

### Задачі електротехніки

Перш ніж перейти до побудови диференціальних моделей задач електротехніки, нагадаємо деякі **основні поняття та означення**.

*Електричним струмом* називається впорядкований, спрямований рух електрично заряджених частинок у просторі.

*Силою струму* (в електротехніці – струмом), що протікає через провідник із площею поперечного перерізу  $s$ , називається величина, що відповідає кількості заряду  $\Delta q$ , перенесеному через переріз провідника за проміжок часу  $\Delta t$ :  $I = \Delta q / \Delta t$ ; вимірюється в амперах. 1 ампер (А) – сила такого постійного струму, який, пропущений по двох прямих нескінченних провідниках із незначним поперечним перерізом, розміщених на відстані 1 м один від одного у вакуумі, створював би між цими провідниками силу  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на метр довжини.

Якщо протягом кожного проміжку часу  $\Delta t$  перенесений заряд  $\Delta q$  є однаковим, і при цьому напрям струму залишається незмінним, то такий струм називають *постійним*. У випадку, коли сила струму змінюється з бігом часу, струм називають *змінним*.

*Електричний заряд* – фізична величина, яка характеризує здатність тіл створювати електромагнітні поля та брати участь в електромагнітній взаємодії. Позначається  $q$ , вимірюється в кулонах. 1 кулон (Кл) – кількість електричного заряду, який проходить через поперечний переріз провідника при силі струму 1 А за 1 с.

*Електрорушійна сила* – кількісна міра роботи сторонніх сил із переміщення заряду, характеристика джерела струму. Позначається здебільшого  $\epsilon$ , а в тексті скорочено е. р. с.; вимірюється в вольтах. Е. р. с. ділянки електричного кола дорівнює енергії, яку отримує одиничний заряд за проходження цієї ділянки кола. 1 вольт (В) рівний електричній напрузі, що виникає в електричному колі з постійним струмом сили 1 А при потужності 1 Вт, а також рівний потенціалу точки електричного поля, в якій електричний заряд 1 Кл має потенціальну енергію 1 Дж.

*Різниця потенціалів* дорівнює роботі, яку треба виконати проти електростатичних сил, щоб перемістити одиничний заряд із однієї точки простору в іншу. Напруга на ділянці електричного поля дорівнює різниці потенціалів у тому випадку, коли на ділянці немає джерел струму.

*Напруга* на ділянці електричного кола – це різниця потенціалів між двома точками електричного поля, що чисельно дорівнює відношенню роботи, яку необхідно виконати для переміщення заряду з однієї точки поля в іншу, до величини цього заряду. Позначається  $U$ , вимірюється у вольтах.

*Спад напруги* – різниця потенціалів між кінцями ділянки електричного кола, в якому протікає електричний струм. Позначається  $\Delta U$ , вимірюється у вольтах.

*Резистор* або *опір* – елемент електричного кола, призначений для використання його електричного опору. *Електричний опір* – властивість провідника створювати перешкоди проходженню електричного струму. Позначається  $R$ , вимірюється в омах. 1 ом (Ом) – опір провідника, на кінцях якого створюється напруга 1 В при силі струму 1

А за умови, що в провіднику не виникає жодної електрорушійної сили. Для резистора з електричним опором  $R$  при проходженні струму сили  $I$  спад напруги на ньому складає  $U_R = IR$  (закон Ома).

*Індуктивність* – фізична величина, що характеризує здатність провідника накопичувати енергію магнітного поля, коли в ньому протікає електричний струм. Розраховується як відношення магнітного потоку через контур, визначений електричним колом, до величини сили струму в колі. Позначається  $L$ , вимірюється у генрі. 1 генрі (Гн) рівний індуктивності електричного контуру, в якому виникає е. р. с. 1 В при рівномірній зміні струму в колі зі швидкістю 1 А за секунду.

*Самоіндукція* – «власне» магнітне поле провідника, що виявляється в момент, коли замикається електричне коло, і в провіднику з'являється електричний струм.

*Котушка індуктивності* (індуктивна котушка) – елемент електричного кола, який являє собою сукупність витків, і призначений для використання його індуктивності. Котушка індуктивності має вигляд накрученого спіраллю ізолюваного дроту, що має значну індуктивність при відносно великій електропровідності та малому активному опорі. Спад напруги на індуктивній котушці складає  $U_L = L \frac{dI}{dt}$ .

*Ємність* – здатність тіла накопичувати заряд. Визначається як відношення заряду тіла  $q$  до різниці потенціалів  $U$ . Позначається  $C$ , вимірюється у фарадах. 1 фарад (Ф) дорівнює ємності такого конденсатора, між обкладками якого при заряді в 1 Кл виникає електростатична напруга 1 В.

*Електричний конденсатор* – система з двох чи більше електродів (обкладок), розділених діелектриком, товщина якого менша в порівнянні з розміром обкладок. Така система має взаємну електричну ємність і здатна накопичувати заряд. Спад напруги на конденсаторі ємності  $C$  складає  $U_C = q/C$ , де  $q$  – заряд конденсатора.

Диференціальні моделі задач, пов'язаних з електричними колами, будуються на підставі **законів Кірхгофа** – двох основних законів електричних кіл.

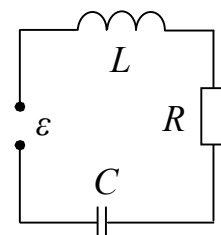
*Перший закон Кірхгофа* встановлює зв'язок між сумою струмів, спрямованих до вузла електричного з'єднання (додатні струми), і сумою струмів, спрямованих від вузла (від'ємні струми). Згідно з цим законом алгебраїчна сума струмів, що збігаються в будь-якій точці розгалуження провідників, дорівнює нулю (тобто для кожного вузла електричного кола сума всіх притікаючих струмів рівна сумі всіх відтікаючих струмів).

*Другий закон Кірхгофа* встановлює зв'язок між сумою електрорушійних сил і сумою спадів напруги на резисторах замкнутого контуру електричного кола. Згідно з цим законом алгебраїчна сума миттєвих значень е. р. с. всіх джерел напруги в будь-якому контурі електричного кола дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих значень спадів напруги на всіх резисторах того ж контуру.

Нехай в електричному колі послідовно включені: джерело струму  $\varepsilon$ , напруга якого змінюється за законом  $F(t)$ , конденсатор ємності  $C$ , заряд якого рівний  $q$ , котушка індуктивності  $L$  і резистор (активний опір)  $R$  (мал. 10.1). Тоді згідно з другим законом Кірхгофа

$$U_C + U_L + U_R = F(t),$$

тобто з урахуванням наведених вище значень для спадів напруги



Мал. 10.1

$$\frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} + RI = F(t), \quad (10.1)$$

Продиференціюємо ліву і праву частини рівності (10.1) за змінною  $t$ . Тоді, взявши до уваги, що за означенням сили струму  $\frac{dq}{dt} = I$ , одержимо рівняння для визначення сили струму  $I(t)$

$$LI'' + RI' + C^{-1}I = F'(t), \quad (10.2)$$

а також для заряду конденсатора  $q(t)$

$$Lq'' + Rq' + C^{-1}q = F(t). \quad (10.3)$$

Якщо в початковий момент часу струму в колі не було, а конденсатор мав максимальний заряд  $Q_0$ , то до рівнянь (10.2), (10.3) додаються початкові умови

$$I(0) = 0 \quad (q'(0) = 0), \quad q(0) = Q_0,$$

які дають змогу однозначно визначити функції  $I(t)$  і  $q(t)$ .

Режим, при якому сила струму є сталою чи змінюється періодично, називається *усталеним режимом*. Щоб знайти силу струму в колі за усталеного режиму, потрібно визначити періодичні розв'язки рівняння (10.2). Ці розв'язки, як правило, мають вигляд

$$I(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (10.4)$$

де  $\omega$  – частота,  $\varphi$  – фаза,  $A$  – амплітуда (найбільше значення) сили струму.

Усталеним режим називається тоді, коли при  $t \rightarrow \infty$  будь-який розв'язок рівняння (10.2) необмежено наближається до знайденого періодичного розв'язку.

**Приклад 10.1.** Дано (мал. 10.1) електричний контур із послідовно з'єднаними елементами: індуктивністю  $L = 1$  Гн, опором  $R = 1000$  Ом і конденсатором ємності  $C = 6,25 \cdot 10^{-6}$  Ф. Початковий заряд у контурі рівний нулеві, а в момент часу  $t = 0$  до нього прикладається стала електрорушійна сила  $\varepsilon = 24$  В. Визначити величину струму в момент часу  $t = 0$ , якщо відомо, що при  $t = 0,001$  с сила струму рівна  $0,031$  А.

**Розв'язання.** Скористаємося рівнянням (10.3) для визначення заряду  $q(t)$  конденсатора, яке після підкладання числових даних з умови задачі запишеться у вигляді

$$q''(t) + 10^3 \cdot q'(t) + 16 \cdot 10^4 \cdot q(t) = 24. \quad (10.5)$$

До рівняння (10.5) додаються крайові умови

$$q(0) = 0, \quad q'(0,001) = 0,031. \quad (10.6)$$

Одержана задача (10.5), (10.6) є крайовою задачею для лінійного неоднорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Ця задача має єдиний розв'язок

$$q(t) = \frac{(1,5e^{-0,2} - 1,55)e^{-800t} - (6e^{-0,8} - 1,55)e^{-200t}}{(4e^{-0,8} - e^{-0,2}) \cdot 10^4} + 1,5 \cdot 10^{-4}.$$

Тоді сила струму в момент часу  $t = 0$  рівна

$$I(0) = q'(0) = \frac{0,02}{4 - e^{0,6}} (6 - 6e^{0,6} + 4,65e^{0,8}) \approx 0,05 \text{ А.}$$

**Приклад 10.2.** Послідовно включені: джерело струму, напруга якого змінюється за законом  $\varepsilon = V \sin \omega t$ , де  $V$ ,  $\omega$  – задані сталі, опір  $R$  і ємність  $C$ . Знайти силу струму в електричному колі за усталеного режиму.

**Розв’язання.** Згідно з умовою задачі рівняння (10.2) для визначення сили струму набуває вигляду

$$RI' + C^{-1}I = V\omega \cos \omega t. \quad (10.7)$$

Для відшукування усталеного режиму знайдемо періодичний розв’язок отриманого лінійного рівняння першого порядку (10.7) у вигляді (10.4). Підклавши (10.4) у (10.7), дістанемо

$$RA\omega \cos(\omega t + \varphi) + C^{-1}A \sin(\omega t + \varphi) = V\omega \cos \omega t.$$

Застосувавши відповідні тригонометричні формули і прирівнявши коефіцієнти при  $\sin \omega t$  і  $\cos \omega t$ , маємо

$$-RA\omega \sin \varphi + C^{-1}A \cos \varphi = 0, \quad RA\omega \cos \varphi + C^{-1}A \sin \varphi = V\omega,$$

звідки

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{RC\omega}, \quad A = \frac{CV\omega}{\sqrt{1 + (CR\omega)^2}}.$$

Тоді згідно з формулою (10.4) одержимо періодичний розв’язок

$$I(t) = \frac{CV\omega}{\sqrt{1 + (CR\omega)^2}} \sin\left(\omega t + \operatorname{arctg} \frac{1}{RC\omega}\right). \quad (10.8)$$

Обґрунтуємо, чому знайдений розв’язок (10.8) називається усталеним режимом. Загальний розв’язок рівняння (10.7) рівний сумі знайденого частинного розв’язку (10.8) і загального розв’язку відповідного однорідного рівняння

$$RI' + C^{-1}I = 0.$$

Оскільки розв’язок останнього рівняння  $I = K e^{-t/RC}$ , де  $K$  – довільна стала, прямує до нуля при  $t \rightarrow +\infty$ , то звідси випливає, що будь-який розв’язок рівняння (10.7) при  $t \rightarrow +\infty$  необмежено наближається (причому досить швидко) до знайденого періодичного розв’язку (10.8).

### Джерела:

Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – С. 53-61.

Маринець В.В., Рего В.Л., Маринець К.В. Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. – Ужгород: «Говерла», 2013. – С. 14.