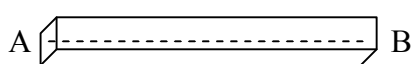
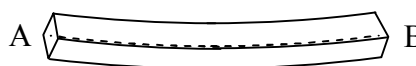


Прогин брусів

Розглянемо горизонтальний брус AB (мал. 14.1) сталого поперечного перерізу, виготовлений з однорідного матеріалу. Вісь симетрії бруса вказана на мал. 14.1 пунктирною лінією. Припустимо, що під впливом сил, які діють на брус у вертикальній площині, що містить вісь симетрії, брус прогинається (мал. 14.2).

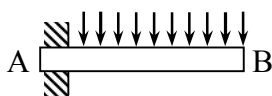


Мал. 14.1

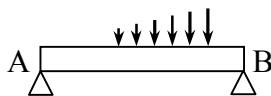


Мал. 14.2

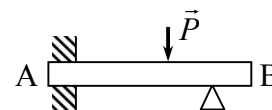
Діючі сили можуть бути обумовлені вагою бруса, прикладеним навантаженням або і тією, й іншою силами разом. Зрозуміло, що під дією сил вісь симетрії бруса вигинатиметься. Як правило, вигнуту (викривлену) вісь симетрії називають *пружною лінією*. Визначення форми цієї лінії грає важливу роль у теорії пружності.



Мал. 14.3

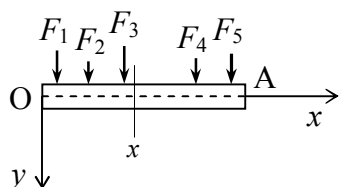


Мал. 14.4

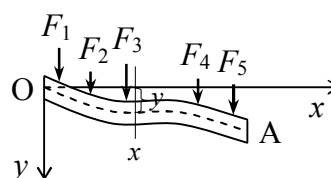


Мал. 14.5

Відзначимо, що існують різні типи брусів залежно від способу їх закріплення чи опори. Наприклад, на мал. 14.3 зображений брус, кінець A якого жорстко закріплений, а кінець B вільний. Такий брус називається *консольним*. На мал. 14.4 показаний брус, який вільно лежить на двох опорах A і B . Ще один тип брусів із опорами зображений на мал. 14.5. Існують також різні способи прикладення зовнішніх навантажень. Наприклад, на мал. 14.3 показане рівномірно розподілене навантаження. Звичайно, навантаження може бути й змінним уздовж усієї довжини бруса (мал. 14.4). На мал. 14.5 проілюстрований випадок зосередженого навантаження.



Мал. 14.6



Мал. 14.7

Розглянемо горизонтальний брус OA (мал. 14.6). Нехай його вісь симетрії (на малюнку показана пунктиром) лежить на осі x , де за додатний напрям вибирається напрям праворуч від точки O , в яку поміщений початок координат. За додатний напрям на осі

у виберемо напрям униз від точки O . Під дією зовнішніх сил F_i (і ваги бруса, якщо вона є значною), вісь симетрії вигинається в пружну лінію, яка зображена на мал. 14.7 пунктиром. Відхилення (зміщення) у пружної лінії від осі x називається *прогином бруса* в положенні x . Таким чином, якщо відоме рівняння пружної лінії $y = y(x)$, то завжди можна вказати і прогин бруса. Функція $y(x)$ є розв'язком крайової задачі – математичної моделі прогину бруса. Нижче покажемо, як складаються ці математичні моделі.

Позначимо через $M(x)$ згинний момент у вертикальному поперечному перерізі бруса з координатою x . Згинний момент визначається як алгебраїчна сума моментів тих сил, які діють з одного боку бруса в положенні x . При розрахунку моментів вважають, що сили, які діють на брус знизу догори, дають від'ємні моменти, а сили, що діють згори донизу, дають додатні моменти.

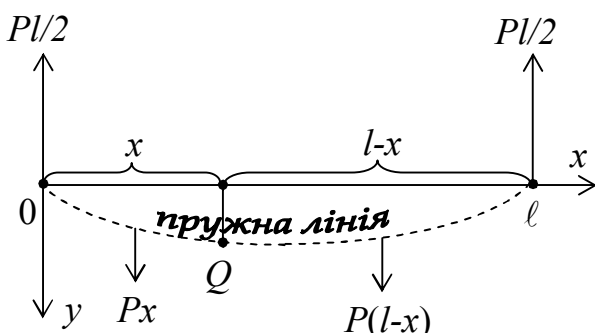
В опорі матеріалів доводиться, що згинний момент $M(x)$ пов'язаний із радіусом кривини пружної лінії R співвідношенням

$$M(x) = \frac{EJ}{R} = EJ \frac{y''}{[1 + y'^2]^{3/2}}, \quad (14.1)$$

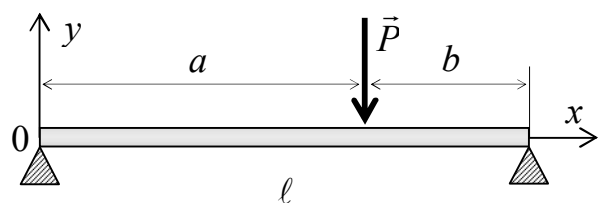
де $y(x)$ – функція, що описує відхилення точки з абсцисою x від положення рівноваги (рівняння пружної лінії), E – модуль пружності Юнга (залежить від матеріалу), а J – головний момент інерції поперечного перерізу в точці бруса з абсцисою x відносно горизонтальної прямої, яка проходить через центр ваги цього перерізу (характеризує форму поперечного перерізу). Добуток EJ називають *жорсткістю згину*.

Якщо припустити, що брус має невеликий прогин (як це часто трапляється на практиці), то кутовий коефіцієнт пружної лінії $y'(x)$ буде дуже малим, і замість рівняння (14.1) можна розглядати простіше рівняння

$$M(x) = EJy''. \quad (14.2)$$



Мал. 14.8



Мал. 14.9

Залежно від характеру сил, які діють на брус, рівняння (14.2) може набувати різного вигляду. Зокрема, рівняння

$$EJy''(x) = \frac{P}{2}(x^2 - lx)$$

описує прогин однорідного бруса довжини l , який вільно лежить на двох опорах, під дією власної ваги, рівної P Н на одиницю довжини (мал. 14.8). Крайові умови у цьому випадку мають вигляд

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0$$

(на кінцях брус не прогинається).

Рівняння

$$EJy_1''(x) = \frac{Pb}{l}x, \quad x \leq a;$$

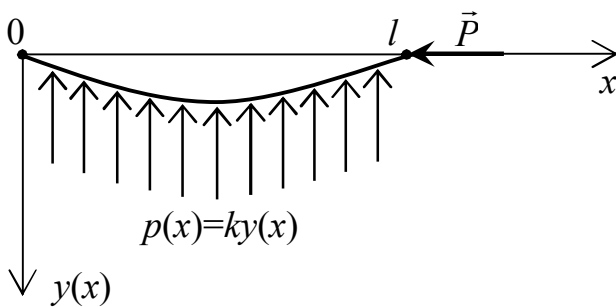
$$EJy_2''(x) = \frac{Pb}{l}x - P(x - a), \quad x \geq a,$$

де $b = l - a$, при крайових умовах

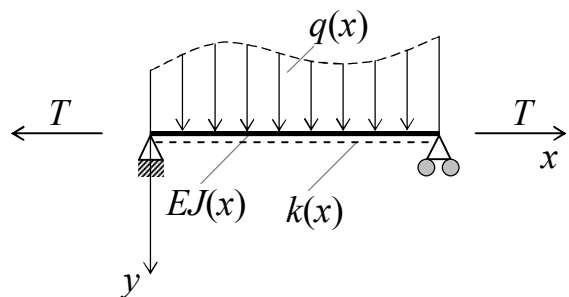
$$y_1(0) = 0, \quad y_2(l) = 0, \quad y_1(a) = y_2(a), \quad y_1'(a) = y_2'(a)$$

описують прогин такого ж бруса, але під дією зосередженого в точці $a \in (0; l)$ навантаження величини P (мал. 14.9).

У деяких випадках із рівності 14.2 одержуємо диференціальне рівняння порядку вищого за другий.



Мал. 14.10



Мал. 14.11

Нехай однорідний брус довжини l , який піддається дії осьової стискувальної сили величини P (мал. 14.8), лежить на пружній основі (наприклад, залізнична рейка). Приймаємо гіпотезу Вінклера¹ про те, що сила $p(x)$, яка діє на одиницю довжини бруса при прогині на величину $y(x)$, пропорційна величині прогину, тобто $p(x) = ky(x)$ (множник k називається *коефіцієнтом постелі*). Тоді при малому поздовжньому прогині рівняння пружної лінії одержується з (14.2), причому

$$M(x) = -Py(x) - \int_0^x k(x - \xi)y(\xi)d\xi.$$

Отже, у цьому випадку прогин бруса описується диференціально-функціональним рівнянням

$$Py(x) + \int_0^x k(x - \xi)y(\xi)d\xi = -EJy''(x). \quad (14.3)$$

Якщо брус однорідний і сталого перерізу ($EJ = const$), а основа (опора) має сталу жорсткість ($k = const$), то із (14.3) двократним диференціюванням дістанемо лінійне однорідне рівняння четвертого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$EJy^{(4)} + Py'' + ky(x) = 0.$$

¹ Еміль Вінклер (1835-1880) – німецький інженер-будівельник, професор, котрий уперше сформулював і розв’язав задачу про пружний брус на основі, що піддається деформації. Модель бруса на пружній основі, що допускає лінійну залежність між силою і прогином, відома як гіпотеза Вінклера.

Якщо ж брус має змінну товщину, тобто $J = J(x)$, а опора має змінну жорсткість $k = k(x)$, то із (14.3) одержуємо диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами

$$[EJ(x)y'''] + Py'' + k(x)y(x) = 0.$$

Розглянемо брус змінного перерізу, який лежить на пружній основі змінної жорсткості (мал. 14.11). Його прогин під дією зовнішніх сил описується диференціальним рівнянням четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$[EJ(x)y'''] - Ty'' + k(x)y(x) = q(x). \quad (14.4)$$

У цьому рівнянні згідно з позначеннями на мал. 14.11:

❖ добуток $EJ(x)$ – жорсткість бруса, де E – модуль пружності Юнга, а $J(x)$ – момент інерції поперечного перерізу бруса відносно осі, яка проходить через його центр ваги;

❖ $k(x)$ – коефіцієнт постелі пружної основи;

❖ $q(x)$ – розподілене по всій довжині бруса навантаження;

❖ T – величина осьового розтягу;

❖ $y(x)$ – прогин бруса по осі y .

Очевидно, що рівняння (14.4) є лінійним неоднорідним рівнянням, яке відповідає однорідному рівнянню (14.3), у якому взято $P = -T$ (маємо розтяг, а не стиск).

Зауважимо, що механічний зміст має не тільки функція $y(x)$, яка описує рівняння пружної лінії бруса за прогину, але і її похідні. Зокрема:

❖ $\theta(x) = y'(x)$ – кут повороту поперечного перерізу;

❖ $M(x) = EJ(x)y''(x)$ – згинний момент для поперечного перерізу;

❖ $N(x) = M'(x) = [EJ(x)y''(x)]'$ – поперечна сила, чисельно рівна сумі проєкцій на вісь y усіх зовнішніх сил, які діють по один бік від перерізу в точці бруса з абсцисою x . Для коректності постановки задачі прогину бруса слід також задати крайові умови на кінцях бруса $x = 0$ та $x = l$. Наприклад, якщо кінці бруса шарнірно оперті, то крайові умови матимуть вигляд

$$y(0) = y(l) = 0, \quad y''(0) = y''(l) = 0$$

(на кінцях бруса прогин і кривина відсутні).

У будівництві, машинобудуванні, авіатехніці широко застосовуються *тришарові конструкції* (бруси, панелі), які складаються з трьох шарів – двох зовнішніх лицьових пластин і внутрішнього заповнювача між ними.

Тришарова конструкція має певні переваги. Так, тришарові поперечні перерізи є композитними. Вони зазвичай складаються з заповнювача малої чи середньої жорсткості, з'єднаного з двома жорсткими зовнішніми пластинами. Композитний брус («сандвіч-брус») характеризується значно більшим відношенням жорсткості зсуву до ваги, аніж у еквівалентного бруса, виготовленого цілком із матеріалу заповнювача або з матеріалу лицьових пластин. Композит також має значне відношення міцності щодо розриву до ваги. Значна жорсткість лицьових пластин дозволяє отримати високе відношення жорсткості згину до ваги для композиту.

Поведінка бруса з тришаровим поперечним перерізом під дією навантаження відрізняється від бруса зі сталим пружним поперечним перерізом, як показано на мал. 14.12. Якщо радіус кривини при згині малий порівняно з товщиною тришарового

бруса, і розтяг у матеріалах його шарів є малим, то в деформації тришарового композитного бруса можна виокремити дві складові: **а)** деформацію, спричинену згинними моментами, або *деформацію згину*, і **б)** деформацію, спричинену поперечними силами, яка має назву *деформації зсуву*.

Нехай тришаровий брус піддається дії згинного моменту M та зсувної сили Q . Позначимо загальне відхилення бруса під дією цих навантажень через w . На мал. 14.12 показано, що при малих зміщеннях загальне відхилення середньої лінії бруса може подаватися у вигляді суми двох відхилень: чистого згинного відхилення w_b і чистого відхилення зсуву w_s , тобто

$$w(x) = w_b(x) + w_s(x).$$

У теорії тришарових структур («сандвіч-теорії») з урахуванням оцінок $Q \approx M'(x)$, $q \approx Q'(x)$, де q – інтенсивність прикладеного до

бруса навантаження, для опису прогину тришарового бруса отримують рівняння:

$$\begin{aligned} 2d_2s^{-1}w^{(4)} - (1 + 2d_2d_1^{-1})w''(x) &= d_1^{-1}M - s^{-1}q; \\ d_1s^{-1}w_s''' - (1 + 0,5d_1d_2^{-1})w_s'(x) &= -0,5d_1d_2^{-1}s^{-1}Q, \end{aligned} \quad (14.5)$$

де d_1 – жорсткість згину тришарового бруса, d_2 – жорсткість згину у зовнішніх пластинах, s – жорсткість зсуву тришарового бруса, яка рівна жорсткості зсуву заповнювача (внутрішнього шару).

Розглянемо тришаровий брус сталого перерізу, рівномірно навантажений по всій довжині $[0; l]$. У цьому випадку із (14.5) для деформації зсуву $y(x)$ отримаємо рівняння вигляду

$$y''' - k^2y + a = 0, \quad (14.6)$$

де k^2 , a – фізичні параметри, що характеризують пружні властивості шарів. Очевидно, що за змінного навантаження рівняння (14.6) набуде вигляду

$$y''' - k^2y = f(x).$$

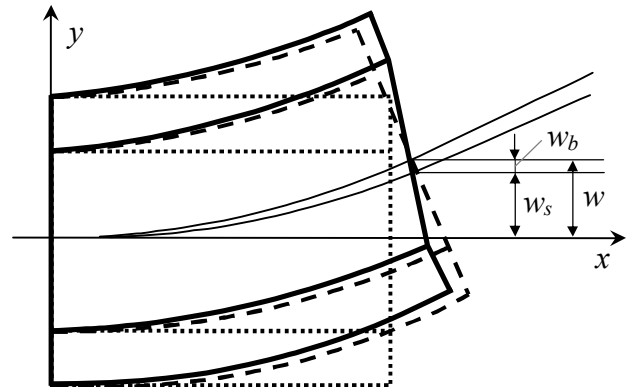
Для коректності постановки задачі необхідно задати крайові умови на кінцях сандвіч-бруса. Наприклад, якщо кінці бруса вільні, тобто момент сил у точках $x = 0$ та $x = l$ рівний нулеві, то матимемо $y'(0) = y'(l) = 0$, а з умови симетрії одержимо третю крайову умову: $y(0,5l) = 0$.

Наостанок розглянемо одну класичну задачу на прогин при підвісі.

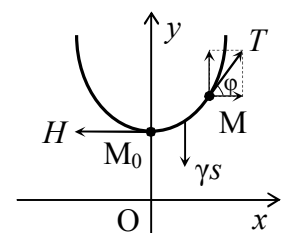
Приклад 14.1. Гнучка однорідна нитка підвішена за два кінці. Знайти рівняння кривої, по якій розміститься нитка під дією власної ваги (так розміщуються підвішені канати, дроти, ланцюги).

Розв'язання. Нехай $M_0(0; b)$ – найнижча точка нитки, а $M(x, y)$ її довільна точка. Розглянемо відрізок нитки M_0M . Ця частина знаходиться в рівновазі під дією трьох сил (мал. 14.13):

1) натягу T , який діє по дотичній у точці M і утворює з віссю Ox кут



Мал. 14.12



Мал. 14.13

φ ;

2) натягу H у точці M_0 , який діє горизонтально (дотична паралельна осі Ox);

3) ваги нитки γs , напрямленої вертикально донизу, де s – довжина дуги M_0M , γ – лінійна густина (питома вага) нитки.

Розкладаючи натяг T на горизонтальну й вертикальну складові, отримаємо рівняння рівноваги:

$$T \cos \varphi = H, \quad T \sin \varphi = \gamma s,$$

звідки $\operatorname{tg} \varphi = H^{-1} \gamma s$. З іншого боку, якщо $y = y(x)$ – рівняння шуканої кривої, то з огляду на геометричний зміст похідної маємо $y'(x) = \operatorname{tg} \varphi$, а отже, $y' = a^{-1} s$, де $a = \gamma^{-1} H$. Продиференціювавши отриману рівність за змінною x і врахувавши, що $ds/dx = \sqrt{1 + y'^2}$, дістанемо диференціальне рівняння шуканої кривої

$$y'' = a^{-1} \sqrt{1 + y'^2}. \quad (14.7)$$

Зінтегрувавши рівняння (14.7), знайдемо його загальний розв'язок

$$y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a} + C_1\right) + C_2. \quad (14.8)$$

Графіки всіх отриманих таким чином функцій називають *ланцюговими лініями*.

Із початкових умов $y(0) = b$, $y'(0) = 0$ маємо $C_1 = 0$, $C_2 = b - a$. Підклавши ці значення в (14.8), дістанемо рівняння шуканої ланцюгової лінії

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} + b - a.$$

Це рівняння набуває особливо простого вигляду, якщо ординату точки M_0 узяти рівною a . Тоді рівняння ланцюгової лінії (14.8) буде $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

Джерела:

1. Маринець В. В., Рего В. Л., Маринець К. В. Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. – Ужгород: «Говерла», 2013. – 196 с
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 2. – М.: «Наука», 1970. – С. 16-18.
3. https://en.wikipedia.org/wiki/Sandwich_theory (розрахунок тришарових брусів).