Історичний нарис розвитку тригонометрії. Тригонометричні функції числового аргументу

1.1. Історична довідка [1]

Тригонометрія (із давньогрецької τρίγωνον – «трикутник», і μέτρον – «міра») – розділ елементарної математики, що вивчає співвідношення між довжинами сторін і кутами трикутників. Ця область знань була започаткована в елліністичному світі протягом III ст. до н. е. у зв'язку з застосуванням геометрії в астрономічних дослідженнях. Греки зосереджувалися на розрахунку хорд, тоді як математики в Індії створили найдавніші з відомих таблиць значень тригонометричних відношень (тобто відношень між сторонами прямокутного трикутника, які називають також тригонометричними функціями), таких як синус.

Із плином віків тригонометрія знайшла застосування в таких галузях науки, як геодезія, топографія, небесна механіка та навігація.

Тригонометрія відома своїми численними тотожностями. Ці тригонометричні тотожності зазвичай використовуються для перетворень тригонометричних виразів із метою їх спрощення, знаходження більш зручного вигляду виразів, або розв'язання рівнянь.

Шумерські астрономи займалися вимірюванням кутів, використовуючи поділ круга на 360 градусів. Вони, а пізніше й вавилоняни, вивчали відношення сторін подібних трикутників, і виявили деякі закономірності в цих відношеннях, однак не розвинули їх у систематичне вчення для знаходження сторін і кутів трикутників. Давні нубійці використовували подібний метод.

У III ст. до н. е. давньогрецькі математики, зокрема Евклід та Архімед, вивчали співвідношення між хордами та кутами, вписаними в коло, і довели ряд теорем, які є еквівалентами сучасних тригонометричних формул, хоча ці доведення вони подавали геометрично, а не алгебраїчно. У 140 р. до н. е. Гіппарх (із Нікеї в Малій Азії) видав перші таблиці хорд, аналогічні до сучасних таблиць значень синуса, і використовував їх для розв'язування задач із тригонометрії та сферичної тригонометрії. У II ст. н. е. греко-єгипетський астроном Птолемей (із Александрії в Єгипті) створив детальні тригонометричні таблиці (таблиці хорд Птолемея) у Книзі 1, розділі 11 свого «Альмаґеста». Птолемей застосовував довжини хорд для визначення своїх тригонометричних функцій, із незначною різницею з поняттям синуса, яким користуються в наш час [значення, яке ми називаємо $\sin\alpha$, можна знайти, відшукавши довжину хорди для подвоєного вибраного кута (2α) у таблиці Птолемея, а потім поділивши ту величину навпіл]. Минуло багато віків, перш ніж були складені більш детальні таблиці, і трактат Птолемея залишався підмогою для проведення тригонометричних розрахунків протягом наступних 1200 років у середньовічних візантійському, мусульманському, а пізніше й західноєвропейському світах.

Сучасне поняття синуса вперше засвідчене в «Сур'ї Сіддханті», і його властивості були в подальшому викладені індійським математиком і астрономом V ст. Аріабхатою. Ці грецькі й індійські праці були перекладені й доповнені середньовічними мусульманськими математиками. На X ст. мусульманські математики вже використовували всі шість тригонометричних функцій, затабулювали їх значення, і застосовували їх до задач сферичної геометрії. Перський учений XIII ст. Насіреддін Тусі (знаний також як Ходжа Насіреддін) вважається творцем тригонометрії як повноправної математичної дисципліни. Він був першим, хто розглядав тригонометрію як математичну дисципліну, незалежну від астрономії, і розвинув сферичну тригонометрію до сучасного рівня. Він зазначив шість окремих положень прямокутного трикутника у сферичній тригонометрії, а у своїй роботі «Про секторальну фігуру» сформулював теорему синусів для плоских і сферичних трикутників, винайшов теорему тангенсів для сферичних трикутників, і подав доведення обох цих теорем. У Західній Європі вчення про тригонометричні функції та методи поширилося через латинські переклади «Альмаґеста» Птолемея, а також праць перських та арабських математиків, зокрема Аль-Баттані та Насіреддіна Тусі. Однією з перших наукових праць північноєвропейського автора із тригонометрії є «De Triangulis» німецького математика XIV ст. Реґіомонтана, котрого заохотив до написання цього твору, надавши копію «Альмаґеста», грецько-візантійський учений кардинал Васіліос Вессаріон, із яким уродженець Кеніґсберґа жив кілька років. У той же період інший переклад «Альмаґеста» з грецької на латину виконав критянин Георг із Требізонда. У Північній Європі XVI ст. тригонометрія була ще настільки мало знаною, що Миколай Коперник присвятив два розділи свого твору «De revolutionibus orbium coelestium» тлумаченню її базових концепцій.

Спонукувана вимогами навігації, і дедалі ширшою потребою в точних мапах великих географічних областей, тригонометрія розвинулася в важливу галузь математики. Першим цю назву вжив німецький математик Бартоломей Пітиск, опублікувавши свою «Тригонометрію» в 1595 році. Ґемма Фрізій уперше описав метод тріангуляції, який і зараз застосовується в топографії. Леонард Ейлер повноправно ввів у тригонометрію комплексні числа. Роботи шотландських математиків Джеймса Ґреґорі в XVII ст. та Коліна Маклорена в XVIII ст. стали засадничими в розвитку теорії тригонометричних рядів. Також у XVIII ст., Брук Тейлор визначив загальновідомі ряди Тейлора.

1.2. Радіанна міра кута [2]

Поряд із практичним ***градусним*** вимірюванням кутів у теоретичних питаннях застосовується ***радіанна міра***: величина кута α – центрального для довільного кола – вимірюється як відношення довжини дуги l, на яку цей кут спирається, до довжини радіусу r цього кола:

$$\alpha = \frac{l}{r}.$$

За такого вимірювання за одиницю приймається ***радіан*** – кут, що є центральним для дуги, довжина якої рівна радіусу кола. Радіан не має спеціального позначення; кут із величиною α радіанів позначається просто «α». 1 радіан рівний $57°17'44'',8$ або $57°,2958$; $1° = 0{,}017453$ радіана. Перехід від однієї міри до іншої здійснюється згідно з формулами:

$$\alpha° = \frac{180}{\pi}\alpha \text{ (радіанів)}; \ \alpha \text{ (радіанів)} = \frac{\pi}{180}\alpha°.$$

Зокрема, $360° = 2\pi$, $180° = \pi$, $90° = \frac{\pi}{2}$, $270° = \frac{3\pi}{2}$ тощо.

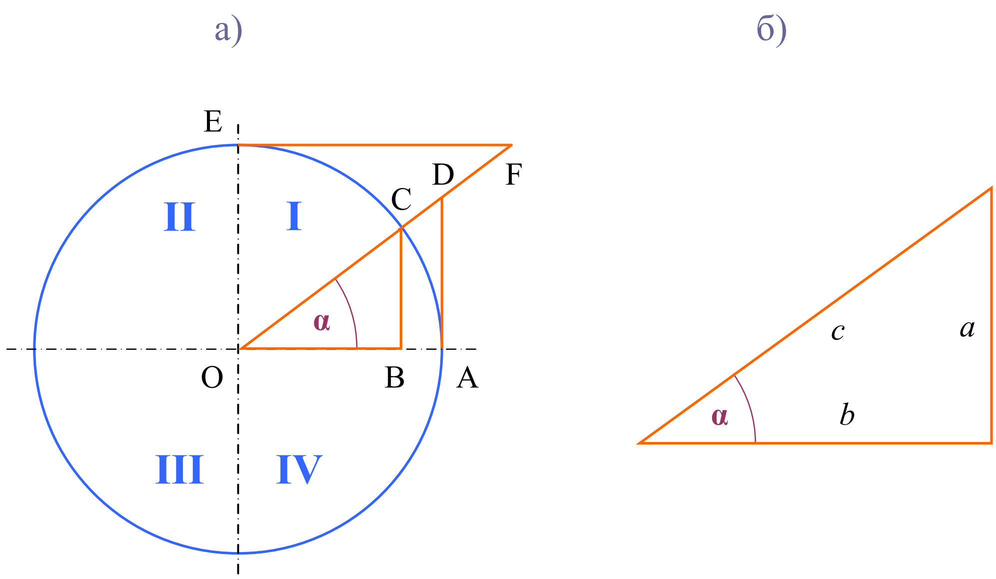
1.3. Тригонометричні функції та їх властивості [2]

Означення 1. ***Тригонометричні функції*** кута α визначаються за допомогою тригонометричного круга одиничного радіусу (мал. 1.1а), а також (для гострих кутів) із прямокутного трикутника (мал. 1.1б):

синус: $\sin\alpha = BC = \frac{a}{c}$; ***косинус***: $\cos\alpha = OB = \frac{b}{c}$;

тангенс: $\mathrm{tg}\,\alpha = AD = \frac{a}{b}$; ***котангенс***: $\mathrm{ctg}\,\alpha = EF = \frac{b}{a}$;

секанс: $\sec\alpha = OD = \frac{c}{b}$; ***косеканс***: $\csc\alpha = OF = \frac{c}{a}$.



Мал. 1.1. Визначення тригонометричних функцій: а) за допомогою тригонометричного кола: кут α вимірюється від нерухомого радіусу OA до рухомого радіусу OC проти годинникової стрілки (додатний напрям); б) із прямокутного трикутника (для гострих кутів).

Знаки. Функціям приписується певний знак залежно від того, в якій чверті тригонометричного круга (див. мал. 1.1а) лежить рухомий радіус OC, згідно з наступною таблицею:

Чверть	Величина кута	sin	cos	tg	ctg	sec	csc
I	від 0° до 90°	+	+	+	+	+	+
II	від 90° до 180°	+	–	–	–	–	+
III	від 180° до 270°	–	–	+	+	–	–
IV	від 270° до 360°	–	+	–	–	+	–

Межі зміни функцій.

1) синус і косинус: від -1 до $+1$;

2) тангенс і котангенс: від $-\infty$ до $+\infty$;

3) секанс і косеканс: від $-\infty$ до -1 і від $+1$ до $+\infty$.

Числові значення функцій для кутів, кратних 30° і 45° $\left(\frac{\pi}{6}\ \text{і}\ \frac{\pi}{4}\right)$, наведені в таблиці на наступній сторінці.

Періодичність тригонометричних функцій. ***Періодичними*** називаються функції, які справджують умову $f(x+T)=f(x)$ для будь-якого значення аргументу x. Число T називається ***періодом*** функції. Зазвичай періодом називають найменше з чисел T, для яких виконується умова періодичності.

Усі шість тригонометричних функцій із Означення 1 належать до періодичних. Це очевидно випливає з мал. 1.1а, адже після кожного «повного оберту» на 360° рухомий радіус OC займатиме одне й те ж положення, а отже, значення тригонометричних функцій через кожні 360° повторюватимуться. Це буде найменший період для синуса, косинуса, секанса та косеканса. У випадках тангенса й котангенса значення повторюватимуться частіше: це очевидно з графіків, зображених на мал. 1.2.

Періоди функцій	sin	cos	tg	ctg	sec	csc
Градуси	360°	360°	180°	180°	360°	360°
Радіани	2π	2π	π	π	2π	2π

Отже, згідно з означенням періодичної функції для довільного кута α виконуються рівності:

$\sin(\alpha+2\pi)=\sin\alpha$; $\cos(\alpha+2\pi)=\cos\alpha$;

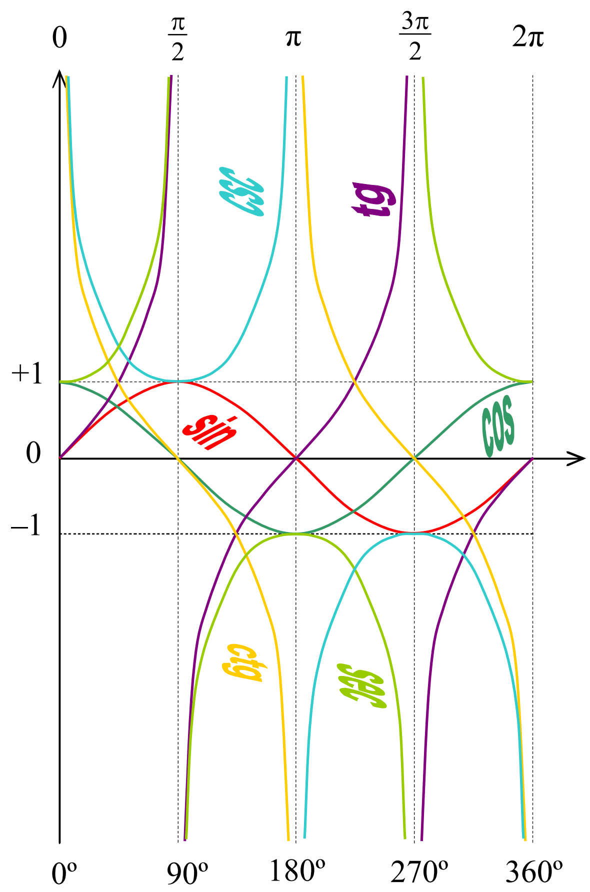
$\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(\alpha+\pi)=\operatorname{ctg}\alpha$;

$\sec(\alpha+2\pi)=\sec\alpha$; $\csc(\alpha+2\pi)=\csc\alpha$.

Функція			sin	cos	tg	ctg	sec	csc
Кути: I чверть	0^{o}	0	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$
	30^{o}	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
	45^{o}	$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
	60^{o}	$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
	90^{o}	$\pi/2$	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
Кути: II чверть	120^{o}	$2\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
	135^{o}	$3\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
	150^{o}	$5\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
	180^{o}	π	0	-1	0	$\mp\infty$	-1	$\pm\infty$
Кути: III чверть	210^{o}	$7\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2
	225^{o}	$5\pi/4$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
	240^{o}	$4\pi/3$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
	270^{o}	$3\pi/2$	-1	0	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	-1
Кути: IV чверть	300^{o}	$5\pi/3$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
	315^{o}	$7\pi/4$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
	330^{o}	$11\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2
	360^{o}	2π	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$

1.4. Графіки тригонометричних функцій [2]

Характер зміни тригонометричних функцій при збільшенні кута від 0º до 360º визначається графіками, зображеними на мал. 1.2. Зауважимо, що наведені графіки легко добудовуються на проміжки $(-\infty;0)$ та $(2\pi;+\infty)$ з урахуванням періодичності тригонометричних функцій.



Мал. 1.2. Графіки тригонометричних функцій синус (sin), косинус (cos), тангенс (tg), котангенс (ctg), секанс (sec) та косеканс (csc) на проміжку зміни кута від 0º до 360º (від 0 до 2π в радіанах).

Значення тригонометричних функцій ***будь-якого кута*** знаходяться згідно з наступними правилами.

1) Якщо кут більший за 360º, то функції зводяться до функцій кута між 0º і 360º (а тангенс і котангенс – до кута між 0º і 180º) за формулами, які враховують періодичність функцій (*n* – ціле число):

$\sin(360^\circ \cdot n + \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(360^\circ \cdot n + \alpha) = \cos\alpha$;

$\mathrm{tg}(180^\circ \cdot n + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$; $\mathrm{ctg}(180^\circ \cdot n + \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$;

$\sec(360^\circ \cdot n + \alpha) = \sec\alpha$; $\csc(360^\circ \cdot n + \alpha) = \csc\alpha$.

2) Якщо кут від’ємний, то функції зводяться до функцій додатного кута за формулами, які враховують парність або непарність функцій (як відомо, синус, тангенс, котангенс і косеканс є непарними функціями, а косинус і секанс – парними):

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$;

$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$; $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$;

$\sec(-\alpha) = \sec\alpha$; $\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$.

3) Якщо $90^\circ < \alpha < 360^\circ$, то функція зводиться до функції гострого кута за формулами зведення.

4) Якщо кут гострий: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, то значення функції знаходиться з таблиць (див. [2], с. 48-51).

Наприклад:

$$\sin(-1000^\circ) = -\sin 1000^\circ = -\sin(360^\circ \cdot 2 + 280^\circ) = -\sin 280^\circ = +\cos 10^\circ = +0{,}9848.$$

Значення функцій для кутів, заданих у радіанах, знаходяться з аналогічних таблиць (див. [2], с. 52-55), складених за значень аргументів від 0 до 1,60. Якщо заданий кут виходить за межі таблиці, то користуються тими ж правилами й формулами зведення, що й при заданні кутів градусною мірою: наприклад, $\sin(2\pi + x) = \sin x$, $\sin(2\pi - x) = -\sin x$ тощо.

Джерела:

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Trigonometry

2. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике (для инженеров и учащихся втузов). – М.: Физматгиз, 1962. – С. 179-182.