Тригонометричні нерівності.
Рівняння та нерівності з параметрами

5.1. Найпростіші тригонометричні нерівності [1]

Найпростішими тригонометричними нерівностями називають нерівності вигляду

$$a_1 \le \sin x \le b_1,\ a_2 \le \cos x \le b_2,\ a_3 \le \operatorname{tg} x \le b_3,\ a_4 \le \operatorname{ctg} x \le b_4,$$

де a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4 – задані числа.

При розв'язуванні цих нерівностей як допоміжний засіб зручно використовувати графік відповідної функції або тригонометричне числове коло.

Розв'язання найпростіших тригонометричних нерівностей.

1. $\sin x > a$:

а) при $-1 \le a < 1$ $\arcsin a + 2k\pi < x < \pi - \arcsin a + 2k\pi$, $k \in Z$;

б) при $a \ge 1$ немає розв'язків;

в) при $a < -1$ $x \in R$.

2. $\sin x < a$:

а) при $-1 < a \le 1$ $\pi - \arcsin a + 2k\pi < x < 2\pi + \arcsin a + 2k\pi$, $k \in Z$;

б) при $a \le -1$ немає розв'язків;

в) при $a > 1$ $x \in R$.

3. $\cos x > a$:

а) при $-1 \le a < 1$ $2k\pi - \arccos a < x < 2k\pi + \arccos a$, $k \in Z$;

б) при $a \ge 1$ немає розв'язків;

в) при $a < -1$ $x \in R$.

4. $\cos x < a$:

а) при $-1 < a \le 1$ $2k\pi + \arccos a < x < 2k\pi + 2\pi - \arccos a$, $k \in Z$;

б) при $a \le -1$ немає розв'язків;

в) при $a > 1$ $x \in R$.

5. $\operatorname{tg} x > a$:

$k\pi + \operatorname{arctg} a < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ при $a \in R$.

6. $\operatorname{tg} x < a$:

$k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \operatorname{arctg} a$, $k \in \mathrm{Z}$ при $a \in \mathrm{R}$.

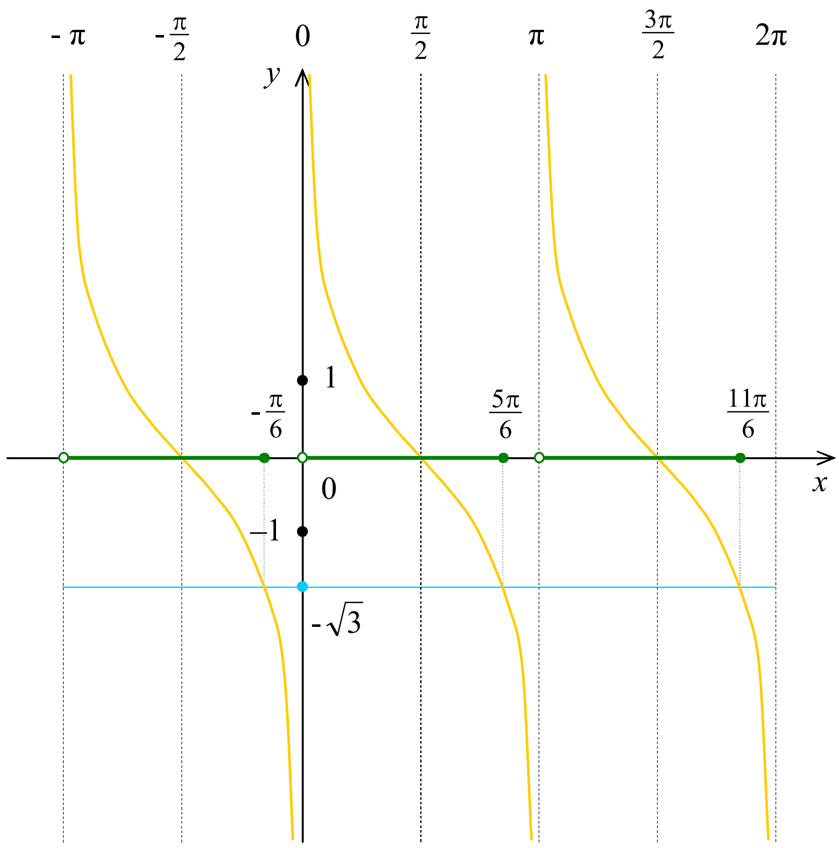
7. $\operatorname{ctg} x > a$:
$k\pi < x < k\pi + \operatorname{arcctg} a$, $k \in \mathrm{Z}$ при $a \in \mathrm{R}$.

8. $\operatorname{ctg} x < a$:
$k\pi + \operatorname{arcctg} a < x < \pi + k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$ при $a \in \mathrm{R}$.

Приклад 5.1. Із застосуванням графічного методу розв'язати нерівність:

$$\operatorname{ctg} x \geq -\sqrt{3}.$$

Розв'язання. Зобразимо на координатній площині графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ і побудуємо допоміжну пряму $y = -\sqrt{3}$ (блакитна лінія на мал. 5.1). Ця пряма перетинає котангенсоїди у точках з абсцисами $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + k\pi = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$ (позначені суцільними зеленими кружечками на осі x).



Мал. 5.1. Розв'язання нерівності $\operatorname{ctg} x \geq -\sqrt{3}$
із застосуванням графіка функції $y = \operatorname{ctg} x$.

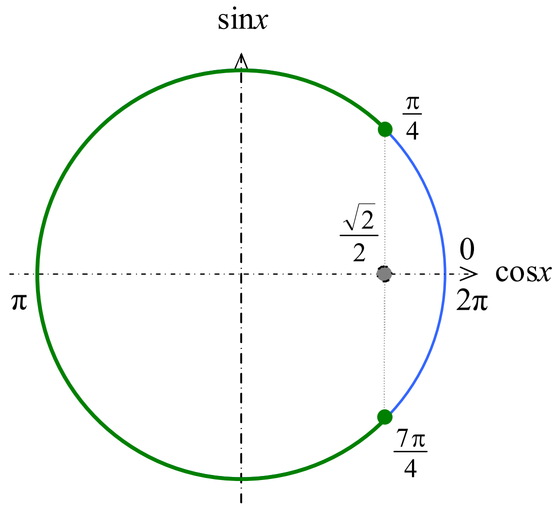
Задана нерівність очевидно виконується на тих проміжках значень x, де графік функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ розміщений вище прямої $y = -\sqrt{3}$. На проміжку головних значень арктангенса це буде інтервал $\left(0; \frac{5\pi}{6}\right]$ (нуль не включаємо, оскільки котангенс у цій точці невизначений). Інші інтервали отримуються перенесенням «головного» інтервалу на величину періоду котангенса ліворуч і праворуч (виділені зеленим відрізки на осі x на мал. 5.1). Отже, розв'язки заданої нерівності записуються у вигляді

$$k\pi < x \le \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathrm{Z}.$$

Приклад 5.2. Із застосуванням тригонометричного числового кола розв'язати нерівність:

$$\cos x \le \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Розв'язання. Накреслимо одиничне коло і зобразимо на ньому точками кути, для яких $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. На проміжку $0 \le x \le 2\pi$ аргументу, що відраховується від додатного напряму горизонтальної осі по дузі кола проти годинникової стрілки, таких кутів два: $\frac{\pi}{4}$ та $\frac{7\pi}{4}$ (позначені зеленими кружечками на мал. 5.2).



Мал. 5.2. Розв'язання нерівності $\cos x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ за допомогою тригонометричного числового кола.

Задана нерівність очевидно виконується для тих точок дуги кола, що лежать лівіше від прямої $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, яка з'єднує точки $\frac{\pi}{4}$ та $\frac{7\pi}{4}$. Згідно з мал. 5.2 отримуємо інтервал $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$ (зображений зеленою дугою; кінці включаємо, оскільки нерівність нестрога). Інші проміжки отримуються додаванням до кінців «головного» інтервалу величини періоду косинуса. Отже, розв'язки заданої нерівності записуються у вигляді

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathrm{Z}.$$

5.2. Складніші тригонометричні нерівності [1]

Нерівність, що не належить до найпростіших, за допомогою найпростіших перетворень треба звести до рівносильної найпростішої нерівності або до системи найпростіших нерівностей. Наприклад, нерівності вигляду $a_1 \le \sin(\lambda x) \le b_1$, $a_2 \le \cos(\lambda x) \le b_2$, $a_3 \le \operatorname{tg}(\lambda x) \le b_3$, $a_4 \le \operatorname{ctg}(\lambda x) \le b_4$ де λ деяке дійсне число, можна звести до найпростіших очевидною заміною $\lambda x = y$. Для перетворення складніших нерівностей, як і у випадку рівнянь, застосовують тригонометричні формули. Іноді для розв'язання тригонометричних нерівностей доцільно скористатися ***методом інтервалів*** аналогічно до алгебраїчних нерівностей.

Приклад 5.3. Розв'язати нерівність:

$$\sin 2x > \cos x .$$

Розв'язання. Перетворимо нерівність до рівносильного вигляду:

$$2\sin x\cos x - \cos x > 0,$$

$$\cos x(2\sin x - 1) > 0 .$$

Нехай $f(x) = \cos x(2\sin x - 1)$. Функція $f(x)$ очевидно є періодичною з періодом 2π. Знайдемо множину розв'язків вихідної нерівності на проміжку $[0;2\pi]$. На цьому проміжку $f(x)$ має чотири корені: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$, що легко визначаються з двох найпростіших тригонометричних рівнянь $\cos x = 0$ та $\sin x = \frac{1}{2}$. Складемо таблицю знаків функції $f(x)$ на послідовних інтервалах:

x	$\left[0;\frac{\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$
$\cos x$	+	+	–	–	+
$2\sin x - 1$	–	+	+	–	–
$f(x)$	–	+	–	+	–

Із таблиці знаходимо, що $f(x) > 0$ при $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ або $\frac{5\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}$. З урахуванням періодичності функції $f(x)$ отримуємо остаточну відповідь:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{6} + 2n\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi,\ k,n \in Z .$$

Доведення нерівностей. Серед тригонометричних нерівностей часто трапляються такі, що справджуються для всіх допустимих значень аргументів. Якщо такий висновок не є очевидним, то нерівність вимагає доведення аналогічно до тригонометричних тотожностей.

Доведення справедливості тригонометричних нерівностей, що пов'язують значення тригонометричних функцій на всій числовій осі або на деякому її проміжку, зазвичай ґрунтується на дослідженні властивостей функцій: монотонності, обмеженості тощо. Крім того, при такому доведенні використовуються відомі алгебраїчні нерівності.

Найчастіше доведення проводять, замінюючи вихідну тригонометричну нерівність послідовно отримуваними в результаті перетворень рівносильними нерівностями, поки нарешті не приходять до деякої очевидної нерівності. Тоді зі справедливості цієї останньої нерівності одразу випливає справедливість вихідної нерівності. Якщо ж на деякому етапі перетворень рівносильність порушується, то для затвердження остаточного висновку доводиться робити перевірку зворотним шляхом – від останньої нерівності до вихідної.

Приклад 5.4. Довести нерівність:

$$9\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \le \operatorname{tg}\alpha(4\cos\alpha+1) \le \frac{9}{2\sin 2\alpha}, \text{ де } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Розв’язання.

1. Спочатку доведемо справедливість нерівності

$$9\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \le \operatorname{tg}\alpha(4\cos\alpha+1). \tag{5.1}$$

Позначимо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=t$, тоді $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$, $\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Підставивши у (5.1) з урахуванням того, що $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, тобто $t>0$, маємо

$$9t \le \frac{2t}{1-t^2}\left(4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right),$$

$$9t \le \frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{5-3t^2}{1+t^2},$$

$$9 \le \frac{10-6t^2}{1-t^4}, \tag{5.2}$$

Оскільки $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$, тобто $0<\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<1$, а отже, $1-t^4>0$. Це означає, що нерівність (5.2) рівносильна нерівності

$$9-9t^4 \le 10-6t^2,\ \ 9t^4-6t^2+1\ge 0,\ \ (3t^2-1)^2\ge 0,$$

яка очевидно справджується. Рівність досягається лише при значенні $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$, тобто $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

2. Доведемо справедливість нерівності

$$\operatorname{tg}\alpha(4\cos\alpha+1) \le \frac{9}{2\sin 2\alpha}.$$

Враховуючи, що при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $\sin\alpha > 0$ і $\cos\alpha > 0$, маємо:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(4\cos\alpha + 1) \le \frac{9}{4\sin\alpha\cos\alpha},$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(4\cos\alpha + 1) \le \frac{9}{4\sin\alpha\cos\alpha},$$

$$4\sin^2\alpha(4\cos\alpha + 1) \le 9,$$

$$4(1 - \cos^2\alpha)(4\cos\alpha + 1) \le 9,$$

$$16\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 16\cos\alpha + 5 \ge 0,$$

$$(2\cos\alpha - 1)^2(4\cos\alpha + 5) \ge 0,$$

що справедливо. Рівність досягається лише за $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Таким чином, наведена в умові прикладу нерівність є справедливою.

5.3. Тригонометричні рівняння та нерівності з параметрами [2]

Якщо тригонометричне рівняння або нерівність містить один або кілька числових параметрів, то розв'язання має включати дослідження всіх можливих їх значень. Прикладом таких рівнянь і нерівностей є найпростіші тригонометричні рівняння й нерівності загального вигляду, описані в Темах 3.2 і 5.1 відповідно, для кожного з яких наведені розв'язки за всіх можливих значень параметра *a*. Аналогічно досліджуються і складніші завдання з параметрами.

Приклад 5.5. Дослідити рівняння:

$$\sin 2x = a + 1.$$

Розв'язання.

З урахуванням області значень функції синус можемо стверджувати, що дане рівняння має розв'язки лише при значеннях параметра a з проміжку $-1 \le a + 1 \le 1$, тобто $-2 \le a \le 0$. Для цих значень параметра розв'язки рівняння знаходяться за формулою:

$$2x < (-1)^k \arcsin(a + 1) + k\pi, \; k \in Z,$$

або

$$x = (-1)^k \frac{\arcsin(a + 1)}{2} + \frac{k\pi}{2}, \; k \in Z.$$

Якщо $a \notin [-2;0]$, то задане рівняння не має змісту (розв'язків не існує).

Приклад 5.6. Розв'язати рівняння:

$$a(1 + \cos x) = b\sin x.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$2a\cos^2\frac{x}{2} = 2b\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}.$$

Розглянемо всі можливі випадки значень параметрів a, b:

1) якщо $a=b=0$, то отримаємо тотожність, яка справджується при будь-якому x;

2) якщо $a=0$, $b\neq 0$, то рівняння набуде вигляду

$$2b\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad \sin x=0 \quad\Rightarrow\quad x=k\pi,\quad k\in\mathrm{Z};$$

3) якщо $b=0$, $a\neq 0$, то отримаємо

$$\cos\frac{x}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad x=\pi+2m\pi,\quad m\in\mathrm{Z};$$

4) якщо $a\neq 0$, $b\neq 0$, то запишемо рівняння у вигляді

$$\cos\frac{x}{2}\left(a\cos\frac{x}{2}-b\sin\frac{x}{2}\right)=0,$$

звідки

$$\left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{x}{2}=0,\\ a\cos\dfrac{x}{2}-b\sin\dfrac{x}{2}=0;\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{x}{2}=0,\\ a=b\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{2};\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{x}{2}=0,\\ \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{a}{b};\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\pi+2n_1\pi,\ \ n_1\in\mathrm{Z},\\ x=2\,\mathrm{arctg}\dfrac{a}{b}+2n_2\pi,\ \ n_2\in\mathrm{Z}.\end{array}\right.$$

Остаточна відповідь включає всі досліджені варіанти:

- ❖ якщо $a=b=0$, то $x\in\mathrm{R}$;
- ❖ якщо $a=0$, $b\neq 0$, то $x=k\pi$, $k\in\mathrm{Z}$;
- ❖ якщо $b=0$, $a\neq 0$, то $x=\pi+2m\pi$, $m\in\mathrm{Z}$;
- ❖ якщо $a\neq 0$, $b\neq 0$, то $x=\pi+2n_1\pi$, $n_1\in\mathrm{Z}$, або $x=2\,\mathrm{arctg}\dfrac{a}{b}+2n_2\pi,\ n_2\in\mathrm{Z}$.

Приклад 5.7. Визначити, для яких значень параметра a має розв'язки нерівність:

$$a^2-2a\leq\cos 4x\leq a^2+2a.$$

Розв'язання. Запишемо нерівність у вигляді

$$(a-1)^2-1\leq\cos 4x\leq(a+1)^2-1,$$

$$(a-1)^2\leq\cos 4x+1\leq(a+1)^2,$$

$$(a-1)^2\leq 2\cos^2 2x\leq(a+1)^2. \tag{5.3}$$

Оскільки $0\leq 2\cos^2 2x\leq 2$, а $(a-1)^2\geq 0$, то можна стверджувати, що нерівність (5.3) буде мати розв'язки при $(a-1)^2\leq 2$ за умови, що $|a-1|\leq|a+1|$ (адже інакше нерівність буде некоректною). Отже, з визначених умов маємо

$$\begin{cases} a-1\geq 0, \\ a-1\leq \sqrt{2}, \\ a-1\leq a+1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a-1\leq 0, \\ 1-a\leq \sqrt{2}, \\ 1-a\leq a+1 \end{cases}$$

[зауважимо, що вираз $a+1$ не може набувати від'ємних значень, оскільки при $a-1\geq 0$ очевидно $a+1=(a-1)+2\geq 0$, а при $a-1\leq 0$ припущення $a+1\leq 0$ дає хибну нерівність модулів $1-a\leq -1-a$], звідки $1\leq a\leq 1+\sqrt{2}$ або $0\leq a\leq 1$, тобто

$$0\leq a\leq 1+\sqrt{2}.$$

Окремі випадки: при $a=1$ вихідна нерівність справджується для всіх $x\in \mathrm{R}$, а на кінцях знайденого проміжку значень параметра нерівність вироджується в рівняння: при $a=0$ отримуємо $\cos 4x=0$, а при $a=1+\sqrt{2}$ відповідно $\cos 4x=1$.

Джерела:

1. *Гайштут О.Г., Ушаков Р.П.* Тригонометрія. Довідник-задачник. – К.: «Магістр-S», 1997. – С. 191-209.
2. Готуємося до ЗНО з математики. Рівняння з параметрами // Під ред. Андрусяк К.П. – Червоноград, 2008. – С. 34-37