

## Обернені тригонометричні функції. Найпростіші тригонометричні рівняння

### 3.1. Оборнені тригонометричні функції та їх властивості [1]

**Означення 1.** *Круговими (оберненими тригонометричними)* функціями змінної  $x$  називають вимірювані в радіанах величини  $y$ , які визначаються рівностями:

$$\begin{aligned}y &= \operatorname{Arcsin} x \text{ (арксинус), якщо } x = \sin y ; \\y &= \operatorname{Arccos} x \text{ (арккосинус), якщо } x = \cos y ; \\y &= \operatorname{Arctg} x \text{ (арктангенс), якщо } x = \operatorname{tg} y ; \\y &= \operatorname{Arcctg} x \text{ (арккотангенс), якщо } x = \operatorname{ctg} y .\end{aligned}$$

Наприклад:

$$\operatorname{Arcsin} 0 = 0 \text{ або } \pi \text{ або } 2\pi, \text{ загалом } \operatorname{Arcsin} 0 = k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{Arccos} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \text{ або } -\frac{\pi}{3} \text{ або } \frac{\pi}{3} + 2\pi, \text{ загалом } \operatorname{Arccos} \frac{1}{2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

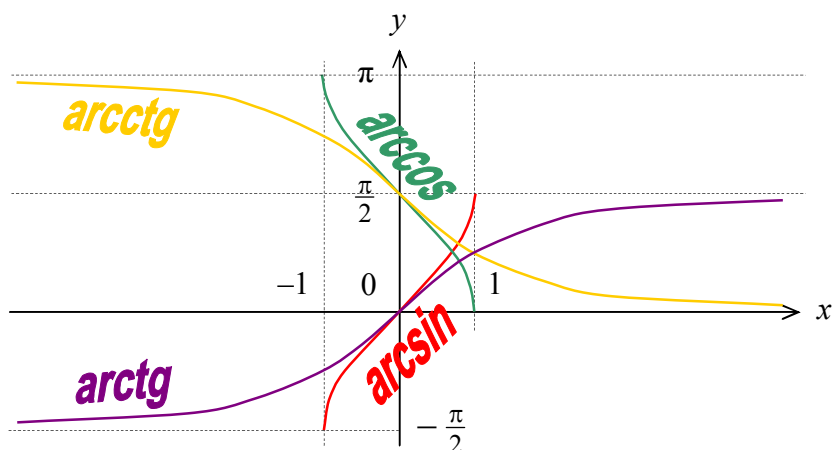
$$\operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \text{ або } \frac{5\pi}{4}, \text{ загалом } \operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Головні значення.** Кругові функції є *багатозначними*; їх *головні значення* (позначаються  $\operatorname{arcsin} x$ ,  $\operatorname{arccos} x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ ,  $\operatorname{arcctg} x$ ) обмежені інтервалами:

$$\begin{aligned}-\frac{\pi}{2} &\leq \operatorname{arcsin} x \leq +\frac{\pi}{2}; \\0 &\leq \operatorname{arccos} x \leq +\pi; \\-\frac{\pi}{2} &< \operatorname{arctg} x < +\frac{\pi}{2}; \\0 &< \operatorname{arcctg} x < +\pi.\end{aligned}$$

**Графіки** головних значень кругових функцій зображені на мал. 3.1. Зауважимо, що наведені графіки легко добудовуються на всю координатну площину з урахуванням багатозначності обернених тригонометричних функцій. Зокрема, графіки функцій  $\operatorname{Arctg} x$  та  $\operatorname{Arcctg} x$  отримуються «дублюваннями» графіків їх головних значень шляхом перенесення через кожні  $\pi$  одиниць уздовж осі  $y$ , а для побудови графіків функцій  $\operatorname{Arcsin} x$  та  $\operatorname{Arccos} x$  досить доповнити графіки їх головних значень кривими, симетричними відносно прямих  $y = -\frac{\pi}{2}$  та  $y = \pi$

відповідно, і «продублювати» отримані доповнені криві шляхом перенесення через кожні  $2\pi$  одиниць уздовж осі  $y$ .



**Мал. 3.1.** Графіки головних значень обернених тригонометричних функцій арксинус ( $\arcsin$ ), арккосинус ( $\arccos$ ), арктангенс ( $\arctg$ ) та арккотангенс ( $\text{arcctg}$ ).

**Вираження одних кругових функцій через інші.** Зауважимо, що наведені нижче формули вірні тільки для головних значень обернених тригонометричних функцій, а формули, взяті у квадратні дужки – лише для додатних значень  $x$  (оскільки межі головних значень визначені для різних функцій по-різному).

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = [\arccos \sqrt{1-x^2}] =$$

$$= \arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \left[ \text{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right];$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = [\arcsin \sqrt{1-x^2}] =$$

$$= \left[ \arctg \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right] = \text{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\arctg x = -\arctg(-x) = \frac{\pi}{2} - \text{arcctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \left[ \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right] = \left[ \text{arcctg} \frac{1}{x} \right];$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= \pi - \operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \left[ \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right] = \\ &= \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \left[ \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right]. \end{aligned}$$

**Основні співвідношення між круговими функціями:**

$$\begin{aligned} \arcsin x + \arcsin y &= \begin{cases} \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) \\ \quad [xy \leq 0 \text{ або } x^2 + y^2 \leq 1]; \\ \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) \\ \quad [x > 0, \quad y > 0 \text{ і } x^2 + y^2 > 1]; \\ -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) \\ \quad [x < 0, \quad y < 0 \text{ і } x^2 + y^2 > 1]. \end{cases} \\ \arcsin x - \arcsin y &= \begin{cases} \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}) \\ \quad [xy \geq 0 \text{ або } x^2 + y^2 \leq 1]; \\ \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}) \\ \quad [x > 0, \quad y < 0 \text{ і } x^2 + y^2 > 1]; \\ -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}) \\ \quad [x < 0, \quad y > 0 \text{ і } x^2 + y^2 > 1]. \end{cases} \\ \arccos x + \arccos y &= \begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) & [x+y \geq 0]; \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) & [x+y < 0]. \end{cases} \\ \arccos x - \arccos y &= \begin{cases} -\arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) & [x \geq y]; \\ \arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) & [x < y]. \end{cases} \\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y &= \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} & [xy < 1]; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} & [x > 0, \quad xy > 1]; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} & [x < 0, \quad xy > 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} & [xy > -1]; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} & [x > 0, \quad xy < -1]; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} & [x < 0, \quad xy < -1]. \end{cases}$$

$$2 \operatorname{arcsin} x = \begin{cases} \operatorname{arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) & \left[|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right]; \\ \pi - \operatorname{arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) & \left[\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1\right]; \\ -\pi - \operatorname{arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) & \left[-1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]. \end{cases}$$

$$2 \operatorname{arccos} x = \begin{cases} \operatorname{arccos}(2x^2 - 1) & [0 \leq x \leq 1]; \\ 2\pi - \operatorname{arccos}(2x^2 - 1) & [-1 \leq x < 0]. \end{cases}$$

$$2 \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} & [|x| < 1]; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} & [x > 1]; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} & [x < -1]. \end{cases}$$

$$\cos(n \operatorname{arccos} x) = 2^{n-1} T_n(x)$$

для будь-якого (не обов'язково цілого)  $n \geq 1$ , де  $T_n(x)$  визначається рівністю

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2^n}.$$

Зауважимо, що при  $n$  цілому  $T_n(x)$  є многочленом від  $x$  (*поліном Чебишева*).

### 3.2. Найпростіші тригонометричні рівняння [2]

Обернені тригонометричні функції застосовуються при розв'язуванні тригонометричних рівнянь та нерівностей. Складніші тригонометричні рівняння, як правило, розв'язуються шляхом зведення різними методами до найпростіших рівнянь.

*Найпростішими тригонометричними рівняннями* називають рівняння вигляду  $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$ ,  $\operatorname{tg} x = a$ ,  $\operatorname{ctg} x = a$ , де  $a$  – деяке число. Очевидно, що рівняння  $\sin x = a$  і  $\cos x = a$  мають розв'язки тільки при  $|a| \leq 1$ , а рівняння  $\operatorname{tg} x = a$  і  $\operatorname{ctg} x = a$  – при будь-яких значеннях  $a$ .

**Розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь.**

**1.** Якщо  $\sin x = a$ , де  $|a| \leq 1$ , то  $x = (-1)^k \operatorname{arcsin} a + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Окремі випадки:

$$\sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 0, x = k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

2. Якщо  $\cos x = a$ , де  $|a| \leq 1$ , то  $x = \pm \arccos a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Окремі випадки:

$$\cos x = -1, x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 1, x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

3. Якщо  $\operatorname{tg} x = a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ), то  $x = \operatorname{arctg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

4. Якщо  $\operatorname{ctg} x = a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ), то  $x = \operatorname{arcctg} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Зв'язок між тригонометричними та круговими функціями** дається наступними формулами:

$$\sin(\arcsin x) = x, \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad (|x| \leq 1);$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1); \operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad (|x| \leq 1, x \neq 0);$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \cos(\arccos x) = x \quad (|x| \leq 1);$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad (|x| \leq 1, x \neq 0); \operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1);$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

Крім того, згідно з означеннями кругових функцій для їх головних значень із урахуванням обмежень виконуються співвідношення:

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\arccos(\cos x) = x \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x \quad \text{при} \quad 0 < x < \pi.$$

**Найпростіші рівняння, що містять обернені тригонометричні функції,** мають вигляд  $\arcsin x = a$ ,  $\arccos x = a$ ,  $\operatorname{arctg} x = a$ ,  $\operatorname{arcctg} x = a$ , причому зна-

чення  $a$  має входити в область головних значень відповідної кругової функції (інакше рівняння не має змісту). На відміну від найпростіших тригонометричних рівнянь, кожне з цих рівнянь має єдиний розв'язок, а саме:

1. Якщо  $\arcsin x = a$ , де  $|a| \leq \frac{\pi}{2}$ , то  $x = \sin a$ .
2. Якщо  $\arccos x = a$ , де  $0 \leq a \leq \pi$ , то  $x = \cos a$ .
3. Якщо  $\operatorname{arctg} x = a$ , де  $|a| < \frac{\pi}{2}$ , то  $x = \operatorname{tg} a$ .
4. Якщо  $\operatorname{arcctg} x = a$ , де  $0 < a < \pi$ , то  $x = \operatorname{ctg} a$ .

#### **Джерела:**

1. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике (для инженеров и учащихся втузов). – М.: Физматгиз, 1962. – С. 188-190.
2. *Гайштут О.Г., Ушаков Р.П.* Тригонометрія. Довідник-задачник. – К.: «Магістр-S», 1997. – С. 10-12, 88-99.