Курс: «Застосування диференціальних рівнянь для розв'язання проблем природознавства» **ст. викл. Рего В. Л.**

До Модуля 1

Лекція №11:

Диференціальні моделі в економіці

Ефективність реклами. Нехай торговельними закладами реалізується певна продукція (товар), про яку в момент часу t із загального числа потенційних покупців N знають лише $x(t)$ осіб. Припустимо, що для прискорення збуту продукції дали рекламні оголошення у засобах масової інформації (по радіо, на телебаченні, в мережі Інтернету тощо). Наступна інформація про продукцію поширюється серед покупців шляхом спілкування між собою. Із великою вірогідністю можна вважати, що після рекламних оголошень швидкість зміни числа тих, хто знає про товар, пропорційна як числу тих, хто знає, так і числу тих, хто не знає про нього. Вважаючи, що час відраховується від моменту подання рекламних оголошень, коли про товар дізналися N/γ осіб, де γ виражає частку «знавців» із загальної кількості потенційних покупців, одержимо диференціальну модель у вигляді задачі Коші для рівняння

$$\frac{dx}{dt} = kx(N-x), \quad k = const > 0 \qquad (11.1)$$

із початковою умовою

$$x(0) = N/\gamma . \qquad (11.2)$$

Зінтегрувавши рівняння (11.1) шляхом відокремлення змінних, отримаємо його загальний розв'язок

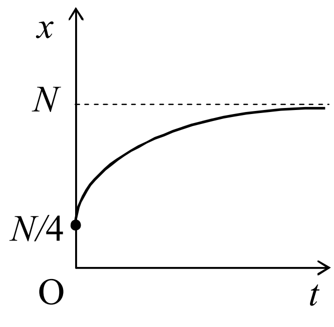
$$x(t) = \frac{N}{1 + C\,\mathrm{e}^{-Nkt}}, \quad C = const > 0 . \qquad (11.3)$$

В економічній літературі співвідношення (11.3) зокрема називають *рівнянням логістичної кривої*.

Із урахуванням початкових умов маємо $C = \gamma - 1$, тобто шуканий розв'язок задачі Коші (11.1), (11.2) дається формулою

$$x(t) = \frac{N}{1 + (\gamma - 1)\,\mathrm{e}^{-Nkt}}.$$

На мал. 11.1 схематично зображена логістична крива у випадку $\gamma = 4$. Зауважимо, що до рівняння (11.1) зокрема зводиться задача про поширення технологічних новацій.



Мал. 11.1

Динамічні моделі ринку товару. Згідно з економічною теорією реальна цінність товару дорівнює фактичній ціні, яка встановлюється на ринку відповідно до попиту і пропозиції товарів (послуг).

Попит і пропозиція – економічна модель, що описує процес ціноутворення на ринку. Ця модель вводить поняття попиту та пропозиції як універсальні характеристики ринку, і доводить, що за певних умов ці характеристики врівноважуються (ситуація, коли величина пропозиції рівна величині попиту, називається *ринковою рівновагою*) і

призводять до встановлення *рівноважної* ціни на товар. Висновок моделі про врівноваження добре відповідає поведінці великого числа ринків і вважається важливим економічним законом.
Попит – заявлена на ринку потреба в товарах. *Закон попиту*: величина (обсяг) попиту зменшується у міру збільшення ціни товару (підвищення ціни викликає зниження попиту, а зниження ціни – підвищення величини попиту).
Пропозиція – кількість товару, який є на ринку, або готовий до доставки на нього. *Закон пропозиції*: за інших незмінних чинників величина (обсяг) пропозиції збільшується у міру збільшення ціни на товар (за незмінних витрат на одиницю товару зі збільшенням ціни росте прибуток, а тому виробникові стає вигідно продати більше товару).

Дамо спосіб побудови лінійної динамічної моделі ринку певного товару.
Нехай функції $D(t)$, $S(t)$ і $P(t)$ виражають відповідно попит, пропозицію та ціну продукції в момент часу t за неперервної зміни часу. Одним із економічних законів товарного виробництва є *закон товарного обігу*, згідно з яким якщо попит перевищує пропозицію, то ціна зростає, а інакше падає. У випадку лінійної динамічної моделі це записується у вигляді

$$\frac{dP(t)}{dt} = k\big(D(t) - S(t)\big), \quad k = const > 0. \tag{11.4}$$

Похідну від ціни по часу називають *тенденцією формування ціни*. За неперервної зміни часу попит і пропозиція (у відповідності до вищезгаданих економічних законів) описуються співвідношеннями

$$D(t) = a - bP(t), \quad S(t) = -c + dP(t), \tag{11.5}$$

де a, b, c, d – додатні сталі. Якщо в початковий момент часу $t = 0$ ціна була рівна $P(0) = P_0$, то, зінтегрувавши рівняння (11.4) з урахуванням (11.5) і останньої початкової умови, отримаємо

$$P(t) = P_0\,\mathrm{e}^{-At} + \tfrac{B}{A}\left(1 - \mathrm{e}^{-At}\right),$$

де $A = k(b+d)$, $B = k(a+c)$. Із отриманого цінового розподілу очевидно, що при $A > 0$ і $t \to \infty$ ціна товару прямує до стабільної рівноважної ціни

$$P_{st} = \frac{B}{A} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Зауважимо, що в залежності від різних факторів попит і пропозиція загалом можуть описуватися різними, в тому числі й відмінними від (11.5), функціями ціни та тенденції формування ціни. Зокрема вони можуть задаватися лінійними співвідношеннями вигляду

$$D(t) = a_1 P' + b_1 P + c_1, \quad S(t) = a_2 P' + b_2 P + c_2,$$

де a_i, b_i, c_i, $i = 1,2$ – задані дійсні числа. У цьому випадку за вимоги збереження ринкової рівноваги (тобто врівноваженості попиту і пропозиції) одержимо диференціальну модель у вигляді рівняння $D(t) = S(t)$, або

$$a_1 P' + b_1 P + c_1 = a_2 P' + b_2 P + c_2.$$

Динамічна модель накопичення банківських вкладів. Розглянемо задачу: у початковий момент часу $t = 0$ величина банківського вкладу в грошових одиницях складає $M_0 = M(0) > 0$. Знайти величину вкладу $M = M(t) > 0$ через час $t > 0$ за неперервно змінної процентної ставки $r(t)$.

Очевидно, що за неперервно змінної процентної ставки величина зміни банківського вкладу в довільний момент часу рівна добутку наявного капіталу й процентної ставки. Звідси одержимо диференціальну модель у вигляді задачі Коші для рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dM}{dt} = r(t)M(t), \quad M(0) = M_0 .$$

Зінтегрувавши рівняння з урахуванням початкової умови, одержимо розв'язок

$$M(t) = M_0 \exp\left(\int_0^t r(\tau) d\tau \right),$$

який визначає величину банківського вкладу в довільний момент часу t.

Джерела:

Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: «Наука», 1987. – С. 20-22.

Rontó Miklós, Raisz Péterné. Differenciálegyenletek műszakiaknak. Elméleti összefoglaló 300 kidolgozott feladattal. – Miskolci egyetemi kiadó, 2004. – C. 261-263.