов приведе нас до системи рівностей

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}$$

....

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

$$P_{n+1}(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Позначимо через ξ_k довжину життя k-го елемента в періоді роботи. Очевидно, що довжина життя всієї системи дорівнює $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{n+1}$.

Оскільки середній строк життя одного елемента в роботі дорівнює

$$\int_0^\infty t e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda},$$

то середній строк життя зарезервованої системи дорівнює $\frac{n+1}{\lambda}$, тобто пропорційний загальному числу елементів в системі.

НАПОВНЕНИЙ РЕЗЕРВ БЕЗ ВІДНОВЛЕННЯ

Основний елемент має n резервних, але всі резервні елементи знаходяться в тому стані, що і основний. Кожен із елементів за проміжок часу $(t, t+h)$ відповідає з ймовірністю $\lambda h + o(h)$. Система в цілому відмовляє в момент, коли відмовляють всі елементи.

Цей процес є процесом чистого розмноження, для якого

$$\lambda_k = (n+1-k)\lambda \quad 0 \le k \le n, \quad \lambda_{k+1} = 0.$$

Рівняння задачі приймають вигляд

$$P_0'(t) = -(n-1)\lambda P_0(t)$$

При $1 \le k \le n$

$$P_k'(t) = -(n+1-k)\lambda P_k(t) + (n-k+2)\lambda P_{k-1}(t)$$

А при $k = n+1$

$$P_{k+1}'(t) = \lambda P_n(t)$$

Розв'язок системи має вигляд

$$P_0(t) = e^{-(n+1)\lambda t}$$

$$P_1(t) = (n+1)te^{-n\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

....

$$P_n(t) = (n+1)e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^n$$

$$P_{n+1}(t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{n+1}$$

Обчислення середньої довжини життя резервної системи ми проведемо слідуючим чином: відмітимо на осі абсцис моменти послідовних відмов $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$.

Введемо позначення $\tau_1 = t_1, \tau_2 = t_2 - t_1, \ldots, \tau_{n+1} = t_{n+1} - t_n$.

Поскільки в першому інтервалі працює $(n+1)$ елемент, ймовірність того, що не відмовить за час t ні один із них дорівнює $P_0(t) = e^{-(n+1)\lambda t}$.

В другому інтервалі працює тільки n елементів.

В силу властивості показникового розподілу ймовірність того, що всі вони пропрацюють без відмови за час t, рахуючи від моменту t_1 дорівнює $e^{-n\lambda t}$.

Накінець в останньому інтервалі працює тільки один елемент. Ймовірність того, що після моменту t_n він пропрацює за час t дорівнює $e^{-\lambda t}$.

Середній час роботи системи дорівнює

$$T_n = M\sum_{k=1}^{n+1}\tau_k = \sum_{k=1}^{n+1}M\tau_k = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right)$$

Якщо n досить велике, то

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\approx \ln(n+1)+c,$$

де $c=0{,}5772157$ – стала Ейлера.

ПРО ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ЗАГИБЕЛІ І РОЗМНОЖЕННЯ

У випадку чистого розмноження система рівнянь розв'язувалась дуже просто шляхом послідовного інтегрування, оскільки диференціальні рівняння мали вигляд рекурентних співвідношень.

Загальні рівняння процесу загибелі і розмноження мають іншу структуру і послідовне визначення функції $P_n(t)$ уже неможливе.

Виявляється, що рівність

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)=1$$

не завжди виконується

Для того, щоб це було так, досить до цієї умови добавити розбіжний ряд.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}\frac{\mu_i}{\lambda_i}$$

І якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}\frac{\mu_{i-1}}{\lambda_i}$$

збіжний, то існують границі.

$$P_k=\lim_{t\to\infty} P_k(t)\quad (k=0,1,2,\ldots)$$

Ця умова виконується у всіх випадках, коли починаючи з деякого номера j, виконується нерівність

$$\frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}\le \alpha<1$$

Як правило, ця нерівність в задачах ТМО виконується .

Щоб знайти границі P_k досить розв'язати алгебраїчну систему, яка одержується і з диференціальних рівнянь процесу, якщо в них поставити $P_i'(t)=0$ і замінити $P_i(t)=P_i$.

Тоді система має вигляд

$$-\lambda_0 P_0+\mu_1 P_1=0$$

$$-(\lambda_k+\mu_k)P_k+\lambda_{k-1}P_k+\mu_{k+1}P_{k+1}=0\quad (k\ge 1)$$

Введемо позначення $z_k = -\lambda_k P_k + \mu_{k+1} P_{k+1}$

Тоді рівняння матимуть вигляд

$$z_k = 0; \quad z_k - z_{k-1} = 0$$

Звідси випливає, що у всіх $k \ge 0 \quad z_k = 0$.

А тоді

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} P_{k-1} = \prod_{i=0}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} P_0$$

Із умови нормування $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1$ визначаємо P_0

$$P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right]^{-1}$$

ВИКОРИСТАННЯ ПРОЦЕСУ ЗАГИБЕЛІ І РОЗМНОЖЕННЯ В ТЕОРІЇ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Система з втратами

Нехай є m обслуговуючих приладів, кожен із них є доступний , коли він вільний для кожної із вимоги, що поступають у систему. Прилад здатний одночасно обслужити тільки одну вимогу.

Час обслуговування випадковий, і його довжина має показниковий розподіл з параметром μ. Потік вимог – простіший з параметром λ. Кожна вимога, що надходить в систему починає обслуговуватись негайно, якщо в ній є хоча б один вільний прилад. Якщо всі прилади зайняті, то вимога губиться і отримує відмову.

Якщо під E_k розуміють той стан системи, коли в ній знаходиться k вимог, то розглядувана система може знаходитись в станах $E_0, E_1, \ldots, E_m$. Ймовірність переходу із стану в стан за час h дорівнює $\lambda h + o(h)$ $(E_k \to E_{k+1})$. Залишитись в такому самому стані за той же час h дорівнює

$$1 - \lambda h - kh\mu + o(h).$$

Перейти із стану E_k в стан E_{k-1} (при $k > 0$) дорівнює

$$k\mu h + o(h).$$

Ми знаходимось в умовах схеми процесу загибелі і розмноження, для якої

$$\lambda_k = \lambda \text{ при } k < m$$

$$\lambda_k = 0 \text{ при } k \ge m$$

$$\mu_k = 0 \text{ при } k = 0, \quad k > m$$

$$\mu_k = k\mu \text{ при } 1 \le k \le m.$$

Легко скласти диференціальні рівняння задачі.

Стаціонарні розв'язки ми одержимо у вигляді

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k} P_0 \ 1 \le k \le m.$$

Величина P_0 визначається із рівності

$$\sum_{k=0}^{m} P_k = 1$$

Підставимо сюди значення P_k із (1) одержимо

$$P_0 = \left[1 + \rho + \frac{1}{2}\rho^2 + \ldots + \frac{1}{m!}\rho^m\right]^{-1},$$

де $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Таким чином, при $0 \le k \le m$

$$P_k = \frac{\frac{1}{k!}\rho^k}{1 + \rho + \frac{1}{2!}\rho^2 + \ldots + \frac{1}{m!}\rho^m} \qquad (2)$$

Одержані формули носять назву формул Ерланга.

При $k = m$ формула (2) дає ймовірність того, що в даний момент всі прилади системи зайняті обслуговуванням, а отже, кожна вимога, що потрапить в цей момент, отримає відмову

$$P_m = \frac{\frac{1}{m!}\rho^m}{\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\rho^k}$$

Звернемо увагу на те, що якщо в системі обслуговування є нескінченно багато приладів, то

$$P_0 = e^{-\rho},$$

А отже $P_k = \dfrac{\rho^k}{k} e^{-\rho}$.

Формула (2) дозволяє знайти середнє число завантажених приладі

$$a_m = \sum_{k=0}^{m} k P_k = \rho\left(1 - P_m\right)$$

(ОБСЛУГОВУВАННЯ СТАНКІВ БРИГАДОЮ ПРАЦІВНИКІВ)

ДУБЛЮВАННЯ З ВІДНОВЛЕННЯМ (ненаповнений розрив)

Деякий прилад в процесі роботи може виходити із робочого стану. Для того, щоб підтримувати робочий режим неперервно, є поточний дублюючий прилад, який негайно включається в роботу, як тільки основний прилад відмовляє.

Прилад, який негайно починають відновлювати. Після відновлення він повністю відновлює свої властивості. В резервному стані пристрій не виходить з ладу.

Тривалість безвідмовної роботи приладу розподілена за законом

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}$$

Тривалість відновлення – випадкова величина і має розподіл

$$G(x)=1-e^{-\nu x}.$$

Задача як розподілений час безвідмовної роботи дублюючої системи, якщо відмова настає тоді, коли обидва пристрої знаходяться в неробочому стані.

Ми можемо вказати три стани E_0, E_1, E_2 в системі є 0, 1, 2 прилади, що відмовили.

Імовірнісні переходу із одного стану в інший за проміжок часу h такі

$$P\{E_0(t)\to E_0(t^{ih})\}=\lambda h+o(h)$$
$$P\{E_1(t)\to E_0(t+h)\}=\nu h+o(h)$$
$$P\{E_1(t)\to E_2(t+h)\}=\lambda h+o(h)$$
$$P\{E_2(t)\to E_1(t+h)\}=o(h)$$

Таким чином, в досліджуваному процесі загибелі та розмноження $\lambda_0=\lambda_1=\lambda;\quad \mu_1=\nu;\quad \mu_2=0$ і всі інші λ_k і μ_k дорівнюють нулю. І рівняння мають вигляд

$$P_0'(t)=-\lambda P_0(t)+\nu P_1(t)$$
$$P_1'(t)=-(\lambda+\nu)P_1(t)+\lambda P_0(t)$$
$$P_2'(t)=\lambda P_1(t)$$

Початкові умови $P_0(0)=0\quad P_1(0)=0\quad P_2(0)=0.$

Поставимо $P_0(t)$ із другого рівняння системи в перше, приходимо до такого рівняння відносно $P_1(t)$

$$P_1''(t)+(2\lambda+\nu)P_1'(t)+\lambda^2 P_1(t)=0$$

$$k^2+(2\lambda+\nu)k+\lambda^2=0$$

$$D=(2\lambda+\nu)^2-4\lambda^2=4\lambda^2+4\lambda\nu+\nu^2-4\lambda^2=$$

$$=4\lambda\nu+4\nu^2=\left(2\sqrt{\lambda\nu+\frac{\nu^2}{4}}\right)^2$$

$$k_{1,2}=\frac{-2\lambda-\nu\pm 2\sqrt{\lambda\nu+\frac{\nu^2}{4}}}{2}$$

Загальний розв’язок

$$P_1(t)=c_1e^{k_1 t}+c_2e^{k_2 t}$$

$$P_1(t)=ce^{-\left(\lambda+\frac{\nu}{2}\right)}\left[e^{\sqrt{\lambda\nu+\frac{\nu^2}{4}}}-e^{-\sqrt{\lambda\nu+\frac{\nu^2}{4}}}\right]$$

Тепер знаходимо

$$P_0(t)=ce^{-\left(\lambda\nu+\frac{\nu^2}{4}\right)t}\left[\frac{\nu}{2}+\sqrt{\lambda\nu+\frac{\nu^2}{4}}\right]e^{\sqrt{\lambda\nu+\frac{\nu^2}{4}t}}+$$

$$+\left(\sqrt{\lambda\nu+\frac{\nu^2}{4}}-\frac{\nu}{2}\right)e^{\sqrt{\lambda\nu+\frac{\nu^2}{4}t}}$$

$$c=\frac{\lambda}{\sqrt{4\lambda\nu+\nu^2}}$$

Шукана ймовірність безвідмовної роботи дублюючої системи

$$R(t)=P_0(t)+P_1(t)=$$

$$=e^{-\left(\lambda+\frac{\nu}{2}\right)t}\left(ch2^t\sqrt{4\lambda\nu+\nu^2}+\frac{2\lambda+\nu}{\sqrt{4\lambda\nu+\nu^2}}sh\frac{t}{2}\sqrt{4\lambda\nu+\nu^2}\right).$$

При $\nu=0$ одержимо систему без відновлення, яка випливає із останньої рівності

$$R(t)=e^{-\lambda t}(1+\lambda t).$$

Середня довжина безвідмовної роботи системи дорівнює

$$\int_0^{+\infty} R(t)dt = \frac{2\lambda+\nu}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda} + \frac{\nu}{\lambda^2}.$$

Такий доданок представляє собою середню довжину безвідмовної роботи дублюючої системи у випадку, коли немає відновлення. Другий доданок представляє собою додаток до довжини безвідмовної роботи, яке дає відновлення.

ДУБЛЮВАННЯ З ВІДНОВЛЕННЯМ (наповнений резерв)

Перейдемо до розгляду важливого частинного випадку дублювання, в якому резервний елемент знаходиться в такому ж стані, що і робочий.

Інші умови ті ж самі.

Для цього ми повинні покласти в рівняннях загибелі і розмноження $\lambda_0 = 2\lambda_1; \quad \lambda_1 = \lambda; \quad \lambda_2 = 0; \quad \mu_1 = \nu; \quad \mu_2 = 0$.

Тоді рівняння мають вигляд

$$P_0'(t) = -2\lambda P_0(t) + \nu P_1(t)$$
$$P_1'(t) = -2(\lambda+\nu)P_1(t) + 2\lambda P_0(t).$$

Звичайна процедура приводить нас до таких розв'язків.

$$P_1(t) = \frac{4\lambda}{\sqrt{\lambda^2+6\lambda\nu+\nu^2}} e^{-(3\lambda+\nu)\frac{t}{2}} sh\frac{t}{2}\sqrt{\lambda^2+6\lambda\nu+\nu^2}$$

$$P_0(t) = e^{-(3\lambda+\nu)\frac{t}{2}} \left[\begin{array}{l} ch\frac{t}{2}\sqrt{\lambda^2+6\lambda\nu+\nu^2} + \\ + \frac{\nu-\nu\lambda}{\sqrt{\lambda^2+6\lambda\nu+\nu^2}} sh\frac{t}{2}\sqrt{\lambda^2+6\lambda\nu+\nu^2} \end{array} \right]$$

Таким чином, ймовірність безвідмовної роботи системи

$$R(t) = P_0(t) + P_1(t).$$

ПРІОРИТЕТНЕ ОБСЛУГОВУВАННЯ

Постановка задачі

Трапляється велике число реальних ситуацій, коли в потоці вимог можуть бути вимоги декількох типів, причому вимоги першого типу обслуговуються без черги, якщо в черзі немає вимог такого ж типу. П відношенню до вимог першого і наступних типів правом переваги користуються вимоги другого типу і т.д. В якості прикладу наведемо приклад обслуговування на телеграфі: термінові телеграми передаються раніше звичайних навіть в тому випадку, коли прості телеграми здатні раніше термінових.

В минулому телеграми були трьох типів: блискавки, термінові і прості.

Кожен із названих типів телеграм користується перевагою в порівнянні з наступним. Так само міжміська розмова користується великою перевагою в порівнянні з міським. Початок міжміської розмови припиняє розмову між двома абонентами, що знаходяться в одному й тому ж місті.

Задачі, що виникають перед дослідниками при вивченні обслуговування декількох вимог досить різнобічні. Дійсно, по-різному розв'язуються задачі, якщо вимога першого типу застає всі прилади зайняті, в різних реальних умовах.

По-перше, вивчались такі системи обслуговування, в яких вимога старшого рангу не припиняє вже початих обслуговувань, але стає наперед всіх вимог, що нижчі за рангом.

По-друге, вивчались системи, які переривають обслуговування вимог нижчих рангів.

Друга схема в свою чергу ділиться на дві категорії: в першій із них при відновленні обслуговування перерваної вимоги враховується час, що витрачений на її обслуговування; в другій категорії цей час втрачається і обслуговування починається знов.

З таким можна зустрітись при роботі обчислювальних машин, коли одні відмови тільки припиняють обчислення, але не вимагають проводити ті обчислення заново, відмови другого типу вносять помилки в раніше одержані результати і вимагають проведення всіх розрахунків заново.

Для обслуговування декількох потоків розглядаються задачі не тільки з вимогами, але і з втратами.

В задачах телефонного обслуговування з'явилось необхідність розглядати таку задачу: на систему приладів надходять дві вимоги, із яких вимога, що має перевагу, обслуговується по схемі систем з втратами, а вимога без переваги – по схемі системи з очікуванням.

ЗАДАЧІ З ВТРАТАМИ

На m однакових приладів надходять два незалежні прості потоки вимог з параметрами λ_1 і λ_2. Кожна вимога, що надходить в момент, коли вільний хоча б один обслуговуючий прилад, починає обслуговування негайно. Якщо вимога першого типу поступає в той момент, коли всі прилади зайняті, але частина з них обслуговує вимогу другого типу, то один із цих приладів негайно переключається на обслуговування нової вимоги, вищої за рангом, а обслуговування вимоги другого типу втрачається, залишившись недообслуженим.

Таким чином, вимоги другого типу можуть втрачатись не тільки коли всі прилади зайняті, але й тоді, коли в момент обслуговування вимоги другого типу і всі прилади зайняті, з'явилась вимога вищого рангу.

Вимога першого типу також може отримати відмову, але тільки в тому випадку коли всі прилади зайняті обслуговуванням вимог такого ж рангу.

Припустимо, що вимога першого типу для свого обслуговування потребує часу, що розподілений по показниковому закону з параметром μ_1, час обслуговування вимог другого типу також розподілений показниково, але з параметром μ_2.

До початку формального розв'язку ясно, що перший потік обслуговується так, ніби то другого потоку зовсім не існує. Це зауваження дозволяє нам одержати до різних обчислень ймовірність витрат вимог першого типу.

Вона дорівнює

$$\rho_{m0} = \frac{\frac{\rho_1^m}{m!}}{\sum_{i=0}^{m} \frac{\rho_1^i}{i!}} \quad \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$$

Відомо, що якщо на обслуговування надходять два незалежних потоки з параметрами λ_1 і λ_2, то загальний потік буде також простим з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$. Дійсно, ймовірність того, що за проміжок часу довжини t поступить k яких-небудь вимог, може бути представлено, по формулі повної ймовірності як сума добутку ймовірностей того, що за цей проміжок часу поступить s вимог першого типу і $k-s$ вимог другого типу.

Ця ймовірність дорівнює

$$\sum_{s=0}^{k} \frac{(\lambda_1 t)^s}{s!} e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_2 t)^{k-s}}{(k-s)!} e^{-\lambda_2 t}$$

Згідно формули бінома Ньютона ця сума дорівнює

$$\frac{[(\lambda_1 + \lambda_2)t]^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

Позначимо через $p_{i,j}(t)$ ймовірність того, що в момент часу t зайняті обслуговуванням вимог першого типу i приладів і другого типу j приладів.

Якщо врахувати, що число зайнятих приладів не може перевищувати загального числа приладів, то за види повинні виконуватись нерівності.

$$0 \le i + j \le m.$$

Покладемо $P_i(t) = \sum_{j=0}^{m-i} p_{i,j}(t)$ і $P_j(t) = \sum_{i=0}^{m-j} p_{i,j}(t)$.

Очевидно, що $P_i(t)$ і $P_j(t)$ означають ймовірність того, що в момент t обслуговується i вимог першого типу відповідно j вимог другого типу, $P_{m0}(t)$ означає ймовірність втрати вимоги першого типу, яка прибула в момент часу t.

Сума

$$\sum_{i+j=m} p_{i,j}(t)$$

представляє собою ймовірність втрати вимоги другого типу, що поступила в момент часу t. Ймовірність втрати обслуговуючої вимоги другого типу дорівнює різниці

$$\sum_{i+j=m} p_{i,j}(t) - P_{m0}(t)$$

РІВНЯННЯ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ $p_{i,j}(t)$

Ми не будемо зупинятись на виводі рівнянь для визначення ймовірностей $p_{i,j}(t)$, оскільки ц не добавить нічого нового, що нам вже відомо. Обмежимось приведенням їх в готовому вигляді.

$$p'_{00}(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2)p_{00}(t) + \mu_1 p_{10}(t) + \mu_2 p_{01}(t) \qquad (1)$$

При $1 \le i \le m$

$$\begin{aligned} p'_{i0}(t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + i\mu_1)p_{i0}(t) + \lambda_1 p_{i-1,0}(t) + \\ &+ (i+1)\mu_1 p_{i+1,0}(t) + \mu_2 p_{i1}(t) \end{aligned} \qquad (2)$$

$$p'_{m0}(t) = -m\mu p_{m0}(t) + \lambda_1\left(p_{m-1,0}(t) + p_{m-1,1}(t)\right) \quad 1 \le j \le m \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} p'_{0j}(t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + j\mu_2)p_{0j}(t) + \lambda_2 p_{0,j-1}(t) + \\ &+ \mu_1 p_{ij}(t) + \mu_2(j+1)p_{0,j+1}(t) \end{aligned} \qquad (4)$$

$$p'_{0m}(t) = -(\lambda_1 + m\mu_2)p_{0m}(t) + \lambda_2 p_{0,m-1}(t) \qquad (5)$$

При $i \ge 1; \quad j \ge 1 \quad i + j = m$

$$\begin{aligned} p'_{ij}(t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + i\mu_1 + j\mu_2)p_{ij}(t) + \lambda_1 p_{i-1,j}(t) + \\ &+ \lambda_2 p_{i,j-1}(t) + (i+1)\mu_1 p_{i+1,j}(t) + \mu_2 p_{i,j+1}(t) \end{aligned} \qquad (6)$$

При $i \ge 1; \quad j \ge 1 \quad i + j = m \quad i \ne m; \quad j \ne m.$

$$\begin{aligned} p'_{ij}(t) &= -(\lambda_1 + i\mu_1 + j\mu_2)p_{ij}(t) + \\ &+ \lambda_1\left(p_{i-1,j}(t) + p_{i-1,j+1}(t) + p_{i-1,2}(t)\right) + \lambda_2 p_{i-1,j}(t) \end{aligned} \qquad (7)$$

В результаті сумування рівнянь (1), (4), (7) по всім значенням $j = \overline{0,m}$ одержимо рівняння

$$p'_{0\bullet}(t) = -\lambda_1 p_{0\bullet}(t) + \mu_1 p_{1\bullet}(t) \qquad (8)$$

Сумування рівнянь (2), (6), (7) по j.

Література

1. Б.В. Тпеденко, Н.Н. Коваленко «Введение в теорию массового обслуживания ».
2. В.В. Анисимов, О.К. Закусило, В.С. Донченко «Элементы теории массового обслуживания и асимптомического анализа систем»
3. Ивченко Г.И. «Теория массового обслуживания»
4. Клейнрок Л. «Теория массового обслуживания»
5. Сани Т.Л. «Элементы теории массового обслуживания»