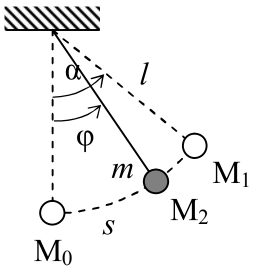
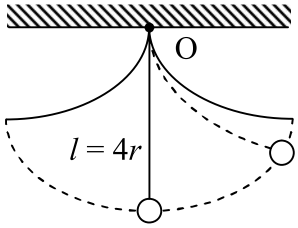
Лекція №9:

Рівняння маятника

Маятникові коливання є одним із класичних прикладів коливань, які описуються нелінійними диференціальними рівняннями.



Мал. 9.1



Мал. 9.2

Розглянемо спрощену модель маятникового годинника, що складається зі стрижня довжини l, і гирі маси m на його кінці (мал. 9.1). Вважаємо, що масою стрижня в порівнянні з масою гирі можна нехтувати. Відхилимо гирю від положення рівноваги в точці M_0 на кут α (в положення M_1), а потім відпустимо, започаткувавши процес коливань, під час якого положення гирі в довільний момент часу t (точка M_2) очевидно визначатиметься кутом відхилення φ, що відраховується від положення рівноваги. Для знаходження залежності величини φ від часу скористаємося *законом збереження механічної енергії*, згідно з яким за будь-яких фізичних взаємодій енергія не виникає і не зникає, а лише перетворюється з одного виду в інший, а тому повна механічна енергія замкнутої системи залишається незмінною:

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}, \tag{9.1}$$

де E_{ki}, E_{pi} – відповідно кінетична та потенціальна енергії системи в момент часу t_i, які знаходяться з формул $E_k = 0{,}5mv^2$, $E_p = mgh$. У нашому випадку, якщо висоту гирі відраховувати від положення рівноваги, яке в процесі коливань гиря проходить із максимальною швидкістю, одержимо

а) точка M_0: $E_{k0} = 0{,}5mv_{\max}^2$, $E_{p0} = mgh_0 = 0$;

б) точка M_1: $E_{k1} = 0$, $E_{p1} = mgh_{\max} = mgl(1-\cos\alpha)$;

в) точка M_2: $E_{k2} = 0{,}5mv^2$, $E_{p2} = mgh_2 = mgl(1-\cos\varphi)$.

Тоді з рівності (9.1) отримаємо співвідношення

$$0{,}5mv^2 = mgl(\cos\varphi - \cos\alpha). \tag{9.2}$$

Якщо розглядати лише малі відхилення гирі від положення рівноваги, то можна вважати, що довжина дуги, уздовж якої гиря рухається за відхилення на кут φ, рівна $s = l\sin\varphi \approx l\varphi$ (для малих φ $\sin\varphi \approx \varphi$). А тоді $v = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\varphi}{dt}$, і з (9.2) отримуємо диференціальне рівняння

$$0{,}5l\dot{\varphi}^2 = g(\cos\varphi - \cos\alpha). \qquad (9.3)$$

Продиференціювавши ліву і праву частини рівняння (9.3) за змінною t, після скорочення на $\dot{\varphi} \neq 0$ дістанемо нелінійне рівняння другого порядку

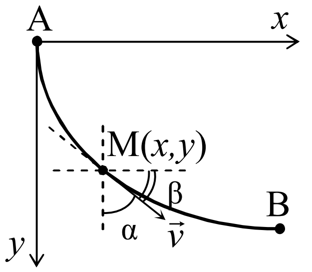
$$\ddot{\varphi} + k\sin\varphi = 0, \quad k = g/l, \qquad (9.4)$$

яке називається *рівнянням математичного маятника*.

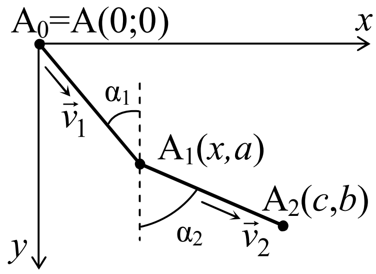
Зауважимо, що за малих коливань, якщо вважати $\sin\varphi \approx \varphi$, рівняння (9.4) зводиться до *рівняння гармонічного осцилятора*[1]

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0, \qquad (9.5)$$

де $\omega = \sqrt{g/l}$ – частота власних коливань системи. Тоді відхилення маятника від положення рівноваги описується формулою $\varphi = C_0\cos(\omega t + \gamma)$, у якій амплітуда коливань C_0 і фаза γ визначаються початковими умовами. Звідси випливає, що маятник здійснює гармонічні коливання із частотою ω і періодом $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.



Мал. 9.3



Мал. 9.4

Задача про брахістохрону. *Брахістохроною* називають криву найшвидшого спуску. Задача про її знаходження була вперше поставлена Й. Бернуллі (1667-1748) у наступному формулюванні: «Серед плоских кривих, що сполучають точки A і B, які лежать в одній вертикальній площині, причому B нижче за A, знайти ту, рухаючись по якій із точки A під дією виключно сили тяжіння, співнапрямленої з від'ємною піввіссю Oy, матеріальна точка досягне точки B за найкоротший час» (мал. 9.3). Задача відома тим, що метод її розв'язання, запропонований у 1697 р. І. Ньютоном, ліг в основу важливої галузі природознавства – варіаційного числення. Окрім І. Ньютона, на заклик Й. Бернуллі відгукнулися багато інших учених, пропонуючи власні розв'язання.

Наблизимо криву AB ламаною $A_0A_1A_2\ldots A_n$, усі вершини якої лежать на кривій, причому $A_0=A$, $A_n=B$. Припустимо, що матеріальна точка рухається уздовж ланки ламаної $A_{i-1}A_i$ зі сталою швидкістю v_i. Тоді повний час руху від точки $A_0=A$ до точки A_2 рівний (мал. 9.4)

$$T = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}.$$

Якщо припустити, що матеріальна точка долає цю ділянку за мінімальний час, то $dT/dx = 0$. Тоді

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}},$$

[1] Гармонічний осцилятор – система, яка за відхилення від положення рівноваги внаслідок дії певної сили повертається в попереднє положення під дією зворотної сили, пропорційної зміщенню.

звідки $\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\frac{\sin\alpha_2}{v_2}$.

Застосувавши аналогічні міркування для наступних ланок ламаної, одержимо

$$\frac{\sin\alpha_i}{v_i}=C=const,\quad i=\overline{1,n},$$

звідки можна зробити висновок, що при $n\to\infty$ (мал. 9.3)

$$\frac{\sin\alpha}{v}=C. \tag{9.6}$$

Виходячи з принципу збереження енергії, отримуємо, що швидкість, набута матеріальною точкою на заданому рівні, залежить тільки від втрати потенціальної енергії за досягнення цього рівня, а не від вигляду траєкторії скочування. Це означає, що $v=\sqrt{2gy}$.

З іншого боку, із урахуванням геометричних побудов (мал. 9.3)

$$\sin\alpha=\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Тоді з (9.6) після деяких перетворень одержимо рівняння брахістохрони

$$y(1+y'^2)=C_1, \tag{9.7}$$

де $C_1=(C\sqrt{2g})^{-1}$.

Для інтегрування рівняння (9.7) введемо параметр ψ згідно з формулами:

$y=C_1\sin^2\psi$, $y'=\mathrm{ctg}\,\psi$, тоді

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{C_1\sin 2\psi d\psi}{\mathrm{ctg}\,\psi}=2C_1\sin^2\psi d\psi \quad\Rightarrow\quad x=\frac{C_1}{2}(2\psi-\sin 2\psi)+C_2.$$

З огляду на початкові умови $x=y=0$ при $\psi=0$, тому $C_2=0$. Отже,

$$x=0{,}5C_1(2\psi-\sin 2\psi),\quad y=C_1\sin^2\psi=0{,}5C_1(1-\cos 2\psi).$$

Поклавши в останніх рівностях $0{,}5C_1=r$, $2\psi=\theta$, одержимо рівняння брахістохрони в параметричному вигляді

$$x=r(\theta-\sin\theta),\quad y=r(1-\cos\theta). \tag{9.8}$$

Співвідношення (9.8) є стандартними параметричними рівняннями кривої, яка називається *циклоїдою*. Ця плоска крива являє собою траєкторію точки, що лежить на межі круга радіусу *r*, який котиться без ковзання уздовж прямої лінії. Така крива складається з конгруентних арок, кожна з яких відповідає повному оберту *твірного круга*, і з'єднується з сусідніми арками в *точках звороту* циклоїди.

Якщо з рівностей (9.8) виключити параметр θ, то отримаємо рівняння циклоїди у декартовій системі координат

$$x=r\arccos\frac{r-y}{r}-\sqrt{2ry-y^2}.$$

Джерела:

Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: «Наука», 1987. – С. 44-54.