Лекція №13:

Військова справа

Диференціальні моделі бойових дій Ланчестера. У 1916 році, під час першої світової війни, англійський інженер Фредерік Вільям Ланчестер (1868-1946) побудував кілька математичних моделей ведення повітряних боїв. Потім ці моделі були узагальнені на випадки бойових дій за участі регулярних військ і партизанських загонів.
Нехай у бойових діях беруть участь дві ворогуючі сторони *x* і *y*. Їх чисельний склад у момент часу *t*, де *t* вимірюється у днях, починаючи з першого дня бойових дій, позначимо через $x(t)$, $y(t)$ відповідно. Будемо вважати, що в протиборстві перемагає та сторона, яка першою знищить бойові сили супротивника. При цьому припустимо, що $x(t)$ і $y(t)$ змінюються неперервно, і ці функції є диференційовними по часу (можна вважати, що за малі проміжки часу чисельний склад також змінюється на малу величину, в тому числі й не цілу).
Дамо спосіб описання швидкості зміни чисельності воюючих сторін. Нехай для сторони *x* A_x позначає швидкість втрат унаслідок чинників, не пов'язаних із бойовими діями (хвороб, нещасних випадків тощо), B_x – швидкість втрат унаслідок безпосередніх сутичок у ході бойових дій, C_x – швидкість підходу поповнень (резервних сил). Тоді очевидно, що загальна швидкість зміни $x(t)$ описується рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = -\left(A_x + B_x\right) + C_x . \qquad (13.1)$$

Аналогічне до (13.1) рівняння можна скласти і для $y(t)$. Тепер завдання полягає в тому, щоби вказати відповідні формули для введених вище величин *A*, *B*, *C* і після цього дослідити побудовані диференціальні моделі. Отримані висновки дозволять дати відповідь на питання про ймовірного переможця.
Наведемо три моделі, побудовані Ланчестером на підставі рівнянь вигляду (13.1). Небойові втрати сторін подамо формулами $A_x = -ax$, $A_y = -dy$, де *a* і *d* – невід'ємні сталі, які за аналогією з задачею про епідемії можемо називати «коефіцієнтами захворюваності». Для доданків, що враховують можливість підходу підмоги до сил *x* і *y* протягом дня, введемо позначення $C_x = P(t)$, $C_y = Q(t)$.
Перша модель Ланчестера описує бойові дії між регулярними військами і має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax - by + P(t), \\ \dot{y} &= -cx - dy + Q(t), \end{aligned} \qquad (13.2)$$

У цій моделі припускається, що ***а)*** кожна з воюючих сторін перебуває в зоні дії вогневих засобів супротивника; ***б)*** вогонь ведеться виключно по живій силі, яка бере безпосередню участь у бойових діях. За таких припущень бойові втрати сторін можна вважати прямо пропорційними чисельності супротивника, тобто $B_x = -by$, $B_y = -cx$.
Невід'ємні сталі *b* і *c* назвемо *коефіцієнтами бойової ефективності* сторін *y* та *x*

відповідно (середнє число ворожих солдатів, котрих здатна знешкодити відповідна сторона за одиницю часу). Ці величини можна розглядати у вигляді

$$b = r_y p_y,\ c = r_x p_x,$$

де r_y, r_x – коефіцієнти вогневої потужності; p_y, p_x – імовірності влучності пострілів сторін *y* та *x* відповідно.

Друга модель Ланчестера описує бойові дії між партизанськими загонами і має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax - gxy + P(t), \\ \dot{y} &= -hxy - dy + Q(t), \end{aligned} \tag{13.3}$$

де *g*, *h* – невід'ємні сталі.

Третя модель Ланчестера

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax - gxy + P(t), \\ \dot{y} &= -cx - dy + Q(t) \end{aligned} \tag{13.4}$$

описує змішаний тип бойових дій, у яких беруть участь як регулярні війська, так і партизанські загони.

Оскільки, тримаючи під вогнем територію *S*, яку займають партизанські за-гони, супротивник не може знати ефективності своїх дій, то в системах типу (14.2) і (14.3) доданки, що відповідають бойовим втратам партизан, мають нелінійний вигляд (припускається, що втрати партизанських загонів пропорційні кількості партизан на *S*, а також числу бойових сил супротивника). Тому ці доданки записуються у вигляді $-gxy$, $-hxy$. Для розрахунку коефіцієнтів *g* і *h* можна скористатися коефіцієнтами вогневої потужності r_y і r_x, а також узяти до уваги міркування Ланчестера, згідно з якими імовірність влучного пострілу з боку однієї зі сторін прямо пропорційна так званій територіальній ефективності одного пострілу з цієї сторони і обернено пропорційна частині площі території *S*, яку займають сили супротивника. Таким чином, за вірогідні формули для визначення коефіцієнтів *g* і *h* можна взяти

$$g = r_y \frac{S_{1,x}}{S_x},\ h = r_x \frac{S_{1,y}}{S_y},$$

де через $S_{1,x}$, $S_{1,y}$ позначено площу, яку займає один із партизанів відповідної сторони, а через S_x, S_y – площу, яку займають сили *x* і *y* відповідно.

Якщо перед початком бойових операцій чисельність сил *x* і *y* складала відповідно x_0 і y_0, то для систем (13.2), (13.3), (13.4) маємо початкові умови

$$x(0) = x_0,\ y(0) = y_0. \tag{13.5}$$

Дослідимо детальніше наведені вище диференціальні моделі за спрощеної ситуації, коли жодна зі сторін не зазнає втрат, не пов'язаних із бойовими діями, і не отримує ніякої підмоги, тобто

$$a = d = 0,\ P(t) = Q(t) \equiv 0. \tag{13.6}$$

1. *Квадратичний закон ведення бойових дій.* За припущень (13.6) система (13.2) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -by, \\ \dot{y} &= -cx. \end{aligned} \tag{13.7}$$

Поділивши друге з рівнянь на перше, отримаємо відповідне до системи (13.7) звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx}{by},$$

загальний інтеграл якого має вигляд

$$by^2 - cx^2 = K_1, \tag{13.8}$$

де згідно з початковими умовами (13.5) $K_1 = by_0^2 - cx_0^2$. Із (13.8) очевидно випливають критерії для визначення переможця (сторони, яка першою знищить бойові сили супротивника): якщо $K_1 > 0$, то перемагає сторона *y*, а якщо $K_1 < 0$ – то сторона *x*. Співвідношення (13.8) визначає квадратичну залежність між *x* і *y*, тому систему (13.7) можна назвати диференціальною моделлю з *квадратичним* або *гіперболічним* законом ведення бойових дій.

З урахуванням формул для коефіцієнтів *b* і *c* критерій перемоги, наприклад, сторони *y* можна записати у вигляді

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{r_x p_x}{r_y p_y}.$$

Остання нерівність показує, що зміни у відношенні сил y_0 / x_0 дають перевагу одній зі сторін у квадратичній пропорції. Це твердження називають *квадратичним законом Ланчестера*.

2. *Лінійний закон ведення бойових дій.* За припущень (13.6) система (13.3) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -gxy, \\ \dot{y} &= -hxy. \end{aligned} \tag{13.9}$$

Відповідне до системи (13.9) звичайне диференціальне рівняння отримується аналогічно до системи (13.7) і має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h}{g},$$

загальний інтеграл якого

$$gy - hx = K_2, \tag{13.10}$$

де згідно з початковими умовами (13.5) $K_2 = gy_0 - hx_0$. Із (13.10) випливає: якщо $K_2 > 0$, то перемагає сторона *y*, а якщо $K_2 < 0$ – то сторона *x*. Співвідношення (13.10) визначає лінійну залежність між *x* і *y*, тому систему (13.9) можна назвати диференціальною моделлю з *лінійним* законом ведення бойових дій.

З урахуванням формул для коефіцієнтів *g* і *h* критерій перемоги, наприклад, сторони *y* можна записати у вигляді

$$\frac{S_y y_0}{S_x x_0} > \frac{r_x S_{1,y}}{r_y S_{1,x}}.$$

З останньої нерівності випливає, що для здобуття перемоги сторона *y* повинна прагнути максималізувати відношення y_0 / x_0 і S_y / S_x, тобто забезпечити собі якомога більшу перевагу за чисельністю і за площею зайнятої території.

3. *Параболічний закон ведення бойових дій.* За припущень (13.6) система (13.4) набуде вигляду

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -gxy, \\
\dot{y} &= -cx.
\end{aligned} \tag{13.12}
$$

Відповідне до системи (13.12) звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{gy},$$

загальний інтеграл якого

$$gy^2 - 2cx = K_3, \tag{13.13}$$

де згідно з початковими умовами (13.5) $K_3 = gy_0^2 - 2cx_0$. Із (13.13) випливає: якщо $K_3 > 0$, то перемагає сторона y (регулярні війська), а якщо $K_3 < 0$ – то сторона x (партизани). Співвідношення (13.13) визначає параболічну залежність між x і y, тому систему (13.12) можна назвати диференціальною моделлю з *параболічним* законом ведення бойових дій.

З урахуванням формул для коефіцієнтів g і c критерій перемоги, наприклад, сторони y можна записати у вигляді

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > 2\frac{r_x p_x S_x}{r_y S_{1,x}} \cdot \frac{1}{x_0}.$$

Досвід показує, що регулярні війська y можуть завдати поразки партизанським загонам x тільки в тому випадку, коли відношення y_0 / x_0 значно більше за одиницю.

Приклад 13.1. На маленькому, загубленому в океані острові Кука-Маранґой живуть племена жужу та чічі, що безперервно ворогують між собою й ведуть одне проти одного непримиренну відкриту війну, в якій беруть участь усі боєздатні особи обох племен, згуртовані в армії, чисельність яких у момент останньої активізації бойових дій була рівною. Визначити, котре з племен переможе у війні за заволодіння островом Кука-Маранґой, якщо коефіцієнти захворюваності для племен жужу та чічі рівні 4 і 2 відповідно, коефіцієнти бойової ефективності – 3 і 1 відповідно (тобто жужу більше хворіють, зате влучніше стріляють), і при цьому віддаленість і важкодоступність острова не дають можливості для надходжень підмоги до жодної з воюючих сторін, а мала величина й природні характеристики острова не сприяють веденню партизанської війни.

Розв'язання. Позначимо через $x(t)$, $y(t)$ чисельності армій племен жужу та чічі відповідно, а через a – їх початкову чисельність у момент $t = 0$ активізації бойових дій. Застосувавши першу модель Ланчестера, з урахуванням заданих умов для опису воєнного стану на острові Кука-Маранґой одержимо задачу Коші для лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь (СДР) зі сталими коефіцієнтами

$$
\begin{cases}
\dot{x} = -4x - y, \\
\dot{y} = -3x - 2y,
\end{cases} \tag{13.14}
$$

із початковими умовами

$$x(0) = y(0) = a. \tag{13.15}$$

Знайдемо спочатку загальний розв'язок СДР (13.14) із застосуванням методу Ейлера.

Система (13.14) задається матрицею $A=\begin{pmatrix}-4 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$. Власні значення цієї матриці є кореням характеристичного рівняння (ХР)

$$\det(A-\lambda E)\equiv\begin{vmatrix}-4-\lambda & -1\\ -3 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+6\lambda+5=0.$$

Звідси $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-5$.

Щоб знайти фундаментальну систему частинних розв'язків (ФСЧР) СДР (13.14), що відповідає знайденим дійсним однократним кореням ХР, визначимо власні вектори $h_1=\mathrm{col}(h_{11},\ h_{12})\neq 0$ та $h_2=\mathrm{col}(h_{21},\ h_{22})\neq 0$, елементи яких вираховуються з рівностей $(A-\lambda_1 E)h_1=0$, $(A-\lambda_2 E)h_2=0$, тобто

$$\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_{11}\\ h_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_{21}\\ h_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Нетривіальними розв'язками наведених систем, є, наприклад, $h_{11}=1$, $h_{12}=-3$; $h_{21}=h_{22}=1$. Отже, за власні вектори можна взяти $h_1=\mathrm{col}(1,\ -3)$, $h_2=\mathrm{col}(1,\ 1)$. Тоді згідно з правилами методу Ейлера відповідна до власних значень $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-5$ ФСЧР системи (1.1) має вигляд

$$\varphi_1(t)=h_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}=\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t},\quad \varphi_2(t)=h_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-5t},$$

а загальний розв'язок СДР (13.14) $\mathrm{col}(x,\ y)=C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)$, або у скалярному вигляді

$$x(t)=C_1\,\mathrm{e}^{-t}+C_2\,\mathrm{e}^{-5t},\quad y(t)=-3C_1\,\mathrm{e}^{-t}+C_2\,\mathrm{e}^{-5t}.$$

де C_1, C_2 – довільні сталі, для визначення яких скористаємося початковими умовами (13.15). Маємо:

$$x(0)\equiv C_1+C_2=a,\quad y(0)\equiv -3C_1+C_2=a,$$

звідки знаходимо $C_1=0$, $C_2=a$. Отже, чисельності бойових армій племен жужу та чічі в ході бойових дій змінюються згідно з законами

$$x(t)=a\,\mathrm{e}^{-5t},\quad y(t)=a\,\mathrm{e}^{-5t}.$$

Спрямувавши в отриманому розв'язку задачі Коші (13.14), (13.15) $t\to\infty$, маємо

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to\infty}y(t)=0,$$

звідки випливає, що переможця в такій війні не буде: це типовий приклад війни «на самознищення», і якщо жужу та чічі продовжать воювати, то це з часом призведе до цілковитого збезлюдіння їх острова.

Наведемо ще кілька цікавих задач на побудову диференціальних моделей, пов'язаних із військовою справою.

Задача про параболу безпеки. Знайти обвідну траєкторій снарядів, випущених із гармати зі швидкістю v_0 під різними кутами нахилу ствола гармати до горизонту. Вважати, що гармата знаходиться в початку координат, а траєкторії снарядів проходять у площині xy (опором повітря знехтувати).

Розв'язання. Як було показано в Розділі 6, рух снаряду, запущеного в повітря під кутом α до горизонтальної поверхні, за нехтування опором повітря описується диференціальною моделлю

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha,$$

звідки після інтегрування одержуємо параметричні рівняння руху снаряду

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - 0{,}5 g t^2,$$

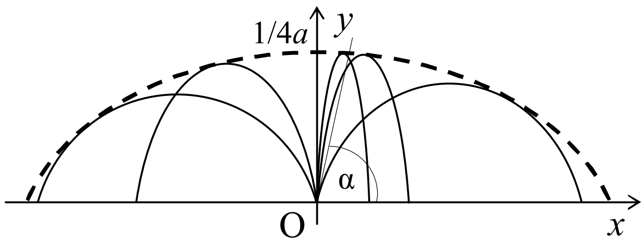
із яких шляхом виключення змінної *t* дістанемо рівняння траєкторії польоту

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}. \qquad (13.16)$$

Введемо заради зручності позначення $\mathrm{tg}\,\alpha = k$, $\frac{g}{2v_0^2} = a$, тоді з (13.16) маємо

$$y = kx - ax^2(1 - k^2). \qquad (13.17)$$

Це рівняння визначає параболу, обернуту вітками вниз, із вертикальною віссю, що проходить через початок координат. Для різних значень *k* отримуємо різні траєкторії. Отже, (13.17) є рівнянням однопараметричної сім'ї парабол, що являють собою траєкторії снаряду за різних кутів α і заданої початкової швидкості v_0 (мал. 13.1).



Мал. 13.1

Знайдемо обвідну цієї сім'ї парабол. Як відомо з курсу звичайних диференціальних рівнянь, обвідною $\varphi(x, y) = 0$ сім'ї кривих $\Phi(x, y, C) = 0$ називається крива, в кожній точці якої має місце дотик із однією з кривих сім'ї; для знаходження обвідної треба виключити параметр *C* із системи рівнянь

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

і перевірити, чи буде отримана *C*-дискримінантна крива обвідною, а не геометричним місцем особливих точок.

Диференціюючи обидві частини рівності (13.17) за параметром *k*, маємо

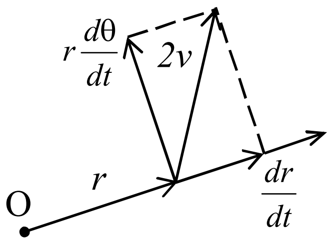
$$x - 2akx^2 = 0. \qquad (13.18)$$

Виключивши *k* з системи рівнянь (13.17), (13.18), дістанемо

$$y = \frac{1}{4a} - ax^2. \qquad (13.19)$$

Це – рівняння параболи з вершиною в точці $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$, вісь якої співпадає з віссю ординат. Вона не є геометричним місцем особливих точок, оскільки параболи (13.17) не мають особливих точок. Тому парабола є обвідною сім'ї траєкторій. Вона називається *параболою безпеки*, оскільки жодна точка за її межами не є досяжною для снаряду, випущеного з наявної гармати із заданою початковою швидкістю v_0.

Задача про криву погоні. Міноносець полює за підводним човном у густому тумані. У певний момент часу туман здіймається, і субмарина виявляється поміченою на поверхні води на віддалі 3 милі від міноносця. Швидкість міноносця удвічі більша за швидкість підводного човна. Вимагається визначити траєкторію (криву погоні), по якій має рухатися міноносець, аби він пройшов точно над субмариною, якщо остання одразу ж занурилася після виявлення і відпливла на повній швидкості прямим курсом у невідомому напрямі.



Мал. 13.2

Розв'язання. Введемо полярні координати r, θ таким чином, щоб полюс O знаходився у точці виявлення субмарини, а полярна вісь r проходила через точку, в якій у момент виявлення підводного човна знаходився міноносець (мал. 13.2). Подальші міркування ґрунтуються на наступній стратегії. Міноносцю найперше слід зайняти таку позицію, щоб він і підводний човен опинилися на однаковій відстані від полюса O. Потім міноносець має рухатися навколо полюса O по такій траєкторії, щоб обидва рухомі об'єкти увесь час знаходилися на однаковій відстані від точки O. Тільки в цьому випадку міноносець, кружляючи навколо полюса O, пройде над субмариною.
Таким чином, міноносцеві спочатку слід іти прямим курсом на точку O, допоки він не опиниться на тій же відстані x від полюса O, що й підводний човен. Очевидно, що відстань x можна знайти або з рівняння

$$\frac{x}{v} = \frac{3-x}{2v},$$

або з рівняння

$$\frac{x}{v} = \frac{3+x}{2v},$$

де v – швидкість підводного човна, а $2v$ – швидкість міноносця. З останніх рівнянь отримуємо, що відстань x дорівнює одній або трьом милям.
Якщо «зустрічі» не відбулося, то міноносець має в подальшому рухатися навколо полюса O (або за напрямом годинникової стрілки, або проти), віддаляючись від останнього зі швидкістю субмарини v. Для знаходження траєкторії цього руху («кривої погоні») розкладемо швидкість міноносця $2v$ на дві складові: радіальну v_r і тангенціальну v_θ (мал. 13.2).
Радіальна складова – це швидкість, із якою міноносець віддаляється від полюса O, тобто

$$v_r = \frac{dr}{dt}.$$

Тангенціальна складова – це лінійна швидкість обертання міноносця відносно полюса. Вона рівна добутку кутової швидкості $d\theta/dt$ на радіус r, тобто

$$v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}.$$

Але, оскільки $v_r = v$, то $v_\theta = \sqrt{(2v)^2 - v^2} = \sqrt{3}v$. Отже, розв'язання вихідної задачі зводиться до інтегрування системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dr}{dt} = v, \quad r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{3}v,$$

яка у свою чергу шляхом виключення змінної *t* може бути зведена до одного рівняння

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\sqrt{3}},$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$r = C\mathrm{e}^{\frac{\theta}{\sqrt{3}}}, \qquad (13.20)$$

де *C* – довільна стала.

Тепер з урахуванням того, що міноносець розпочинає рух навколо полюса *O* з полярної осі *r* на відстані *x* миль від точки *O*, тобто $r = 1$ при $\theta = 0$ і $r = 3$ при $\theta = -\pi$, на підставі (13.20) отримуємо, що в першому випадку $C = 1$, а у другому $C = 3\mathrm{e}^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$.

Таким чином, аби виконати своє завдання, міноносець повинен пройти 2 або 6 миль прямим курсом за напрямом до місця виявлення субмарини, а потім рухатися або по спіралі $r = \mathrm{e}^{\frac{\theta}{\sqrt{3}}}$, або по спіралі $r = 3\mathrm{e}^{\frac{\theta+\pi}{\sqrt{3}}}$.

Джерела:

Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: «Наука», 1987. – С. 33-44.