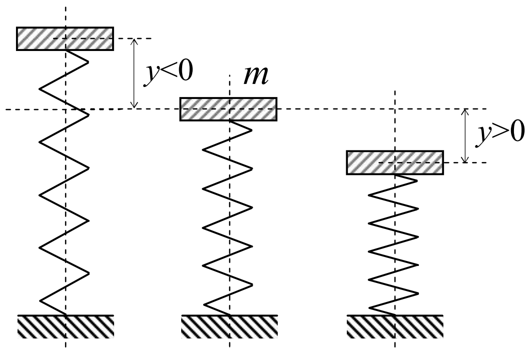
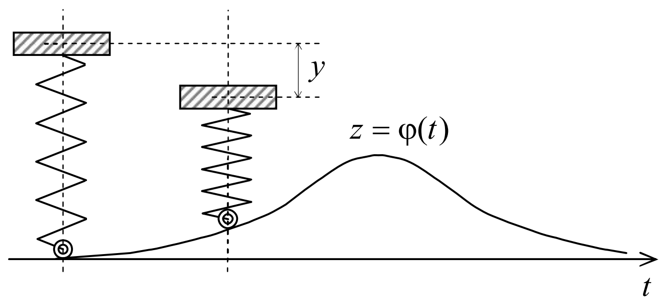
Механічні коливання

Диференціальне рівняння механічних коливань. Розглянемо одну задачу прикладної механіки, яка досліджується і розв'язується за допомогою лінійних диференціальних рівнянь.



Мал. 8.1



Мал. 8.2

Нехай вантаж маси m спирається на пружну ресору (мал. 8.1). Відхилення вантажу від положення рівноваги позначимо через y. Відхилення вниз вважатимемо додатним, угору – від'ємним. У положенні рівноваги вага вантажу врівноважується пружністю пружини. Припустимо, що *відновлювальна сила* Q – тобто сила, яка намагається повернути вантаж у положення рівноваги – пропорційна відхиленню, тобто рівна $Q=-ky$, де $k>0$ – деяка стала для даної ресори величина, яка називається *жорсткістю* ресори і характеризує її здатність зазнавати пружної деформації під дією навантаження.

Припустимо, що руху вантажу m перешкоджає *сила опору* (наприклад, сила тертя, або опір середовища – повітря чи рідини, де відбуваються коливання), напрямлена протилежно до напряму руху, і пропорційна швидкості руху вантажу відносно нижньої точки ресори, тобто сила $R=-\lambda v=-\lambda\frac{dy}{dt}$, де λ – додатна стала (*амортизатор*).

Запишемо диференціальне рівняння руху вантажу на ресорі. На підставі другого закону Ньютона (6.1) одержимо рівність $m\ddot{y}=-ky-\lambda\dot{y}$. Це лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, яке, ввівши позначення $p=\lambda/m$, $q=k/m$, можна подати у вигляді

$$\ddot{y}+p\dot{y}+qy=0,\quad p,q>0. \tag{8.1}$$

Рівняння (8.1) називають *рівнянням вільних коливань*.

Припустимо далі, що нижня точка ресори здійснює вертикальні переміщення за законом $z=\varphi(t)$. Таке явище може відбуватися, наприклад, тоді, коли нижній кінець ресори прикріплений до котка, який разом із ресорою і вантажем рухається по нерівності (мал. 8.2).

У цьому випадку відновлювальна сила буде рівна $Q = -k[y + \varphi(t)]$, а сила опору відповідно $R = -\lambda[y' + \varphi'(t)]$, і замість рівняння (8.1) одержимо рівняння $m\ddot{y} + \lambda\dot{y} + ky = -k\varphi(t) - \lambda\varphi'(t)$, або

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = f(t), \tag{8.2}$$

де $f(t) \equiv -m^{-1}[k\varphi(t) + \lambda\varphi'(t)]$. Рівняння (8.2) є лінійним неоднорідним рівнянням другого порядку, яке називають *рівнянням вимушених коливань*. Коливання, які описуються лінійними рівняннями вигляду (8.1) або (8.2), називають *лінійними коливаннями*.

Вільні коливання. Дослідимо детальніше рівняння вільних коливань (8.1). Його характеристичне рівняння $r^2 + pr + q = 0$ має корені

$$r_1 = -0{,}5p + \sqrt{0{,}25p^2 - q}, \quad r_2 = -0{,}5p - \sqrt{0{,}25p^2 - q}. \tag{8.3}$$

1. Нехай $0{,}25p^2 > q$. Тоді корені (8.3) – дійсні різні від'ємні числа, а отже, загальний розв'язок рівняння (8.1) має вигляд

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}. \tag{8.4}$$

Із формули (8.4) випливає, що відхилення y за будь-яких початкових умов асимптотично прямує до нуля, якщо $t \to \infty$. Отже, у даному випадку коливань не буде, оскільки сили опору є завеликими в порівнянні з коефіцієнтом жорсткості ресори k.

2. Нехай $0{,}25p^2 = q$. Тоді корені (8.3) від'ємні й рівні: $r_1 = r_2 = -0{,}5p$. Тому загальний розв'язок запишеться у вигляді

$$y = (C_1 + C_2 t)e^{-0{,}5t}.$$

Тут відхилення також прямує до нуля при $t \to \infty$, однак не настільки швидко, як у попередньому випадку – завдяки наявності множника $C_1 + C_2 t$.

3. Нехай $p = 0$, тобто відсутня сила опору. Тоді рівняння (8.1) набуває вигляду

$$\ddot{y} + qy = 0, \quad q > 0. \tag{8.5}$$

Його характеристичне рівняння $r^2 + q = 0$ має корені $r_{1,2} = \pm\beta i$, де $\beta = \sqrt{q}$. Тоді загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t. \tag{8.6}$$

Запишемо формулу (8.5) в іншому вигляді, ввівши нові сталі A і φ_0, пов'язані з C_1, C_2, співвідношеннями:

$$C_1 = A\sin\varphi_0, \quad C_2 = A\cos\varphi_0 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{C_1}{C_2}.$$

Підклавши значення C_1 і C_2 в (8.5), дістанемо

$$y = A\sin\varphi_0 \cos\beta t + A\cos\varphi_0 \sin\beta t = A\sin(\beta t + \varphi_0). \tag{8.7}$$

Коливання в цьому випадку називаються *гармонічними*. Інтегральними кривими є синусоїди. Проміжок часу T, за який аргумент синуса змінюється на 2π, називається періодом коливань; зокрема для функції (8.7) $T = 2\pi\beta^{-1}$. *Частотою* коливань називається число коливань за час 2π; у нашому випадку частота рівна β. Величина A, що визначає найбільше відхилення від положення рівноваги, називається *амплітудою* коливань, а φ_0 називається *початковою фазою*.

4. Нехай тепер $p \neq 0$ і $0{,}25p^2 < q$. У цьому випадку коренями характеристичного рівняння є комплексні числа $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, де

$$\alpha = -0{,}5p < 0, \quad \beta = \sqrt{q - 0{,}25p^2}.$$

Тоді загальний розв'язок запишеться у вигляді

$$y = e^{\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t)$$

або, аналогічно до попереднього випадку,

$$y = Ae^{\alpha t}\sin(\beta t + \varphi_0). \tag{8.8}$$

Тут як амплітуду доводиться розглядати величину $Ae^{\alpha t}$, що залежить від часу. Оскільки $\alpha < 0$, то при $t \to \infty$ вона прямує до нуля, тобто в даному випадку маємо *загасаючі коливання.*

Вимушені коливання. Рівняння вимушених коливань має вигляд (8.2). Розглянемо один практично важливий випадок, коли сила зовнішнього збурення є періодичною і змінюється згідно з законом $f(t) = a\sin\omega t$. Тоді рівняння вимушених коливань буде

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = a\sin\omega t, \quad p, q > 0. \tag{8.9}$$

1. Припустимо спочатку, що $p \neq 0$ і $0{,}25p^2 < q$, тобто корені характеристичного рівняння – комплексні числа $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Тоді загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд (8.8):

$$Y = Ae^{\alpha t}\sin(\beta t + \varphi_0).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (8.9) шукаємо методом невизначених коефіцієнтів у вигляді

$$y_1 = M\cos\omega t + N\sin\omega t. \tag{8.10}$$

Значення M і N знаходимо, підставивши функцію (8.10) у рівняння (8.9):

$$M = \frac{-p\omega a}{(q-\omega^2)^2 + (p\omega)^2}, \quad N = \frac{(q-\omega^2)a}{(q-\omega^2)^2 + (p\omega)^2}.$$

Перш ніж підкласти знайдені значення в (8.10), введемо нові сталі A_1 і φ_1, поклавши

$$M = A_1\sin\varphi_1, \quad N = A_1\cos\varphi_1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + (p\omega)^2}}, \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{M}{N}.$$

Тоді частинний розв'язок (8.10) аналогічно до (8.6) можна записати у вигляді

$$y_1 = A_1\sin(\omega t + \varphi_1) = \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + (p\omega)^2}}\sin(\omega t + \varphi_1).$$

Загальний розв'язок рівняння (8.9) рівний $y = Y + y_1$, тобто

$$y = Ae^{\alpha t}\sin(\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{\sqrt{(q-\omega^2)^2 + (p\omega)^2}}\sin(\omega t + \varphi_1).$$

Перший член суми в правій частині останньої рівності (розв'язок однорідного рівняння) описує загасаючі коливання; із ростом t він спадає, а отже, через деякий проміжок часу визначальним стане другий член, що описує вимушені коливання. Частота ω цих коливань рівна частоті зовнішньої сили $f(t)$; амплітуда вимушених коливань тим більша, чим ближче значення ω^2 до q. Легко показати, що максимальне значення амплітуди вимушених коливань A_1 досягається за частоти $\omega = \sqrt{q - 0{,}5p^2}$ і рівне $A_{1\max} = \frac{a}{p\sqrt{q-0{,}25p^2}}$.

2. Припустимо тепер, що $p = 0$, тобто розглянемо рівняння пружних коливань без опору за наявності періодичної зовнішньої сили:

$$\ddot{y} + qy = a\sin\omega t, \quad q > 0. \tag{8.11}$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд (8.6). Якщо $\beta \neq \omega$, тобто частота зовнішньої сили не рівна частоті власних коливань, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (8.11) можна шукати у вигляді (8.10). Із вихідного рівняння знаходимо $M = 0$, $N = a/(q - \omega^2)$. Тоді загальний розв'язок рівняння (8.11)

$$y = A\sin(\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{q - \omega^2}\sin\omega t.$$

Отже, рух відбувається внаслідок суперпозиції (накладання) власних коливань із частотою $\beta = \sqrt{q}$, і вимушених коливань із частотою ω.

Якщо $\beta = \omega$, тобто частота власних коливань співпадає з частотою зовнішньої сили, то функція (8.10) не є розв'язком рівняння (8.11). У цьому випадку частинний розв'язок слід шукати у вигляді

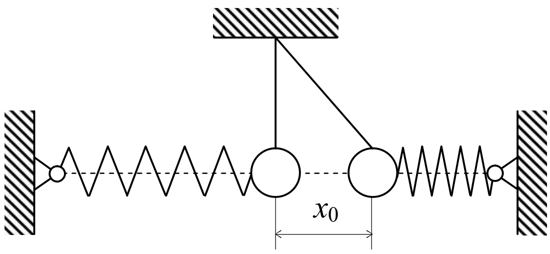
$$y_1 = t(M\cos\beta t + N\sin\beta t).$$

Із вихідного рівняння знаходимо $M = -0{,}5a\beta^{-1}$, $N = 0$. Отже, загальний розв'язок рівняння (8.11) матиме вигляд

$$y = A\sin(\beta t + \varphi_0) - \frac{a}{2\beta}t\cos\beta t. \tag{8.12}$$

Другий член у правій частині рівності показує, що в цьому випадку амплітуда коливань необмежено зростатиме при необмеженому рості часу *t*. Це явище, яке спостерігається за співпадіння частоти власних коливань динамічної системи з частотою зовнішньої сили, називається *резонансом*.

Приклад 8.1. Тіло маси *m*, підвішене на довгій невагомій нитці, перебуває між двома однаковими горизонтальними пружинами. Коефіцієнт жорсткості кожної з пружин рівний *k*. Знайти відхилення тіла від положення рівноваги в довільний момент часу $t > 0$, якщо при $t = 0$ тіло відхилили горизонтально на відстань x_0, і відпустили з початковою швидкістю v_0 (мал. 8.3).



Мал. 8.3

Розв'язання. Позначимо через $x(t)$ відхилення тіла в момент часу *t*. Відновлювальна сила, що діє на тіло, пропорційна відхиленню з коефіцієнтом $2k$[1]. Зауважимо, що

[1] На практиці в задачах на коливання матеріальної точки зустрічаються випадки, коли матеріальна точка спирається або підвішена до кількох пружин одночасно. При розрахунках ці пружини замінюють однією пружиною з еквівалентною жорсткістю *K*. У випадку двох паралельних пружин, а також коли точка перебуває між двома пружинами (як у прикладі 8.1), $K = k_1 + k_2$; у випадку двох послідовних пружин $K = k_1 k_2 /(k_1 + k_2)$.

вагою тіла з огляду на підвіс можна нехтувати, поки довжина нитки здатна забезпечувати прямолінійність руху. Отже, згідно з другим законом Ньютона маємо

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2kx .$$

Введемо позначення $\omega^2 = 2km^{-1}$. Тоді з урахуванням початкових умов для визначення закону руху одержимо задачу Коші для лінійного однорідного рівняння другого порядку

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 .$$

Загальний розв'язок рівняння

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t ,$$

де C_1, C_2 довільні сталі. Із початкових умов визначаємо: $C_1 = x_0$, $C_2 = v_0\omega^{-1}$.

Підклавши ці значення в загальний розв'язок, дістанемо шуканий закон руху:

$$x = x_0 \cos\omega t + v_0\omega^{-1}\sin\omega t = \omega^{-1}\sqrt{(\omega x_0)^2 + v_0^2}\sin(\omega t + \operatorname{arctg}\tfrac{\omega x_0}{v_0}), \quad \omega = \sqrt{2km^{-1}} .$$

Приклад 8.2. Вантаж маси 4 кг підвішений на пружині, і збільшує її довжину на 1 см. Знайти закон руху цього вантажу за умови, що верхній кінець пружини здійснює гармонічні коливання згідно з законом $z = \sin 10\sqrt{g}t$ (вісь z напрямлена вертикально вниз).

Розв'язання. Позначимо через y вертикальну координату вантажу, відрахо-вувану від положення рівноваги в напрямі осі z. Тоді отримаємо рівняння

$$4\ddot{y} = -k(y - z - l) \cdot$$

Щоб знайти коефіцієнт жорсткості k, скористаємося *законом Гука* для визначення деформації тонкого стрижня чи пружини під дією сили F, який має вигляд $F = kx$, де x – *статична деформація* (абсолютне видовження пружини внаслідок навантаження у врівноваженому стані). Згідно з умовою задачі навантаження $F = 4g$ Н збільшує довжину пружини на $x = 0{,}01$ м, а отже, із закону Гука одержимо: $k = 400g$ Н/м.

Якщо вважати, що верхній кінець пружини починає гармонічно коливатися в момент часу $t = 0$, то для визначення коливань вантажу отримаємо задачу

$$\ddot{y} + 100gy = 100g(\sin 10\sqrt{g}t + l), \quad y(0) = l, \quad \dot{y}(0) = 0 .$$

Введемо підстановку $y = u + l$, де $u(t)$ нова невідома функція; тоді

$$\ddot{u} + 100gu = 100g\sin 10\sqrt{g}t, \quad u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 0 .$$

Тепер рівняння має вигляд (8.11), причому в даному випадку $\beta = \omega = 10\sqrt{g}$, тому його загальний розв'язок $u(t)$ запишеться у вигляді (8.12), де $a = 100g$. Із початкових умов маємо $\varphi_0 = 0$, $A = 0{,}5$. Отже, закон руху вантажу

$$y = u + l = 0{,}5\sin 10\sqrt{g}t - 5\sqrt{g}t\cos 10\sqrt{g}t + l .$$

Остання формула показує, що амплітуда вимушених коливань необмежено зростає при $t \to \infty$ (маємо явище резонансу). Оскільки на практиці необмежена амплітуда неможлива, то можна припустити, що процес коливань відбуватиметься недовго і припиниться внаслідок обриву вантажу чи зламу пружини.

Джерело:

Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 2. – М.: «Наука», 1970. – С. 100-109.