

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ  
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь



«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Декан факультету математики та  
цифрових технологій

/Микола МАЛІЯР/

« 27 » 06 2025 року

**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ  
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.**

Рівень вищої освіти	другий (магістерський)
Галузь знань	<b>Е Природничі науки, математика та статистика</b>
Спеціальність	<b>Е7 Математика</b>
Освітня програма	<b>Комп'ютерно-математичне моделювання</b>
Статус дисципліни	<b>обов'язкова</b>
Мова навчання	<b>українська</b>

Робоча програма навчальної дисципліни «**Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь**» для здобувачів вищої освіти галузі знань **Е Природничі науки, математика та статистика** спеціальності **Е7 Математика** освітньої програми «**Комп'ютерно-математичне моделювання**».

**Розробник:**

Маринець В.В., професор каф. алгебри та диференціальних рівнянь

Робочу програму розглянуто та затверджено на засіданні кафедри алгебри та диференціальних рівнянь протокол №   10   від «  18  »   06   2025 р.

Завідувач кафедри  Олександр РЕЙТІЙ

Схвалено науково-методичною комісією ФМЦТ

протокол №   10   від «  26  »   06   2025 р.

Голова науково-методичної комісії  Наталія ЮРЧЕНКО

## 1. ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

<b>Найменування показників</b>	<b>Розподіл годин за навчальним планом</b>	
	Денна форма навчання	Заочна форма навчання
Кількість кредитів ЄКТС – 4	Рік підготовки:	
Загальна кількість годин – 120	1-й	–
Кількість модулів – 2	Семестр:	
Тижневих годин для денної форми навчання:  аудиторних – 2  самостійної роботи студента – 4	2-й	–
	Лекції:	
	20 год.	–
	Практичні (семінарські):	
	-	–
Вид підсумкового контролю: - залік	Лабораторні:	
	22 год.	–
Форма підсумкового контролю: усна	Самостійна робота:	
	78 год.	–

## 2. Мета навчальної дисципліни

Мета і завдання курсу – дати студентам-магістрам спеціальності «Математика» знання основ теорії крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, ознайомити студентів методами аналітичного та наближеного інтегрування крайових задач, навчити їх складати математичні моделі різних явищ природи, які приводять до крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, та застосувати вивчені алгоритми для знаходження розв'язків поставлених крайових задач, вміти проводити дослідження реальних процесів на основі вивчення якісних властивостей побудованих математичних моделей.

Відповідно до освітньої програми вивчення дисципліни здобувачів вищої освіти таких загальних та фахових компетентностей:

- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу на основі логічних аргументів;
- здатність застосувати знання на практиці;
- уміння працювати із сучасною комп'ютерною технікою та володіння новітніми інформаційними технологіями;
- здатність до опанування нових знань та продовження професійного розвитку;
- здатність аналізувати, синтезувати, щоб виявляти проблеми й приймати рішення;
- здатність до критичного мислення, навички обдумування;
- здатність до пошуку оброблення та аналізу інформації з різних джерел;
- володіти основними поняттями математики, інформатики і вміти застосовувати їх під час складання математичних моделей природознавства у вигляді крайових задач для звичайних диференціальних задач.

## 3. ПЕРЕДУМОВИ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Передумовами вивчення навчальної дисципліни «Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь» є опанування таких навчальних дисциплін освітньої програми:

- ОК-5 Математичний аналіз функції однієї змінної
- ОК-6 Математичний аналіз функцій багатьох змінних
- ОК-7 Алгебра
- ОК-8 Лінійна алгебра
- ОК-10 Диференціальні рівняння та їх застосування
- ОК-17 Функціональний аналіз

## 4. ОЧІКУВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

Відповідно до освітньої програми «Комп'ютерно-математичне моделювання», вивчення навчальної дисципліни повинне забезпечити досягнення здобувачами вищої освіти таких програмних результатів навчання (ПРН):

<b>Програмні результати навчання</b>	<b>Шифр РН</b>
Знати та вміти застосовувати базові методи аналізу та інтегрування крайових задач у випадку звичайних диференціальних рівнянь і систем.	<b>РН-04</b>
Оволодіння належними робочими навичками працювати самостійно (кваліфікаційна робота) або в групі (практична робота), уміння отримати результат у рамках обмеженого часу з наголосом на професійну сумлінність.	<b>РН-18</b>

Очікувані результати навчання, які повинні бути досягнуті здобувачами освіти після опанування навчальної дисципліни «Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь» таких програмних результатів навчання (ПРН):

<b>Очікувані результати навчання з дисципліни</b>	<b>Шифр РН</b>
<b>Знання.</b> Володіння основною термінологією теорії крайових задач у випадку звичайних диференціальних рівнянь, принципами та методами їх розв'язання, уміння аналізувати одержані результати.	<b>РН-04</b>
<b>Розуміння.</b> Здатність математично описувати процеси різної природи та розв'язувати відповідні математичні моделі і давати одержаних результатів.	<b>РН-04</b>
<b>Застосування.</b> Уміння: а) використовувати вивчений матеріал для побудови розв'язків деяких класів лінійних диференціальних рівнянь другого порядку при різних крайових умовах та дати їх обгрутування.  б) самостійно розв'язувати крайові задачі теорії диференціальних рівнянь у рамках обмеженого часу з наголосом на професійну сумлінність	<b>РН-04</b>  <b>РН-18</b>
<b>Аналіз.</b> Здатність: а) до виділення окремих змістових розділів теорії різних крайових задач у випадку звичайних диференціальних рівнянь, виявлення взаємозв'язку між ними, осмислення структурних принципів диференціальних рівнянь; б) бачити помилки й огріхи в логіці міркувань, бачити різницю між теоретичним прогнозом і отриманими на практиці результатами у рамках обмеженого часу.	<b>РН-04</b>  <b>РН-18</b>
<b>Оцінка.</b> Уміння оцінювати значення вивченого матеріалу для розв'язування конкретних крайових задач теорії диференціальних рівнянь, засновувати свої судження на чітких критеріях, узгоджених із теоретичними висновками.	<b>РН-18</b>

<b>Синтез.</b> Уміння комбінувати базові принципи й методи теорії звичайних диференціальних рівнянь, щоб обрати найотимальніший розв'язання крайових задач.	<b>РН-04</b>
---	--------------

## **5. ЗАСОБИ ДІАГНОСТИКИ ТА КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ**

### **Засоби оцінювання та методи демонстрування результатів навчання**

Засобами оцінювання та методами демонстрування результатів навчання з навчальної дисципліни є:

- індивідуальні завдання;
- письмові самостійні роботи;
- модульні контрольні роботи;
- залік.

### **Форми контролю та критерії оцінювання результатів навчання**

Форми поточного контролю: перевірка індивідуальних завдань, аудиторні самостійні роботи.

Форми модульного контролю: письмові контрольні роботи.

Форми підсумкового семестрового контролю: залік.

### **Розподіл балів, які отримують здобувачі вищої освіти (модуль 1)**

<b>Поточне оцінювання та самостійна робота</b>		<b>Модульна контрольна робота</b>	<b>Сума</b>
Теми 1-6	Теми 7-10	60	100
20	20		

### **Розподіл балів, які отримують здобувачі вищої освіти (модуль 2)**

<b>Поточне оцінювання та самостійна робота</b>		<b>Модульна контрольна робота</b>	<b>Сума</b>
Теми 11-14	Теми 15-18	60	100
20	20		

## Оцінювання окремих видів навчальної роботи з дисципліни

Вид діяльності здобувача вищої освіти	Модуль 1		Модуль 2	
	Кількість	Максимальна кількість балів (сумарна)	Кількість	Максимальна кількість балів (сумарна)
Індивідуальні завдання	2	20	2	20
Письмове тестування при тематичному оцінюванні	2	20	2	20
Модульна контрольна робота	1	60	1	60
<b>Разом</b>		<b>100</b>		<b>100</b>

### Критерії оцінювання індивідуальних розрахункових робіт

Оцінювання індивідуальних розрахункових робіт проводиться згідно з наступним критерієм (у % від від кількості балів, виділених на завдання, із заокругленням до цілого числа):

0% – індивідуальна розрахункова робота не виконана;

40% – індивідуальна розрахункова робота виконана частково та містить суттєві помилки в розрахунках;

60% – індивідуальна розрахункова робота виконана повністю, але містить суттєві помилки в розрахунках;

80% – індивідуальна розрахункова робота виконана повністю і вчасно, проте містить окремі несуттєві недоліки;

100% – індивідуальна розрахункова робота виконана вірно, вчасно і без зауважень.

### Критерії оцінювання модульної контрольної роботи

Протягом семестру проводяться дві модульні контрольні роботи. Кожна модульна контрольна робота складається з двох блоків:

Блок А. Теоретична частина (10 балів) складається з 5 теоретичних питань, на які потрібно дати коротку відповідь (записати відповідну формулу). Правильна відповідь на кожне теоретичне питання оцінюється 2 балами.

Блок Б. Практична частина (40 балів) складається з 5 практичних завдань. Розв'язання кожного практичного завдання оцінюється 8 балами;

8 балів – ставиться, якщо практичне завдання розв'язане вірно;

6 балів – ставиться, якщо в практичному завданні допущені незначні помилки;

4 бали – якщо розв’язано вірно не менше 50% обсягу практичного завдання;

0 балів – якщо практичне завдання не розв’язане або розв’язане невірно.

### Критерії оцінювання підсумкового семестрового контролю

Обов’язковою умовою допуску здобувача до підсумкового семестрового контролю є вчасне виконання індивідуальних розрахункових робіт, а також сумарна кількість балів за кожен модуль не менше 35 балів.

Підсумковий семестровий контроль проводиться у вигляді іспиту, який відбувається в формі екзаменаційної контрольної роботи, що оцінюється максимально 50 балами і має структуру, аналогічну до описаної вище модульної контрольної роботи. Друга складова рейтингу здобувача отримується як середній бал за роботу на практичних заняттях плюс індивідуальні розрахункові роботи (сумарно також максимально 50 балів).

Шкала оцінювання враховує наступні критерії:

— **«А»** («відмінно», 90 та вище балів) заслуговує здобувач, котрий виявив всебічне і глибоке знання програмового матеріалу, вміння вільно виконувати завдання, передбачені програмою, засвоїв основну та ознайомився з додатковою літературою, розуміє взаємозв’язок головних понять дисципліни та їх значення для майбутньої професії;

— **«В»** («добре», 82-89 балів) заслуговує здобувач, котрий виявив повне знання програмового матеріалу, успішно виконує передбачені програмою завдання, засвоїв основну літературу, рекомендовану програмою, виявив систематичний характер знань з дисципліни і здатний до самостійного доповнення, але під час відповіді допустив деякі неточності;

— **«С»** («добре», 74-81 бал) заслуговує здобувач, котрий виявив не цілком повне знання програмового матеріалу, не завжди успішно виконує передбачені програмою завдання, частково засвоїв основну літературу, рекомендовану програмою, виявив не систематичний характер знань з дисципліни, не завжди здатний до її самостійного доповнення і під час відповіді допускає деякі неточності;

— **«D»** («задовільно», 64-73 бали) заслуговує здобувач, котрий виявив знання основного програмового матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий з основною рекомендованою літературою. Як правило, оцінка **«D»** виставляється студентам, котрі допустили помилки у відповіді на іспиті та при виконанні екзаменаційних завдань, але володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомоги викладача;

— «Е» («задовільно», 60-63 бали) заслуговує здобувач, котрий виявив часткове знання основного програмового матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, не завжди вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий лише частково з основною рекомендованою літературою. Як правило, оцінка «Е» виставляється студентам, котрі допустили грубі помилки у відповіді на іспиті та при виконанні екзаменаційних завдань, але частково володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомоги викладача;

— «FX» («незадовільно», 35-59 балів) виставляється здобувачеві, котрий виявив суттєві прогалини в знаннях основного програмового матеріалу, допустив принципові помилки у виконанні передбачених програмою завдань;

— «F» («незадовільно», 0-34 балів) виставляється здобувачеві, коли протягом семестру він допустив грубі помилки у виконанні передбачених програмою завдань.

При виставленні оцінки можуть враховуватися результати навчальної роботи здобувача протягом семестру.

Іспит виставляється (без складання) у випадку набору кількості балів, що відповідає мінімальній оцінці «задовільно» (E).

## **Програма навчальної дисципліни**

### **Змістовий модуль 1. Загальні поняття теорії крайових задач.**

**Тема 1.** Основні поняття та означення теорії крайових задач. Типи крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та їх систем.

**Тема 2.** Задачі практики, які приводять до крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь.

**Тема 3.** Лінійний простір та його елементи. Лінійні диференціальні вирази та крайові умови. Лінійний диференціальний оператор.

**Тема 4.** Спряжений диференціальний вираз. Формула Лагранжа. Умова самоспряженості лінійного диференціального виразу.

**Тема 5.** Спряжені крайові умови. Спряжений оператор. Спряжена та самоспряжена крайова задача. Спряжені крайові задачі в просторі вектор-функцій.

### **Змістовий модуль 2. Лінійні крайові задачі та їх зв'язок із задачами Коші.**

**Тема 6.** Лінійна однорідна крайова задача (ЛОКЗ). Критерії існування нетривіального розв'язку ЛОКЗ. ЛОКЗ в просторі вектор-функцій.

**Тема 7.** Лінійна неоднорідна крайова задача. Існування та єдиність розв'язку лінійної неоднорідної крайової задачі.

**Тема 8.** Зведення крайових задач до задач Коші. Метод суперпозиції (додаткових функцій).

**Тема 9.** Метод прогонки для лінійних крайових задач.

**Тема 10.** Метод стрільби для диференціальних рівнянь та систем другого порядку.

### Змістовий модуль 3. Спектральна теорія лінійних диференціальних операторів.

**Тема 11.** Власні значення та власні функції лінійного диференціального оператора. Критерії існування власних значень та власних функцій. Власні значення та власні функції в просторі вектор-функцій.

**Тема 12.** Самоспряжені спектральні задачі та їх властивості. Задача Штурма-Ліувілля.

**Тема 13.** Теореми про власні значення і власні функції спряжених операторів. Власні значення і власні функції самоспряженого диференціального оператора.

### Змістовий модуль 4. Функція Гріна лінійного диференціального оператора та її застосування.

**Тема 14.** Обернений оператор та його властивості. Обернення диференціального оператора. Функція Гріна.

**Тема 15.** Існування функції Гріна лінійного диференціального оператора. Побудова функції Гріна. Матриця Гріна.

**Тема 16.** Обернення диференціального оператора за допомогою функції Гріна. Функція Гріна самоспряженого оператора.

**Тема 17.** Зведення крайових задач із параметром до інтегральних рівнянь. Метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь.

**Тема 18.** Монотонні ітераційні процеси. Побудова двосторонніх алгоритмів наближеного інтегрування крайових задач.

### Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин											
	Денна форма						Заочна форма					
	Усьо- го	у тому числі					Усьо- го	у тому числі				
		Лк	п	лб	інд	ср		лк	п	лб	інд	ср
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>МОДУЛЬ 1</b>												
<b>Змістовий модуль 1.</b>												
<b>Елементарна теорія лінійних диференціальних операторів</b>												
<b>1. Основні поняття</b> та означення теорії крайових задач. Типи крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та їх систем.	3	1				2						
<b>2. Задачі практики</b> , які приводять до крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь.	11	1	2			8						
<b>3. Лінійний простір</b> та його	3	1				2						

елементи. Лінійні диференціальні вирази та крайові умови. Лінійний диференціальний оператор.														
<b>4. Спряжений</b> диференціальний вираз. Формула Лагранжа. Умова самоспряженості лінійного диференціального виразу.	5	1				4								
<b>5. Спряжені</b> крайові умови. Спряжений оператор. Спряжена та самоспряжена крайова задача. Спряжені крайові задачі в просторі вектор-функцій.	6	1	1			3								
<b>Разом – Змістовий модуль 1</b>	<b>27</b>	<b>5</b>	<b>3</b>			<b>19</b>								
<b>Змістовий модуль 2. Лінійні крайові задачі та їх зв'язок із задачами Коші</b>														
<b>6. Лінійна однорідна</b> крайова задача (ЛОКЗ). Критерії існування нетривіального розв'язку ЛОКЗ. ЛОКЗ в просторі вектор-функцій.	7	1	2			4								
<b>7. Лінійна неоднорідна</b> крайова задача. Існування та єдиність розв'язку лінійної неоднорідної крайової задачі.	8	1	2			5								
<b>8. Зведення</b> крайових задач до задач Коші. Метод суперпозиції (додаткових функцій).	8	1	2			5								
<b>9. Метод прогонки</b> для лінійних крайових задач.	5	1	2			2								
<b>10. Метод стрільби</b> для диференціальних рівнянь та систем другого порядку.	4	1	1			2								
<b>Разом – Змістовий модуль 2</b>	<b>32</b>	<b>5</b>	<b>9</b>			<b>18</b>								
<b>РАЗОМ ЗА МОДУЛЬ 1</b>	<b>59</b>	<b>10</b>	<b>12</b>			<b>37</b>								
<b>МОДУЛЬ 2</b>														
<b>Змістовий модуль 3.</b>														
<b>Спектральна теорія лінійних диференціальних операторів</b>														
<b>11. Власні значення</b> та власні функції лінійного диференціального оператора. Критерії існування власних зна-	9	1	2			6								

чень та власних функцій. Власні значення та власні функції в просторі вектор-функцій.												
<b>12. Самоспряжені</b> спектральні задачі та їх властивості. Задача Штурма-Ліувілля.	9	2	1			6						
<b>13. Загальна</b> спектральна задача. Теорія приєднаних функцій. Задачі практики, які описуються спектральними задачами.	13	2	3			8						
<b>Разом – Змістовий модуль 3</b>	34	5	7			20						

#### Змістовий модуль 4.

#### Функція Гріна лінійного диференціального оператора та її застосування

<b>14. Теореми</b> про власні значення і власні функції спряжених операторів. Власні значення і власні функції самоспряженого диференціального оператора.	4	1				3						
<b>15. Обернений оператор</b> та його властивості. Обернення диференціального оператора. Функція Гріна.	7	1	2			4						
<b>16. Існування</b> функції Гріна лінійного диференціального оператора. Побудова функції Гріна. Матриця Гріна.	6	1	1			4						
<b>17. Обернення</b> диференціального оператора за допомогою функції Гріна. Функція Гріна самоспряженого оператора.	7	1				6						
<b>18. Монотонні</b> ітераційні процеси. Побудова двосторонніх алгоритмів наближеного інтегрування крайових задач.	5	1				4						
<b>Разом – Змістовий модуль 4</b>	40	5	3			21						
<b>РАЗОМ ЗА МОДУЛЬ 2</b>	63	10	10			41						
<b>УСЬОГО ГОДИН</b>	120	20	22			78						

### 3. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Задачі практики, які приводять до крайових задач	2
2	Спряжені крайові задачі.	2
3	Лінійні однорідні крайові задачі	2
4	Лінійні неоднорідні крайові задачі	2
5	Зведення крайових задач до задач Коші	2
6	Метод прогонки.	2
7	Метод стрільби	1
8	Власні значення теорії крайових задач	2
9	Задачі Штурма-Ліувілля	1
7	Задачі практики, які приводять до спектральних задач	3
8	Функція Гріна і її існування та побудова	3
9	Обернення диференціального оператора	1

### 4. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Вивчення матеріалу лекцій	60
2	Підготовка до заліку	18
3	Разом	78

### 5. Індивідуальні завдання

#### Приклади по модулю 1

Перевірити на самоспряженість крайові задачі:

- $y'' + xy = \sin x$ ,  $x \in (0;1)$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(1) = 0$ .
- $y'' - xy = 9x - 7$ ,  $x \in (0;1)$ ;  $y(0) - y'(1) + y'(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ .
- $y^{(4)} - y'' = 0$ ,  $x \in (a,b)$ ;  $y(a) = y(b) = 0$ ,  $y''(a) = y''(b) = 0$ .
- $y^{(4)} - y'' + xy = 2x^2$ ,  $x \in (0;1)$ ;  $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ ,  $y'''(1) = 0$ .

Побудувати спряжену крайову задачу до заданої:

- $xy'' + y' = 1$ ,  $x \in (1;2)$ ;  $y(1) = y'(2) = 0$ ,  $y(2) - y'(1) = 0$ .
- $y''' - xy = 4$ ,  $x \in (0;1)$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ .
- $y''' - y'' = 1 + e^x$ ,  $x \in (-2;0)$ ;  
 $y''(0) - 2y'(0) + y(0) = 0$ ,  $y''(-2) - 2y'(-2) + y(-2) = 0$ .
- $xy^{(4)} - y'' = e^{3x}$ ,  $x \in (0;1)$ ;  $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ ,  $y(1) = y'(1)$ .

Дослідити лінійні однорідні крайові задачі:

9.  $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$

$y'(0) - 2y(0) = 0, \quad y'(1) - 2y(1) = 0.$

10.  $y''' - 8y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in \left(0; \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right); \quad y'(0) - 2y(0) = 0, \quad y'\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right) - 2y\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0.$

11.  $y^{(4)} - \ln^2 2y'' = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;3);$

$y(0) = 0, \quad y'(1) = 0, \quad y''(2) = 0, \quad y'''(3) = 0.$

12.  $y^{(4)} + 2y'' + y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0; \pi/2);$

$y(0) = y'(0) = y(\pi/2) = y'(\pi/2) = 0, \quad y''(0) - y''(\pi/2) = 0.$

13.  $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$

$y(1) = y'(1) = y''(0) = y'''(0) = 0, \quad y^{(4)}(1) - 4e^3 y^{(4)}(0) = 0.$

14.  $\begin{cases} x' = 5x - 4y, \\ x' = x + y, \end{cases} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in \left(0; \frac{1}{2}\right); \quad x(0) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$

15.  $\begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ x' = -x - 2y, \end{cases} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0; \pi/2); \quad x(0) = 0, \quad y(0) - 2y(\pi/2) = 0.$

16.  $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ x' = 2x + y, \end{cases} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0;1); \quad x(0) + x(0) = 0, \quad y(1) + y(1) = 0.$

Дослідити лінійні неоднорідні крайові задачі:

17.  $y'' + y = \csc x, \quad y = y(x), \quad x \in (\pi/4; \pi/2);$

$y'(\pi/4) - y(\pi/4) = 0, \quad y'(\pi/2) = \pi/4.$

18.  $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x, \quad y = y(x), \quad x \in (0; \pi/4); \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/4) = -0,5.$

19.  $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x, \quad y = y(x), \quad x \in (0; \pi); \quad y'(0) = 1, \quad y'(\pi) = 1.$

20.  $y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1}, \quad y = y(x), \quad x \in (0;24);$

$y'(0) + y(0) = 0, \quad y(24) = 0.$

21.  $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (1;2);$

$y'(1) - 2y(1) = 1, \quad y'(2) - y(2) = 4.$

22.  $y''' - y'' = 1 + e^x, \quad y = y(x), \quad x \in (-2;0);$

$y''(0) - 2y'(0) + y(0) = 0, \quad y''(-2) - 2y'(-2) + y(-2) = 0, \quad y''(0) + y''(-2) = 0.$

23.  $y''' - y'' - y' + y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$

$y(0) + 2y'(0) = -2, \quad y''(0) = -2, \quad y''(1) - y(1) = -2e.$

$$24. \quad y''' + 4y'' + y' - 6y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

$$25. \quad \begin{cases} x' = 4x - 4y + 3, \\ y' = -2x + 2y - 1, \end{cases} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0;1); \quad x(0) = -1, \quad x(1) + y(0) = 0.$$

$$26. \quad \begin{cases} x' = -4y + e^t, \\ y' = x + 4y, \end{cases} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0; \ln 2);$$

$$x(0) = -2, \quad x(\ln 2) - 2y(\ln 2) = 0.$$

$$27. \quad \begin{cases} x' = 3x - 5y - 7e^{-t}, \\ y' = 3x - 3y - 4e^{-t}, \end{cases} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0; 3\pi/2);$$

$$x(0) = y(0), \quad x(3\pi/2) = y(3\pi/2).$$

$$28. \quad \begin{cases} x' = 6x - 4y - \sin t, \\ y' = 9x - 6y, \end{cases} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0; \pi/2);$$

$$x(0) - y(\pi/2) = 1, \quad y(0) = 0.$$

Шляхом зведення до задач Коші розв'язати крайові задачі:

$$29. \quad y'' - 4y = 8x, \quad y = y(x), \quad x \in (0; \ln 2); \quad y'(0) = -2, \quad y(\ln 2) = 0.$$

$$30. \quad y'' + 2y' + 2y = e^{-x}, \quad y = y(x), \quad x \in (0; 2\pi);$$

$$y'(0) - 2y(0) = 0, \quad 2y'(2\pi) - y(2\pi) = 0.$$

Методом прогонки знайти розв'язки крайових задач:

$$31. \quad y'' + y = x \sec x, \quad y = y(x), \quad x \in (0; \pi/4);$$

$$y'(0) = 2, \quad y'(\pi/4) + 5y(\pi/4) = 2.$$

$$32. \quad y'' = x - 2, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1); \quad y'(0) + \frac{1}{2}y(0) = -1, \quad y'(1) + 2y(1) = 1.$$

За допомогою методу стрільби побудувати розв'язки крайових задач:

$$33. \quad x(x-1)y'' - xy' + y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (2;3);$$

$$y(2) = \ln 4, \quad y(3) - 3y'(3) = 4.$$

$$34. \quad \begin{cases} x' = 2x + 2y + 4e^{-3t}, \\ y' = x - 5y - 2e^{-3t}, \end{cases} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0; \ln 2);$$

$$x(0) - 2y(0) = 0, \quad x(\ln 2) + 22y(\ln 2) = -1.$$

## Приклади по модулю 2

Дослідити спектральні задачі, вважаючи параметр  $\lambda$  дійсним:

$$35. \quad y'' + \lambda y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0; 2\pi); \quad y(0) = 0, \quad y(2\pi) = 0.$$

$$36. \quad y'' + \lambda y' = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1); \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

37.  $y'' + 2y' + \lambda y = 0$ ,  $y = y(x)$ ,  $x \in (0;1)$ ;  
 $y'(0) + y(0) = 0$ ,  $y'(1) + y(1) = 0$ .
38.  $2y'' - 8y' + \lambda y = 0$ ,  $y = y(x)$ ,  $x \in (0;1)$ ;  
 $y'(0) - 2y(0) = 0$ ,  $y'(1) - 2y(1) = 0$ .
39.  $y''' + \lambda y' = 0$ ,  $y = y(x)$ ,  $x \in (0; \pi/6)$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ ,  $y'(\pi/6) = 0$ .
40.  $y''' + \lambda y'' = 0$ ,  $y = y(x)$ ,  $x \in (0;1)$ ;  $y(0) = y''(0) = 0$ ,  $y''(1) = 0$ .
41.  $y^{(4)} - \lambda^4 y = 0$ ,  $y = y(x)$ ,  $x \in (-1;1)$ ;  
 $y(-1) = y(1)$ ,  $y'(-1) = y'(1)$ ,  $y''(-1) = y''(1)$ ,  $y'''(-1) = y'''(1)$ .
42.  $y^{(4)} - \lambda^3 y' = 0$ ,  $y = y(x)$ ,  $x \in (0;1)$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y'(1) = 0$ .

Перевірити дійсність власних значень і дослідити спектральні задачі:

43.  $y'' - \lambda y = 0$ ,  $y = y(x)$ ,  $x \in (0;1)$ ;  $y'(0) = y(0)$ ,  $y(1) = 0$ .
44.  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y = y(x)$ ,  $x \in (0;2\pi)$ ;  $y(0) = y(2\pi)$ ,  $y'(0) = y'(2\pi)$ .
45.  $x^2 y'' + 2xy' + \lambda y = 0$ ,  $y = y(x)$ ,  $x \in (1;2)$ ;  $y(1) = 0$ ,  $y(2) = 0$ .
46.  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y = y(x)$ ,  $x \in (a,b)$ ;  $y(a) = y(b) = 0$ ,  $0 < a < b$ .

Вважаючи параметр  $\lambda$  дійсним, знайти нетривіальні розв'язки крайових задач для систем диференціальних рівнянь:

47. 
$$\begin{cases} x' = \lambda x + y, \\ y' = -x + \lambda y, \end{cases} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0; \pi); \quad x(0) = 2y(0), \quad x(\pi) = 0.$$
48. 
$$\begin{cases} x' = \lambda x + y, \\ y' = -x - \lambda y, \end{cases} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0;1); \quad x(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$
49. 
$$\begin{cases} x' = \lambda x - y, \\ y' = 0,25x + y, \end{cases} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0;2); \quad x(2) = 0, \quad y(0) = 0.$$

Перевірити існування функції Гріна для крайової задачі:

50.  $y^{(4)} + y'' = \sin x - \cos x$ ,  $y = y(x)$ ,  $x \in (0; \pi)$ ;  
 $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ ,  $y'(\pi) = y''(\pi)$ .
51.  $\lambda_4(y) \equiv [f_2(x)y''(x)]'' = 1$ ,  $x \in (0;l)$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ ,  $y''(l) = y'''(l) = 0$ .

Побудувати функцію Гріна лінійного диференціального оператора, породженого заданими лінійним диференціальним виразом і крайовими умовами:

52.  $\lambda_2(y) = y'' + n^2 y(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in (0;l)$ ;  $y(0) - y(l) = 0$ ,  $y'(0) - y'(l) = 0$ .

53.  $\lambda_2(y) = [-f_1(x)y'(x)]'$ ,  $x \in (0;l)$ ;  
 $y(0) = 0$ ,  $y(l) + Cy'(l) = 0$ ,  $C = \text{const} \neq 0$ .
54.  $y''' - y'' + 4y' - 4y(x) = x \cos^{-1} x$ ,  $x \in (0;1)$ ;  $y(0) = y''(0) = 0$ ,  $y'(1) = 0$ .
55.  $\lambda_3(y) = y''' + y'' 2 \operatorname{tg} 2x$ ,  $y = y(x)$ ,  $x \in (0;1)$ ;  $y(0) = y'(0) = 0$ ,  $y''(1) = 0$ .
56.  $\lambda_4(y) = y^{(4)} - n^4 y$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in (0;l)$ ;  $y(0) = y''(0) = 0$ ,  $y(l) = y''(l) = 0$ .

Методом функції Гріна розв'язати крайові задачі:

57.  $x^2 y'' + xy' - 4y = 34x^3$ ,  $y = y(x)$ ,  $x \in (1;2)$ ;  $y(1) = 0$ ,  $y'(2) = 0$ .
58.  $y'' - 4y = 49e^{2x}$ ,  $y = y(x)$ ,  $x \in (0;\ln 2)$ ;  $y(0) = y'(0)$ ,  $y(\ln 2) = 0$ .
59.  $[-(x+1)y'(x)]' = 1$ ,  $x \in (0;1)$ ;  $y(0) = 0$ ,  $y(1) + 2y'(1) = 0$ .

## 6. Методи навчання

- ❖ Лекції
- ❖ Практичні заняття
- ❖ Контрольні роботи
- ❖ Домашні завдання
- ❖ Консультації, індивідуальні заняття

## 7. Методи контролю

- Усний контроль у вигляді індивідуального та фронтального опитування.
- Письмовий контроль у вигляді модульних контрольних робіт, самостійних письмових робіт, поточного тестування.
- Проведення заліку.

## 8. Розподіл балів, які отримують студенти

Поточне тестування та самостійна робота				Сума
Модуль №1		Модуль №2		
Контрольна робота	Робота в аудиторії	Контрольна робота	Робота в аудиторії	100
40	10	40	10	

## Шкала оцінювання: національна та ECTS

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою
--	-------------	-------------------------------

90 - 100	<b>A</b>	відмінно	зараховано
82 - 89	<b>B</b>	добре	
74 - 81	<b>C</b>		
64 - 73	<b>D</b>	задовільно	
60 - 63	<b>E</b>		
35 - 59	<b>FX</b>	незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
0 - 34	<b>F</b>	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни	не зараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

— «**A**» («відмінно», 90 та вище балів) заслуговує студент, який виявив всебічне і глибоке знання програмового матеріалу, вміння вільно виконувати завдання, передбачені програмою, засвоїв основну та ознайомився з додатковою літературою, розуміє взаємозв'язок головних понять дисципліни та їх значення для майбутньої професії;

— «**B**» («добре», 82-89 балів) заслуговує студент, який виявив повне знання програмового матеріалу, успішно виконує передбачені програмою завдання, засвоїв основну літературу, рекомендовану програмою, виявив систематичний характер знань з дисципліни і здатний до самостійного доповнення, але під час відповіді допустив деякі неточності;

— «**C**» («добре», 74-81 бал) заслуговує студент, який виявив не цілком повне знання програмового матеріалу, не завжди успішно виконує передбачені програмою завдання, частково засвоїв основну літературу, рекомендовану програмою, виявив не систематичний характер знань з дисципліни, не завжди здатний до їх самостійного доповнення і під час відповіді допускає деякі неточності;

— «**D**» («задовільно», 64-73 бали) заслуговує студент, який виявив знання основного програмового матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий з основною рекомендованою літературою. Як правило, оцінка «**D**» виставляється студентам, що допустили помилки у відповіді на іспиті та при виконанні екзаменаційних завдань, але які володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомоги викладача;

— «**E**» («задовільно», 60-63 бали) заслуговує студент, який виявив часткове знання основного програмового матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, не завжди вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий лише частково з основною рекомендованою літературою. Як правило, оцінка «**E**» виставляється студентам, котрі допустили грубі помилки у відповіді на іспиті та при виконанні екзаменаційних завдань, але які частково володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомоги викладача;

— «**FX**» («незадовільно», 35-59 балів) виставляється студенту, який виявив суттєві прогалини в знаннях основного програмового матеріалу, допустив принципові помилки у виконанні передбачених програмою завдань;

— «F» («незадовільно», 0-34 балів) виставляється студенту, коли протягом семестру він допустив грубі помилки у виконанні передбачених програмою завдань.

При виставленні оцінки можуть враховуватися результати навчальної роботи студента протягом семестру.

Іспит виставляється (без складання) у випадку набору кількості балів, що відповідає мінімальній оцінці «задовільно» (E).

Протягом семестру проводиться не менше двох модулів або колоквиумів чи контрольних робіт або інших видів контролю. Максимальна кількість балів, яка встановлюється для цих видів контролю, визначається кафедрами, які забезпечують викладання відповідних дисциплін.

## 9. Методичне забезпечення

1. Робоча програма курсу «Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь».
2. *Маринець В.В., Рего В.Л., Маринець К.В.* Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. – Ужгород: «Говерла», 2013. – 196 с.

## 10. Рекомендована література

### Базова

1. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 584 с.
2. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 504 с.
3. *Красносельский М.А., Войникко Г.М., Забрейко П.П., Рутецкий Л.Б., Стеценко В.Я.* Приближённое решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
4. *Маринець В.В., Рего В.Л., Маринець К.В.* Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. – Ужгород: «Говерла», 2013. – 196 с.
5. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

### Допоміжна

1. *Амелькин В.В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987. – 160 с.
2. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Физматгиз, 1962. – 608 с.
3. *Курпель Н.С., Шувар Б.А.* Двусторонние операторные неравенства и их приложения. – К.: Наукова думка, 1980. – 268 с.
4. *Пономарёв К.К.* Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач. – М.: Учпедгиз, 1962. – 184 с.

5. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Наукова думка, 1992. – 280 с.
6. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1998. – 233 с.
7. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.